

Matemática Básica

Índice

Página

1. Frações	
1.1. Frações Equivalentes	4
1.2. Adição e Subtração de Frações	4
1.3. Multiplicação de Frações	5
1.4. Divisão de Frações	6
2. Revisão de Potência	
2.1. Potência	7
2.2. Propriedades da Potência	7
2.3. Potência de Expoente Inteiro Negativo	7
2.4. Raíz N-ésima Aritmética	8
2.5. Propriedades da Raíz N-ésima	8
2.6. Potência de Expoente Racional	9
2.7. Propriedades de Expoente Racional	9
3. Razão	10
4. Proporção	11
5. Porcentagem	13
6. Operações Comerciais	17
7. Função Linear	
7.1. Zero ou raiz da função	19
7.2. Gráfico	19
7.3. Crescimento e Decrescimento	19
7.4. Estudo do Sinal	20
8. Função Quadrática	23
9. Função Exponencial	
9.1. Definição	24
9.2. Propriedades	24
10. Logaritmos	
10.1. Definição	25
10.2. Condição de existência dos Logaritmos	25

10.3.	Conseqüências da definição	26
10.4.	Propriedades Operacionais dos Logaritmos	26
11. Sucessão ou Seqüência		
11.1.	Definição	27
11.2.	Determinação de uma seqüência	27
12. Progressão Aritmética		
12.1.	Definição	28
12.2.	Representação matemática de uma P. A.	28
12.3.	Fórmula Geral da P. A.	28
12.4.	Fórmula da Soma da P.A. Finita	28
13. Progressão Geométrica		
13.1.	Definição	30
13.2.	Representação matemática de uma P. G.	30
13.3.	Fórmula Geral da P.G.	30
13.4.	Formula da Soma da P.G. Finita	31
14. Matrizes		
14.1.	Definição	32
14.2.	Representação Algébrica	32
14.3.	Matriz Quadrada	33
14.4.	Matriz Unidade ou Identidade	33
14.5.	Matriz Transposta	34
14.6.	Operação com Matrizes	
14.6.1.	Adição e Subtração	34
14.6.2.	Multiplicação	34
14.7.	Matriz Oposta	35
14.8.	Propriedades	35
14.9.	Matriz Inversa	36
14.10.	Determinantes	
14.10.1.	Determinante de uma matriz quadrada de 2ª Ordem	36
14.10.2.	Determinante de uma matriz quadrada de 3ª Ordem	37

1. Frações

O símbolo $\frac{a}{b}$ significa $a : b$, sendo a e b números naturais e $b \neq 0$.

Chamamos:

a : numerador

b : denominador

$\frac{a}{b}$ a fração

Exemplo:

$\frac{2}{5}$ fração própria onde o denominador é maior que o numerador.

$\frac{8}{3}$ fração imprópria onde o denominador é menor ou igual que o numerador.

$\frac{12}{6}$ fração aparente : onde o numerador é múltiplo do denominador.

1.1 Frações Equivalentes

São frações que representam a mesma parte do todo.

Exemplo : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ são equivalentes, pois simplificando $\frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$. Assim

sendo, dividir ou multiplicar o numerador e o denominador simultaneamente não altera a fração. Quando encontramos um fator comum que podemos dividir ao mesmo tempo numerador e denominador então reduziremos a fração e damos o nome de “Simplificação de Fração”.

1.2 Adição e Subtração de Frações

Quando os denominadores são iguais, conserva-se o denominador e soma-se os numeradores. No caso da subtração faz-se normalmente respeitando é claro, o sinal do maior valor do numerador.

Quando os denominadores forem diferentes, retira-se o m.m.c entre os denominadores e divide-se o m.m.c. por cada antigo denominador e multiplica-se pelo seu numerador. As regras dos sinais da adição ou subtração continuam valendo

Exemplos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{7}{2} \\
 2) \quad & \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = \frac{-5}{2} \\
 3) \quad & \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{5.1 + 2.3}{10} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}
 \end{aligned}$$

Exercícios

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{3} = \\
 2) \quad & \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \\
 3) \quad & \frac{3}{4} - \frac{4}{3} + \frac{8}{2} - \frac{1}{2} = \\
 4) \quad & \frac{2}{6} - \frac{1}{3} = \\
 5) \quad & 4 + \frac{3}{7} - \frac{4}{7} = \\
 6) \quad & 9 - \frac{4}{5} + \frac{3}{3} - \frac{5}{3} =
 \end{aligned}$$

1.3 Multiplicação de Frações

A multiplicação deverá ser feita numerador pelo numerador(es) e denominador por denominador (es). O sinal segue as regras da matemática para a multiplicação.

Exemplos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4^{+2}}{10^{+2}} = \frac{2}{5} \\
 2) \quad & \frac{-2}{5} \times \left(\frac{-4}{6} \right) = \frac{-2 \times (-4)}{5 \times 6} = \frac{8^{+2}}{30^{+2}} = \frac{4}{15} \\
 3) \quad & \left(\frac{-3}{5} \right) \times \frac{5}{3} = \frac{-15}{15} = -1 \\
 4) \quad & 2 \times \left(\frac{-3}{5} \right) \times \left(\frac{8}{-3} \right) = \frac{2 \cdot (-3) \cdot 8}{5 \cdot (-3)} = \frac{16}{5}
 \end{aligned}$$

Exercícios:

- 1) $\left(\frac{1}{-4}\right) \times \left(\frac{-2}{-5}\right) =$
- 2) $\left(\frac{-4}{-15}\right) \times \left(\frac{1}{-2}\right) =$
- 3) $\left(\frac{2}{-9}\right) \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{-6}{4}\right) \times \left(\frac{2}{-3}\right) \times \left(\frac{5}{-2}\right) =$
- 4) $\frac{3}{4} \times \left(\frac{-6}{-3}\right) =$

1.4 Divisão de Frações

Para dividirmos fração por fração, devemos conservar a primeira, inverter a segunda e então aplicar a regra da multiplicação.

Exemplos:

- 1) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$
- 2) $\left(\frac{-2}{5}\right) \div \left(\frac{7}{-4}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{8}{35}$
- 3) $\frac{3}{5} \div \left(\frac{-3}{7}\right) = \frac{3}{5} \times \left(\frac{7}{-3}\right) = -\frac{7}{5}$

Exercícios:

- 1) $\left(\frac{1}{-4}\right) \div \left(\frac{-5}{-5}\right) =$
- 2) $\left(\frac{-4}{-15}\right) \div \left(\frac{1}{-2}\right) =$
- 3) $\frac{2}{8} \div \frac{2}{3} \div \left(\frac{-6}{4}\right) \div \left(\frac{-1}{-3}\right) =$
- 4) $\frac{3}{6} \div \left(\frac{5}{-3}\right) =$

2. Revisão de Potência

2.1 Potência

Devemos multiplicarmos a base por ela mesma tantas vezes quanto for o expoente, será representada por a^b , onde **a** é a base e **b** é o expoente. Vejamos alguns exemplos:

- 1) $2.2.2.2 = 2^4 = 16$
- 2) $(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$
- 3) $(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8$

2.2 Propriedades da Potência

- 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$
- 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- 4) $(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$

Observações:

$a^0 = 1$	$ex.: 1000^0 = 1$	$(-5)^0 = 1$
$a^1 = a$	$ex.: 1000^1 = 1000$	$(-5)^1 = -5$

2.3 Potencia de Expoente Inteiro Negativo

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Exemplo :

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Exercícios

- 1) $3^{-1} =$
- 2) $3^{-2} =$
- 3) $(-2)^{-2} =$
- 4) $\left(\frac{-1}{4}\right)^{-3} =$
- 5) $\left(\frac{1}{8}\right)^2$
- 6) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$
- 7) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4}$

2.4 Raíz N-ésima Aritmética

Dados um número real não negativo **a** e um número natural **n**, $n \geq 1$, chama-se raiz enésima aritmética de **a** o número real e não negativo **b** tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado radical, indica a raiz enésima aritmética de **a**. Nele, **a** é chamado radicando, e **n** o índice.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0 \text{ e } b^n = a$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} \sqrt{9} = 3, \text{ pois } 3^2 = 9 & \qquad \sqrt{0} = 0, \text{ pois } 0^2 = 0 \\ \sqrt[3]{8} = 2 \text{ pois } 2^3 = 8 & \qquad \sqrt[4]{625} = 5 \text{ pois } 5^4 = 625 \end{aligned}$$

2.5 Propriedades da Raíz N-ésima

Sendo **a** e **b** reais não negativos, **m** inteiros e **n** e **p** naturais não nulos, valem as seguintes propriedades:

- 1) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
- 2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- 3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$
- 4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- 5) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$

2.6 Potência de Expoente Racional

Dados um número real a (positivo), um número inteiro p e um número natural q ($q \geq 1$), chamamos de potência de base a e expoente $\mathbf{p/q}$ a raiz q -ésima aritmética de a^p .

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

2.7 Propriedades de Expoente Racional

As propriedades são as mesmas da potência, só que devem ser observadas as regras de operações básicas com frações, pois aqui nossos expoentes são fracionários.

3. Razão

A razão entre a e b é o quociente entre esses dois números. A razão $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ onde a representa o primeiro termo ou antecedente e b representa o segundo termo ou o conseqüente.

Exemplos:

1) Thiago tem 10 anos de idade e Rodrigo tem 14 anos de idade. A razão entre as idades de Thiago e Rodrigo são : $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

2) A razão entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$ é $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{2 \times 2}{1 \times 3} = \frac{4}{3}$

Exercícios:

1) Numa razão igual a $\frac{2}{5}$ o antecedente é 8. Determine o seu conseqüente?

2) Num jogo de basquete, André fez 60 arremessos obtendo 50 pontos e Paulo, em 30 arremessos obteve 20 pontos. Quem tem a maior razão de acertos?

3) Beatriz foi de São Paulo a Campinas (92Km) no seu carro. Foram gastos nesse percurso 8 litros de combustível. Qual a razão entre a distância e o combustível consumido? O que significa essa razão?

4) Moacir fez o percurso Rio-São Paulo (450Km) em 5 horas. Qual a razão entre a medida dessas grandezas? O que significa essa razão?

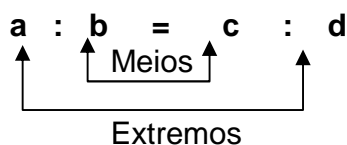
5) O estado do Ceará no último censo teve uma população avaliada em 6.701.924 habitantes. Sua área é de 145.694 km². Determine a razão entre o número de habitantes e a área desse estado. O que significa essa razão?

4. Proporção

É a igualdade entre duas razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad (a : b = c : d)$$

lê-se : “a está para b, assim como c está para d”.
a e d são os extremos e b e c são os meios



Propriedade Fundamental: O produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Exemplo:

A razão entre dois números é $\frac{2}{3}$ e a sua soma é 35. Calcule esses números:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} & (1) \\ x + y = 35 & (2) \end{cases}$$

Isolando-se x temos : $x = 35 - y$ (3), substituindo $\frac{35 - y}{y} = \frac{2}{3}$ aplicando a

propriedade fundamental temos : $105 - 3y = 2y$ então isolando y temos :

$105 = 2y + 3y \Rightarrow 105 = 5y \Rightarrow y = 105/5$, portanto **$y = 21$** , substitui-se em 3 temos
 $x = 35 - 21 \Rightarrow$ **$x = 14$**

Exercícios:

- 1) A idade de um filho está para dois assim como a idade de seu pai está para 10. Determine essas idades, sabendo-se que a soma das idades é 54?
- 2) Calcular o valor de x na proporção : $\frac{3}{5} = \frac{x+1}{20}$
- 3) O produto de dois números (positivos) é 4800 e a razão entre eles é $\frac{3}{4}$. Calcule os números.
- 4) Uma vara de 12 cm fixada verticalmente no solo produz uma sombra de 15 cm. Que comprimento deveria ter a vara para projetar uma sombra de 45 cm.?
- 5) A idade de um pai e a de seu filho estão na razão de $\frac{3}{1}$. Qual a idade de cada um, sabendo que a diferença entre elas é de 24 anos?

6) Um pai tem 36 anos e a sua idade é $\frac{4}{5}$ da soma das idades de seus dois filhos. Quais as idades dos filhos, sabendo-se que elas estão entre si como 4 está para 5?

7) Calcule

$$a) \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{8} \\ 5x + 3y = 33 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{a}{7} = \frac{b}{14} = \frac{c}{21} \\ 2a - b + 2c = 12 \end{cases}$$

8) Calcular o valor de x nas seguintes proporções:

a) $\frac{x}{4} = \frac{9}{12}$

b) $\frac{3x+2}{2x-1} = \frac{16}{9}$

9) Calcular o valor de x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ sabendo que $x + y = 42$.

10) Calcular o valor de x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{11}{3}$ sabendo que $x - y = 96$.

5. Porcentagem

A razão cujo denominador é 100 recebe o nome de razão centesimal. São exemplos de razões centesimais: $\frac{30}{100}$ ou $\frac{27,9}{100}$, sendo outra forma de representar: 30% ou 27,9%.

Exemplos:

1) Em minha classe, $\frac{3}{5}$ dos alunos são meninos. Qual a percentagem de meninos?

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{5} = 60 \Rightarrow 60\% \text{ ou } 0,6$$

ou

$$1 \longrightarrow 100$$

$$x = 100 \cdot \frac{3}{5} \quad x = 60\% \text{ ou } 0,6$$

$$\frac{3}{5} \longrightarrow x$$

2) Se 25% de uma certa quantidade são R\$ 150,00, qual é o valor de dessa quantia?

$$\frac{25}{100} = \frac{150}{x} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 150}{25} = 600 \Rightarrow \text{R\$ } 600,00$$

$$25\% \longrightarrow \text{R\$ } 150,00$$

$$100\% \longrightarrow x \text{ R\$} \quad x = \frac{\text{R\$ } 150,00 \cdot 100\%}{25\%} = 600$$

3) Num lote de 50 lâmpadas, 13 apresentaram defeitos; a razão entre o número de lâmpadas defeituosas e o total de lâmpadas é dada por:

$$\frac{13}{50} = \frac{26}{100} = 26\% \text{ é a taxa percentual de lâmpadas defeituosas}$$

4) Outro modo de representar a taxa de 4% = $\frac{4}{100}$ é obtido simplesmente, efetuando a divisão de 4 por 100 = 0,04

$$5) \begin{array}{llll} 37\% = 0,37 & 80\% = 0,8 & 14,5\% = 0,145 & 0,6\% = 0,006 \\ 100\% = 1 & & & \end{array}$$

6) De um exame de habilitação para motoristas participaram 380 candidatos; sabe-se que a taxa de reprovação foi de 15%. Quantos candidatos foram aprovados?

100% \longrightarrow 380 candidatos

15% reprovados \longrightarrow x candidatos

$$x = \frac{380 \text{ candidatos} \cdot 15\%}{100\%} = \frac{5700}{100} = 57 \text{ candidatos}$$

Total de Aprovados = 380 - 57 = 323 candidatos

7) A Classe de Virginia tem 40 alunos, 15% dos quais são economistas. Quantos economistas têm na sala?

$$x = 40 \cdot 15\% = 600 \text{ } \textit{cortam - se dois zeros} = 6 \text{ economistas}$$

ou

$$x = \frac{40 \times 15}{100} = 6 \text{ economistas}$$

8) Os 6% de alunos estrangeiros de uma escola somam 36. Quantos alunos têm nessa escola?

$$x = \frac{100\% \times 36}{6\%} = 600 \text{ alunos}$$

6% \longrightarrow 36 alunos

100% \longrightarrow x alunos

9) Gastei 15% do que possuía ao comprar uma calça de R\$ 300,00. Quanto possuía?

15% \longrightarrow 300,00

100% \longrightarrow x

$$x = \frac{300,00 \cdot 100\%}{15\%} = 2000,00 \text{ Possuía o valor de R\$ } 2000,00$$

10) Uma loja oferece, nas compras acima de R\$ 5000,00 um desconto de 5%. Quanto um cliente pagará por uma compra de R\$ 35.000,00?

$$5\% \text{ de } 35.000,00 = \text{R\$ } 1.750,00$$

$$\text{O Valor pago na compra} = 35.000,00 - 1.750,00 = \text{R\$ } 33.250,00$$

11) A arrecadação do município cai de R\$ 420.000,00 para R\$ 407.000,00 no ano seguinte. Qual foi o percentual da queda?

$$100 \% \longrightarrow 420.000,00$$

$$x \% \longrightarrow 407.000,00$$

$$x = 96,90476 \% \quad x = 96,905\% \quad \text{Logo o percentual de queda foi de } 3,095 \%$$

12) Uma bolsa é vendida por R\$ 32,00. Se seu preço fosse aumentado em 20%, quanto passaria a custar?

$$32 + 0,2 \cdot 32 = 32 (1 + 0,2) = 32 \cdot 1,2 = 38,40$$

Aumento de 30% multiplica por 1,3;

Aumento de 16% multiplica por 1,16;

Aumento de 3% multiplica por 1,03;

Aumento de 0,3% multiplica por 1,003;

Aumento de 2,5% multiplica por 1,025;

Obs.: Se por outro lado fosse anunciada uma liquidação com um desconto de 20%. Quanto custaria a bolsa?

$$32 - 0,2 \cdot 32 = 32 (1 - 0,2) = 32 \cdot 0,8 = 25,60$$

Desconto de 30% multiplica por 0,7;

Desconto de 16% multiplica por 0,84;

Desconto de 3% multiplica por 0,97;

Desconto de 0,3% multiplica por 0,997

Desconto de 2,5% multiplica por 0,975

13) Os valores de 2 faturas somam R\$ 270,00. Sobre a fatura de maior valor deu-se um abatimento de 20% e sobre a fatura de menor valor um abatimento de 15%, perfazendo um total de abatimentos de R\$ 48,00. Qual o valor de cada fatura?

$$\begin{cases} x + y = 270 & x = 270 - y \\ 0,2x + 0,15y = 48 \end{cases}$$

$$(270 - y) 0,2 + 0,15y = 48 \quad \Rightarrow \quad 54 - 0,2y + 0,15y = 48$$

$$-0,05y = -6$$

$$y = \frac{6}{0,05} = \frac{6}{\frac{5}{100}} = 6 \times \frac{100}{5} = 6 \times 20 = 120 \quad \Rightarrow \quad y = 120 \quad \Rightarrow \quad x = 270 - 120 = 150$$

$$x = 150$$

14) Do que eu recebo 30% vão para a poupança, 20% para o vestuário e 35% para a alimentação. Com os R\$ 450,00 que sobro, eu me divirto. Qual é o meu salário?

15) Numa cidade 45% da população são homens. Qual a população dessa cidade, se nela residem 60.500 mulheres?

16) Um vendedor ganha 3% de comissão sobre as vendas que realiza. Tendo recebido R\$ 300,00 de comissão, quanto vendeu?

6. Operações Comerciais

Nos problemas de compra e venda de mercadorias vamos adotar a seguinte notação:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \text{Preço de Custo} \\ V = \text{Preço de Venda} \\ I = \text{Lucro} \\ p = \text{Prejuízo} \end{array} \right.$$

Na venda de uma mercadoria considera-se dois casos :

1º Caso: **Venda com Lucro**

Quando $V > C$, neste caso define-se lucro por: $I = V - C$

2º Caso: **Venda com Prejuízo**

Quando $V < C$, neste caso define-se prejuízo por: $p = C - V$

Em geral, o lucro (I) e o prejuízo (p) são dados na forma de porcentagem (taxa) sobre o preço de Custo (C) ou sobre o preço de Venda (V), ou seja , $I = i_c C$ e $I = i_v V$ (ou $p = i_c C$ e $p = i_v V$) onde i_c e i_v são as taxas sobre o preço de custo e sobre o preço de venda, respectivamente.

Exemplos:

1) Uma mercadoria vendida por R\$ 64,20 deu um lucro de 7% sobre o custo. Quanto custou a mercadoria?

Solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \text{R\$ } 64,20 \\ I = 0,07C \\ C = ? \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{como } I = V - C, \text{ temos:} \\ 0,07 C = 64,20 - C \\ 1,07C = 64,20 \quad \text{logo} \end{array} \quad \boxed{C = \text{R\$ } 60,00}$$

2) Vendi um objeto por R\$ 170,00 tendo um prejuízo de 15% sobre o preço de custo. Quanto paguei pelo objeto?

Solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \text{R\$ } 170,00 \\ C = ? \\ p = 0,15C \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Como } p = C - V, \text{ temos} \\ 0,15 C = C - 170,00 \\ 0,85 C = 170,00 \end{array} \quad \boxed{C = \text{R\$ } 200,00}$$

3) Comprei uma mercadoria por R\$ 3.500,00 e a vendi por R\$ 4.700,00. De quanto por cento foi o lucro (sobre o custo e sobre a venda)

$$C = 3.500$$

$$V = 4.700$$

$$\text{logo } I = 4.700,00 - 3.500,00 = 1.200,00$$

Temos:

$$\text{Como } I = i_c C \Rightarrow i_c = \frac{I}{C} = \frac{1.200,00}{3.500,00} = 0,3428, \text{ ou seja, } i_c = 34,28\% \text{ (taxa sobre o custo)}$$

$$I = i_v V \Rightarrow i_v = \frac{I}{V} = \frac{1.200,00}{4.700,00} = 0,2553, \text{ ou seja, } i_v = 25,53\% \text{ (taxa sobre a venda)}$$

Exercícios

1) Uma certa mercadoria foi vendida por R\$ 2.176,00 com prejuízo de 15% sobre seu preço de custo. O preço de custo dessa mercadoria é?

R : R\$ 2.560,00

2) Um negociante comprou uma mercadoria no valor de R\$25,00 e quer vendê-la com o lucro de 25% sobre o preço de venda. Por quanto deve vendê-la?

R : R\$ 33,33

3) Vendi mercadorias com o lucro de 50% sobre o custo, por R\$ 600,00. Quanto me custou as mercadorias?

R : R\$ 400,00

4) Ao vender uma mercadoria ganhei 20% sobre o preço da venda. Quanto recebi se paguei R\$ 16.000,00 pela mercadoria?

R : R\$ 20.000,00

5) Comprei um objeto por R\$ 550,00 e o vendi com o prejuízo de 10% sobre o preço da venda. Por quanto foi vendido tal objeto?

R : R\$ 500,00

6) Uma mercadoria que custava R\$ 250,00 teve um aumento passando a custar R\$ 270,00. Pergunta-se:

a) Qual foi a taxa de aumento sobre o custo?

b) Qual foi a taxa de aumento sobre a venda?

R : a) 8% e b) 7,4%

7) Para atrair fregueses, um supermercado anuncia por R\$ 10,00 um determinado produto que lhe custou R\$ 13,00. Calcule a taxa percentual de prejuízo sobre o preço de venda.

R : 30%

7. Função Linear

$$y = ax + b$$

O coeficiente de x (a) é chamado de coeficiente angular da reta, e está ligado a inclinação da reta em relação ao eixo OX .

O termo constante, b , é chamado de coeficiente linear da reta. Assim o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo OY .

7.1 Zero ou raiz da função

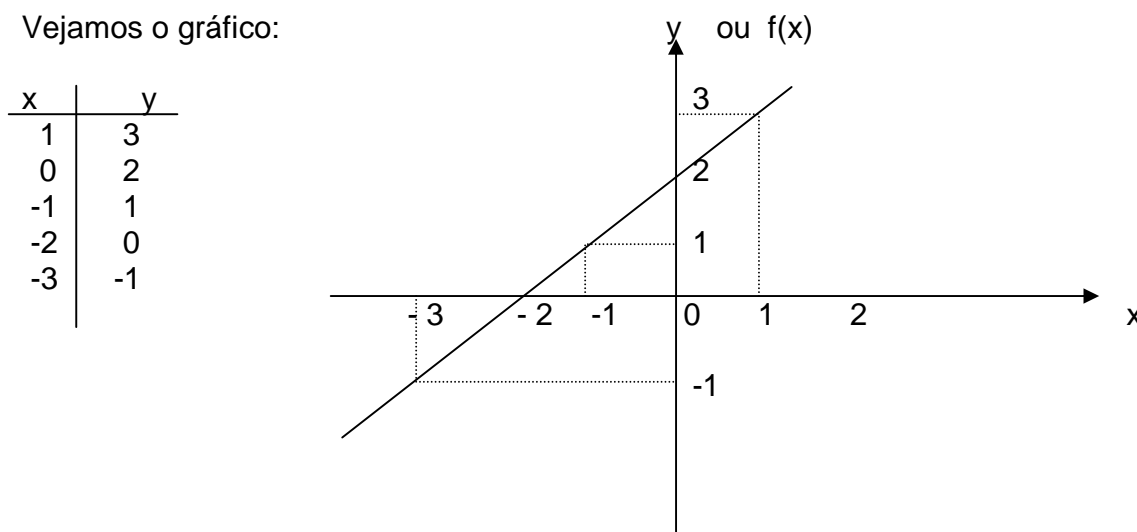
Chama-se zero ou raiz da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, onde $a \neq 0$, o número real x tal que $f(x) = 0$.

$$\text{Ex.: } y = x + 2 \quad \text{ou} \quad f(x) = x + 2$$

$x + 2 = 0$ então $x = -2$ esse é o zero ou a raiz da função do 1º grau.

7.2 Gráfico

Vejamos o gráfico:



7.3 Crescimento e Decrescimento

Repare que no gráfico à medida que crescemos no eixo x (para a direita) também crescemos no eixo y (para cima), logo a nossa função acima é crescente. Logo a função $f(x)$ é crescente quando $a > 0$.

Se por outro lado quando aumentamos os valores de x e, por conseguinte diminuimos nos valores y então estamos com uma função decrescente ($a < 0$).

Exercícios:

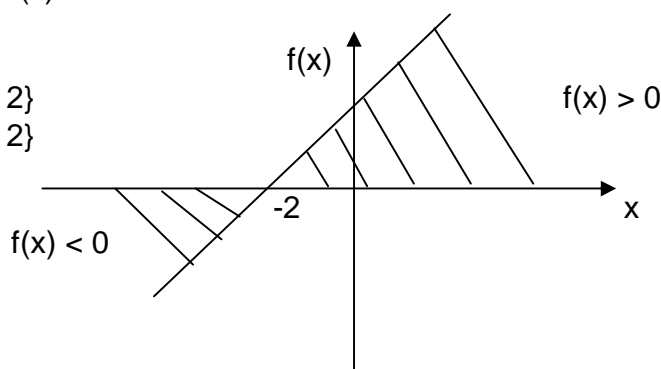
1) $y = -x + 3$

- 2) $y = -2x + 4$
- 3) $y = 2x + 3$
- 4) $f(x) = \frac{-x}{2} + 3$

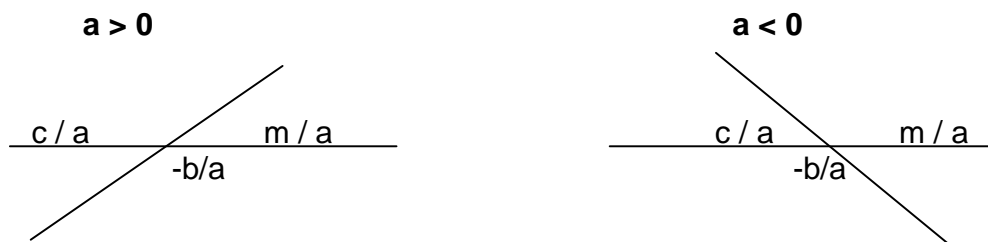
7.4 Estudo do Sinal

No nosso exemplo $f(x) = x + 2$

- $f(x) = 0$ para $x = -2$
 $f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
 $f(x) < 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$



Resumindo temos:



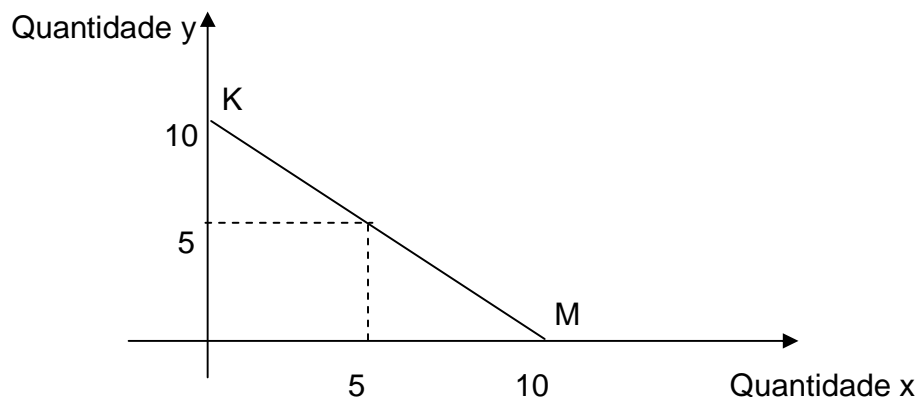
Exercícios:

1) Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R\$ 300,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 8% do total dos produtos vendidos durante o mês. Expressar a função que representa seu salário mensal. Calcular o salário do vendedor sabendo que durante um certo mês ele vendeu 10000 produtos e representar graficamente.

2) O lucro de uma indústria que vende um único produto é dado pela fórmula matemática $L(x) = 4x - 1000$; L representa o lucro e x a quantidade de produtos vendidos. Determine a quantidade mínima desse produto que deve ser vendida para que haja lucro.

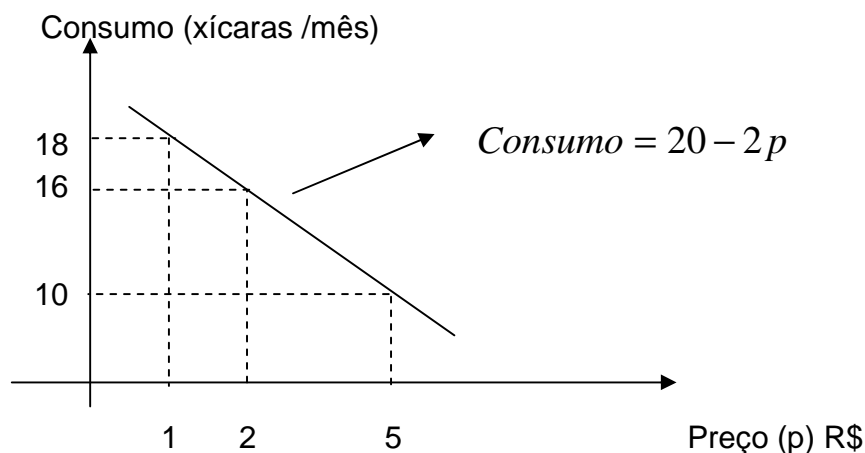
Uma Aplicação em Economia

1) A reta de restrição orçamentária mostra todas as combinações possíveis dos dois bens que o consumidor pode comprar, dada a sua renda monetária e os preços dos dois bens. Seja a reta orçamentária como mostra a figura

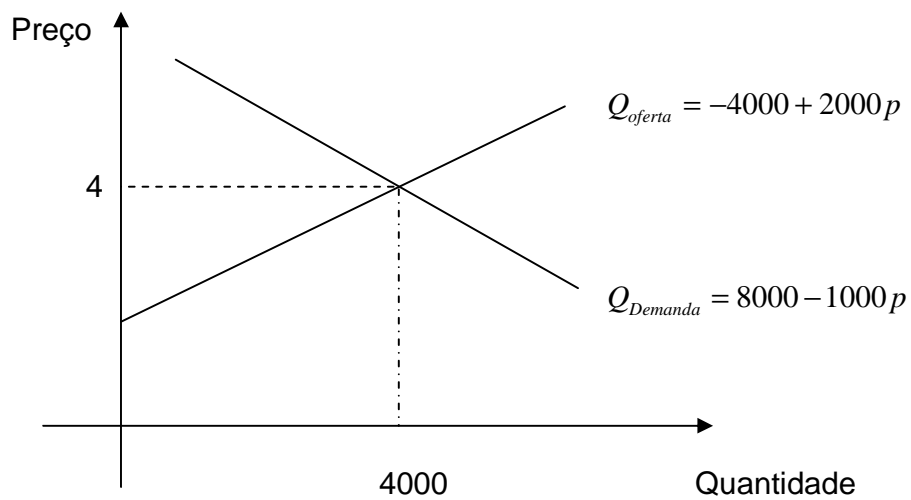


Suponha que $P_x = P_y = R\$1,00$, que a renda monetária do consumidor seja de R\$ 10,00 por período e que toda ela seja gasta em X ou Y. A reta orçamentária para esse consumidor é, então, dada pela reta como mostra o gráfico. Se o consumidor gastasse toda a sua renda no produto Y, ele poderia adquirir 10 unidades de Y, isso define o ponto K. Se ele gastasse toda a sua renda em X ele estaria no ponto M. Unindo esses dois pontos definimos a reta orçamentária, onde estão representadas todas as combinações possíveis de X e Y que esse indivíduo pode comprar.

2) O gráfico seguinte mostra o consumo de xícaras de café por mês em função do preço. Imagine que é dado pela equação $Consumo = 20 - 2p$, onde p é o preço do café. Vejamos o que acontece quando o preço do café aumenta.



3) A curva de oferta de um determinado produto é dado por $Q_{oferta} = -4000 + 2000p$ e a curva de demanda é dada por $Q_{demanda} = 8000 - 1000p$. Qual é o preço de equilíbrio resultante.



$$-4000 + 2000p = 8000 - 1000p \Rightarrow 3000p = 12000 \Rightarrow p = 4 \text{ (preço equilíbrio)}$$

$$Q = 8000 - 1000 \times 4 = 4000 \text{ (quantidade equilíbrio)}$$

8. Função Quadrática

Dada $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b, c reais e a diferente de zero.

Resumo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{fórmula de Baskára.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta = 0$ Duas raízes reais e iguais.

$\Delta > 0$ Duas raízes reais e diferentes.

$\Delta < 0$ Não existe raízes reais.

$a > 0$ concavidade para cima logo tem ponto de mínimo.

$a < 0$ concavidade para baixo logo tem ponto de máximo.

Para calcular o vértice: $V(x_v, y_v)$

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad (\text{abscissa}) \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a} \quad (\text{ordenada})$$

Exercícios:

1) $y = x^2 - 2x - 3$

2) $y = -x^2 + 2x - 4$

3) $y = 4 - x^2$

4) $y = 4x^2 + 20x + 25$

5) $y = x^2 - 5x$

6) $y = -x^2$

Para os 6 exercícios acima vamos:

1º Calcular os zeros da função

2º Ponto de Máximo ou de Mínimo

3º Fazer o Gráfico

4º Mostrar o crescimento e decrescimento da função

5º Imagem

7) O lucro de uma empresa é dada por $L(x) = 100(10 - x)(x - 2)$, onde x é a quantidade vendida. O que podemos afirmar em relação ao lucro. Qual é a quantidade vendida que apresenta o lucro máximo.

9. Função Exponencial

9.1 Definição

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ (com $a \neq 1$ e $a > 0$) é denominada função exponencial de base a e definida para todo x real.

Exercícios:

- 1) $f(x) = 2^x$
- 2) $f(x) = (1/2)^x$
- 3) $f(x) = 3^x$

Para cada uma das funções acima fazer o gráfico e mostrar se ela é crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$).

9.2 Propriedades

1ª) Na função exponencial $y = a^x$, temos:

Se $x = 0$ então $y = a^0 = 1$, isto é o par ordenado $(0,1)$ satisfaz a lei $y = a^x$ para todo o a ($a > 0$ e $a \neq 1$). Isso quer dizer que o gráfico de qualquer função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2ª) Se $a > 1$ então a função é crescente

se $x < y$ então $a^x < a^y$ observa que os sinais são iguais.

3ª) Se $0 < a < 1$ então a função é decrescente

se $x < y$ então $a^x > a^y$ observa que os sinais são opostos.

Exercícios:

Coloque Verdadeiro (V) ou Falso (F).

- 1) $2^3 > 2^{-1}$ _____
- 2) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 > \left(\frac{5}{3}\right)^4$ _____
- 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ _____
- 4) $2^{-2} < 2^8$ _____
- 5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} < \left(\frac{3}{4}\right)^6$ _____
- 6) $\left(\frac{15}{7}\right)^4 < \left(\frac{15}{7}\right)^{4,6}$ _____

10. Logaritmos

10.1 Definição

$$\underbrace{\log_a b = x}_{\text{Forma Logarítmica}} \Leftrightarrow \underbrace{a^x = b}_{\text{Forma Exponencial}}$$

Forma Logarítmica Forma Exponencial

a = Base do Logaritmo ou a Base da potência

b = Logaritmando ou Potência

x = Logaritmo ou expoente

10.2 Condição de existência dos Logaritmos

$$\log_a b = x \Rightarrow \begin{cases} a > 0 & e & a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$

Exemplo

$$\log_6 36 = x \Rightarrow 36 = 6^x \Rightarrow 6^2 = 6^x \Rightarrow x = 2 \therefore \log_6 36 = 2$$

Exercícios

Calcule o valor dos logaritmos aplicando a definição

Respostas

a) $\log_{\sqrt{8}} 4$

a) $\frac{4}{3}$

b) $\log_{25} 0,2$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\log_2 \sqrt[3]{64}$

c) 2

d) $\log_{16} 32$

d) $\frac{5}{4}$

e) $\log_5 0,000064$

e) -6

f) $\log_{49} \sqrt[3]{7}$

f) $\frac{1}{6}$

g) $\log_3 81$

g) 4

h) $\log_2 \sqrt[8]{64}$

h) $\frac{3}{4}$

i) $\log_4 2\sqrt{2}$

i) $\frac{3}{4}$

j) $\log_2 0,25$

j) -2

l) $\log_{\sqrt[5]{2}} 128$

l) 35

10.3 Consequências da definição

$$1^a \quad \text{Log}_a 1 = 0$$

$$2^a \quad \text{Log}_a a = 1$$

$$3^a \quad \text{Log}_a a^m = m$$

$$4^a \quad a^{\text{Log}_a b} = b$$

$$5^a \quad \text{Log}_a b = \text{Log}_a c \Leftrightarrow b = c$$

10.4 Propriedades Operacionais dos Logaritmos

$$1^a \quad \text{Log}_b (a.c) = \text{Log}_b a + \text{Log}_b c \quad \text{com } a, c, b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

$$2^a \quad \text{Log}_b \frac{a}{c} = \text{Log}_b a - \text{Log}_b c \quad \text{com } a, c, b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

$$3^a \quad \text{Log}_b a^n = n \text{Log}_b a \quad \text{com } a, b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

Exercícios

Respostas

$$a) \quad \text{Log}_4 4$$

$$a) \quad 1$$

$$b) \quad \text{Log}_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7}$$

$$b) \quad 1$$

$$c) \quad \text{Log}_6 1$$

$$c) \quad 0$$

$$d) \quad \text{Log}_{0,2} 1$$

$$d) \quad 0$$

$$e) \quad \text{Log}_6 6^2$$

$$e) \quad 2$$

$$f) \quad \text{Log}_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10} \right)^3$$

$$f) \quad 3$$

$$g) \quad 5^{\text{Log}_5 7}$$

$$g) \quad 7$$

$$h) \quad \text{Log}_2 2$$

$$h) \quad 1$$

$$i) \quad \text{Log}_4 4^{-7}$$

$$i) \quad -7$$

$$j) \quad \text{Log}_{33} 1$$

$$j) \quad 0$$

11. Sucessão ou Seqüência

11.1 Definição

É todo o conjunto em que consideramos os elementos dispostos em uma certa ordem.

Exemplo:

O conjunto ordenado dos números naturais $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

O conjunto ordenado de meses: $\{\text{Janeiro, Fevereiro}, \dots\}$

Seqüência numérica: Quando todos os elementos de uma seqüência são números reais, a seqüência é denominada seqüência numérica. Ela pode ser **Finita** ou **Infinita**.

Exemplos:

$(1, 2, 3, 4)$: Finita

$(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$: Infinita

11.2 Determinação de uma seqüência:

Escrever a sucessão em que $a_n = 2n$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A sucessão é $(2, 4, 6, 8, 10)$

Exercícios

Ache os elementos da seqüência das leis abaixo, usando seguintes conjuntos de valores: $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{-4, -3, -2, -1, \dots\}$

1) $a_n = 1 + 3n$

2) $a_n = n - 3$

3) $a_n = 2n^2 + 2$

4) $a_n = 3 + \frac{n}{2}$

12. Progressão Aritmética

12.1 Definição

É uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com um número fixo chamado de razão. Ela pode ser crescente, decrescente ou constante.

Ex.: (3, 4, 5, 6, 7,...) P. A . Crescente, pois o $r = 1 > 0$
(10, 8, 6, 4,) P. A . Decrescente, pois $r = -2 < 0$
(5, 5, 5, 5, 5,...) P. A . Constante, pois $r = 0$

12.2 Representação matemática de uma P. A.

$$a_{n+1} = a_n + r \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

12.3 Fórmula Geral da P. A .

$$a_n = a_1 + (n-1) r$$

Onde,

a_n = é o termo geral ou o último termo

a_1 = é o primeiro termo

r = é a razão

n = número de termos

Exercícios

- 1) Encontrar o termo geral da P. A .(4, 7,.....)
- 2) Qual o vigésimo termo da P. A . (3, 8,)
- 3) Determinar o número de termos da P. A. (-3, 1, 5,113)
- 4) Achar o número de múltiplos de 5 entre 21 e 623
- 5) Interpoliar cinco meios aritméticos entre 6 e 30
- 6) Ache o sexagésimo número natural impar
- 7) Numa P. A de razão 5, o primeiro termo é 4. Qual a posição do termo igual a 44?
- 8) Calcule o número de termos da P. A. (5, 10,, 785)
- 9) Interpole 11 meios aritméticos entre 1 e 37

12.4 Fórmula da Soma da P. A . Finita

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Onde

a_1 = é o primeiro termo

a_n = é o último termo

n = é o número de termos

S_n é a soma dos termos

Exercícios

- 1) Achar a soma dos 30 primeiros termos da P. A . (2, 5,)
- 2) Achar a soma dos 40 primeiros termos da P. A . (8, 2,)
- 3) Qual a soma dos 50 primeiros termos da seqüência $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \right)$
- 4) Achar a soma dos 40 primeiros termos da P. A . (3, 5, 7,.....)

13. Progressão Geométrica

13.1 Definição

É uma seqüência de números não nulos em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamado de razão da progressão(q).

Exemplos:

(4, 8, 16, 32,...) Então $q = 8/4 = 2 = 16/8$

(-18, 54, -162,...) Então $q = 54/-18 = -3 = 162/54$

$\left(8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \right)$ Então $q = 2 \div 8 = 1 / 4$

13.2 Representação matemática de uma P. G.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

13.3 Fórmula geral da P.G.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde,

a_n = é o termo geral ou o último termo

a_1 = é o primeiro termo

q = é a razão

n = número de termos

Exercícios

- 1) Encontrar o termo geral da P. G. (2, 4,...)
- 2) Achar o décimo termo da P.G. (2, 6,...)
- 3) Numa P. G. de quatro elementos, a razão é 5 e o último termo é 375. Calcule o primeiro termo da P.G.
- 4) Numa P.G. de 6 termos, o primeiro termo é 2 e o ultimo termo é 486. Calcular a razão dessa P. G.
- 5) Numa P. G. de razão 4, o primeiro termo é 8 e o último termo é 2^{31} . Quantos termos têm essa P. G.
- 6) Encontre o termo geral da P. G. (1, 5, ...)
- 7) Encontre o termo geral da P. G. (2, 1,)

- 8) Qual é o 6º termo da P. G. (512, 256,.....)
- 9) Qual é o sétimo termo da P. G. (1/ 2, -1,.....)
- 10) Determine o número de termos da P. G. (1, 2,, 256)
- 11) Numa P. G. o primeiro termo é 4 e o quarto termo é 4000. Qual a razão dessa P.G ?
- 12) Hoje uma editora está produzindo 20000 livros e, a cada dia, deve produzir 30% a mais do que produziu no dia anterior. Quantos livros deverão produzir daqui a 5 dias?
- 13) Interpole 3 meios geométricos entre 3 e 48

13.4 Fórmula da Soma de uma P.G. Finita

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Onde,

- S_n** = é a soma dos n primeiros termos
a₁ = é o primeiro termo
q = é a razão
n = número de termos

Exercícios

- 1) Calcular a soma dos 6 primeiros termos da P. G. (1, 3, 9,)
- 2) Calcular a soma dos 5 primeiros termos da P. G. (7, 14,)
- 3) Calcular a soma dos 6 primeiros termos da P. G. (-3, 6, -12, 24,.....)

14. Matrizes

14.1 Definição

As matrizes são tabela de números reais utilizadas em quase todos os ramos da ciência. Ela é composta de linhas (Horizontais) e colunas (Verticais). A célula da matriz é o encontro de uma linha e de uma coluna e será indicada pelo nome e tantos índices quantas forem as dimensões da matriz.

Exemplo

$$A_{i \times j} = \begin{bmatrix} 2 & 56 & 77 & 4 & 8 \\ 9 & 34 & 17 & 78 & 2 \\ 3 & 5 & 90 & 67 & 23 \\ 67 & 6 & 45 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 5}$$

A representação anteriormente é uma **matriz** e cada número dentro da matriz é chamado de **elemento** da matriz. A matriz pode ser representada entre parênteses ou entre colchetes. No exemplo a matriz A é do tipo 4 x 5 (quatro por cinco), isto é, 4 linhas por 5 colunas.

Onde, i = Linha da Matriz

j = Coluna da Matriz

Para indicarmos a ordem da matriz, dizemos primeiro o número de linhas e, em seguida, o número de colunas.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ matriz de ordem } 2 \times 3 \text{ (2 Linhas e 3 colunas)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -4 \end{bmatrix} \text{ matriz de ordem } 1 \times 3 \text{ (1 Linha e 3 colunas)}$$

14.2 Representação Algébrica

Utilizamos letras minúsculas para indicar matrizes genéricas e letras maiúsculas correspondentes aos elementos. Algebricamente a matriz pode ser representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

com m e $n \in \mathbb{N}^*$. Como o A é bastante extenso podemos representar por $A = (a_{ij})_{m \times n}$

a_{11} (Lê-se a um um) elemento localizado na 1ª Linha e 1ª Coluna

a_{12} (Lê-se a um dois) elemento localizado na 1ª Linha e 2ª Coluna

14.3 Matriz Quadrada

Se o número de linhas de uma matriz for igual ao número de colunas, a matriz é dita **Quadrada**.

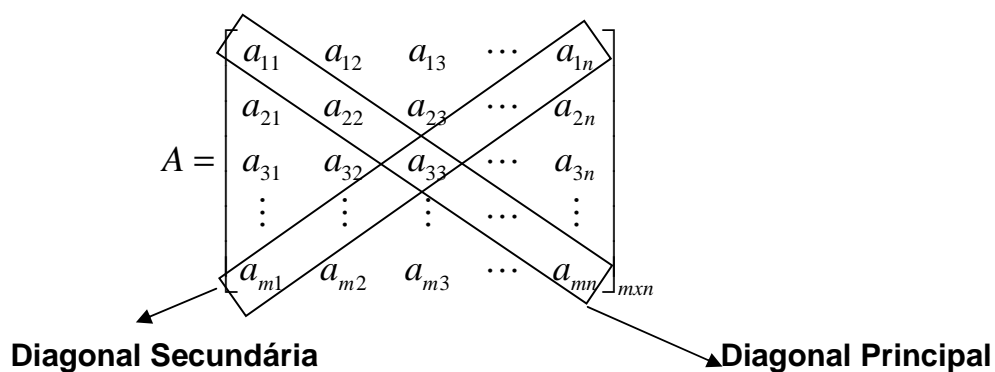
Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz de ordem 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz de ordem 3}$$

Observações:

- Quando uma matriz tem todos os seus elementos iguais a zero, dizemos que é uma matriz nula.
- Os elementos a_{ij} onde $i = j$, formam a **diagonal principal**.



14.4 Matriz Unidade ou Identidade

A matriz quadrada de ordem n , em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 (um) e os demais elementos iguais a 0 (zero) é denominada matriz identidade.

Representação: I_n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14.5 Matriz Transposta

Se A é uma matriz de ordem m x n , denominamos transposta de A a matriz de ordem n x m obtida pela troca ordenada das linhas pelas colunas.

Representação : A^t

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{então a transposta será} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ -9 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

14.6 Operação com Matrizes

14.6.1 Adição e Subtração

A adição ou a subtração de duas matrizes A e B, efetuada somando-se ou subtraindo-se os seus elementos correspondentes e deverá ter a mesma dimensão.

Exemplo

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ então}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

14.6.2 Multiplicação

Na multiplicação de duas matrizes A e B, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de B ; O produto AB terá o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

$$A_{m \times n} \bullet B_{n \times p} = (A \bullet B)_{m \times p}$$

Sejam as matrizes A e B, então a multiplicação das matrizes é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{bmatrix}$$

Obs.: A multiplicação de um número real K qualquer por uma matriz é feita multiplicando cada um dos elementos da matriz pelo número real K.

Exemplo

Seja K = 3

Se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow k \times A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 12 & -15 \end{bmatrix}$

14.7 Matriz Oposta

Denominamos de matriz oposta a matriz cujos elementos são simétricos dos elementos correspondentes.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$$

14.8 Propriedades

Adição

1. $A + B = B + A$ (Comutativa)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Associativa)
3. $A + 0 = A$ (Elemento Neutro)
4. $A + (-A) = 0$ (Elemento Oposto)

Multiplicação

1. $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$ (Associativa)
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$ (Distributiva à Direita)
3. $(B + C) \cdot A = BA + CA$ (Distributiva à Esquerda)

Obs.: A multiplicação de matrizes não é comutativa, mas se ocorrer $AB = BA$, dizemos que as matrizes A e B comutam.

14.9 Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada, se existir uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, dizemos que a matriz B é uma matriz inversa de A e a indicaremos por A^{-1} . Vale lembrar que I é a matriz identidade. Caso exista a inversa dizemos que a matriz A é *inversível* e, em caso contrário, *não inversível* ou *singular*. Se a matriz quadrada A é inversível, a sua inversa é única.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Exemplo

Determinar a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e sabendo que $A \cdot A^{-1} = I_n$ então teremos :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ 3a+2c=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \quad e \quad c = \frac{3}{4}$$
$$\begin{cases} b+2d=0 \\ 3b+2d=1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad e \quad d = \frac{-1}{4}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

14.10 Determinantes

É um número real associado a matriz quadrada.

14.10.1 Determinante de uma matriz quadrada de 2ª Ordem

O determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem é obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplo

Achar o valor do determinante $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 7 - 5 \times (-1) = 28 - (-5) = 33$

14.10.2 Determinante de uma matriz quadrada de 3ª Ordem

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem utilizaremos uma regra muito prática denominada regra de Sarrus.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. Para Calcularmos o determinante vamos

repetir a 1ª e a 2ª colunas à direita da matriz, conforme o esquema abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

- - - + + +

$$\det A = |A| = (1)(3)(-1) + (2)(2)(4) + (3)(0)(-5) - (2)(0)(-1) - (1)(2)(-5) - (3)(3)(4)$$

$$\det A = |A| = -3 + 16 - 0 + 0 + 10 - 36 = -13$$

Exercícios

1) Calcule a transposta e a inversa das seguintes matrizes

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2) Com as matrizes do exercício anterior, calcule:

a) $A^{-1} + B^T$

b) $C^{-1} - D^{-1} + A$

c) $|A \cdot B|$

e) $|A - B|$

f) $C - A + B$

g) $|C^T \cdot D^{-1}|$

d) $C.D$ h) $C^{-1} . C$

3) Calcule o determinante, a oposta e a transposta das seguintes matrizes:

$$a) \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \\ -2 & 9 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$d) \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

4) Com as matrizes do exercício anterior, calcule:

a) $J + G - F$

b) $J . G$

c) $E + (F . J)$

d) $E^T + F^T - G$

5) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, Calcule os

itens abaixo:

a) $A.B$

b) $|C.A|$

c) $B.C$

d) $B.C^T$

e) $C.B$

f) $|A^T.C|$