Unidade I: Funções de várias variáveis- cálculo de várias variáveis

Professora: adriana regina de faria nogueira

Email: adriana.nogueira@uva.br

Funções de duas variáveis

- **Definição:** Uma função a duas variáveis é uma relação que associa a cada par (x,y) no domínio, uma única imagem z=f(x,y).
  - **Exemplo:** O volume de um cone circular reto de altura h e raio de base r, tem sua expressão algébrica dada por: $V(h,r) = \frac{1}{3}A_b.h = \frac{1}{3}\pi r^2.h$

Domínio

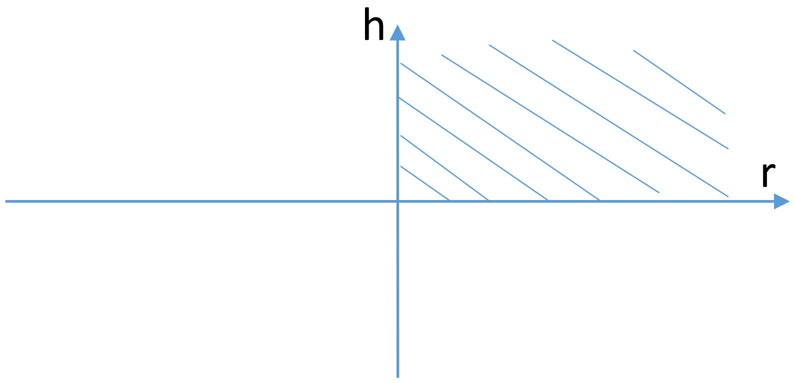
- O domínio de uma função de duas variáveis é um subconjunto do plano R^2, onde a função é aplicada. Para determinarmos o domínio, devemos levar em conta a expressão algébrica da função bem como a interpretação da mesma.

- Usaremos a notação dom(f) para o domínio da função f(x,y).

Exemplos

EXEMPLO 1:

No caso do volume do cone, não há restrições quanto a estrutura algébrica. Porém, como estamos diante de dimensões do cone, tanto a variável h como a variável r devem ser positivas. Neste caso, temos: $dom(V) = (0, +\infty)$x$(0, +\infty)$.



Exemplos

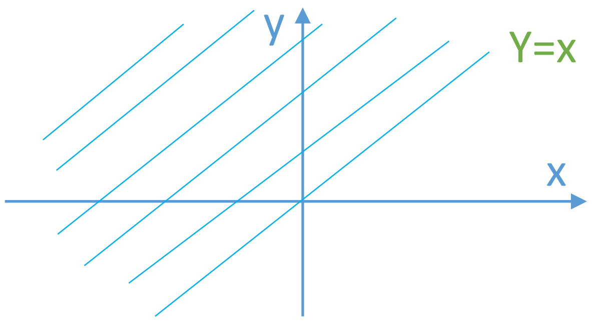
EXEMPLO 2: Determine o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x}$.

Exemplos

EXEMPLO 2: Determine o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{y-x}$.

Neste caso, a estrutura algébrica apresenta uma raiz quadrada, que só se calcula para números positivos. Temos uma restrição: precisamos que $y - x \geq 0$.

Escrevemos então: dom(f)=$\{(x,y) \in R^2; y \geq x\}$. Vamos representar este domínio no plano cartesiano.



O domínio desta função é toda a região do plano que está acima da reta y=x e na própria reta y=x.

Exemplos

EXEMPLO 3: Determine o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.

Exemplos

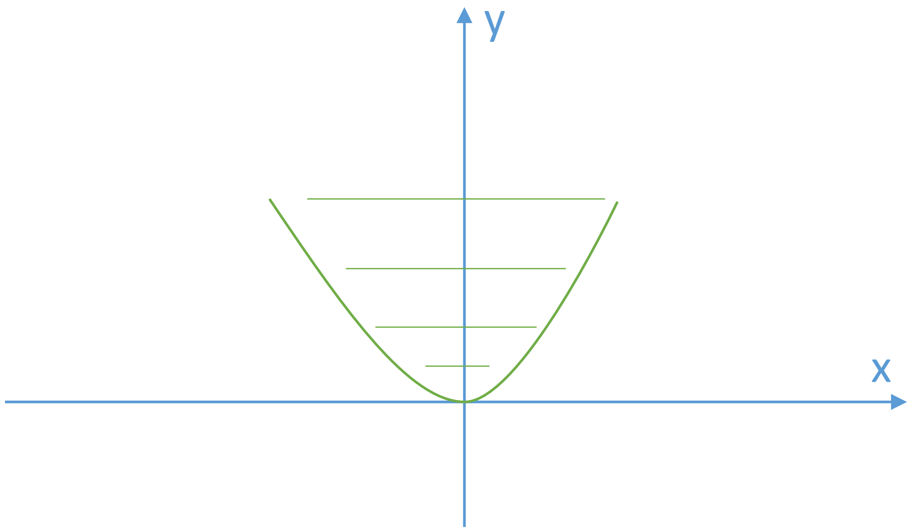
EXEMPLO 3: Determine o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.

Neste caso, a estrutura algébrica apresenta uma raiz quadrada, que só se calcula para números positivos. Temos uma restrição: precisamos que $y - x^2 \geq 0$.

Escrevemos então: dom(f)=$\{(x, y) \in R^2; y \geq x^2\}$. Vamos representar este domínio no plano cartesiano. Neste caso, teremos toda a região do plano que está na parábola y=x^2 e também acima da parábola y=x^2. Para fazermos a representação gráfica, devemos esboçar o gráfico de y=x^2 e marcar toda a região acima desta curva, de forma similar ao exemplo anterior.

EXEMPLO 3: Determine o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$.

Vamos representar graficamente a região dom(f)=$\{(x,y) \in R^2; y \geq x^2\}$:



Imagem

- A imagem de uma função de duas variáveis é a coleção:

$$Im(f)=\{z \in R; z = f(x,y); (x,y) \in dom(f)\}$$

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$. calcule $f(0,1)$, $f(2, -1)$; obtenha o domínio de $f(x, y)$ e imagem de $f(x, y)$.

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$. calcule $f(0,1)$, $f(2,-1)$; obtenha o domínio de $f(x,y)$ e imagem de $f(x,y)$.

- $f(0,1) = 0^2 + 1^2 + 3 = 4$

- $f(2,-1) = 2^2 + (-1)^2 + 3 = 8$

- Domf=RxR=R^2

Exemplo: Obtenha a imagem da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$.

- Para esta função, o domínio é o próprio R^2.
- Para cada elemento (x,y), temos que $\mathrm{x}^2 \geq 0$ assim como $y^2 \geq 0$.
- Com isso:

$$x^2 + y^2 \geq 0$$

Consequentemente:

$$x^2 + y^2 + 3 \geq 3$$

De onde concluímos que: im(f)=$[3, +\infty)$

Exemplo: Obtenha a imagem da função $f(x,y) = 3 + 5sen(x+y)$.

Exemplo: Obtenha a imagem da função $f(x, y) = 3 + 5sen(x + y)$.

- Para esta função, o domínio é o próprio R^2.
- Para cada elemento (x,y), temos que $x + y$ é um número real qualquer. Com isso:

$$-1 \leq sen(x + y) \leq 1$$

Consequentemente:

$$-5 \leq 5sen(x + y) \leq 5$$

De onde concluímos que:

$$-2 \leq 3 + 5sen(x + y) \leq 8$$

Logo: Imf(x,y)=[-2,8]

Gráfico

- O gráfico de uma função de duas variáveis é a coleção dos elementos no espaço

  R^3 constituídos pelos elementos do domínio e suas imagens:

$$graf(f) = \{(x, y, f(x, y); (x, y) \in dom(f)\}$$

Atenção

- Domínio de função de duas variáveis é subconjunto do plano cartesiano R^2.
- Imagem de função de duas variáveis é subconjunto do conjunto dos números reais R.
- Gráfico de função de duas variáveis é subconjunto do espaço R^3

Curvas de nível

- Chamamos de curva de nível k de uma função real f(x,y) de duas variáveis, a coleção de todos os elementos (x,y) no domínio de f(x,y) que possuem imagem k, ou seja, a curva no domínio da função que é levada ao nível k.

Exemplo: obtenha as curvas de níveis k=1, k=2 e k=3 para a função $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

- Para o nível k=1:

$$f(x,y)=1$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=1$$
$$x^2+y^2=1$$

A curva de nível k=1 é a curva $x^2+y^2=1$ que representa uma circunferência de centro (0,0) e raio 1.

Exemplo: obtenha as curvas de níveis k=1, k=2 e k=3 para a função $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

- Para o nível k=2:

$$f(x,y)=2$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=2$$
$$x^2+y^2=4$$

A curva de nível k=2 é a curva $x^2+y^2=4$ que representa uma circunferência de centro (0,0) e raio 2.

Exemplo: obtenha as curvas de níveis k=1, k=2 e k=3 para a função $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Para o nível k=3:

$$f(x,y) = 3$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

A curva de nível k=3 é a curva $x^2 + y^2 = 9$ que representa uma circunferência de centro (0,0) e raio 3.

Exercício: tente esboçar o gráfico desta função.

- https://www.geogebra.org/3d?lang=pt_PT

Funções de várias variáveis

- Definição: Uma função a várias variáveis é uma relação que associa a cada elemento $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ no domínio, uma única imagem $\mathrm{z} = \mathrm{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- O domínio de uma função de n variáveis é um subconjunto do R^n, onde a função é aplicada. Para determinarmos o domínio, devemos levar em conta a expressão algébrica da função bem como a interpretação da mesma.
- A imagem de uma função de n variáveis é a coleção:

Im(f)=$\{z \in R; z = f(x_1, x_2, \dots, x_n); (x_1, x_2, \dots, x_n) \in dom(f)\}$

Exercícios de fixação

- Resolva a primeira lista de exercícios disponível no material de estudo!