1. 행렬

행렬의 배열

수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 ( ) 또는 [ ]로 묶은 것을 **행렬**(matrix)이라 하고, 배열의 가로줄을 **행**(row), 배열의 세로줄을 **열**(column)이라 한다.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1\text{열} & & & j\text{열} & & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\text{행} \\ \\ \\ i\text{행} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{j2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

행렬의 형태

영행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots$

대각행렬 $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \cdots$

단위행렬 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots$

행렬 A에서 행과 열의 원소의 위치를 바꾼 행렬을 A의 **전치행렬**이라 하고 A^t로 나타낸다.

예를 들어,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{일 때,} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

이다. 따라서

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{일 때, } A^t = (a^t_{ij})_{n \times m} \text{이면} \quad a^t_{ij} = a_{ji}$$

행렬의 상등

크기가 같은 두 행렬 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$에 대하여 두 행렬의 모든 요소가 같으면 두 행렬은 "같다"라 하고 $A = B$로 나타낸다. 즉, 모든 i, j에서 $a_{ij} = b_{ij}$이면 $A = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & x & 4 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & y & -2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & w \end{pmatrix}$$

행렬의 연산

상수의 곱

행렬 $A = (a_{ij})$와 실수 r에 대하여 rA는 A와 크기가 같고 ij-원소가 a_{ij}에 r를 곱한 행렬

$$rA = (ra_{ij})$$

이고, $-A = (-1)A$이다.

합과 차

크기가 같은 두 행렬 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$에 대하여 합과 차는 각각 다음과 같다.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$
$$A - B = A + (-1)B$$

행렬연산의 성질

정리 1.1.1 행렬연산의 성질

행렬 A, B, C의 크기가 모두 같고 α, β가 실수 일 때, 다음이 성립한다.

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $A + O = O + A = A$

(4) $A - A = O$

(5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(6) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

(7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

행렬의 곱

두 행렬 $A = (a_{ij})_{m \times l}$, $B = (b_{ij})_{l \times n}$에 대하여 두 행렬의 곱 AB는 다음과 같이 정의된다.

$$AB = (c_{ij})_{m \times n},$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{il} b_{lj}}$$

예제 1.1.4 다음 행렬의 곱을 계산하라.

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 22 \\ 43 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 59 & 49 \end{pmatrix}$

행렬의 결합법칙과 분배법칙

정리 1.1.2 행렬의 덧셈과 곱셈의 성질

곱과 합이 정의되는 행렬 A, B, C와 실수 k에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(AB)C = A(BC)$ (결합법칙)

(2) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ (분배법칙)

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

$AB \neq BA$

예제 1.1.5 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$일 때 다음을 구하고 결과를 비교하라.

(1) $A(BC)$

(2) $(AB)C$

(3) $(AB)^t$

(4) B^tA^t

행렬과 연립일차방정식

일반적으로 m개의 방정식과 n개의 미지수를 포함하는 연립일차방정식, 즉

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

은 다음 행렬

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

에 대하여

$$AX = B$$

기약행제형과 행제형

기약행제형 : $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\0 & 1 & 0 & 7\\0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\cdots$

행제형 : $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 7\\0 & 1 & 6 & 2\\0 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 6 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\cdots$

예제 1.2.1 다음 주어진 행렬의 기약행제형을 구하라.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

가우스-조단 (Gauss-Jordan) 소거법

예제 1.2.2 다음 연립방정식의 해를 가우스-조단 소거법으로 구하라.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$

예제 1.2.4 다음 연립일차방정식의 해를 가우스–조던 소거법으로 구하라.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = -1 \\ x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + 7y - z = 0 \end{cases}$$

행렬의 위수 (rank)

행렬의 위수

행렬 A를 행제형 또는 기약행제형으로 나타내었을 때, 행의 모든 요소가 0이 아닌 행의 수를 그 행렬의 위수(rank)라 하고, rank(A)로 쓴다.

예제 1.2.6 다음 행렬의 위수를 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

행렬 rank의 성질

정리 1.3.1

n개의 미지수와 m개의 방정식으로 된 연립일차방정식의 계수행렬을 A, 계수확대행렬을 C라 할 때, 다음이 성립한다.

(1) 해를 가질 필요충분조건은 $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$이다

(2) $\text{rank}(A) = \text{rank}(C) = n$이면 유일한 해를 가진다.

(3) $\text{rank}(A) = \text{rank}(C) = r < n$이면 r개의 변수가 나머지 $n - r$개의 변수로 표시되어 해는 무수히 많다.

예제 1.2.7 다음 연립방정식의 해의 존재성에 대하여 논하라.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

행렬식

정의 1.3.1 **소행렬**

주어진 정방행렬 A에서 i행과 j열을 제거하고 남은 행렬을 ij-소행렬(mior matrix)이라 하고 $M_{ij}(A)$ 또는 간단히 M_{ij}로 나타낸다.

예제 1.3.1 다음 행렬 A에서 M_{23}, M_{12}, M_{33}을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ -7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

정의 1.3.2 **행렬식**

n정방행렬 $A=(a_{ij})$에 다음과 같은 정의에 의하여 대응하는 실수 $|A|$ 또는 $\det(A)$를 A의 행렬식이라 한다.

(1) $n=1$일 때, $|A|=a_{11}$.

(2) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|M_{1j}| \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n}|M_{1n}|.\end{aligned}$$

예제 1.3.2 다음 행렬의 행렬식을 구하라.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 \\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

참고 행렬식을 구하기 위해서는 정의에 따라 소행렬식을 전개하는 일련의 과정을 거쳐야 하지만 $n=2$인 경우는 다음과 같은 사실이 알려져 있다.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

일 때,

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

예제 1.3.3 다음 행렬의 행렬식을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

예제 1.3.5 다음 행렬식을 구하라.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 6 & 8 \\ -4 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

행렬식의 성질

정리 1.3.1 **행렬식의 성질**

(1) $|A| = |A^t|$

(2) B가 A의 한 행을 k배하여 얻은 행렬이면 $|B| = k|A|$이다.

(3) $B = kA$이면 $|B| = k^n|A|$이다.

(4) B가 A의 임의의 두 행을 교환하여 얻은 행렬이면 $|B| = -|A|$이다.

(5) B가 A의 한 행을 상수배 하여 다른 행에 더하여 얻은 행렬이면 $|B| = |A|$이다.

(6) 어느 한 행의 원소가 모두 0인 행렬의 행렬식은 0이다.

(7) 어느 두 행이 같거나, 두 행이 비례하면 그 행렬의 행렬식은 0이다.

(8) 삼각행렬의 행렬식은 대각에 있는 원소들의 곱이다.

(9) $|AB| = |A||B|$

예제 1.3.6 다음 행렬식을 구하라.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

예제 1.3.7 다음 방정식의 해를 구하라.

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3-2x & 1+x & 3x \end{vmatrix} = 0$$

역행렬과 크래머 법칙

정의 1.4.1

(1) n정방행렬 A에 대하여, n정방행렬 B가 존재하여

$$AB = BA = I_n$$

일 때, A를 **가역행렬**이라 하고, B를 A의 **역행렬**이라 부르며 $B = A^{-1}$로 나타낸다.

(2) 가역이 아닌 행렬을 **비가역행렬**이라 한다.

예제 1.4.1 행렬 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$는 $B = A^{-1}$임을 보여라.

행렬의 여인수 (cofactor)

정의 1.4.2

정방행렬 $A = (a_{ij})$에서 A_{ij}를 a_{ij}의 **여인수**라 하고 다음과 같이 정의한다.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

예제 1.4.3 다음 행렬에서 A_{23}, A_{31}을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

정리 1.4.3

$A=(a_{ij})$가 정방행렬일 때 다음이 성립한다.

(1) A가 가역이기 위한 필요충분조건은 $|A| \neq 0$이다.

(2) A가 가역일 때, A의 역행렬 A^{-1}은 다음과 같이 주어진다.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t, \quad i \cdot j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

예제 1.4.4 정리 1.4.3을 이용하여 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하라.

정리 1.4.2

정방행렬 A와 B의 역행렬을 각각 A^{-1}, B^{-1}라고 하면 다음이 성립한다.

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

예제 1.4.2 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 A^{-1}, B^{-1}를 구하고 이를 이용하여 $(AB)^{-1}$를 구하라.

예제 1.4.5 정리 1.4.4를 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

역행렬과 연립방정식의 해

역행렬과 연립방정식의 해

정방행렬 $A=(a_{ij})$에 대하여 $|A|\neq 0$일 때, 연립일차방정식 $AX=B$의 해 X는

$$
\begin{aligned}
A^{-1}AX &= A^{-1}B \\
X &= A^{-1}B
\end{aligned}
$$

이다.

예제 1.4.8 주어진 역행렬을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} -2x + 2y - 3z = 1 \\ \quad x + z \qquad\quad = -2, \\ -4x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

크래머(cramer) 법칙

정리 1.4.4 크래머(cramer) 법칙

연립일차방정식 $AX = B$에서 $|A| \neq 0$일 때, A_j는 계수행렬 A에서 j렬의 원소가 B의 원소로 바뀐 행렬이라 하자. 그러면 구하는 해는

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

이다.

예제 1.4.9 크래머 법칙을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

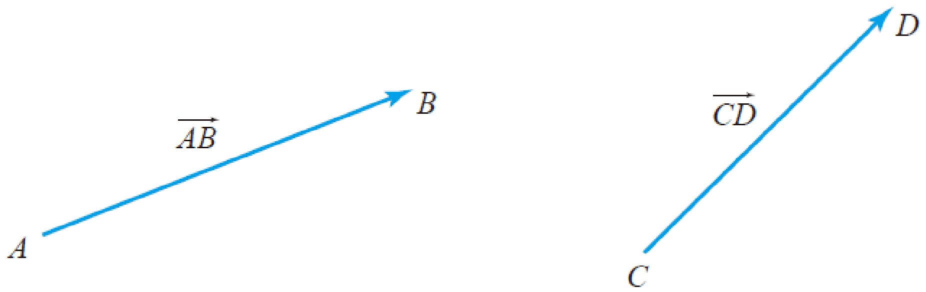
예제 1.4.10 다음 연립일차방정식에서 x, y, z의 값을 구하라.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + 6z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

2. 벡터

벡터와 연산

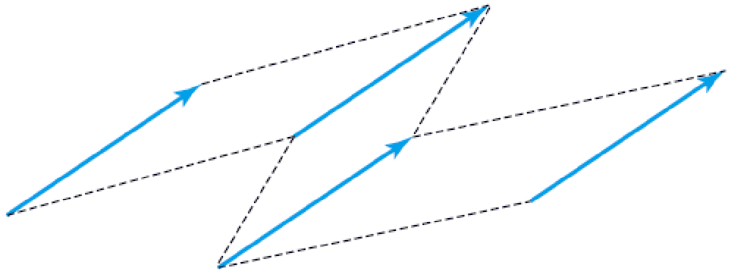
크기와 방향이 주어진 물리량을 벡터(vector)라 한다. 벡터를 나타내는 기호로는 화살표를 이용하고, 화살의 길이가 벡터의 크기, 화살표가 지시하는 쪽이 벡터의 방향이다. 벡터를 논하는 환경에서 실수는 “스칼라(scalar)”라고 부르기도 한다.



출발점 A, 종점 B인 벡터는 $\overrightarrow{AB}$로 나타내고, 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는 $|\overrightarrow{AB}|$로 나타낸다. 크기가 1인 벡터를 단위벡터라 하고, 크기가 0인 벡터를 영벡터라 하고 $\vec{0}$으로 나타낸다.

벡터의 상등

벡터는 위치와는 관계없이 크기와 방향이 같으면 같은 벡터이다. 즉 평행 이동하여 시점과 종점이 일치될 수 있는 벡터는 모두 같은 벡터이다. 따라서 다음 벡터들은 모두 같은 벡터를 나타낸다.



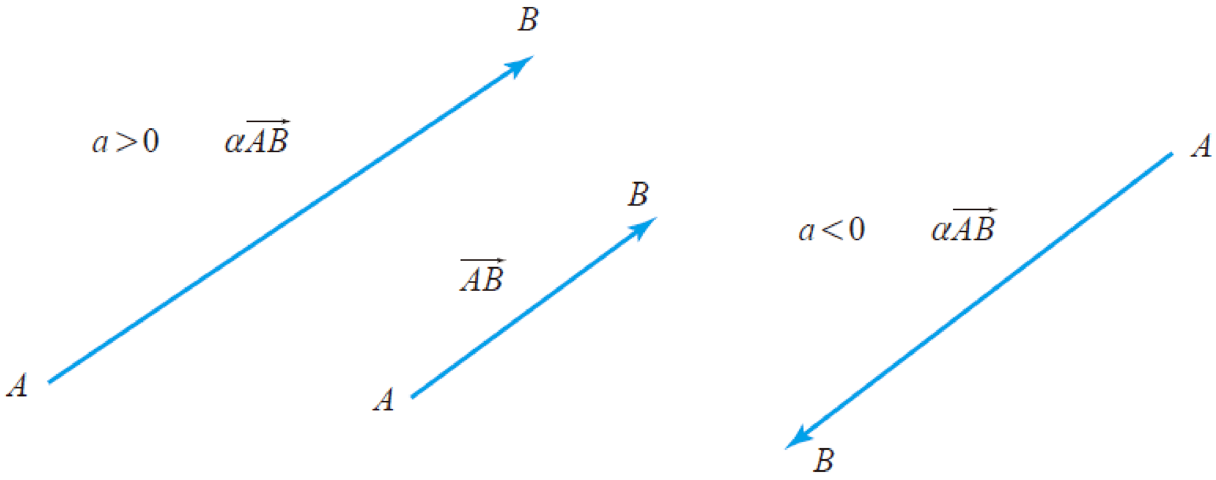
벡터의 스칼라 곱

스칼라 α에 대하여 주어진 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기를 α배, 즉 $\alpha\overrightarrow{AB}$는

$\alpha > 0$ 일 때, $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같고 크기는 $|\alpha\overrightarrow{AB}| = |\alpha||\overrightarrow{AB}|$,

$\alpha < 0$일 때, $\overrightarrow{AB}$와 방향이 반대이고 크기는 $|\alpha\overrightarrow{AB}| = |\alpha||\overrightarrow{AB}|$

주의 $|\alpha|$에서 $|\ \ |$는 절댓값 기호이고, $|\overrightarrow{AB}|$와 $\alpha|\overrightarrow{AB}|$에서 $|\ \ |$은 벡터의 크기의 기호이다.

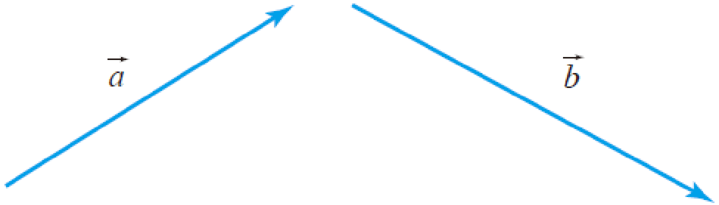


영벡터가 아닌 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 자신의 크기로 나누면 같은 방향의 단위벡터가 된다. 즉

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}$$

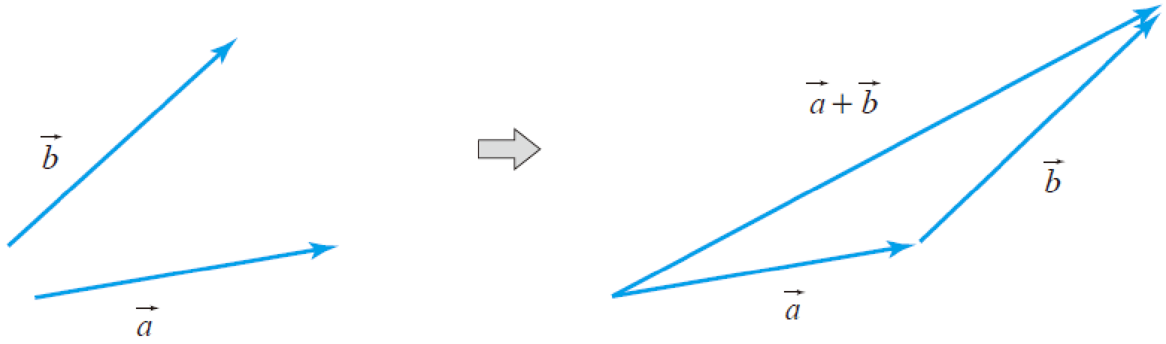
는 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같은 단위벡터이다.

일반적으로 시점과 종점을 아는 것으로 하고 벡터를 나타낼 때는 $\vec{a}$와 같이 문자위에 화살표를 그려서 나타낸다.



벡터의 합

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합 $\vec{a}+\vec{b}$는 벡터 $\vec{a}$의 종점에 $\vec{b}$의 시점을 평행이동 하여 맞추고 $\vec{a}$의 시점과 $\vec{b}$의 종점을 연결한 벡터이다.

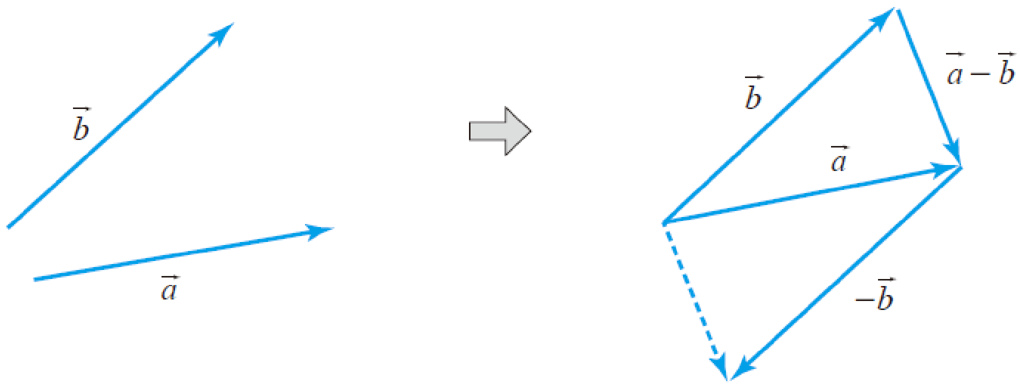


벡터의 차

두 벡터의 차 $\vec{a} - \vec{b}$는 벡터의 합을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

벡터의 실수 곱의 정의로 부터 $(-1)\vec{b}$는 $\vec{b}$와 방향이 반대이고 크기가 같은 벡터임을 안다. 따라서 $\vec{a} + (-1)\vec{b}$는 $\vec{a}$의 종점에 $(-1)\vec{b}$의 시점을 평행이동하여 맞추고 $\vec{a}$의 시점과 $(-1)\vec{b}$의 종점을 연결한 벡터이다.



벡터의 연산정리

정리 2.1.1

벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$와 스칼라 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(4) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

(5) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

(6) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

(7) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

(8) $1\vec{a} = \vec{a}, \; 0\vec{a} = \vec{0}$

예제 2.1.1 다음 벡터의 연산을 간단히 하라.

(1) $2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{a} + \vec{b}$

(2) $3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 4(\vec{a} - 3\vec{b})$

(3) $2(\vec{a} + 2\vec{b}) + \vec{c} + 3\vec{a} - (2\vec{a} - 4\vec{c})$

3차원 공간벡터

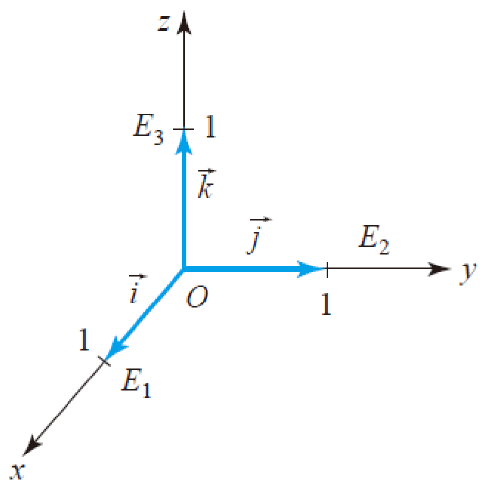
3차원 직교좌표 공간에서 모든 벡터의 출발점을 원점 O로 하고 공간상의 한 점 P를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 원점 O에 대한 P의 위치벡터(position vector)라 한다. 이제 위치벡터를 대수적으로 표현하는 방법을 생각해보자. 원점 O를 시점으로 하고

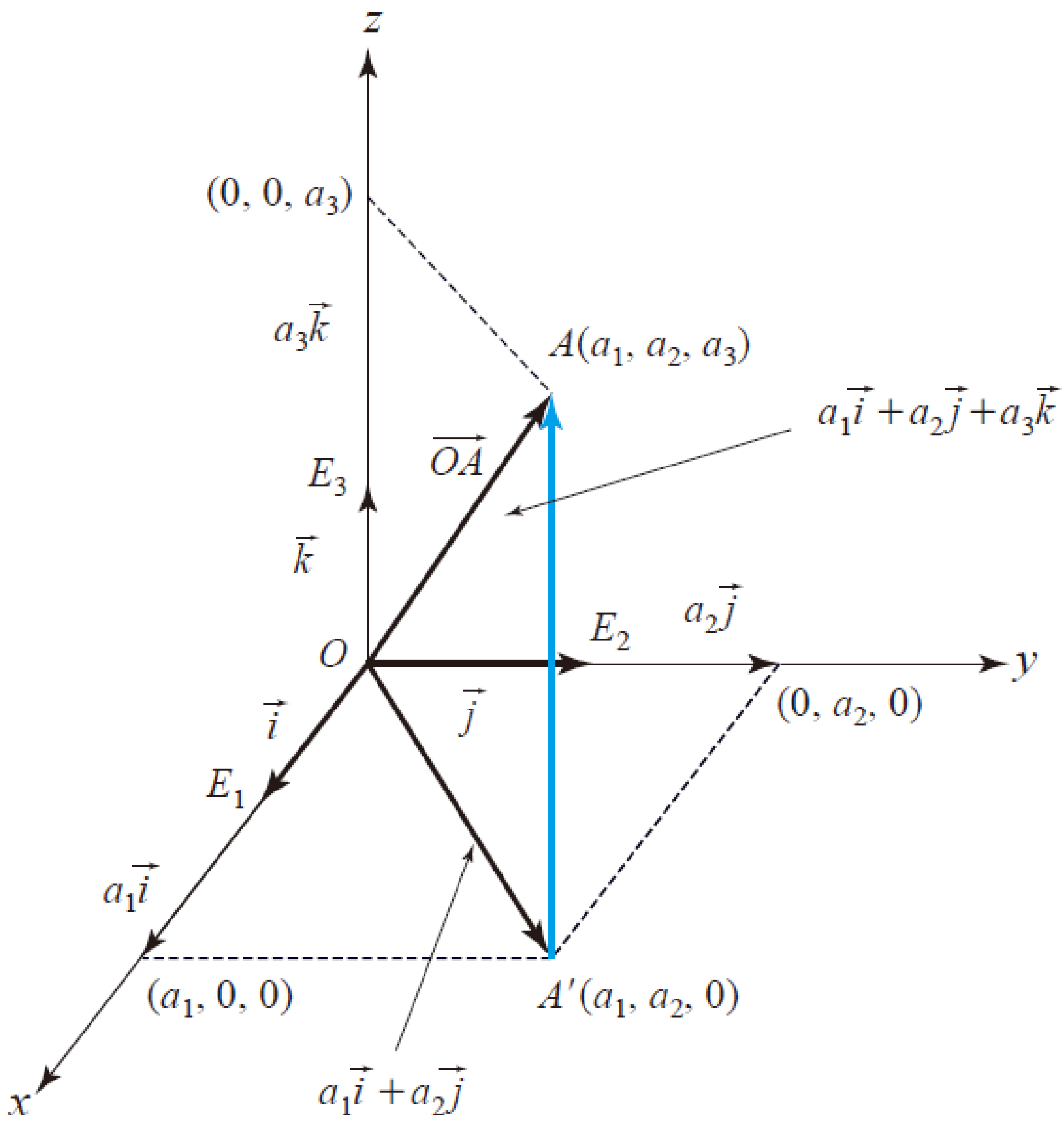
x축 위의 점 $E_1(1, 0, 0)$를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$,

y축 위의 점 $E_2(0, 1, 0)$를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$,

z축 위의 점 $E_3(0, 0, 1)$를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$

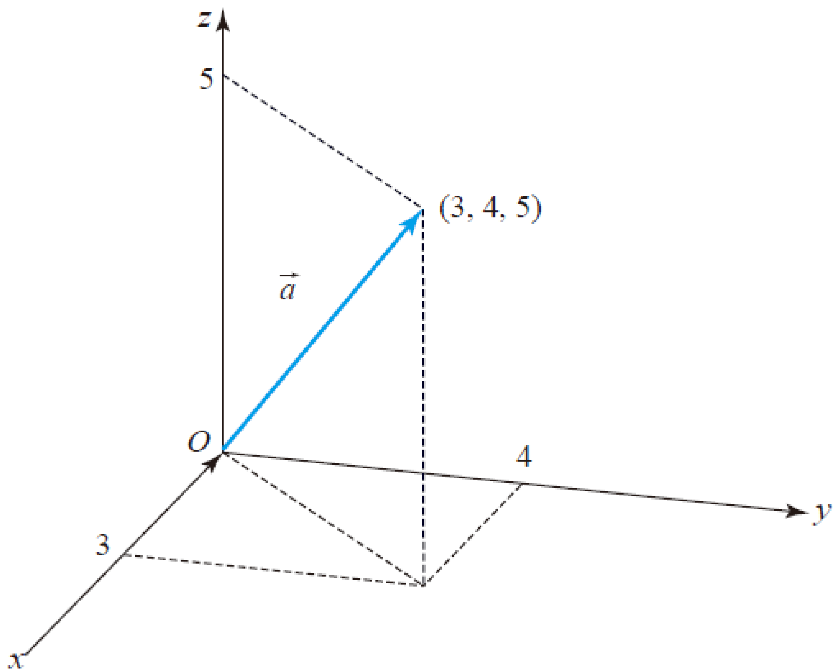
라 하자.



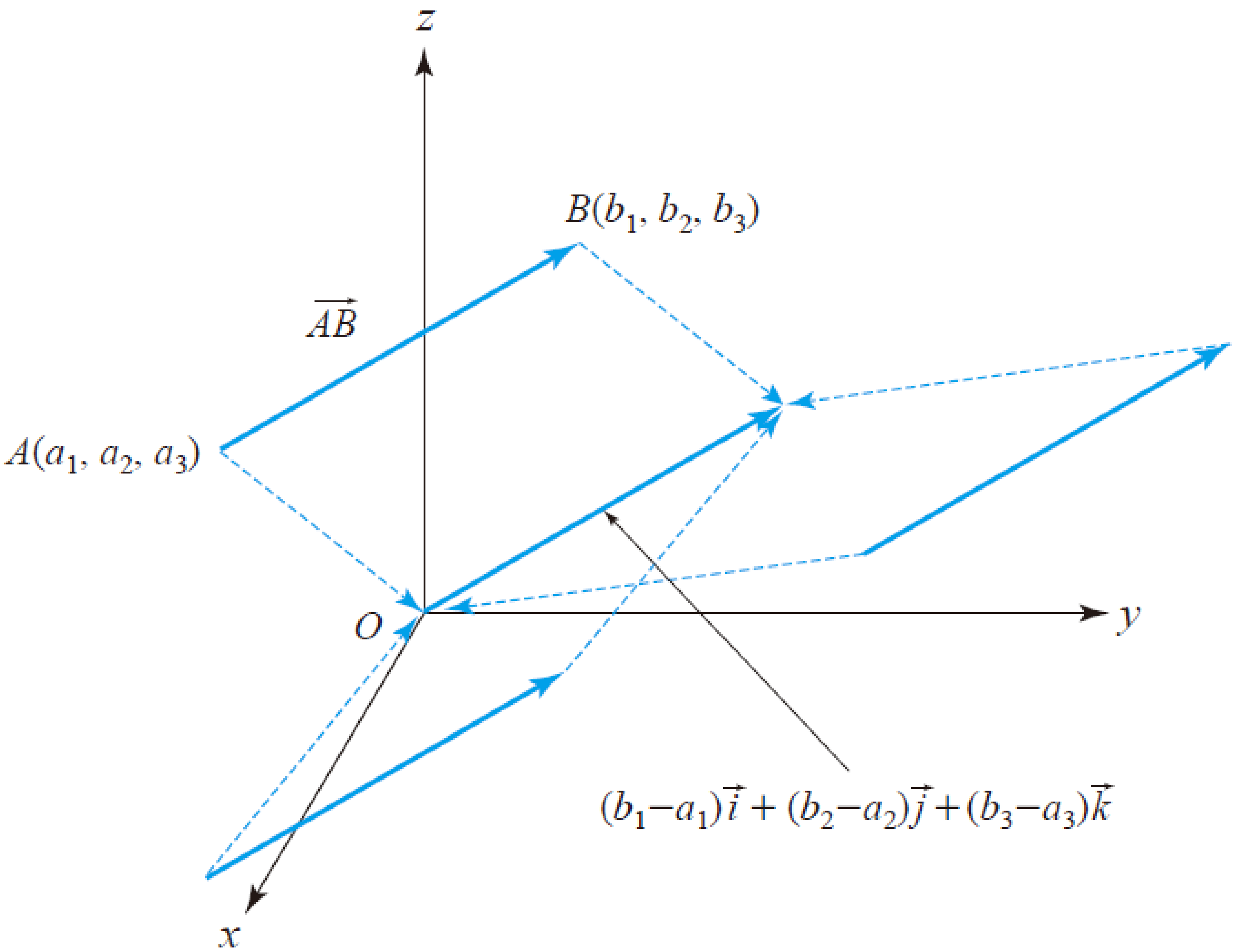

z
$(0, 0, a_3)$
$a_3\vec{k}$
$A(a_1, a_2, a_3)$
$a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$
$\overrightarrow{OA}$
E_3
$\vec{k}$
E_2
$a_2\vec{j}$
O
y
$(0, a_2, 0)$
$\vec{i}$
$\vec{j}$
E_1
$a_1\vec{i}$
$(a_1, 0, 0)$
$A'(a_1, a_2, 0)$
$a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$
x

결국 좌표공간에서 원점을 시점으로 하는 모든 벡터는 세 벡터의 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$의 결합으로 표시되고, 한 벡터의 성분을 알면 원점을 시점으로 하고 그 성분을 종점으로 하는 한 개의 화살표가 그려진다.

예를 들어, 벡터 $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$는 다음과 같은 화살표이다.



위치벡터



z
$B(b_1, b_2, b_3)$
$\overrightarrow{AB}$
$A(a_1, a_2, a_3)$
O
y
x
$(b_1-a_1)\vec{i} + (b_2-a_2)\vec{j} + (b_3-a_3)\vec{k}$

예제 2.1.2 다음 두 점을 연결하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 i, j, k를 이용하여 나타내라.

(1) $A(2,\ 3,\ 0)$, $B(-1,\ 0,\ 3)$ (2) $A(-3,\ 0,\ 2)$, $B(0,\ 3,\ -1)$

[풀이] (1) $\overrightarrow{AB} = (-1-2)i + (0-3)j + (3-0)k = -3i - 3j + 3k.$

(2) $\overrightarrow{AB} = (0+3)i + (3+0)j + (-1-2)k = 3i + 3j - 3k.$

3차원 공간벡터 정리

정의 2.1.1

주어진 실수 α와 두 벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여 다음을 정의한다.

(1) 영벡터 $\vec{O}$는 모든 성분이 0인 벡터 즉, $\vec{O} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

(2) 두 벡터의 상등: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$

(3) 벡터 $\vec{a}$의 크기 $|\vec{a}|$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(4) 스칼라 곱 $\alpha\vec{a}$

$$\alpha\vec{a} = \alpha a_1 i + \alpha a_2 j + \alpha a_3 k$$

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}$$

(5) 두 벡터의 합

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

(6) 두 벡터의 차

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k$$

예제 2.1.3 다음에 답하라.

(1) $\vec{a} = 2i - 3j + 4k$의 크기를 구하라.

(2) $2i - j + k$와 방향이 같고 크기가 1인 벡터를 구하라.

(3) $\vec{a} = 2i - 3j + k$, $\vec{b} = i + 3k$일 때, $4\vec{a} - 3\vec{b}$의 크기를 구하라.

정의 2.1.2

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 0이 아닌 실수 c에 대하여 $\vec{a} = c\vec{b}$일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 **평행**이다. $c > 0$이면 두 벡터는 같은 방향이고, $c < 0$ 이면 두 벡터는 반대 방향이다.

예제 2.1.4 $\vec{a} = 2i + 3j - k$와 $\vec{b} = -4i - 6j + 2k$는 평행임을 보여라.

벡터의 내적

정의 2.2.1 벡터의 내적

벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$와 $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$을 두 벡터의 **내적** (inner product)이라 하고 다음과 같이 정의 된다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

예제 2.2.1 두 벡터의 내적을 구하라.

(1) $\vec{a} = 5i - 2j + k,\ \vec{b} = i + k$

(2) $\vec{a} = -i + 2j + k,\ \vec{b} = 2i + 3j - 4k$

벡터 내적의 성질

정리 2.2.1 **내적의 성질**

벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 스칼라 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(3) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

예제 2.2.2 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 다음을 만족할 때,

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \ |\vec{b}| = 3, \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

(1) $|\vec{a} + \vec{b}|$의 값을 구하라. (2) $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값을 구하라.

내적의 기하학적 의미

정리 2.2.2 내적의 기하학적 의미

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$가 시점에서 이루는 사잇각을 θ라 하면 다음이 성립한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta$$

정의 2.2.2

두 벡터의 사잇각이 $\frac{\pi}{2}$일 때, 두 벡터는 **직교**한다고 한다.

정리 2.2.3

(1) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 직교하기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$이다.

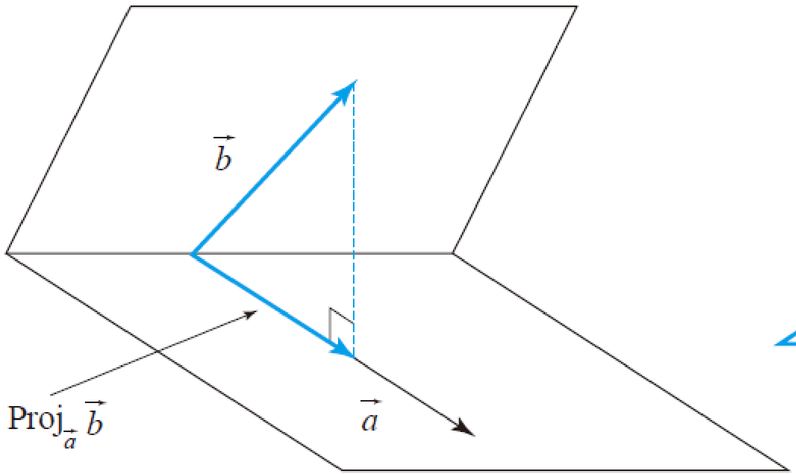
(2) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 교각 θ의 크기가 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$이기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

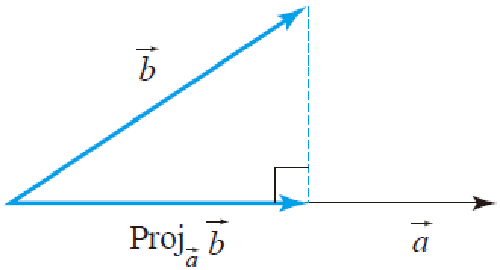
예제 2.2.3 다음 주어진 두 벡터의 직교 여부를 밝히고, 직교하지 않는 경우는 교각 θ의 범위를 구하라.

(1) $\vec{a} = i + 2k$, $\vec{b} = 2i - 3k$ (2) $\vec{a} = 2i - j + 5k$, $\vec{b} = 3i + j - k$

정의 2.2.3

영벡터가 아니고 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 벡터 $\vec{b}$를 벡터 $\vec{a}$로 투사시킨 벡터를 "벡터 $\vec{b}$의 $\vec{a}$ 위로의 **정사영벡터**(projection)"라 하고 $\mathrm{Pro}\,j_{\vec{a}}\vec{b}$로 나타낸다.





정리 2.2.4

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$$

예제 2.2.4 다음 주어진 벡터에 대하여 $\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b}$와 $\mathrm{Proj}_{\vec{b}}\vec{a}$를 구하라.

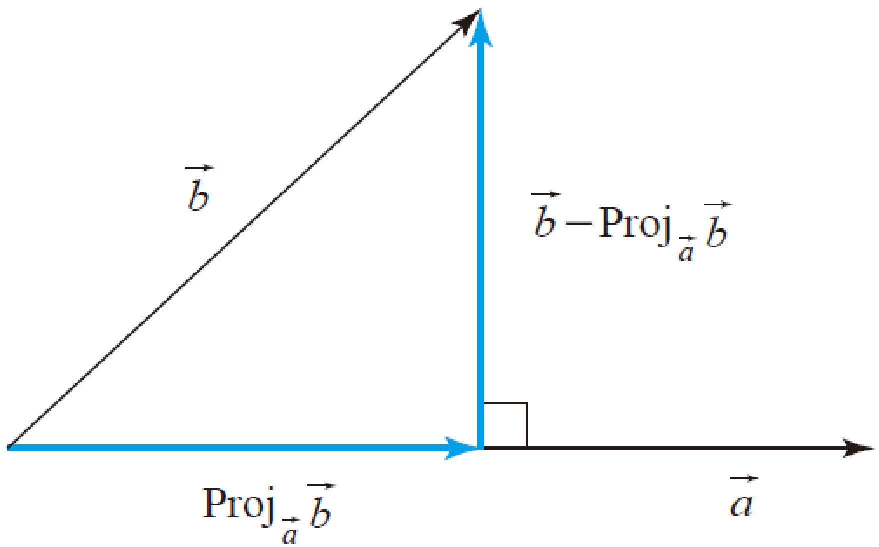
(1) $\vec{a} = 3i + 2j - 2k,\ \ \vec{b} = 2i + 2j + k$

(2) $\vec{a} = -3i - 2j + k,\ \ \vec{b} = i + j - 2k$

벡터의 분해

$$\vec{b} = Proj_{\vec{a}}\vec{b} + (\vec{b} - Proj_{\vec{a}}\vec{b})$$

$$\vec{a} = Proj_{\vec{b}}\vec{a} + (\vec{a} - Proj_{\vec{b}}\vec{a})$$



벡터의 외적

정의 2.3.1

두 벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여 $\vec{a} \times \vec{b}$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **외적**(cross product)이라 하고 다음과 같이 정의 된다.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

예제 2.3.1 $\vec{a} = 2i + j - k$이고 $\vec{b} = i - 2j + 2k$일 때, 다음 연산을 시행하라.

(1) $\vec{a} \times \vec{a}$

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$

(3) $\vec{b} \times \vec{a}$

(4) $\vec{b} \times \vec{b}$

외적의 대수적 성질

정리 2.3.1 외적의 대수적 성질

벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 공간벡터이고 α가 상수일 때, 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(2) $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$

(3) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

(4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(5) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

예제 2.3.2 $\vec{a} = -i + 3j + 2k$, $\vec{b} = 2i + 3k$에 대하여 $\vec{a} \times \vec{b}$와 방향이 같은 단위벡터를 구하라.

외적의 기하학적 의미

정리 2.3.2 **외적의 기하학적 의미**

벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 공간벡터일 때 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 동시에 직교한다.

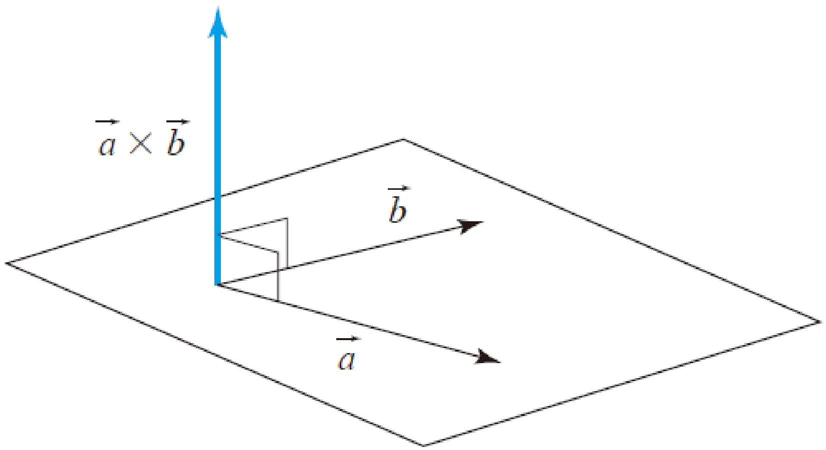
(2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, (단 θ는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 사잇각)

(3) $|\vec{a} \times \vec{b}|$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이이다.

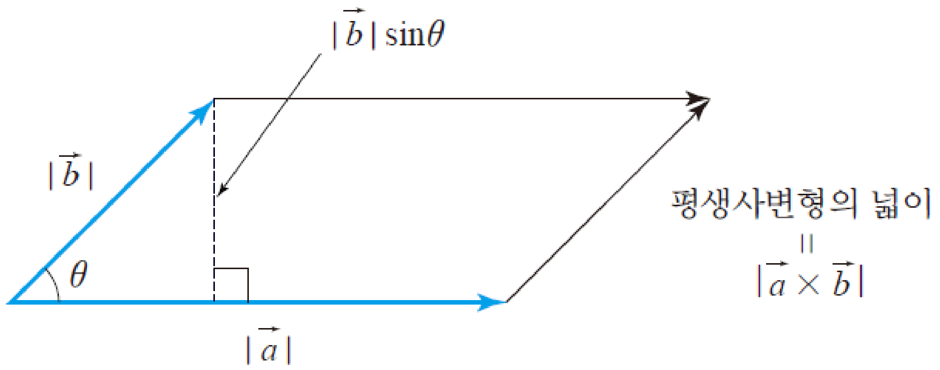
(4) $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 평행하기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

참고 (1)와 (2)의 기하학적 의미를 알아보면 다음과 같다.

1. (1)에서 $\vec{a} \times \vec{b}$는 그림과 같이 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 품는 평면에 직교하는 벡터이다.



2. (2)에서 $|\vec{a} \times \vec{b}|$는 아래 그림에서와 같이 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 나타낸다.



예제 2.3.3 $\vec{a} = 2i - j + k,\ \vec{b} = 4i + 2j - k$ 모두에 직교하는 벡터를 구하라.

예제 2.3.4 다음 두 벡터를 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 구하라.

(1) $\vec{a} = 2i + 3j - k,\ \vec{b} = -i + 2j + k$

(2) $\vec{a} = i - j,\ \vec{b} = i + k$

예제 2.3.5 세 점 $A(1,\ 0,\ 2)$, $B(-1,\ 2,\ 3)$, $C(1,\ 1,\ -1)$을 꼭짓점으로 갖는 평행사변형의 넓이를 구하라.

예제 2.3.6 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하라.

(1) $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$

(2) $A(1,\ 0,\ 1)$, $B(-1,\ 1,\ 2)$, $C(2,\ -3,\ 0)$

예제 2.3.7 주어진 두 벡터가 평행인지의 여부를 판단하라.

(1) $\vec{a} = 2i - j + 3k$, $\vec{b} = -6i + 3j - 9k$

(2) $\vec{a} = i$, $\vec{b} = 3k$

정의 2.3.2

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$의 삼중적이라 한다.

예제 2.3.8 $\vec{a} = 2i - j + k$, $\vec{b} = 3i + 2j - k$, $\vec{c} = i - 2k$에서 $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$를 구하라.

삼중적의 계산은 행렬식과의 관계

정리 2.3.3

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

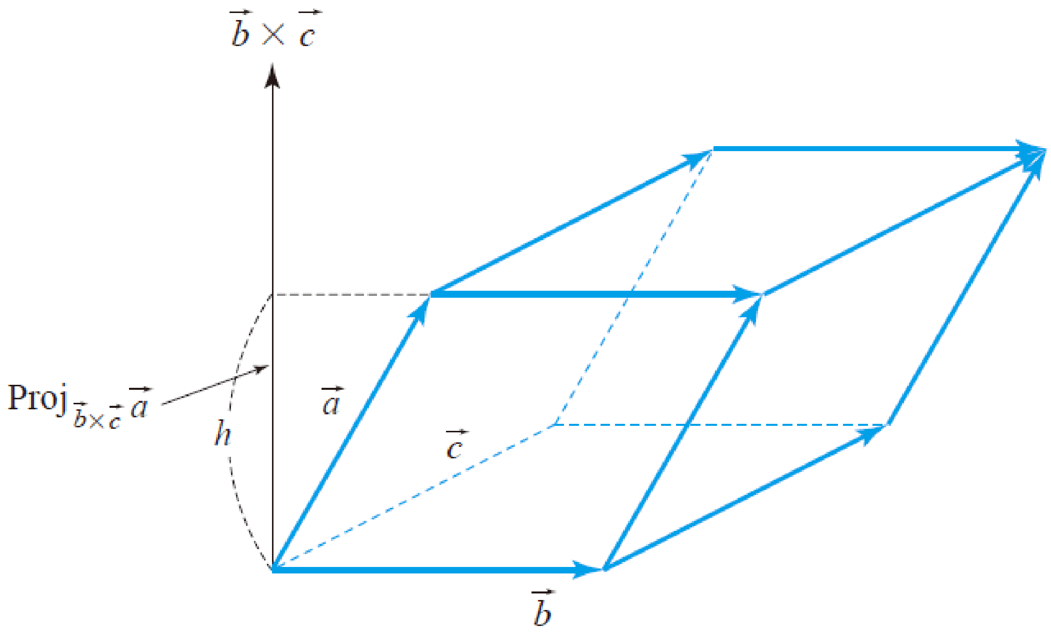
예제 2.3.9 $\vec{a} = 2i - j + k$, $\vec{b} = 3i + 2j - k$, $\vec{c} = i - 2k$일 때, 행렬식을 다음을 구하라.

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$　　(2) $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

정리 2.3.4 삼중적의 성질

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

(2) $|\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$는 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 이웃 변으로 하는 평행육면체의 부피이다.



예제 2.3.10 다음 세 벡터를 이웃 변으로 하는 평행육면체의 부피를 구하라.

$$\vec{a} = i - k, \quad \vec{b} = -2i + j - 3k, \quad \vec{c} = i - j + k$$

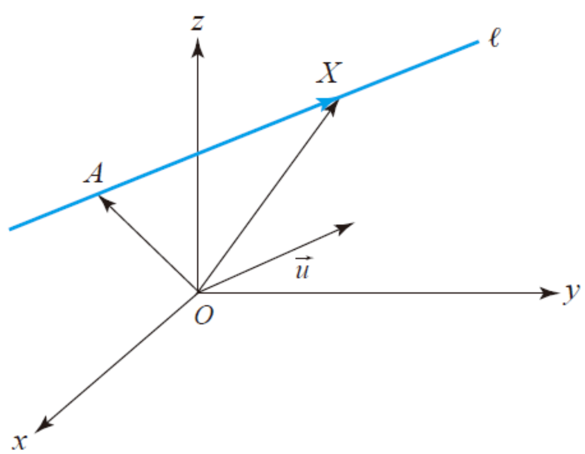
직선과 평면의 방정식

좌표평면 또는 공간에서 특정한 조건을 만족하는 직선 위에 있는 점들에 관한 식을 "직선의 방정식"이라고 하고, 주어진 직선에 평행한 벡터를 방향벡터라 한다. 평면에서와 같이 공간에서도 다음 두 요소, 즉,

"지나는 한 점과 방향벡터" 또는 "지나는 두 점"

에 의하여 유일한 직선이 결정된다.

먼저 한 점 $A(a_1, a_2, a_3)$를 지나고 방향벡터 $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$인 직선 ℓ의 방정식을 구하여 보자. 이 직선 ℓ 위의 임의의 점을 $X(x, y, z)$라 하면



예제 2.4.1 점 $(2, -3, 1)$을 지나고 $2i + 3j - k$에 평행한 직선에 대하여 벡터방정식을 구하라.

예제 2.4.2 점 $(3, -2, 4)$를 지나고 $-2i + 3k$에 평행한 직선의 매개정식을 구하라.

예제 2.4.3 두 점 $(2,\ -1,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 2)$를 지나는 직선의 대칭방정식을 구하라.

예제 2.4.4 두 직선 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$와 $\dfrac{x}{-1}=y-3=\dfrac{x-4}{5}$가 이루는 사잇각을 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하라.

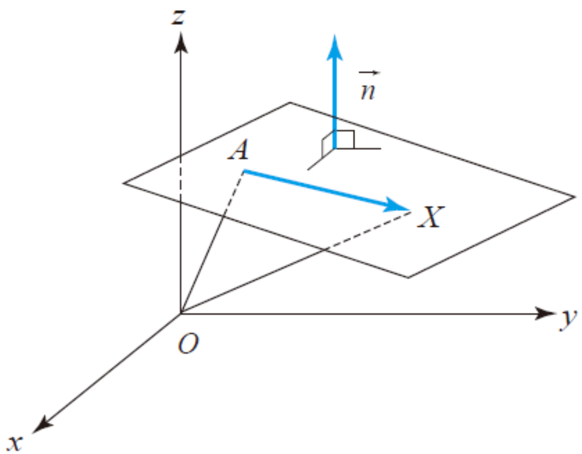
평면의 방정식

평면의 방정식

좌표공간에서 일정한 조건을 만족하는 평면의 위의 점을 나타내는 식을 평면의 방정식이라 하고. 주어진 평면에 직교하는 벡터를 법선벡터(normal vector)라 한다. 평면은 다음 요소, 즉

"지나는 한 점과 법선벡터" 또는 "포함하는 세 점"

에 의하여 유일하게 결정된다.



정리 2.4.1

점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = n_1 i + n_2 j + n_3 k$인 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d \quad (\text{단},\ d = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3)$$

예제 2.4.5 점 $A(2, 3, -2)$을 지나고 $4i - 3j + 2k$에 수직인 평면의 방정식을 구하라.

예제 2.4.6 세 점 $A(2, 0, 0)$, $B(1, 2, 4)$, $C(1, -2, -1)$을 포함하는 평면의 방정식을 구하라.

예제 2.4.7 평면 $2x - y - z = 3$와 $2x + 3z = 5$가 만나서 이루는 사잇각을 구하라.

점과 평면과의 거리

정리 2.4.2 점과 평면과의 거리

점 $P(p_1, p_2, p_3)$와 평면 $ax + by + cz = d$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|ap_1 + a_2 p_2 + ap_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

점과 평면과의 거리

예제 2.4.8 점 $(3,\ -1,\ 2)$와 평면 $x - 2y + 3z = 4$ 사이의 거리를 구하라.

3. 도함수 (Differentiation)

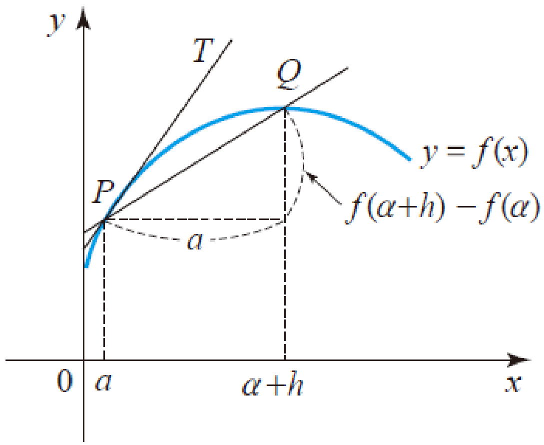
평균변화률

정의 5.1.1

함수 f에서 x의 값이 정의역의 한 점 a에서 $a+h$까지 변할 때, f의 평균변화율은

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

로 정의된다.



함수의 극한

정의 4.1.1 좌극한과 우극한

주어진 함수 $f(x)$와 실수 a에서

(1) x가 a의 왼쪽에서 a로 가까이 접근 할 때, 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$가 일정한 실수 L로 접근하면

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

로 쓰고, L을 a에서 $f(x)$ 의 좌극한이라 한다.

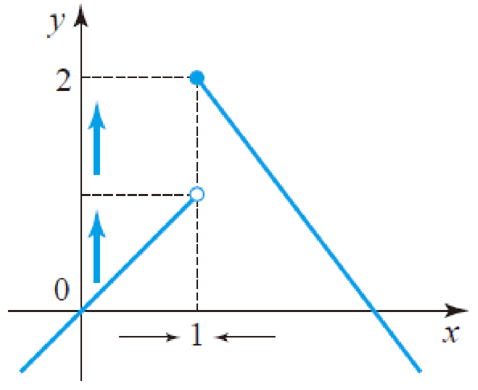
(2) x가 a의 오른쪽에서 a로 가까이 접근 할 때, 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$가 일정한 실수 M로 접근하면

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = M$$

로 쓰고, M을 a에서 $f(x)$의 우극한이라 한다.

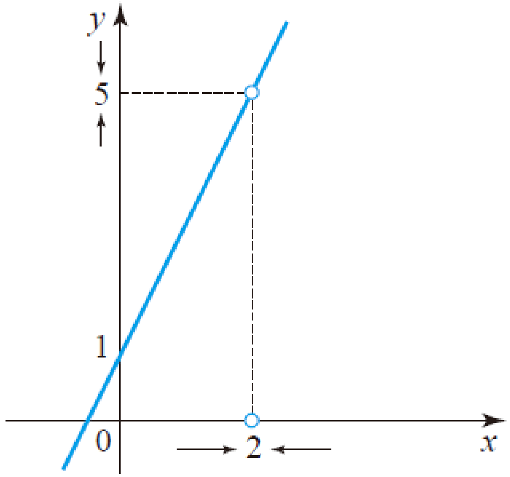
다음과 같이 정의된 함수 $f(x)$의 그래프를 생각해보자.

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$



x가 왼쪽에서 1로 접근하면 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$는 1로 접근하고, x가 오른쪽에서 1로 접근하면 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$는 2로 접근한다.

함수 $f(x) = 2x + 1$의 그래프를 생각해 보자.



x가 2의 왼쪽에서 가까이 접근하면 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$는 5로 가까이 접근하고, x가 2의 오른쪽에서 가까이 접근해도 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$는 5로 가까이 접근하는 것을 알 수 있다.

정의 4.1.2 좌극한과 우극한

x가 c의 왼쪽에서 접근하든 오른쪽에서 접근하든 동일한 실수 L로 접근하면

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

로 쓰고, L을 c에서 $f(x)$의 극한이라 한다. 또한 극한이 존재하지 않으면 발산한다고 한다.

정의 5.1.2

함수 f의 정의역에 속하는 a에 대하여 극한

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

가 존재하면 f는 a에서 **미분가능**하다고 하고, 이 극한 값을 a에서 f의 **미분계수** 또는 **순간변화율**이라 하고 $f'(a)$로 쓴다. 또 함수 f의 정의역의 모든 점에서 미분가능할 때 f를 **미분가능한 함수**라 부른다.

참고 $a+h=x$로 치환하면 다음이 성립함을 안다.

$$f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

예제 5.1.1 $f(x)=x^2-3$일 때, $x=1$에서 $x=1.5$까지 변할 때 f의 평균변화율을 구하라.

예제 5.1.2 $f(x)=x^2+1$ 위의 점 $P(2,\ 5)$에서 접선의 기울기를 구하고, 곡선에 접하는 접선의 방정식을 구하라.

정의 5.1.3

함수 $y = f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 f의 미분가능한 모든 점 x를 정의역으로 하여 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

또 주어진 함수의 도함수를 구하는 것을 "미분한다"라고 한다.

예제 5.1.3 $f(x)=x^2+1$의 도함수 $f'(x)$를 정의에 의하여 구하고 곡선 위의 점 $(-2,\ 5)$와 점 $(1,\ 2)$에서 접선의 기울기를 구하라.

예제 5.1.4 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 의 도함수를 정의에 의하여 구하고, 함수의 그래프 위의 점 $(4,\ 2)$ 와 점 $(1,1)$ 에서 접선의 기울기를 구하라.

정의 5.1.4

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **좌도함수** $f'_-(a)$와 **우도함수** $f'_+(a)$는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

함수의 연속

정의 4.5.2

$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$일 때 f는 c에서 **좌연속**이라 하고, 또 $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$일 때 f는 c에서 **우연속**이라 한다.

예제 4.5.4 다음과 같이 정의된 함수 f는 $x = 3$에서 불연속이지만 우연속임을 보여라.

$$f(x) = [x],\ [x]\text{는 } x\text{보다 크지 않은 최대정수}$$

정의 4.5.3

함수 f가 $(a,\ b)$의 모든 점에서 연속이면 f는 **개구간 $(a,\ b)$에서 연속**이라 한다. 또 개구간 $(a,\ b)$의 모든 점에서 연속이고 a에서 우연속이고 b에서 좌연속이면 f는 **폐구간 $[a,\ b]$에서 연속**이라고 한다.

정의 5.1.5

(1) 함수 f가 개구간 (a, b)의 모든 점에서 미분가능이면 함수 f는 구간 (a, b)에서 미분가능이라 한다.

(2) 함수 f가 개구간 (a, b)의 모든 점에서 미분가능하고 a에서 우도함수와 b에서 좌도함수가 존재하면 f는 폐구간 $[a, b]$에서 미분가능이라 한다.

예제 5.1.5에서 $f(x) = |x|$은 $x = 0$에서 연속이지만 미분불능임을 보았다. 다음은 미분가능성은 연속이기 위한 충분조건임을 보여준다.

정리 5.1.1

함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능이면 $f(x)$는 a에서 연속이다.

예제 5.1.6 $f(x) = x^2 + 1$일 때 $f'(x) = 2x$임을 이용하여 2계 도함수 $f''(x)$를 구하라.

미분법

정리 5.2.1

$f(x) = k$(k는 상수)이면 $f'(x) = 0$이다.

[증명] $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$ ■

예제 5.2.1 다음 함수를 미분하라.

(1) $f(x) = e$ (2) $f(x) = 4$ (3) $f(x) = \pi^3$

정리 5.2.2

양의 정수 n에 대하여 $f(x) = x^n$이면 $\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}$이다.

예제 5.2.2 다음 함수를 미분하라.

(1) $f(x) = x^5$　　　　(2) $f(x) = x^{20}$

정리 5.2.3

$f(x)$와 $g(x)$가 미분가능한 함수이고 k가 상수일 때 다음이 성립한다.

(1) $(kf)'(x) = kf'(x)$

(2) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(3) $\boxed{(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)}$

(4) $\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

(5) $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$

예제 5.2.3 주어진 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = 3x^4$ (2) $y = 5x^4 - 2x^3$

예제 5.2.3 주어진 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = 3x^4$

(2) $y = 5x^4 - 2x^3$

예제 5.2.4 주어진 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = (4x^3 - 1)(x^2 + 3x)$

(2) $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - 2}$

정리 5.2.4

n이 임의의 정수일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

예제 5.2.5 다음에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

(1) $y = x^{-7}$ (2) $y = \dfrac{1}{x^4}$

연쇄법칙

정리 5.3.1 합성함수의 미분법(연쇄법칙)

함수 $g(x)$가 미분가능하고 $f(x)$가 $g(x)$의 치역을 포함하는 영역에서 미분가능하면 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$도 미분가능하고, $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서 $u=g(x)$라 놓으면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

또는

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

이다.

예제 5.3.1 $y = (x^2 - 5x + 10)^{30}$의 도함수를 구하라.

예제 5.3.2 $f(x) = \dfrac{1}{3x^4 + x^2 - 4}$일 때 $f'(x)$를 구하라.

음함수 (Implicit function) 의 미분

정리 5.3.2

음함수 $F(x, y) = 0$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 때는 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 관하여 미분한 다음 $\dfrac{dy}{dx}$를 좌변으로 분리하면 된다.

예제 5.3.4 방정식 $y^3 + 2y - x^2 = 0$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

예제 5.3.4 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(3,\ 4)$에서 접선의 기울기와 접선의 방정식을 구하라.

예제 5.3.5 $x^2 - xy + y^2 = 1$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

역함수 (Inverse function)의 미분

정리 5.3.3 **역함수의 미분법**

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$가 존재하고 $f'(x)\neq 0$이면, $x=f^{-1}(y)$도 미분가능이고 다음이 성립한다.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{즉 } (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}, \quad (\text{단 } y=f(x))$$

예제 5.3.6 다음에 답하라.

(1) $y = x^3 - 2$에서 $\dfrac{dx}{dy}$를 구하라.

(2) 함수 $f(x) = x^2 + 3x + 10$에 대하여 $(f^{-1})'(5)$의 값을 구하라.

매개변수함수의 미분

정리 5.3.4 **매개변수 함수의 미분법**

$x = f(t)$와 $y = g(t)$가 t에 관하여 미분가능이고 $f'(t) \neq 0$이면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.

예제 5.3.7 $x=\sqrt{t+1}$, $y=t^2-3t+2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하고 $t=3$에서 접선의 기울기를 구하라.

정리 5.3.5

r이 유리수이고 $y = x^r$일 때

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$$

이다.

예제 5.3.8 $y=\sqrt{x^2-x+4}$에서 y'를 구하라.

예제 5.3.9 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$에서 y'를 구하라.

삼각함수의 미분

정리 5.4.1

(1) $\lim_{h \to 0} \sin h = 0$

(2) $\lim_{h \to 0} \cos h = 1$

(3) $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

(4) $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

정리 5.4.2

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \sec^2 x$

(4) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(5) $(\sec x)' = \sec x \tan x$

(6) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

예제 5.4.1 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = \sin 4x$　　　(2) $y = \sin(\sqrt{x} + x)$

예제 5.4.2 $y = \cos^3 2x$의 도함수를 구하라.

예제 5.4.3 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = \tan\sqrt{x}$

(2) $y = \cot x^2$

(3) $y = \sec(x^2 + x)$

(4) $y = \csc\sqrt{x}$

정리 5.4.3

역삼각함수의 도함수에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(\sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (|x| < 1)$

(2) $(\cos^{-1}x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (x < 1)$

(3) $(\tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \ (-\infty < x < \infty)$

(4) $(\cot^{-1}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \ (-\infty < x < \infty)$

(5) $(\sec^{-1}x)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \ (x > 1)$

(6) $(\csc^{-1}x)' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \ (x > 1)$

예제 5.4.4 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = \sin^{-1}(1 - x)$

(2) $y = \cos^{-1}(x^2)$

(3) $y = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

(4) $y = \sec^{-1}(-2x)$

로그함수의 도함수

정리 5.5.1

(1) $\boxed{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e}$ (2) $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$

예제 5.5.1 $y = \log_2 (x^3 - 2x + 4)$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

정리 5.5.2

(1) $\boxed{\dfrac{d}{dx}\{\log_a f(x)\} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e}$ (2) $\boxed{\dfrac{d}{dx}\{\ln f(x)\} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}}$

예제 5.5.2 다음에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

(1) $y = \ln(x^2+4)$ (2) $\log_3 \sin x$

(1) $y = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ (2) $y = \ln\left(x^2\sqrt{\dfrac{x+3}{x+1}}\right)$

예제 5.5.4 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+3)^2(x-1)}$ (2) $y = x^2\sqrt{x+3}$

예제 5.5.5 실수 a에 대하여 $y = x^a$일 때, $y' = ax^{a-1}$임을 보여라.

지수함수의 미분

정리 5.5.2

(1) $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$ (2) $\boxed{(e^x)' = e^x}$

예제 5.5.6 다음에서 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

(1) $y = \pi^{\sin x}$ (2) $y = e^{\cos 2x}$

정리 5.5.3

(1) $\boxed{\dfrac{d}{dx}\{a^{f(x)}\} = a^{f(x)} f'(x) \ln a}$ (2) $\boxed{\dfrac{d}{dx}\{e^{f(x)}\} = e^{f(x)} f'(x)}$

예제 5.5.7 $y = e^{-3x} \ln x$일 때, y'를 구하라.

예제 5.5.8 $y = x^x$일 때 y'을 구하라.