Aula 3
Cálculo De Várias Variáveis
Derivadas Parciais

PROFESSORA: ADRIANA REGINA DE FARIA NOGUEIRA

EMAIL: ADRIANA.NOGUEIRA@UVA.BR

Objetivos

- Vamos estender o conceito de derivada de uma função real de uma variável para derivadas parciais de funções de duas variáveis. Vamos entender como se efetua o cálculo das derivadas parciais e também estudar a interpretação geométrica das derivadas parciais.
- Vale lembrar que a derivada de uma função real de uma variável é definida a partir do limite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Esta derivada tem aplicação em problemas de taxa de variação instantânea e de equação de reta tangente, como também em estudos de máximos e mínimos, taxas relacionadas...
- Vamos começar o estudo das derivadas parciais estendendo o conceito da derivada de função de uma variável.

Derivadas parciais de funções reais de duas variáveis

Definição: Seja f(x,y) uma função real de duas variáveis. Definimos as seguintes derivadas parciais:

1. Derivada parcial em relação à variável x:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

2. Derivada parcial em relação à variável y:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Exemplo: Calcule $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para $f(x, y) = x^2 + 3y$

- $f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 3y - (x^2+3y)}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3y - x^2 - 3y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

- $f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + 3(y+\Delta y) - (x^2+3y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + 3y + 3\Delta y - x^2 - 3y}{\Delta y} =$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{3\Delta y}{\Delta y} = 3$$

Observação:

- Observe que os resultados das derivadas parciais coincidem com um cálculo de derivada de uma função de uma variável se considerarmos:

I. Calcular $f_x(x, y)$ como a função de uma variável real g(x)=x^2+3y
II. Calcular $f_y(x, y)$ como a função de uma variável real h(y)= x^2+3y

- E assim faremos o cálculo de derivadas parciais.

Cálculo de derivadas parciais:

- Para efetuarmos o cálculo de derivadas parciais, usaremos as regras conhecidas do cálculo 1, procedendo da seguinte forma:

I. Cálculo de $f_x(x,y)$: derive como uma função de uma variável real g(x)=f(x,y), considerando y como sendo uma constante.

II. Cálculo de $f_y(x,y)$: derive como uma função de uma variável real h(y)= f(x,y), considerando x como sendo uma constante.

Exemplo: Calcule $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para $f(x, y) = 4x^2 + 3xy + seny$

$f_x(x, y)$ =8x+3y

$f_y(x, y)$=3x+cosy

Exercício: seja $f(x, y) = x^2 + xe^y + 4y^3$. Calcule $f_x(3,0)$ e $f_y(3,0)$

Exercício: seja $f(x, y) = x^2 + xe^y + 4y^3$. Calcule $f_x(3{,}0)$ e $f_y(3{,}0)$

- Vamos iniciar com os cálculos das derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$:

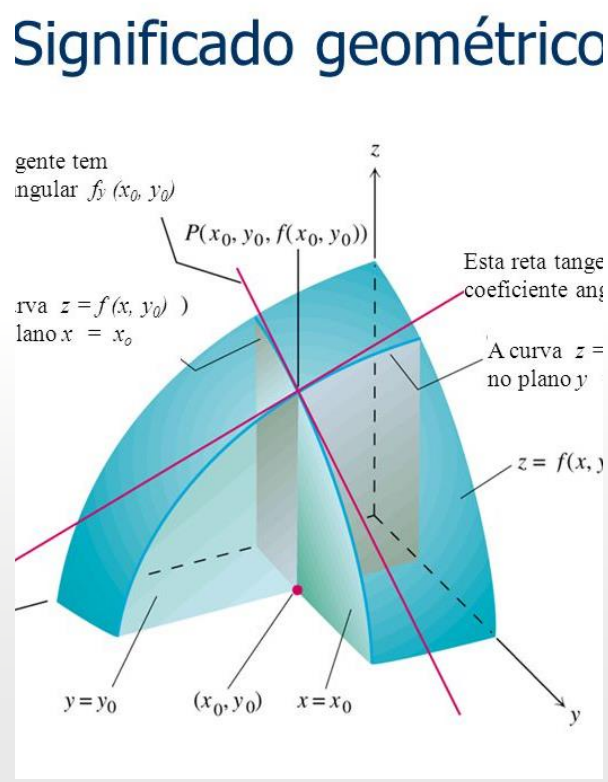
- $f_x(x, y) = 2\mathrm{x} + \mathrm{e}^{\mathrm{y}}$
- $f_y(x, y) = \mathrm{xe}^{\mathrm{y}} + 12\mathrm{y}^2$

- Aplicando no ponto (x,y)=(3,0):

- $f_x(3{,}0) = 2.3 + \mathrm{e}^0 = 6 + 1 = 7$
- $f_y(3{,}0) = 3\mathrm{e}^0 + 12.0^2 = 3$

Interpretação geométrica

- A derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ mede o coeficiente angular da reta tangente à curva z=$f(x, y_0)$ no ponto P= $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (note que esta curva é interseção da superfície z=f(x,y) com o plano y= y_0)
- A derivada parcial $f_y(x_0, y_0)$ mede o coeficiente angular da reta tangente à curva z=$f(x_0, y)$ no ponto P= $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ (note que esta curva é interseção da superfície z=f(x,y) com o plano x= x_0)
- A imagem ao lado foi obtida na internet!



Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 + 3y + 2y^2$. Obtenha as equações das retas r_1 e r_2 tangentes às curvas z_1 =f(x,0) e z_2 =f(1,y), respectivamente no ponto P=(1,0,1).

Reta r_1 :

Vamos calcular $f_x(1,0)$ que mede o coeficiente angular da reta tangente a curva z_1=f(x,0) contida no plano y=0.

$$f_x(x,y) = 2x$$

Com isso $f_x(1,0)$ =2

Equacionando a reta r_1 :

$$r_1 : \begin{cases} z - 1 = 2(x - 1) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$r_1 : \begin{cases} z = 2x - 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 + 3y + 2y^2$. Obtenha as equações das retas r_1 e r_2 tangentes às curvas z_1=f(x,0) e z_2=f(1,y), respectivamente no ponto P=(1,0,1).

Reta r_2 :

Vamos calcular $f_y(1{,}0)$ que mede o coeficiente angular da reta tangente a curva z_2=f(1,y) contida no plano x=1.

$f_y(x,y) = 3 + 4y$. Com isso $f_y(1{,}0)$ =3

Equacionando a reta r_2 :

$$r_2 : \begin{cases} z - 1 = 3(y - 0) \\ x = 1 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} z = 3y + 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Equação Do Plano Tangente e Linearização.

- Podemos obter duas direções que geram o plano tangente à superfície z=f(x,y) no ponto P=(x_0, y_0,f(x_0, y_0)) a partir das equações reduzidas das retas tangentes vistas na interpretação geométrica das derivadas parciais. No caso da reta r_1 (onde y= y_0), a direção é $\overrightarrow{v_1} = (1{,}0,\ f_x(x_0, y_0))$ e no caso da reta r_2 (onde x= x_0), a direção é $\overrightarrow{v_2} = (0{,}1,\ f_y(x_0, y_0))$.

- A partir destas direções, efetuamos o produto vetorial

$$\overrightarrow{v_1}\mathrm{x}\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}=(-f_x(x_0, y_0),-f_y(x_0, y_0),1)$$

Obtendo $\vec{n} = (-f_x(x_0, y_0),-f_y(x_0, y_0),1)$ que é vetor ortogonal ao plano tangente à superfície z=f(x,y) no ponto P=(x_0, y_0,f(x_0, y_0)). A partir daí, chegamos à equação geral do plano.

Equação Do Plano Tangente e Linearização.

Já vimos que o vetor $\vec{n} = (-f_x(x_0, y_0),-f_y(x_0, y_0),1)$ é vetor ortogonal ao plano tangente à superfície z=f(x,y) no ponto P=$(x_0, y_0$,f$(x_0, y_0))$. Dessa forma, se Q=(x,y,z) é ponto qualquer do plano, temos que: $\vec{n}.\overrightarrow{PQ} = 0$

LOGO:

$$(-f_x(x_0, y_0),-f_y(x_0, y_0),1) .(x-x_0, y - y_0, z-f(x_0, y_0))=0$$

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0)-f_y(x_0, y_0)(y-y_0)+ z-f(x_0, y_0) = 0$$

Concluindo:

$$\mathbf{Z=z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)}$$

Onde $z_0 = f(x_0, y_0)$

Também dizemos que $Z(x,y)=z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$ é uma linearização para f(x,y) numa vizinhança de (x_0, y_0).

Exemplo: Construção do plano tangente à superfície $z = f(x, y) = x^3 - 3y^2$ no ponto P=(1,1,-2)

- Vamos iniciar com o cálculo das derivadas parciais em (1,1):
- $f_x(1,1) = 3.1^2 = 3 \ \ (pois \quad f_x(x, y) = 3.x^2)$
- $f_y(1,1) = -6.1 = -6 \ \left(pois \quad f_y(x, y) = \ -6y\right)$
- Com isso, aplicando na equação **z=$\boldsymbol{z_0} + \boldsymbol{f_x}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})(\mathbf{x} - \boldsymbol{x_0})$+$\boldsymbol{f_y}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$(y-$\boldsymbol{y_0}$)** temos:
- z=$-2 + 3(x - 1)$-6 (y-1)
- z=-2+3x-3-6y+6
- Portanto, a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y) = x^3 - 3y^2$ no ponto P=(1,1,-2) é:

z=3x-6y+1

Exemplo: Obtenha uma aproximação para $f(x, y) = x^3 - 3y^2$ no ponto P=(1,01;0,9)

Como vimos no exemplo anterior, a aproximação linear para f(x,y)= $= x^3 - 3y^2$ no ponto P=(1,1) é dada por:

$$z(x,y)=3x-6y+1$$

Assim, a aproximação para f(1,01;0,9) é:

Z(1,01;0,9)=3(1,01)-6.(0,9)+1=3,03-5,4+1=-1,37

f(1,01;0,9)≅Z(1,01;0,9)=-1,37 (via aproximação linear)

Aplicando na calculadora, temos:

$f(1{,}01; 0{,}9) = (1{,}01)^3 - 3(0{,}9)^2$=1,030301-2,43=-1,399699 (f(1,01;0,9) na calculadora)

Erro na aproximação linear: 0,029699

Derivadas Parciais De Funções de Várias Variáveis

Definição: Seja $z = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ uma função real de n variáveis. Definimos a derivada parcial de $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ em relação à variável x_i da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f_{x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Cálculo da derivada parcial

- O cálculo de $f_{x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ é feito da mesma forma que no caso das derivadas parciais de funções de duas variáveis. Mantemos todas as variáveis x_k com $k \neq i$ como constantes e aplicamos as regras de derivação de cálculo 1 para a variável x_i.

Exemplo: Seja $w(x,y,z) = x^2 + 3yz^3 - sen(4x)$. Obtenha todas as derivadas parciais.

- $w_x = 2x + 0 - [cos(4x)].4$
- $w_x = 2x - 4cos(4x)$

Tente agora w_y e w_z

Exemplo: Seja $w(x, y, z) = x^2 + 3yz^3 - sen(4x)$. Obtenha todas as derivadas parciais.

- w_y=0+3z³+0=3z³

- $w_z = 0 + 3y.3z^2 + 0 = 9yz^2$

Exercício: Calcule $w_r(1,0,\pi)$ sendo:
$w(\alpha, r, \theta) = \alpha^2 . cos\theta + r(cosr + 7) - \alpha\theta r$

Exercício: Calcule $w_r(1,0,\pi)$ sendo:
$w(\alpha, r, \theta) = \alpha^2 . cos\theta + r(cosr + 7) - \alpha\theta r$

- **Cálculo de $\mathbf{w_r}$ $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$:**
- w_r (α, r, θ) =0+1. $(cosr + 7)$+ $r(-senr + 0)$ $-\alpha\theta$
- w_r $(\alpha, r, \theta) = 7 + cosr - rsenr - \alpha\theta$
- **Cálculo de $\mathbf{w_r}(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\pi})$:**
- w_r $(1,0,\pi) = 7 + cos0 - 0sen0 - 1.\pi$
- w_r $(1,0,\pi) = 7 + 1 - \pi \cong 4,8584$

DERIVADAS MISTAS

- Seja $z = f(x, y)$. Definimos as derivadas mistas de ordem 2 da seguinte forma:

➢ $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

➢ $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

➢ $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

➢ $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Quando a função e suas derivadas parciais são contínuas,

a ordem não importa: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Exemplo: Obtenha f_{xx}, f_{xy} e f_{yy} para $f(x,y) = x^2 seny + 5x$

$$f_x = 2xseny + 5 \rightarrow f_{xx} = 2\text{seny}$$

$$\downarrow$$

$$f_{xy} = 2xcosy$$

Derivada mista em relação a y:

$$f_y = x^2 cosy \rightarrow f_{yy} = -x^2 seny$$

Da mesma forma, podemos obter derivadas mistas de funções de várias variáveis de ordens superiores.

- Vejamos um exemplo: Considere $f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 senz$. Obtenha a derivada mista f_{yzx} (de ordem 3).

- Neste caso, vamos seguir a ordem: primeiro derivamos em relação a y, depois em relação a z e finalizamos com a derivada em relação a x.
- $f_y = 4xysenz \rightarrow f_{yz} = 4xycosz \rightarrow f_{yzx} = 4ycosz$
- Observação: como a função e suas derivadas parciais são contínuas, se trocarmos a ordem de derivação, o resultado será o mesmo.

Exercício: Seja $f(x, y, z) = x^3 \cos(yz) + e^{2xy}$. Obtenha f_{xyz}.

Exercício: Seja $f(x, y, z) = x^3 \cos(yz) + e^{2xy}$. Obtenha f_{xyz}.

- Solução: $f_x = 3x^2 \cos(yz) + 2ye^{2xy}$

$$f_{xy} = -3x^2 z\,\mathrm{sen}(yz) + 2e^{2xy} + 2y.\,2xe^{2xy}$$
$$= -3x^2 z\,\mathrm{sen}(yz) + 2e^{2xy} + 4yxe^{2xy}$$

Finalizando: $f_{xyz} = -3x^2.\,\mathrm{sen}(yz) - 3x^2 z\,[\cos(yz)].\,y$

Conclusão: $f_{xyz} = -3x^2.\,\mathrm{sen}(yz) - 3x^2 yz\,[\cos(yz)]$

Pratique:

- Resolva os exercícios da Lista 2
- Resolva os exercícios 1,15,17,35,73,75,77,81,83 e 85 nas páginas 234, 235 e 236 do livro Thomas, G.; Cálculo volume 2, 12ª edição. (respostas na página 510)