

1. 행렬

행렬의 배열

수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 () 또는 []로 묶은 것을 행렬(matrix)이라 하고, 배열의 가로줄을 행(row), 배열의 세로줄을 열(column)이라 한다.

$$\begin{array}{c} 1\text{렬} \quad \quad \quad j\text{렬} \\ \downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\ 1\text{행} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \\ i\text{행} \rightarrow \end{array}$$

행렬의 형태

영행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$

대각행렬 $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \dots$

단위행렬 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$

행렬 A 에서 행과 열의 원소의 위치를 바꾼 행렬을 A 의 **전치행렬**이라 하고 A^t 로 나타낸다.

예를 들어,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{일 때, } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

이다. 따라서

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{일 때, } A^t = (a_{ij}^t)_{n \times m} \text{면 } a_{ij}^t = a_{ji}$$

행렬의 상등

크기가 같은 두 행렬 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 에 대하여 두 행렬의 모든 요소가 같으면 두 행렬은 “같다”라 하고 $A = B$ 로 나타낸다. 즉, 모든 i, j 에서 $a_{ij} = b_{ij}$ 이면 $A = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & x & 4 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & y & -2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & w \end{pmatrix}$$

행렬의 연산

상수의 곱

행렬 $A = (a_{ij})$ 와 실수 r 에 대하여 rA 는 A 와 크기가 같고 ij -원소가 a_{ij} 에 r 를 곱한 행렬

$$rA = (ra_{ij})$$

이고, $-A = (-1)A$ 이다.

합과 차

크기가 같은 두 행렬 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 에 대하여 합과 차는 각각 다음과 같다.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

$$A - B = A + (-1)B$$

행렬연산의 성질

정리 1.1.1 행렬연산의 성질

행렬 A, B, C 의 크기가 모두 같고 α, β 가 실수 일 때, 다음이 성립한다.

- (1) $A + B = B + A$
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (3) $A + O = O + A = A$
- (4) $A - A = O$
- (5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- (6) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- (7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

행렬의 곱

두 행렬 $A = (a_{ij})_{m \times l}$, $B = (b_{ij})_{l \times n}$ 에 대하여 두 행렬의 곱 AB 는 다음과 같이 정의된다.

$$AB = (c_{ij})_{m \times n},$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{il} b_{lj}$$

예제 1.1.4 다음 행렬의 곱을 계산하라.

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

행렬의 결합법칙과 분배법칙

정리 1.1.2 행렬의 덧셈과 곱셈의 성질

곱과 합이 정의되는 행렬 A, B, C 와 실수 k 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1) (AB)C = A(BC) \quad (\text{결합법칙})$$

$$(2) A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC \quad (\text{분배법칙})$$

$$(3) k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

예제 1.1.5 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때 다음을 구하고 결과를 비교하라.

- (1) $A(BC)$
- (2) $(AB)C$
- (3) $(AB)^t$
- (4) $B^t A^t$

행렬과 연립일차방정식

일반적으로 m 개의 방정식과 n 개의 미지수를 포함하는 연립일차방정식, 즉

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

은 다음 행렬

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

에 대하여

$$AX = B$$

기약행제형과 행제형

기약행제형 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ...

행제형 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ...

예제 1.2.1 다음 주어진 행렬의 기약행제형을 구하라.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

가우스-조단 (Gauss-Jordan) 소거법

예제 1.2.2 다음 연립방정식의 해를 가우스-조단 소거법으로 구하라.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$

예제 1.2.4 다음 연립일차방정식의 해를 가우스–조던 소거법으로 구하라.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = -1 \\ x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + 7y - z = 0 \end{cases}$$

행렬의 위수 (rank)

행렬의 위수

행렬 A 를 행제형 또는 기약행제형으로 나타내었을 때, 행의 모든 요소가 0이 아닌 행의 수를 그 행렬의 위수(rank)라 하고, $\text{rank}(A)$ 로 쓴다.

예제 1.2.6 다음 행렬의 위수를 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

행렬 rank의 성질

정리 1.3.1

n 개의 미지수와 m 개의 방정식으로 된 연립일차방정식의 계수행렬을 A , 계수확대행렬을 C 라 할 때, 다음이 성립한다.

- (1) 해를 가질 필요충분조건은 $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$ 이다
- (2) $\text{rank}(A) = \text{rank}(C) = n$ 이면 유일한 해를 가진다.
- (3) $\text{rank}(A) = \text{rank}(C) = r < n$ 이면 r 개의 변수가 나머지 $n - r$ 개의 변수로 표시되어 해는 무수히 많다.

예제 1.2.7 다음 연립방정식의 해의 존재성에 대하여 논하라.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

행렬식

정의 1.3.1 소행렬

주어진 정방행렬 A 에서 i 행과 j 열을 제거하고 남은 행렬을 ij -소행렬(minor matrix)이라 하고 $M_{ij}(A)$ 또는 간단히 M_{ij} 로 나타낸다.

예제 1.3.1 다음 행렬 A 에서 M_{23} , M_{12} , M_{33} 을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ -7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

정의 1.3.2 행렬식

n 정방행렬 $A = (a_{ij})$ 에 다음과 같은 정의에 의하여 대응하는 실수 $|A|$ 또는 $\det(A)$ 를 A 의 행렬식이라 한다.

- (1) $n = 1$ 일 때, $|A| = a_{11}$.
- (2) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} |M_{1j}| \\&= a_{11} |M_{11}| - a_{12} |M_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n} |M_{1n}|.\end{aligned}$$

예제 1.3.2 다음 행렬의 행렬식을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

참고 행렬식을 구하기 위해서는 정의에 따라 소행렬식을 전개하는 일련의 과정을 거쳐야 하지만 $n = 2$ 인 경우는 다음과 같은 사실이 알려져 있다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

일 때,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

예제 1.3.3 다음 행렬의 행렬식을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

예제 1.3.5 다음 행렬식을 구하라.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 6 & 8 \\ -4 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

행렬식의 성질

정리 1.3.1 행렬식의 성질

- (1) $|A| = |A^t|$
- (2) B 가 A 의 한 행을 k 배하여 얻은 행렬이면 $|B| = k|A|$ 이다.
- (3) $B = kA$ 이면 $|B| = k^n |A|$ 이다.
- (4) B 가 A 의 임의의 두 행을 교환하여 얻은 행렬이면 $|B| = -|A|$ 이다.
- (5) B 가 A 의 한 행을 상수배 하여 다른 행에 더하여 얻은 행렬이면 $|B| = |A|$ 이다.
- (6) 어느 한 행의 원소가 모두 0인 행렬의 행렬식은 0이다.
- (7) 어느 두 행이 같거나, 두 행이 비례하면 그 행렬의 행렬식은 0이다.
- (8) 삼각행렬의 행렬식은 대각에 있는 원소들의 곱이다.
- (9) $|AB| = |A||B|$

예제 1.3.6 다음 행렬식을 구하라.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

예제 1.3.7 다음 방정식의 해를 구하라.

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 - 2x & 1 + x & 3x \end{vmatrix} = 0$$

역행렬과 크래머 법칙

정의 1.4.1

- (1) n 정방행렬 A 에 대하여, n 정방행렬 B 가 존재하여

$$AB = BA = I_n$$

일 때, A 를 가역행렬이라 하고, B 를 A 의 역행렬이라 부르며 $B = A^{-1}$ 로 나타낸다.

- (2) 가역이 아닌 행렬을 비가역행렬이라 한다.

예제 1.4.1 행렬 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ 는 $B = A^{-1}$ 임을 보여라.

행렬의 여인수 (cofactor)

정의 1.4.2

정방행렬 $A = (a_{ij})$ 에서 A_{ij} 를 a_{ij} 의 **여인수**라 하고 다음과 같이 정의한다.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

예제 1.4.3

다음 행렬에서 A_{23} , A_{31} 을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

정리 1.4.3

$A = (a_{ij})$ 가 정방행렬일 때 다음이 성립한다.

- (1) A 가 가역이기 위한 필요충분조건은 $|A| \neq 0$ 이다.
- (2) A 가 가역일 때, A 의 역행렬 A^{-1} 은 다음과 같이 주어진다.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t, \quad i \cdot j = 1, 2, \dots, n$$

예제 1.4.4 정리 1.4.3을 이용하여 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

정리 1.4.2

정방행렬 A 와 B 의 역행렬을 각각 A^{-1} , B^{-1} 라고 하면 다음이 성립한다.

$$(1) \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(2) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

예제 1.4.2 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 A^{-1} , B^{-1} 를 구하고 이를 이용하여 $(AB)^{-1}$ 를 구하라.

예제 1.4.5 정리 1.4.4를 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

역행렬과 연립방정식의 해

역행렬과 연립방정식의 해

정방행렬 $A = (a_{ij})$ 에 대하여 $|A| \neq 0$ 일 때, 연립일차방정식 $AX = B$ 의 해 X 는

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

이다.

예제 1.4.8 주어진 역행렬을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} -2x + 2y - 3z = 1 \\ x + z = -2, \\ -4x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

크래머(cramer) 법칙

정리 1.4.4 크래머(cramer) 법칙

연립일차방정식 $AX = B$ 에서 $|A| \neq 0$ 일 때, A_j 는 계수행렬 A 에서 j 렬의 원소가 B 의 원소로 바뀐 행렬이라 하자. 그러면 구하는 해는

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

이다.

예제 1.4.9 크래머 법칙을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

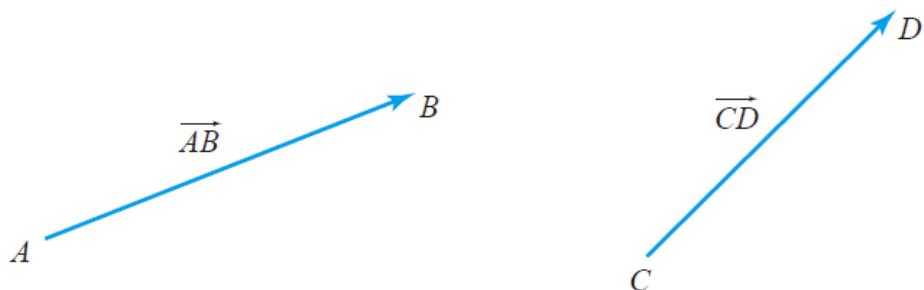
예제 1.4.10 다음 연립일차방정식에서 x, y, z 의 값을 구하라.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + 6z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

2. 벡터

벡터와 연산

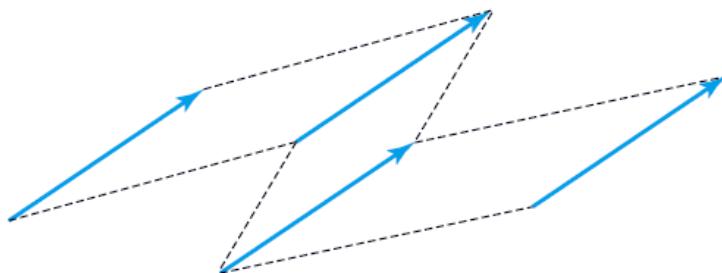
크기와 방향이 주어진 물리량을 벡터(vector)라 한다. 벡터를 나타내는 기호로는 화살표를 이용하고, 화살의 길이가 **벡터의 크기**, 화살표가 지시하는 쪽이 **벡터의 방향**이다. 벡터를 논하는 환경에서 실수는 “스칼라(scalar)”라고 부르기도 한다.



출발점 A , 종점 B 인 벡터는 \vec{AB} 로 나타내고, 벡터 \vec{AB} 의 크기는 $|\vec{AB}|$ 로 나타낸다. 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라 하고, 크기가 0인 벡터를 **영벡터**라 하고 $\vec{0}$ 으로 나타낸다.

벡터의 상등

벡터는 위치와는 관계없이 크기와 방향이 같으면 같은 벡터이다. 즉 평행 이동하여 시점과 종점이 일치될 수 있는 벡터는 모두 같은 벡터이다. 따라서 다음 벡터들은 모두 같은 벡터를 나타낸다.



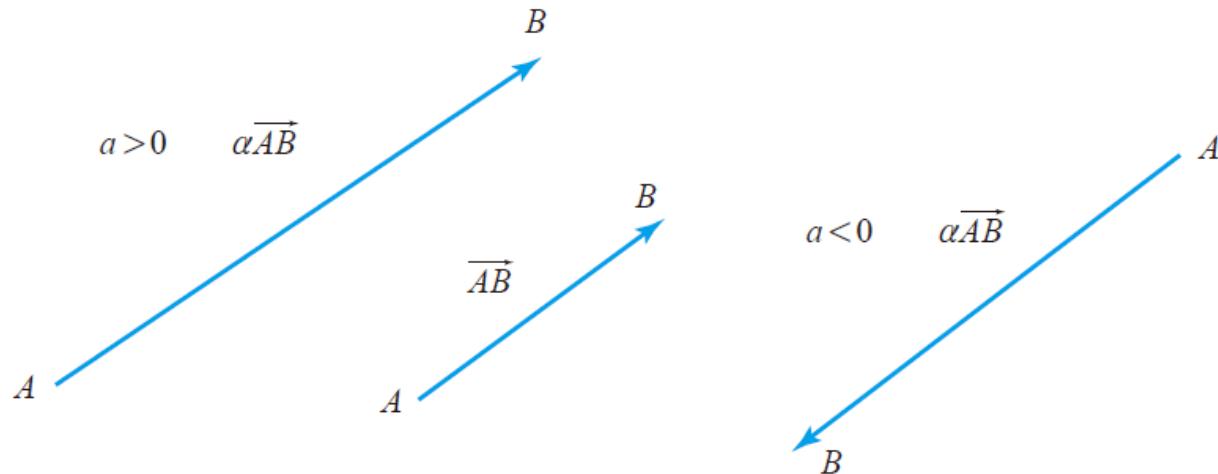
벡터의 스칼라 곱

스칼라 α 에 대하여 주어진 벡터 \vec{AB} 의 크기를 α 배, 즉 $\alpha\vec{AB}$ 는

$\alpha > 0$ 일 때, \vec{AB} 와 방향이 같고 크기는 $|\alpha\vec{AB}| = |\alpha|\|\vec{AB}\|$,

$\alpha < 0$ 일 때, \vec{AB} 와 방향이 반대이고 크기는 $|\alpha\vec{AB}| = |\alpha|\|\vec{AB}\|$

주의 $|\alpha|$ 에서 $|\cdot|$ 는 절댓값 기호이고, $|\overrightarrow{AB}|$ 와 $\alpha|\overrightarrow{AB}|$ 에서 $|\cdot|$ 은 벡터의 크기의 기호이다.

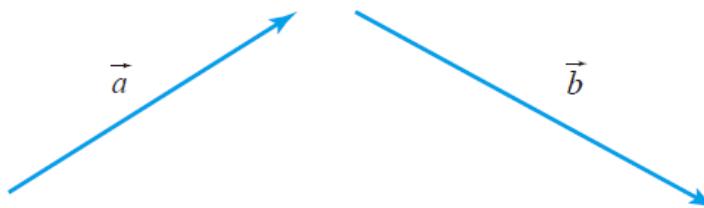


영벡터가 아닌 벡터 \overrightarrow{AB} 를 자신의 크기로 나누면 같은 방향의 단위벡터가 된다. 즉

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB}$$

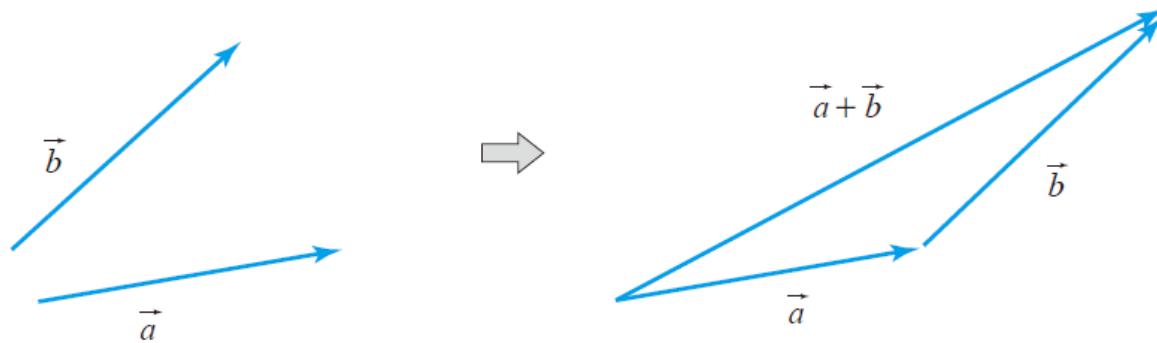
는 \overrightarrow{AB} 와 방향이 같은 단위벡터이다.

일반적으로 시점과 종점을 아는 것으로 하고 벡터를 나타낼 때는 \vec{a} 와 같이 문자위에 화살표를 그려서 나타낸다.



벡터의 합

두 벡터 \vec{a} 와 \vec{b} 의 합 $\vec{a} + \vec{b}$ 는 벡터 \vec{a} 의 종점에 \vec{b} 의 시점을 평행이동 하여 맞추고 \vec{a} 의 시점과 \vec{b} 의 종점을 연결한 벡터이다.

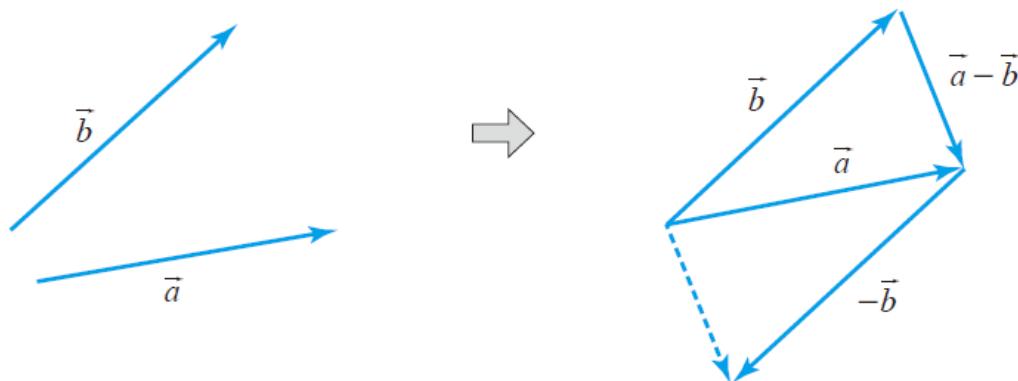


벡터의 차

두 벡터의 차 $\vec{a} - \vec{b}$ 는 벡터의 합을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

벡터의 실수 곱의 정의로 부터 $(-1)\vec{b}$ 는 \vec{b} 와 방향이 반대이고 크기가 같은 벡터임을 안다. 따라서 $\vec{a} + (-1)\vec{b}$ 는 \vec{a} 의 종점에 $(-1)\vec{b}$ 의 시점을 평행이동하여 맞추고 \vec{a} 의 시점과 $(-1)\vec{b}$ 의 종점을 연결한 벡터이다.



벡터의 연산정리

정리 2.1.1

벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 와 스칼라 α, β 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$(3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$(4) \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

$$(5) \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

$$(6) \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(7) (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(8) 1\vec{a} = \vec{a}, 0\vec{a} = \vec{0}$$

예제 2.1.1 다음 벡터의 연산을 간단히 하라.

$$(1) 2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{a} + \vec{b}$$

$$(2) 3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 4(\vec{a} - 3\vec{b})$$

$$(3) 2(\vec{a} + 2\vec{b}) + \vec{c} + 3\vec{a} - (2\vec{a} - 4\vec{c})$$

3차원 공간벡터

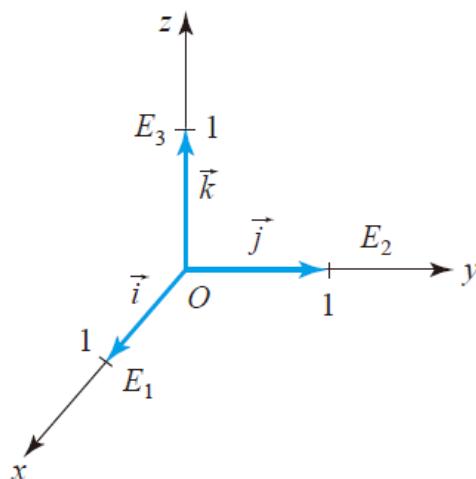
3차원 직교좌표 공간에서 모든 벡터의 출발점을 원점 O 로 하고 공간상의 한 점 P 를 종점으로 하는 벡터 \overrightarrow{OP} 를 원점 O 에 대한 P 의 위치벡터(position vector)라 한다. 이제 위치벡터를 대수적으로 표현하는 방법을 생각해보자. 원점 O 를 시점으로 하고

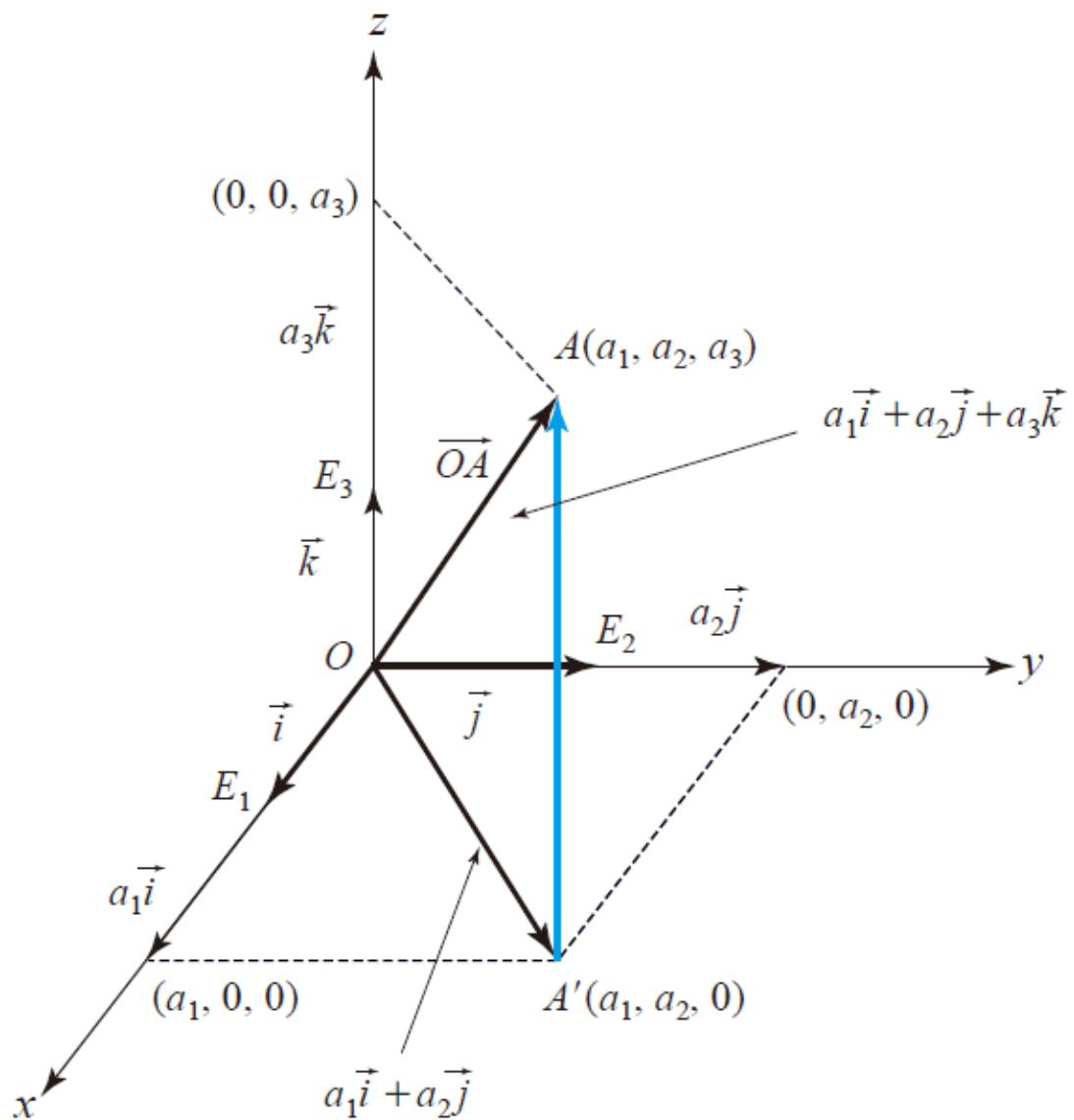
x 축 위의 점 $E_1(1, 0, 0)$ 를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE}_1 = \vec{i}$,

y 축 위의 점 $E_2(0, 1, 0)$ 를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE}_2 = \vec{j}$,

z 축 위의 점 $E_3(0, 0, 1)$ 를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE}_3 = \vec{k}$

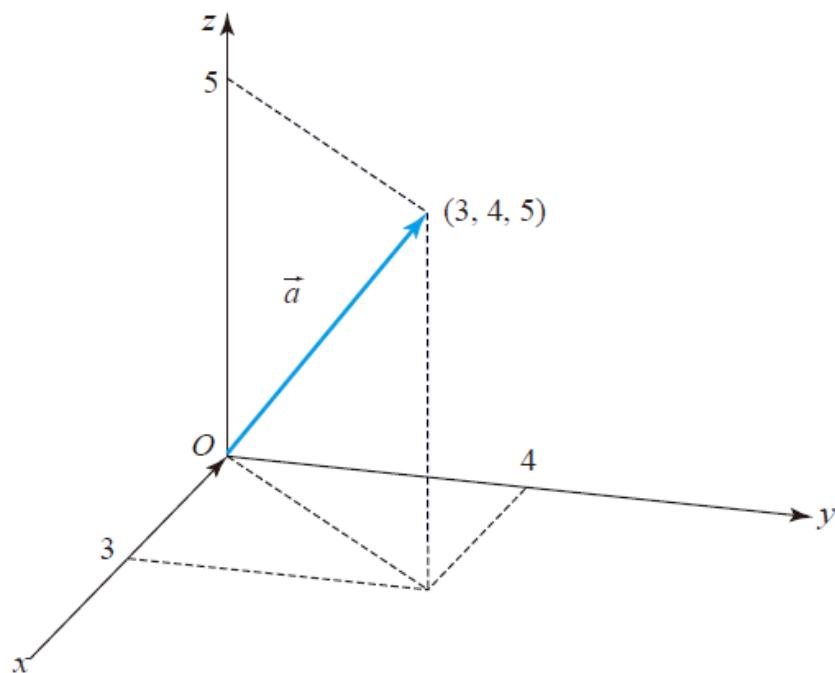
라 하자.



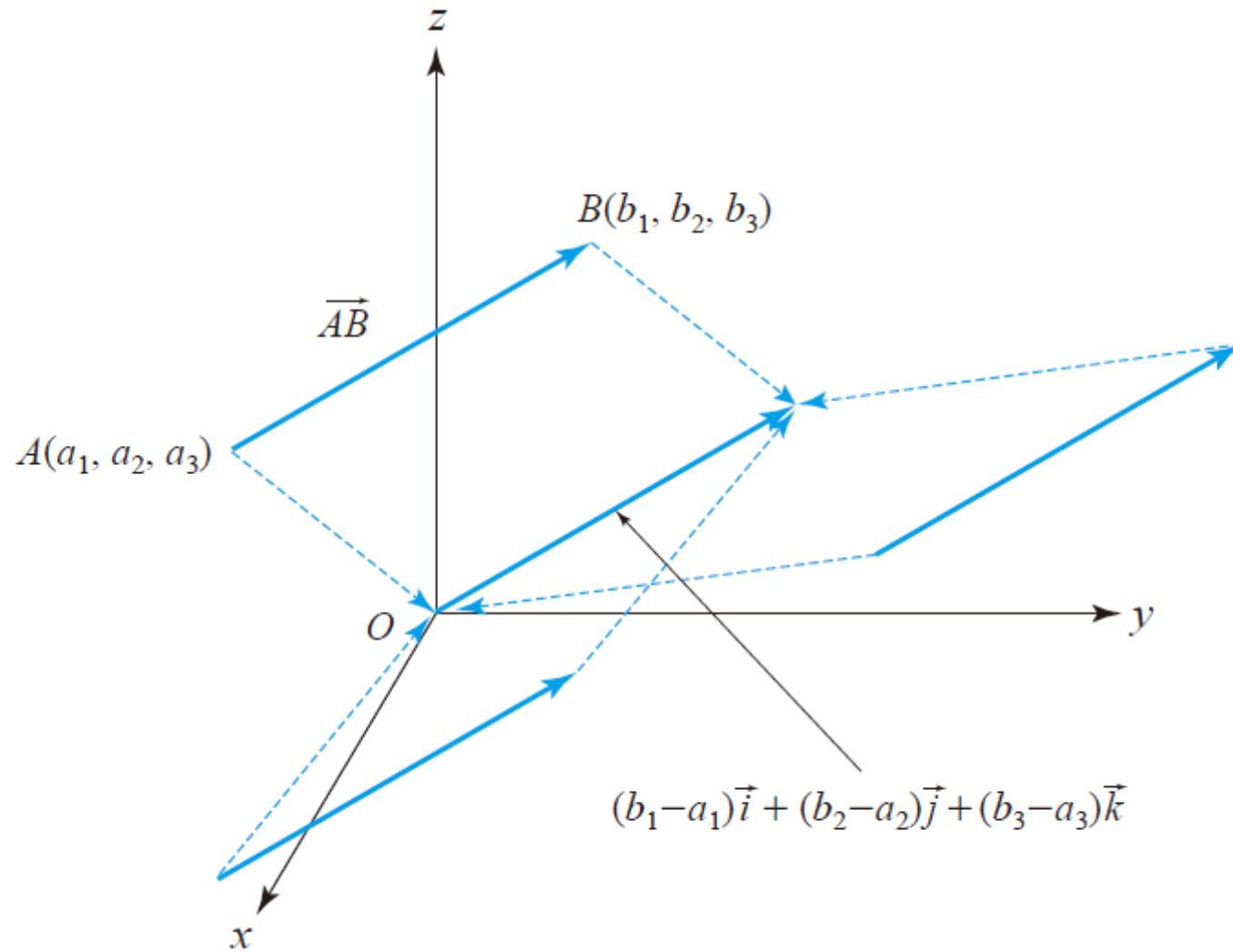


결국 좌표공간에서 원점을 시점으로 하는 모든 벡터는 세 벡터의 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 의 결합으로 표시되고, 한 벡터의 성분을 알면 원점을 시점으로 하고 그 성분을 종점으로 하는 한 개의 화살표가 그려진다.

예를 들어, 벡터 $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ 는 다음과 같은 화살표이다.



위치벡터



예제 2.1.2 다음 두 점을 연결하는 벡터 \overrightarrow{AB} 를 i, j, k 를 이용하여 나타내라.

- (1) $A(2, 3, 0), B(-1, 0, 3)$ (2) $A(-3, 0, 2), B(0, 3, -1)$

[풀이] (1) $\overrightarrow{AB} = (-1 - 2)i + (0 - 3)j + (3 - 0)k = -3i - 3j + 3k.$

(2) $\overrightarrow{AB} = (0 + 3)i + (3 + 0)j + (-1 - 2)k = 3i + 3j - 3k.$

3차원 공간벡터 정리

정의 2.1.1

주어진 실수 α 와 두 벡터 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ 에 대하여 다음을 정의한다.

- (1) 영벡터 $\vec{0}$ 는 모든 성분이 0인 벡터 즉, $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$
- (2) 두 벡터의 상등: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$
- (3) 벡터 \vec{a} 의 크기 $|\vec{a}|$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- (4) 스칼라 곱 $\alpha\vec{a}$

$$\alpha\vec{a} = \alpha a_1\vec{i} + \alpha a_2\vec{j} + \alpha a_3\vec{k}$$

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}$$

- (5) 두 벡터의 합

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

- (6) 두 벡터의 차

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}$$

예제 2.1.3 다음에 답하라.

- (1) $\vec{a} = 2i - 3j + 4k$ 의 크기를 구하라.
- (2) $2i - j + k$ 와 방향이 같고 크기가 1인 벡터를 구하라.
- (3) $\vec{a} = 2i - 3j + k$, $\vec{b} = i + 3k$ 일 때, $4\vec{a} - 3\vec{b}$ 의 크기를 구하라.

정의 2.1.2

두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 0이 아닌 실수 c 에 대하여 $\vec{a} = c\vec{b}$ 일 때, \vec{a} 와 \vec{b} 는 평행이다. $c > 0$ 이면 두 벡터는 같은 방향이고, $c < 0$ 이면 두 벡터는 반대 방향이다.

예제 2.1.4 $\vec{a} = 2i + 3j - k$ 와 $\vec{b} = -4i - 6j + 2k$ 는 평행임을 보여라.

벡터의 내적

정의 2.2.1 벡터의 내적

벡터 $\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$ 와 $\vec{b} = b_1i + b_2j + b_3k$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 을 두 벡터의 **내적** (inner product)이라 하고 다음과 같이 정의 된다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

예제 2.2.1 두 벡터의 내적을 구하라.

- (1) $\vec{a} = 5i - 2j + k$, $\vec{b} = i + k$
- (2) $\vec{a} = -i + 2j + k$, $\vec{b} = 2i + 3j - 4k$

벡터 내적의 성질

정리 2.2.1 내적의 성질

벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 와 스칼라 α, β 에 대하여 다음이 성립한다.

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- (2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- (3) $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b})$
- (4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

예제 2.2.2 두 벡터 \vec{a} 와 \vec{b} 가 다음을 만족할 때,

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = 3, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

- (1) $|\vec{a} + \vec{b}|$ 의 값을 구하라. (2) $|\vec{a} - \vec{b}|$ 의 값을 구하라.

내적의 기하학적 의미

정리 2.2.2 내적의 기하학적 의미

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ 가 시점에서 이루는 사잇각을 θ 라 하면 다음이 성립한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

정의 2.2.2

두 벡터의 사잇각이 $\frac{\pi}{2}$ 일 때, 두 벡터는 [직교](#)한다고 한다.

정리 2.2.3

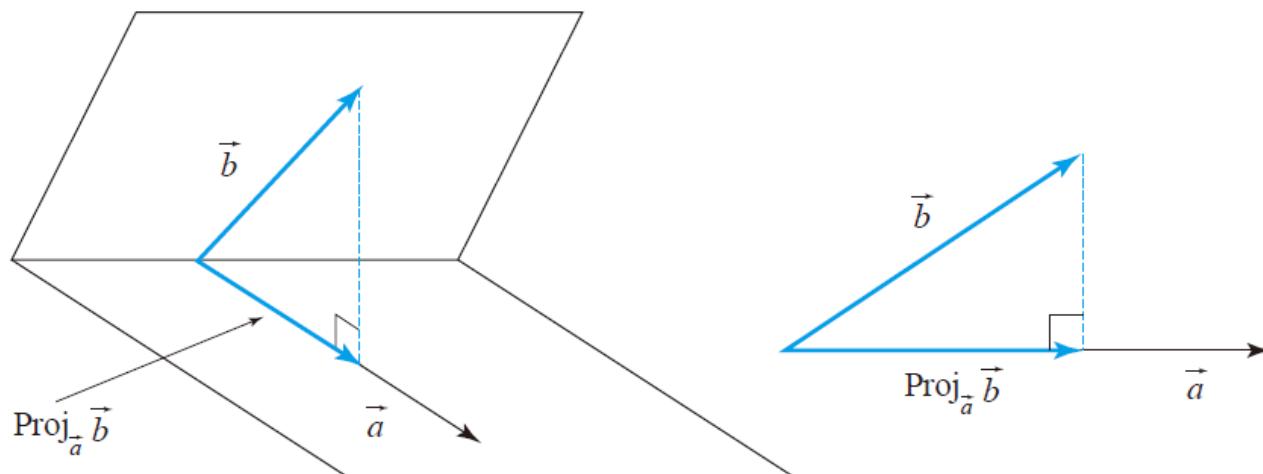
- (1) 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a} 와 \vec{b} 가 직교하기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이다.
- (2) 두 벡터 \vec{a} 와 \vec{b} 의 교각 θ 의 크기가 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ 이기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

예제 2.2.3 다음 주어진 두 벡터의 직교 여부를 밝히고, 직교하지 않는 경우는 교각 θ 의 범위를 구하라.

$$(1) \vec{a} = i + 2k, \vec{b} = 2i - 3k \quad (2) \vec{a} = 2i - j + 5k, \vec{b} = 3i + j - k$$

정의 2.2.3

영벡터가 아니고 평행하지 않은 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 벡터 \vec{b} 를 벡터 \vec{a} 로 투사시킨 벡터를 “벡터 \vec{b} 의 \vec{a} 위로의 정사영벡터(projection)”라 하고 $\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ 로 나타낸다.



정리 2.2.4

영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a} 와 \vec{b} 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

예제 2.2.4 다음 주어진 벡터에 대하여 $\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ 와 $\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ 를 구하라.

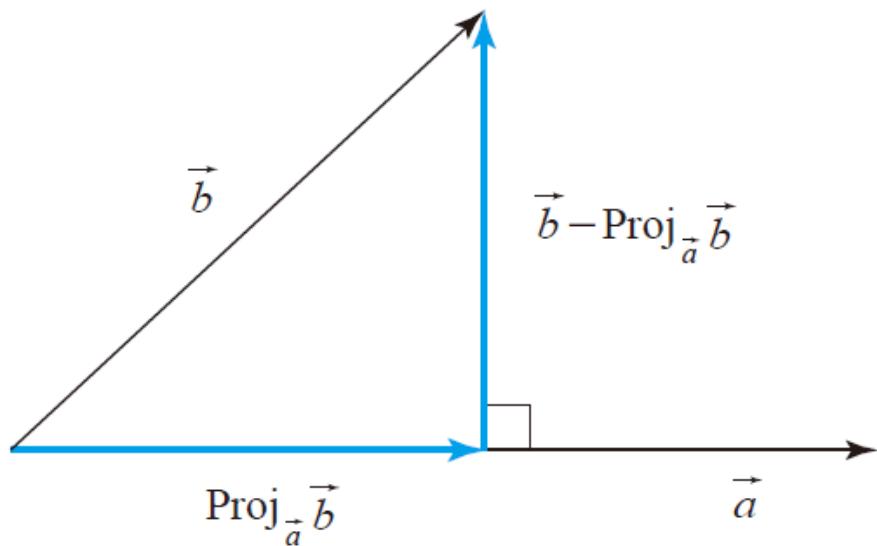
$$(1) \vec{a} = 3i + 2j - 2k, \vec{b} = 2i + 2j + k$$

$$(2) \vec{a} = -3i - 2j + k, \vec{b} = i + j - 2k$$

벡터의 분해

$$\vec{b} = \text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b} + (\vec{b} - \text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b})$$

$$\vec{a} = \text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} + (\vec{a} - \text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a})$$



벡터의 외적

정의 2.3.1

두 벡터 $\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$, $\vec{b} = b_1i + b_2j + b_3k$ 에 대하여 $\vec{a} \times \vec{b}$ 는 \vec{a} 와 \vec{b} 의 외적 (cross product)이라 하고 다음과 같이 정의 된다.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

예제 2.3.1 $\vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ 이고 $\vec{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 일 때, 다음 연산을 시행하라.

(1) $\vec{a} \times \vec{a}$

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$

(3) $\vec{b} \times \vec{a}$

(4) $\vec{b} \times \vec{b}$

외적의 대수적 성질

정리 2.3.1 외적의 대수적 성질

벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 가 공간벡터이고 α 가 상수일 때, 다음이 성립한다.

$$(1) \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(2) (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$$

$$(3) \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

$$(4) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(5) |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

예제 2.3.2 $\vec{a} = -i + 3j + 2k$, $\vec{b} = 2i + 3k$ 에 대하여 $\vec{a} \times \vec{b}$ 와 방향이 같은 단위벡터를 구하라.

외적의 기하학적 의미

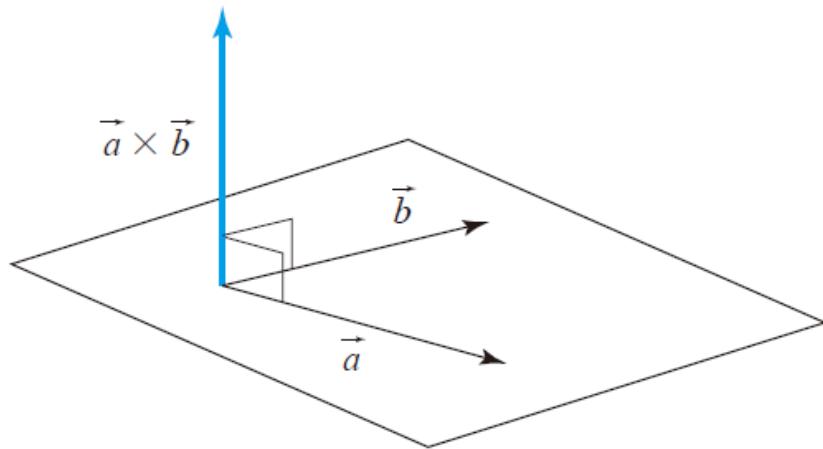
정리 2.3.2 외적의 기하학적 의미

벡터 \vec{a} 와 \vec{b} 가 공간벡터일 때 다음이 성립한다.

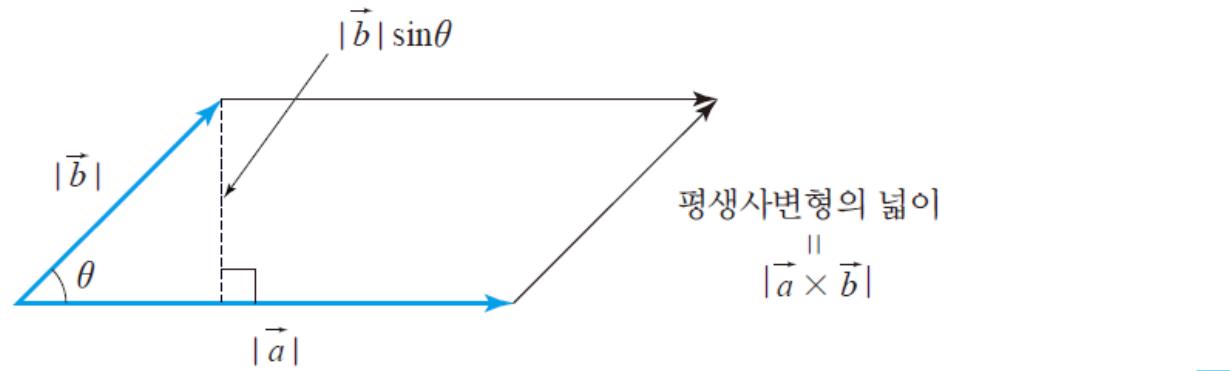
- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ 는 \vec{a} 와 \vec{b} 에 동시에 직교한다.
- (2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, (단 θ 는 \vec{a} 와 \vec{b} 의 사잇각)
- (3) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 는 \vec{a} 와 \vec{b} 를 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이이다.
- (4) \vec{a} 와 \vec{b} 가 평행하기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

참고 (1)와 (2)의 기하학적 의미를 알아보면 다음과 같다.

1. (1)에서 $\vec{a} \times \vec{b}$ 는 그림과 같이 \vec{a} 와 \vec{b} 를 품는 평면에 직교하는 벡터이다.



2. (2)에서 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 는 아래 그림에서와 같이 벡터 \vec{a} 와 \vec{b} 를 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 나타낸다.



예제 2.3.3 $\vec{a} = 2i - j + k$, $\vec{b} = 4i + 2j - k$ 모두에 직교하는 벡터를 구하라.

예제 2.3.4 다음 두 벡터를 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 구하라.

(1) $\vec{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\vec{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(2) $\vec{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\vec{b} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

예제 2.3.5 세 점 $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(1, 1, -1)$ 을 꼭짓점으로 갖는 평행사변형의 넓이를 구하라.

예제 2.3.6 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하라.

- (1) $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$
- (2) $A(1, 0, 1), B(-1, 1, 2), C(2, -3, 0)$

예제 2.3.7 주어진 두 벡터가 평행인지의 여부를 판단하라.

$$(1) \vec{a} = 2i - j + 3k, \vec{b} = -6i + 3j - 9k$$

$$(2) \vec{a} = i, \vec{b} = 3k$$

정의 2.3.2

세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 의 삼중적이라 한다.

예제 2.3.8 $\vec{a} = 2i - j + k, \vec{b} = 3i + 2j - k, \vec{c} = i - 2k$ 에서 $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ 를 구하라.

삼중적의 계산은 행렬식과의 관계

정리 2.3.3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

예제 2.3.9 $\vec{a} = 2i - j + k$, $\vec{b} = 3i + 2j - k$, $\vec{c} = i - 2k$ 일 때, 행렬식을 다음을 구하라.

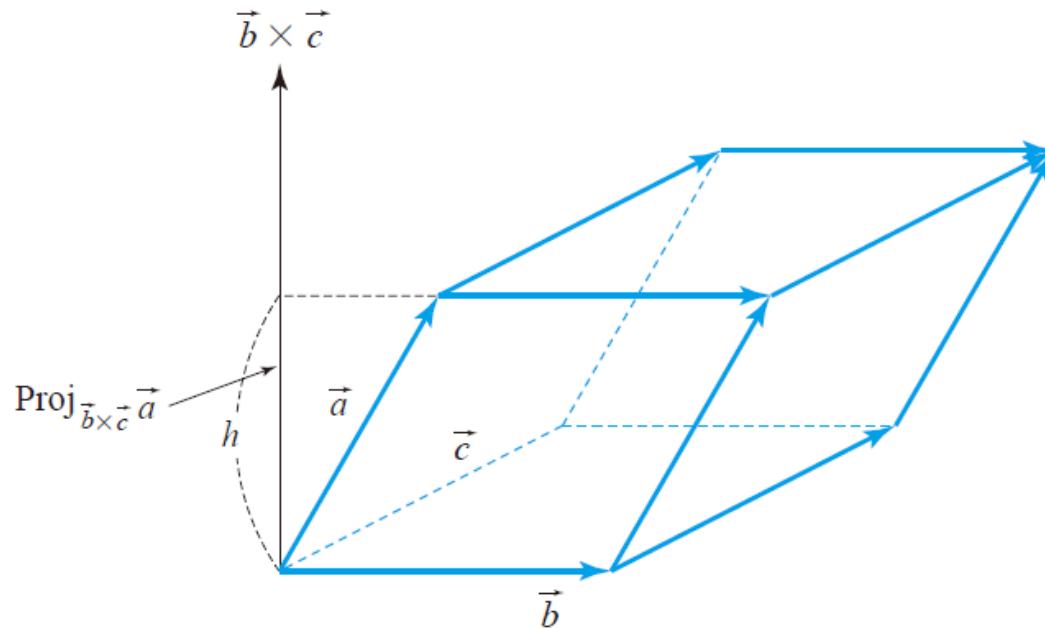
(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$

(2) $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

정리 2.3.4 삼중적의 성질

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$

(2) $|\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$ 는 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 를 이웃 변으로 하는 평행육면체의 부피이다.



예제 2.3.10 다음 세 벡터를 이웃 변으로 하는 평행육면체의 부피를 구하라.

$$\vec{a} = i - k, \quad \vec{b} = -2i + j - 3k, \quad \vec{c} = i - j + k$$

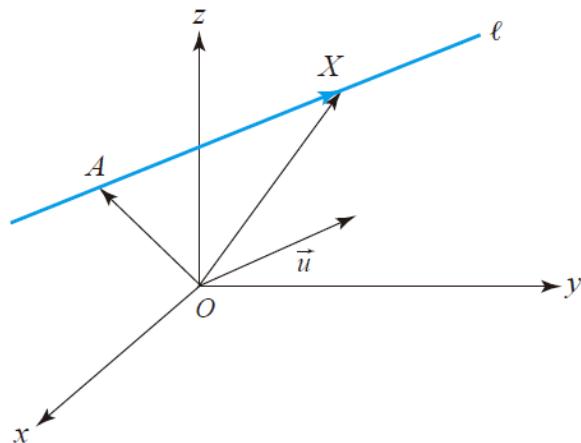
직선과 평면의 방정식

좌표평면 또는 공간에서 특정한 조건을 만족하는 직선 위에 있는 점들에 관한 식을 “[직선의 방정식](#)”이라고 하고, 주어진 직선에 평행한 벡터를 [방향벡터](#)라 한다. 평면에서와 같이 공간에서도 다음 두 요소, 즉,

“지나는 한 점과 방향벡터” 또는 “지나는 두 점”

에 의하여 유일한 직선이 결정된다.

먼저 한 점 $A(a_1, a_2, a_3)$ 를 지나고 방향벡터 $\vec{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ 인 직선 ℓ 의 방정식을 구하여 보자. 이 직선 ℓ 위의 임의의 점을 $X(x, y, z)$ 라 하면



예제 2.4.1 점 $(2, -3, 1)$ 을 지나고 $2i + 3j - k$ 에 평행한 직선에 대하여 벡터방정식을 구하라.

예제 2.4.2 점 $(3, -2, 4)$ 를 지나고 $-2i + 3k$ 에 평행한 직선의 매개정식을 구하라.

예제 2.4.3 두 점 $(2, -1, 1)$, $(1, -1, 2)$ 를 지나는 직선의 대칭방정식을 구하라.

예제 2.4.4 두 직선 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ 와 $\frac{x}{-1} = y-3 = \frac{x-4}{5}$ 가 이루는 사잇각을 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하라.

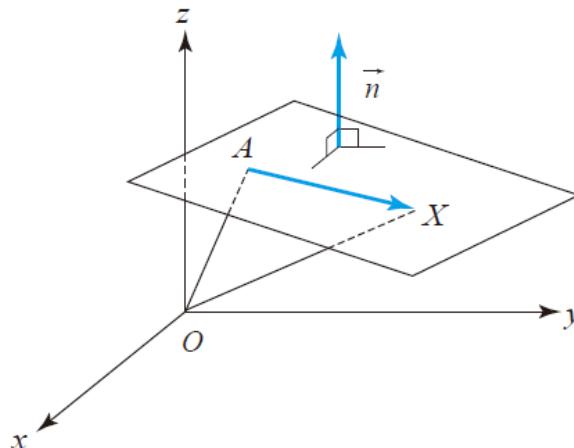
평면의 방정식

평면의 방정식

좌표공간에서 일정한 조건을 만족하는 평면의 위의 점을 나타내는 식을 **평면의 방정식**이라 하고. 주어진 평면에 직교하는 벡터를 **법선벡터**(normal vector)라 한다. 평면은 다음 요소, 즉

“지나는 한 점과 법선벡터” 또는 “포함하는 세 점”

에 의하여 유일하게 결정된다.



정리 2.4.1

점 $A(a_1, a_2, a_3)$ 를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ 인 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$n_1x + n_2y + n_3z = d \quad (\text{단, } d = a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3)$$

예제 2.4.5 점 $A(2, 3, -2)$ 을 지나고 $4i - 3j + 2k$ 에 수직인 평면의 방정식을 구하라.

예제 2.4.6 세 점 $A(2, 0, 0)$, $B(1, 2, 4)$, $C(1, -2, -1)$ 을 포함하는 평면의 방정식을 구하라.

예제 2.4.7 평면 $2x - y - z = 3$ 와 $2x + 3z = 5$ 가 만나서 이루는 사잇각을 구하라.

점과 평면과의 거리

정리 2.4.2

점과 평면과의 거리

점 $P(p_1, p_2, p_3)$ 와 평면 $ax + by + cz = d$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|ap_1 + a_2p_2 + ap_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

점과 평면과의 거리

예제 2.4.8 점 $(3, -1, 2)$ 와 평면 $x - 2y + 3z = 4$ 사이의 거리를 구하라.

3. 도함수 (Differentiation)

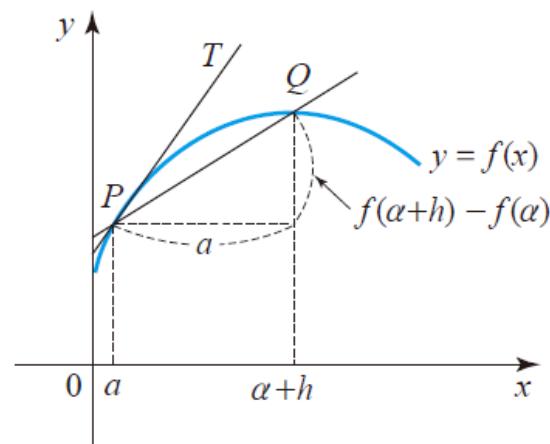
평균변화률

정의 5.1.1

함수 f 에서 x 의 값이 정의역의 한 점 a 에서 $a+h$ 까지 변할 때, f 의 평균변화율은

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

로 정의된다.



함수의 극한

정의 4.1.1 좌극한과 우극한

주어진 함수 $f(x)$ 와 실수 a 에서

- (1) x 가 a 의 왼쪽에서 a 로 가까이 접근 할 때, 이에 대응하는 함수값 $f(x)$ 가 일정한 실수 L 로 접근하면

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

로 쓰고, L 을 a 에서 $f(x)$ 의 **좌극한**이라 한다.

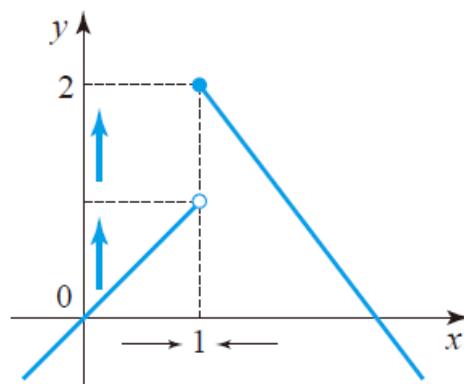
- (2) x 가 a 의 오른쪽에서 a 로 가까이 접근 할 때, 이에 대응하는 함수값 $f(x)$ 가 일정한 실수 M 로 접근하면

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M$$

로 쓰고, M 을 a 에서 $f(x)$ 의 **우극한**이라 하다.

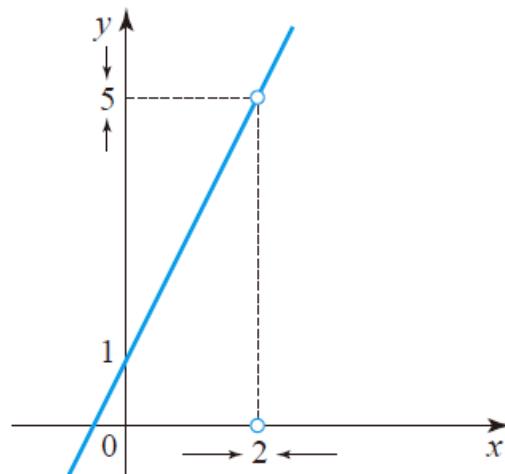
다음과 같이 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프를 생각해보자.

$$f(x) = \begin{cases} x & , x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$



x 가 왼쪽에서 1로 접근하면 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$ 는 1로 접근하고, x 가 오른쪽에서 1로 접근하면 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$ 는 2로 접근한다.

함수 $f(x) = 2x + 1$ 의 그래프를 생각해 보자.



x 가 2의 왼쪽에서 가까이 접근하면 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$ 는 5로 가까이 접근하고, x 가 2의 오른쪽에서 가까이 접근해도 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$ 는 5로 가까이 접근하는 것을 알 수 있다.

정의 4.1.2 좌극한과 우극한

x 가 c 의 왼쪽에서 접근하든 오른쪽에서 접근하든 동일한 실수 L 로 접근하면

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

로 쓰고, L 을 c 에서 $f(x)$ 의 극한이라 한다. 또한 극한이 존재하지 않으면 발산한다고 한다.

정의 5.1.2

함수 f 의 정의역에 속하는 a 에 대하여 극한

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면 f 는 a 에서 미분가능하다고 하고, 이 극한 값을 a 에서 f 의 미분계수 또는 순간변화율이라 하고 $f'(a)$ 로 쓴다. 또 함수 f 의 정의역의 모든 점에서 미분가능할 때 f 를 미분가능한 함수라 부른다.

참고 $a + h = x$ 로 치환하면 다음이 성립함을 안다.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



예제 5.1.1 $f(x) = x^2 - 3$ 일 때, $x = 1$ 에서 $x = 1.5$ 까지 변할 때 f 의 평균변화율을 구하라.

예제 5.1.2 $f(x) = x^2 + 1$ 위의 점 $P(2, 5)$ 에서 접선의 기울기를 구하고, 곡선에 접하는 접선의 방정식을 구하라.

정의 5.1.3

함수 $y = f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 f 의 미분가능한 모든 점 x 를 정의역으로 하여 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

또 주어진 함수의 도함수를 구하는 것을 “[미분한다](#)”라고 한다.

예제 5.1.3 $f(x) = x^2 + 1$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 정의에 의하여 구하고 곡선 위의 점 $(-2, 5)$ 와 점 $(1, 2)$ 에서 접선의 기울기를 구하라.

예제 5.1.4 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 의 도함수를 정의에 의하여 구하고, 함수의 그래프 위의 점 (4, 2) 와 점 (1,1)에서 접선의 기울기를 구하라.

정의 5.1.4

함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 **좌도함수** $f'_-(a)$ 와 **우도함수** $f'_+(a)$ 는 각각 다음과 같이 정의 된다.

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

함수의 연속

정의 4.5.2

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ 일 때 f 는 c 에서 좌연속이라 하고, 또 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ 일 때 f 는 c 에서 우연속이라 한다.

예제 4.5.4 다음과 같이 정의된 함수 f 는 $x = 3$ 에서 불연속이지만 우연속임을 보여라.

$$f(x) = [x], [x] \text{는 } x \text{보다 크지 않은 최대정수}$$

정의 4.5.3

함수 f 가 (a, b) 의 모든 점에서 연속이면 f 는 개구간 (a, b) 에서 연속이라 한다. 또 개구간 (a, b) 의 모든 점에서 연속이고 a 에서 우연속이고 b 에서 좌연속이면 f 는 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이라고 한다.

정의 5.1.5

- (1) 함수 f 가 개구간 (a, b) 의 모든 점에서 미분가능이면 함수 f 는 구간 (a, b) 에서 미분가능이라 한다.
- (2) 함수 f 가 개구간 (a, b) 의 모든 점에서 미분가능하고 a 에서 우도함수와 b 에서 좌도함수가 존재하면 f 는 폐구간 $[a, b]$ 에서 미분가능이라 한다.

예제 5.1.5에서 $f(x) = |x|$ 은 $x = 0$ 에서 연속이지만 미분불능임을 보았다. 다음은 미분가능성은 연속이기 위한 충분조건임을 보여준다.

정리 5.1.1

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능이면 $f(x)$ 는 a 에서 연속이다.

예제 5.1.6 $f(x) = x^2 + 1$ 일 때 $f'(x) = 2x$ 임을 이용하여 2계 도함수 $f''(x)$ 를 구하라.

미분법

정리 5.2.1

$f(x) = k$ (k 는 상수)이면 $f'(x) = 0$ 이다.

[증명] $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$



예제 5.2.1 다음 함수를 미분하라.

- (1) $f(x) = e$ (2) $f(x) = 4$ (3) $f(x) = \pi^3$

정리 5.2.2

양의 정수 n 에 대하여 $f(x) = x^n \diamond$ 면 $f'(x) = nx^{n-1} \diamond$ 다.

예제 5.2.2 다음 함수를 미분하라.

$$(1) \ f(x) = x^5$$

$$(2) \ f(x) = x^{20}$$

정리 5.2.3

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 미분가능한 함수이고 k 가 상수일 때 다음이 성립한다.

$$(1) (kf)'(x) = kf'(x)$$

$$(2) (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(3) (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(4) (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(5) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

예제 5.2.3 주어진 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = 3x^4$$

$$(2) \ y = 5x^4 - 2x^3$$

예제 5.2.3 주어진 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = 3x^4$$

$$(2) \ y = 5x^4 - 2x^3$$

예제 5.2.4 주어진 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = (4x^3 - 1)(x^2 + 3x)$$

$$(2) \ y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2}$$

정리 5.2.4

$n \in \mathbb{N}$ 일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

예제 5.2.5 다음에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

$$(1) \ y = x^{-7}$$

$$(2) \ y = \frac{1}{x^4}$$

4. 도함수 (Differentiation)

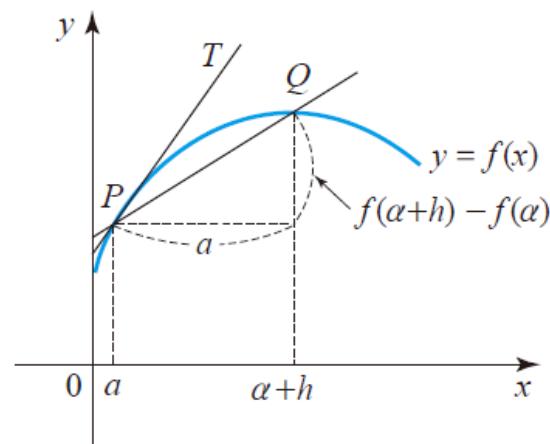
평균변화률

정의 5.1.1

함수 f 에서 x 의 값이 정의역의 한 점 a 에서 $a+h$ 까지 변할 때, f 의 평균변화율은

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

로 정의된다.



미분계수 또는 순간변화률

정의 5.1.2

함수 f 의 정의역에 속하는 a 에 대하여 극한

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면 f 는 a 에서 **미분가능**하다고 하고, 이 극한 값을 a 에서 f 의 **미분계수** 또는 **순간변화율**이라 하고 $f'(a)$ 로 쓴다. 또 함수 f 의 정의역의 모든 점에서 미분가능할 때 f 를 **미분가능한 함수**라 부른다.

참고 $a + h = x$ 로 치환하면 다음이 성립함을 안다.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

예제 5.1.1 $f(x) = x^2 - 3$ 일 때, $x = 1$ 에서 $x = 1.5$ 까지 변할 때 f 의 평균변화율을 구하라.

예제 5.1.2 $f(x) = x^2 + 1$ 위의 점 $P(2, 5)$ 에서 접선의 기울기를 구하고, 곡선에 접하는 접선의 방정식을 구하라.

도함수

정의 5.1.3

함수 $y = f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 f 의 미분가능한 모든 점 x 를 정의역으로 하여 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

또 주어진 함수의 도함수를 구하는 것을 “**미분한다**”라고 한다.

예제 5.1.3 $f(x) = x^2 + 1$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 정의에 의하여 구하고 곡선 위의 점 $(-2, 5)$ 와 점 $(1, 2)$ 에서 접선의 기울기를 구하라.

예제 5.1.4 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 의 도함수를 정의에 의하여 구하고, 함수의 그래프 위의 점 (4, 2) 와 점 (1,1)에서 접선의 기울기를 구하라.

정의 5.1.4

함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 **좌도함수** $f'_-(a)$ 와 **우도함수** $f'_+(a)$ 는 각각 다음과 같이 정의 된다.

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

정의 5.1.5

- (1) 함수 f 가 개구간 (a, b) 의 모든 점에서 미분가능이면 함수 f 는 구간 $[a, b]$ 에서 미분가능이라 한다.
- (2) 함수 f 가 개구간 (a, b) 의 모든 점에서 미분가능하고 a 에서 우도함수와 b 에서 좌도함수가 존재하면 f 는 폐구간 $[a, b]$ 에서 미분가능이라 한다.

예제 5.1.5에서 $f(x) = |x|$ 은 $x = 0$ 에서 연속이지만 미분불능임을 보았다. 다음은 미분가능성은 연속이기 위한 충분조건임을 보여준다.

정리 5.1.1

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능이면 $f(x)$ 는 a 에서 연속이다.

예제 5.1.6 $f(x) = x^2 + 1$ 일 때 $f'(x) = 2x$ 임을 이용하여 2계 도함수 $f''(x)$ 를 구하라.

미분법

정리 5.2.1

$f(x) = k$ (k 는 상수)이면 $f'(x) = 0$ 이다.

[증명] $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$



예제 5.2.1 다음 함수를 미분하라.

- (1) $f(x) = e$ (2) $f(x) = 4$ (3) $f(x) = \pi^3$

정리 5.2.2

양의 정수 n 에 대하여 $f(x) = x^n \diamond$ 면 $f'(x) = nx^{n-1} \diamond$ 다.

예제 5.2.2 다음 함수를 미분하라.

$$(1) \ f(x) = x^5$$

$$(2) \ f(x) = x^{20}$$

정리 5.2.3

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 미분가능한 함수이고 k 가 상수일 때 다음이 성립한다.

$$(1) (kf)'(x) = kf'(x)$$

$$(2) (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(3) (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(4) (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(5) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

예제 5.2.3 주어진 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = 3x^4$$

$$(2) \ y = 5x^4 - 2x^3$$

예제 5.2.4 주어진 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = (4x^3 - 1)(x^2 + 3x)$$

$$(2) \ y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2}$$

정리 5.2.4

n°] 임의의 정수일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

예제 5.2.5 다음에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

$$(1) \ y = x^{-7}$$

$$(2) \ y = \frac{1}{x^4}$$

연쇄법칙

정리 5.3.1 합성함수의 미분법(연쇄법칙)

함수 $g(x)$ 가 미분가능하고 $f(x)$ 가 $g(x)$ 의 치역을 포함하는 영역에서 미분가능하면 합성함수 $y = (f \circ g)(x)$ 도 미분가능하고, $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에서 $u = g(x)$ 라 놓으면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

또는

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

예제 5.3.1 $y = (x^2 - 5x + 10)^{30}$ 의 도함수를 구하라.

예제 5.3.2 $f(x) = \frac{1}{3x^4 + x^2 - 4}$ 일 때 $f'(x)$ 를 구하라.

음함수 (Implicit function) 의 미분

정리 5.3.2

음함수 $F(x, y) = 0$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구할 때는 y 를 x 의 함수로 보고 양변을 x 에 관하여 미분한 다음 $\frac{dy}{dx}$ 를 좌변으로 분리하면 된다.

예제 5.3.4 방정식 $y^3 + 2y - x^2 = 0$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

예제 5.3.4 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 (3, 4)에서 접선의 기울기와 접선의 방정식을 구하라.

예제 5.3.5 $x^2 - xy + y^2 = 10$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

역함수 (Inverse function)의 미분

정리 5.3.3 역함수의 미분법

미분가능한 함수 $y = f(x)$ 의 역함수 $x = f^{-1}(y)$ 가 존재하고 $f'(x) \neq 0$ 이면, $x = f^{-1}(y)$ 도 미분가능이고 다음이 성립한다.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{즉 } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad (\text{단 } y = f(x))$$

예제 5.3.6 다음에 답하라.

(1) $y = x^3 - 2$ 에서 $\frac{dx}{dy}$ 를 구하라.

(2) 함수 $f(x) = x^2 + 3x + 10$ 에 대하여 $(f^{-1})'(5)$ 의 값을 구하라.

매개변수함수의 미분

정리 5.3.4 매개변수 함수의 미분법

$x = f(t)$ 과 $y = g(t)$ 가 t 에 관하여 미분가능이고 $f'(t) \neq 0$ 이면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.

예제 5.3.7 $x = \sqrt{t+1}$, $y = t^2 - 3t + 2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 를 구하고 $t = 3$ 에서 접선의 기울기를 구하라.

정리 5.3.5

r 이 유리수이고 $y = x^r$ 일 때

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$$

이다.

예제 5.3.8 $y = \sqrt{x^2 - x + 4}$ 에서 y' 를 구하라.

예제 5.3.9 $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ 에서 y' 를 구하라.

삼각함수의 미분

정리 5.4.1

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \cosh h = 1$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} = 0$$

정리 5.4.2

$$(1) (\sin x)' = \cos x$$

$$(2) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(3) (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(4) (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(5) (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(6) (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

예제 5.4.1 다음 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = \sin 4x$$

$$(2) \ y = \sin(\sqrt{x} + x)$$

예제 5.4.2 $y = \cos^3 2x$ 의 도함수를 구하라.

예제 5.4.3 다음 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = \tan \sqrt{x}$$

$$(2) \ y = \cot x^2$$

$$(3) \ y = \sec(x^2 + x)$$

$$(4) \ y = \csc \sqrt{x}$$

정리 5.4.3

역삼각함수의 도함수에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1) (\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1)$$

$$(2) (\cos^{-1}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x < 1)$$

$$(3) (\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(4) (\cot^{-1}x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(5) (\sec^{-1}x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad (x > 1)$$

$$(6) (\csc^{-1}x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad (x > 1)$$

예제 5.4.4 다음 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = \sin^{-1}(1 - x)$$

$$(2) \ y = \cos^{-1}(x^2)$$

$$(3) \ y = \tan^{-1}(\sqrt{x})$$

$$(4) \ y = \sec^{-1}(-2x)$$

로그함수의 도함수

정리 5.5.1

$$(1) (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$(2) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

예제 5.5.1 $y = \log_2 (x^3 - 2x + 4)$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

정리 5.5.2

$$(1) \frac{d}{dx}\{\log_a f(x)\} = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$$

$$(2) \frac{d}{dx}\{\ln f(x)\} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

예제 5.5.2 다음에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

$$(1) y = \ln(x^2 + 4)$$

$$(2) \log_3 \sin x$$

$$(1) y = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$$

$$(2) y = \ln\left(x^2 \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\right)$$

예제 5.5.4 다음 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \quad y = \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2(x-1)}$$

$$(2) \quad y = x^2 \sqrt{x+3}$$

예제 5.5.5 실수 a 에 대하여 $y = x^a$ 일 때, $y' = ax^{a-1}$ 임을 보여라.

지수함수의 미분

정리 5.5.2

$$(1) \ (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(2) \ (e^x)' = e^x$$

예제 5.5.6 다음에서 도함수 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

$$(1) \ y = \pi^{\sin x}$$

$$(2) \ y = e^{\cos 2x}$$

정리 5.5.3

$$(1) \frac{d}{dx}\{a^{f(x)}\} = a^{f(x)}f'(x)\ln a$$

$$(2) \frac{d}{dx}\{e^{f(x)}\} = e^{f(x)}f'(x)$$

예제 5.5.7 $y = e^{-3x} \ln x$ 일 때, y' 를 구하라.

예제 5.5.8 $y = x^x$ 일 때 y' 를 구하라.