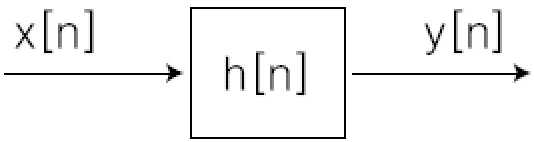
Discrete Transforms – 활용

김성영교수
금오공과대학교
컴퓨터공학과

Section 01 필터링의 개념

필터

- 입력되는 신호의 일부 성분을 제거하거나 일부 특성을 변경하려고 설계된 하나의 시스템



[그림 12-1] 시스템의 개념

필터 종류

- 유한임펄스응답(**Finite Impulse Response: FIR**) 필터
  - 필터의 길이가 한정된 필터
  - 설계가 쉽고, 신호도 쉽게 처리할 수 있음.
- 무한임펄스응답(**Infinite Impulse Response: IIR**) 필터
  - 필터의 길이가 무한정한 필터
  - 설계가 어렵고 이를 처리도 힘들나, 필터의 특성은 더 우수
  - 영상처리에서는 효과적인 필터링의 특성을 만족하면서 선형 시불변 시스템의 특성도 만족하는 **FIR** 필터를 많이 사용함.

컨벌루션

- 임의의 디지털 신호 **x[n]**이 선형 시불변 시스템인 **FIR** 필터에 입력되어 원하는 출력 **y[n]**을 만드는 과정

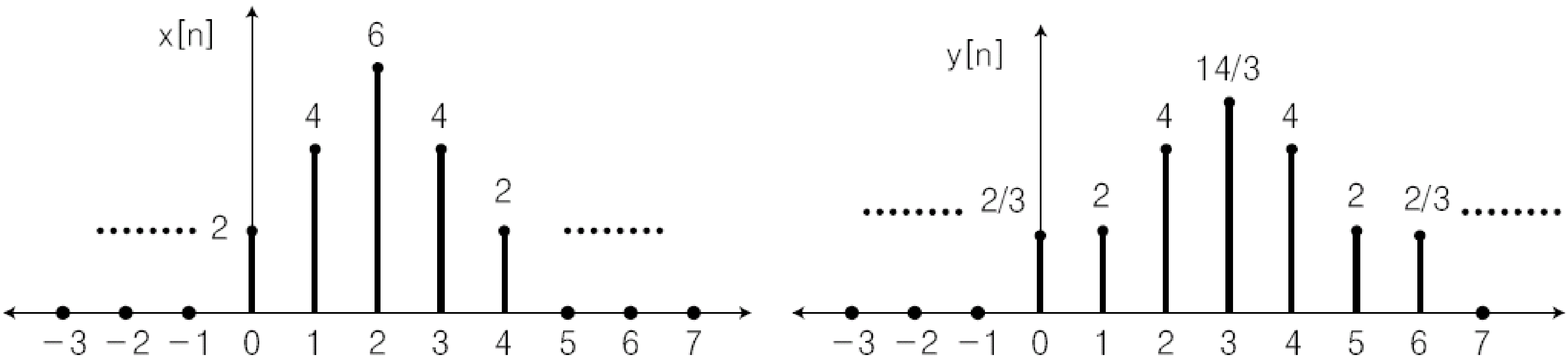
  - 값 **3**개의 평균을 구하는 입출력 관계식

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

  - **[**표**12-1]** 주어진 입력 **x[n]**에서 출력 **y[n]**을 구하는 과정

n	⋯	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	⋯
x[n]	0	0	0	2	4	6	4	2	0	0	0	0
y[n]	0	0	0	2/3	2	4	14/3	4	2	2/3	0	0

컨벌루션(계속)



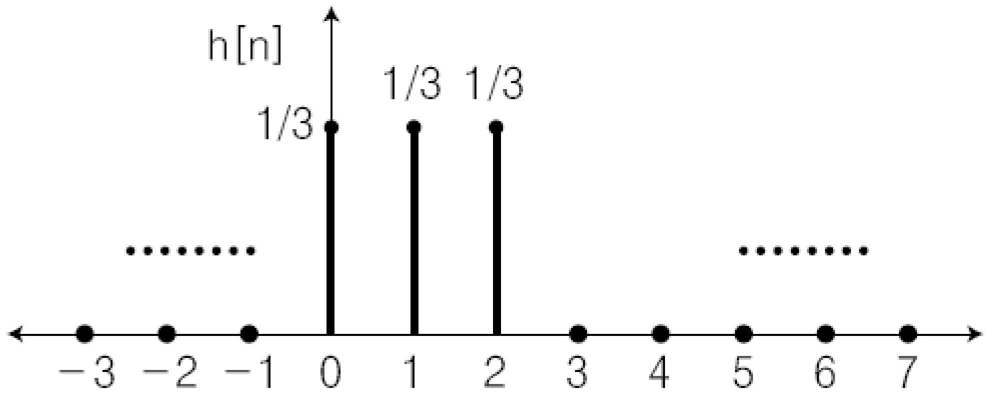
[그림 12-2] 입력 x[n]과 출력 y[n]

- 출력을 얻으려고 사용한 선형 시불변 시스템 **FIR** 필터

$$h[n]=\frac{1}{3}\delta[n]+\frac{1}{3}\delta[n-1]+\frac{1}{3}\delta[n-2]$$

- 여기서 $\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$ 으로 정의

컨벌루션(계속)



[그림 12-3] FIR 필터 h[n]

- 입력 **x[n]**과 **FIR** 필터 **h[n]**과의 관계에서 다음과 같은 출력 **y[n]**

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

  - **M**은 필터의 길이, 현재 사용되는 필터의 길이는 **2**인 컨벌루션
  - 선형 시불변 시스템에 입력되는 신호가 어떤 신호를 출력하는지 결정해줌.

회선 처리를 이용한 영상의 필터링

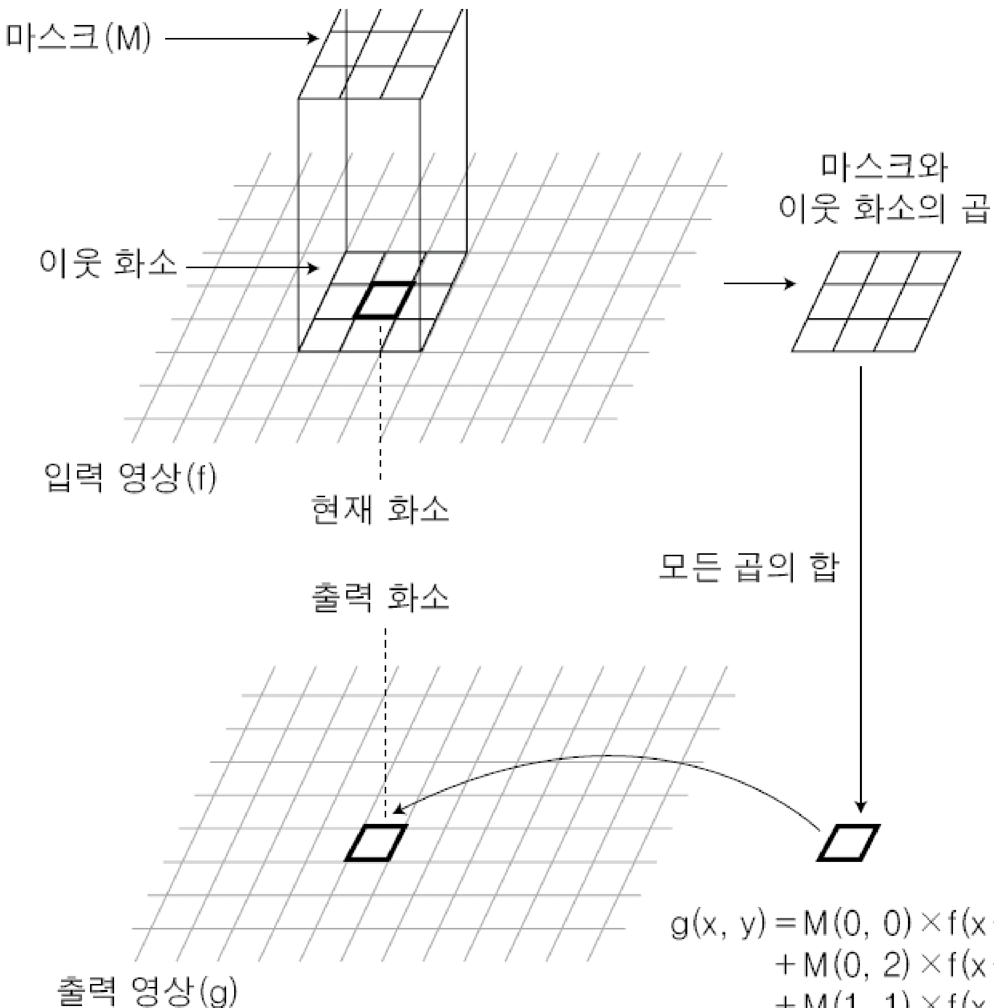
- 필터링을 이용한 영상처리는 2차원의 컨벌루션을 수행하게 됨.
  - 영상의 공간 필터링은 크기가 M×N인 FIR 필터 마스크 h[x, y]와 크기가 M×N인 영상 간에 2차원 컨벌루션을 수행하는 것

$$y[x,y]=\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{N}h[k,l]x[x-k,y-l]$$

    - 사용되는 필터 마스크를 컨벌루션 마스크 또는 회선 마스크라라고 함.
- N×N 회선 마스크는 폭이 N이고 서로 직교하는 1차원 마스크 두 개를 곱하여 생성
  - FIR 필터의 계수가 [1 -2 1]이라고 가정하면, 다음과 같이 3×3의 2차원 회선 마스크 생성 가능

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

회선 처리를 이용한 영상의 필터링(계속)



$$
\begin{aligned}
g(x, y) = {} & M(0, 0) \times f(x-1, y-1) + M(0, 1) \times f(x-1, y) \\
& + M(0, 2) \times f(x-1, y+1) + M(1, 0) \times f(x, y-1) \\
& + M(1, 1) \times f(x, y) + M(1, 2) \times f(x, y+1) \\
& + M(2, 0) \times f(x+1, y-1) + M(2, 1) \times f(x+1, y) \\
& + M(2, 2) \times f(x+1, y+1)
\end{aligned}
$$

[그림 12-4] 영상처리를 위한 2차원 컨벌루션의 동작 과정

공간 필터링(Spatial Filtering)

- 영상에 있는 공간 주파수 대역을 제거하거나 강조하는 필터 처리
- 사용되는 필터의 계수 따라 특정 주파수를 제거하거나 강조하므로, 필터 마스크 또는 회선 마스크의 가중치 선택이 공간 필터의 행동을 결정
- 영상처리에서는 홀수 차원의 정방형 마스크가 사용됨.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

[그림 12-5] 2차원 필터의 계수 또는 회선 마스크

공간 필터링 연산의 분류

- 저주파 통과 필터링
  - 저주파 성분을 남기고 고주파 성분을 제거하는 필터링
- 고주파 통과 필터링
  - 고주파 성분을 남기고 저주파 성분을 제거하는 필터링
- 에지 강화 필터
  - 경계선 검출

저주파 통과 필터링(Low-Pass Filter: LPF)

- 신호 성분 중 저주파 성분은 통과시키고 고주파 성분은 차단하는 필터
- 잡음을 제거하거나 흐릿한 영상을 얻을 때 주로 사용되는 필터
- 고주파 성분을 제거하므로 고주파 차단 필터라고도 함.

$$\frac{1}{9}\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \frac{1}{12}\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \frac{1}{18}\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 10 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

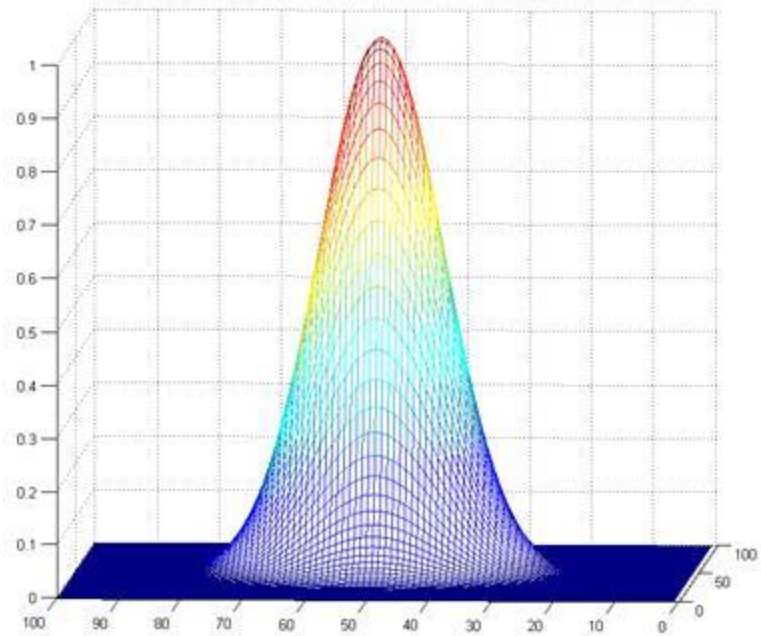
[그림 12-6] 저주파 통과 필터 마스크

  - 저주파 통과 필터링의 마스크는 모든 계수가 양수이고 전체 합이 1인 마스크가 사용됨

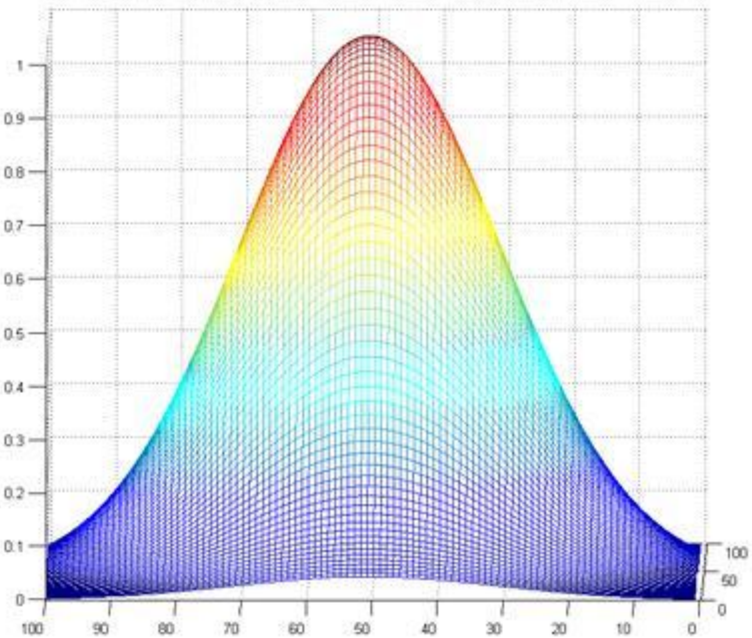
- 가우시안 필터는 가우시안 함수를 표본화하여 마스크의 계수를 결정

$$h(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

저주파 통과 필터링(계속)



$\delta = 4$



$\delta = 9$

[그림 12-7] 2차원 가우시안 함수

저주파 통과 필터링(계속)

(−1, 1)	(0, 1)	(1, 1)
(−1, 0)	(0, 0)	(1, 0)
(−1, −1)	(0, −1)	(1, −1)

1/16 x

1	2	1
2	4	2
1	2	1

[그림 12-8] 가우시안 마스크

170	240	10	80	150
230	50	70	140	160
40	60	130	200	220
100	120	190	210	30
110	180	250	20	90

(a) 입력 영상

저주파
통과 필터

77	86	66	68	59
88	111	109	129	106
67	110	130	150	107
68	131	151	149	86
57	106	108	88	39

(b) 출력 영상

[그림 12-9] 저주파 통과 필터링을 이용한 화소 값의 변화

[실습하기 12-1] 저주파 통과 필터링 프로그램

⑤ 프로그램 실행 결과 영상

- 블러링에서 보았던 바와 같이 영상이 전체적으로 흐려짐.

(a) 원본 영상 (b) 저주파 통과 영상 1 (c) 저주파 통과 영상 2

실제 영상에서 여러 저주파 통과 필터링을 수행한 결과 영상

고주파 통과 필터링 (High-Pass Filter: HPF)

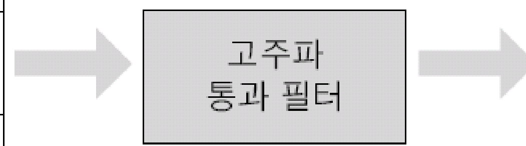
- 신호 성분 중 고주파 성분은 통과시키고 저주파 성분은 차단하는 필터
- 저주파 성분을 차단하므로 저주파 차단 필터라고도 함.
- 고주파 통과 필터링은 영역 처리에서 배운 샤프닝(**Sharpening**)과 같은 처리 방법
- 흐려진 영상을 개선하여서 첨예화하는 결과 영상 생성

$$\frac{1}{9}\times\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

고주파 통과 필터링(계속)

10	10	10	10	10
10	20	20	20	10
10	20	30	20	10
10	20	20	20	10
10	10	10	10	10

(a) 입력 영상



30	10	10	10	30
10	40	20	40	10
10	20	70	20	10
10	40	20	40	10
30	10	10	10	30

(b) 결과 영상

[그림 12-11] 고주파 통과 필터링을 이용한 화소 값의 변화

- 고주파 통과 필터 영상은 저주파 통과 필터를 이용하여 얻을 수 있음.
- 원본 영상에서 저주파 통과 필터링으로 얻은 영상 뺀 차 영상은 고주파 성분만 남게 됨.

$$f_H(x, y) = f(x, y) - f_L(x, y)$$

- **$f_H(x, y)$: 고주파 영상, $f(x, y)$: 원본 영상, $f_L(x, y)$: 저주파 영상**

고주파 통과 필터링(계속)

- 고주파 강조 필터
  - 고주파에 해당하는 세부 정보를 강조하는 반면, 영상에서 중요한 부분인 낮은 공간 주파수의 성분은 손실시키는 고주파 통과 필터의 문제 해결
  - 저주파 영역의 상쇄에 해당하는 부분에 일정량의 이득을 주어 낮은 공간 주파수에 해당하는 성분의 손실을 어느 정도 보상할 수 있음.
- 고주파 강조 필터 생성 방법

$$g(x,y) = Af(x,y) - f_L(x,y) = (A-1)f(x,y) + f(x,y) - f_L(x,y)$$
$$= (A-1)f(x,y) + f_H(x,y)$$

- 고주파 강조 필터 마스크

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \alpha = 9A - 1$$

[그림 12-12] 고주파 강조 필터 마스크

고주파 통과 필터링(계속)

- 샤프닝 필터는 고주파 통과 필터에서 발생하는 낮은 공간 주파수의 성분이 손실되는 문제점을 보완해 주는 회선 마스크
- 샤프닝 필터링된 영상은 원본 영상에 고주파 통과 필터링된 영상을 합한 것과 비슷한 결과를 얻음.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[그림 12-13] 샤프닝 필터 마스크

[실습하기 12-2] 고주파 통과 필터링 프로그램

⑤ 프로그램 실행 결과 영상

- **(b)**는 낮은 주파수 성분이 많이 제거되어 경계선이 확연하게 보임.
- **(c)~(f)**는 영상에서 중요 성분은 그대로 남아 있는 채 경계선 부분이 강조됨.

(a) 원본 영상

(b) 고주파 통과

(c) 고주파 강조($\alpha = 17$)

고주파 성분을 필터링 처리한 결과 영상

(d) 샤프닝 1

(e) 샤프닝 2

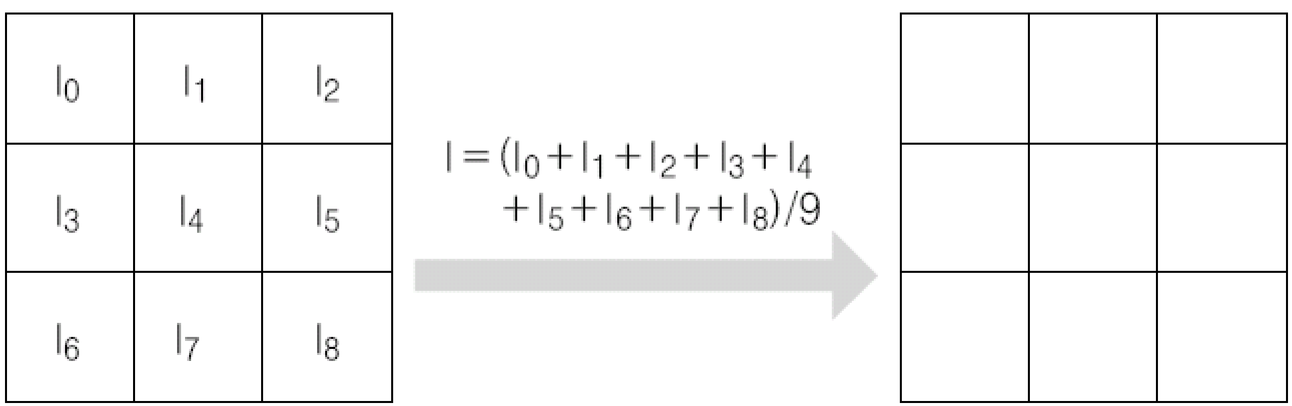
(f) 샤프닝 3

선형 공간 필터링을 이용한 잡음제거 기법

- 저주파 통과 필터를 이용하는 방법
- 회선 마스크의 계수와 곱한 화소의 선형 합으로 연산 수행
- 저주파 통과 필터를 평균 필터라고도 함.

저주파 통과 필터의 동작

- 영상을 흐리게 하는 블러링 처리
- 주변 화소를 평균하므로 저주파 통과 필터가 영상을 흐리게 할 수 있음.
- 저주파 통과 필터를 평균 필터라고도 함.



[그림 12-14] 평균 필터의 원리

[실습하기 12-5] 최대 필터링으로 잡음 제거하는 프로그램

⑤ 프로그램 실행 결과 영상

- 최대 필터링 영상 (b)는 영상의 밝기가 밝아졌고, 최소 필터링 영상 (c)는 영상의 밝기가 어두워졌음. 최대 필터와 최소 필터의 연속적인 수행은 혼합된 임펄스 잡음을 제거할 수 있음. 형태학 처리의 열림 및 닫힘연산과 비슷하게 개방형 필터(Opening Filter)와 폐쇄형 필터(Closing Filter)는 최대와 최소 필터를 순차적으로 수행. 폐쇄형 필터는 최대 필터를 수행한 뒤 최소 필터링이 적용, 개방형 필터는 최소 필터를 수행한 뒤 최대 필터를 적용.

(a) 원본 영상 (b) 최대값 필터링 (c) 최소값 필터링

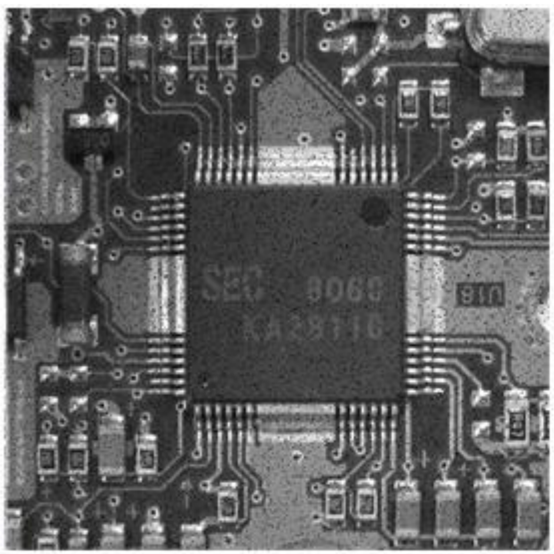
최소/최대 필터 적용 결과

[실습하기 12-3] 평균 필터링으로 잡음 제거하는 프로그램

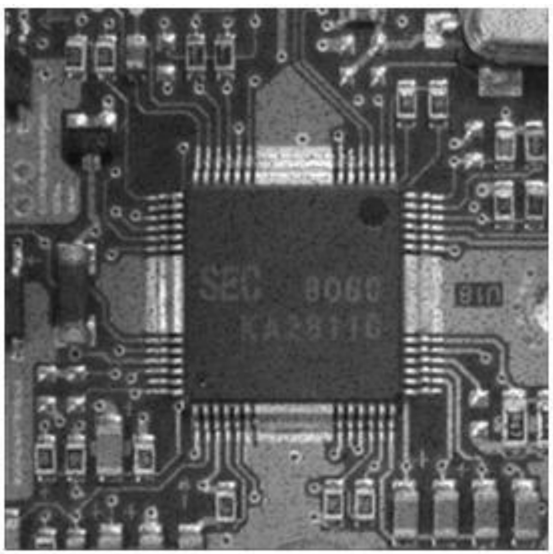
⑤ 프로그램 실행 결과 영상

- (a)는 입력된 원본 영상
- (b)는 입력 영상에 임펄스 잡음을 첨가한 것
- (c)는 평균 필터로 임펄스 잡음의 제거를 시도한 결과 영상

(a) 원본 영상



(b) 잡음 첨가

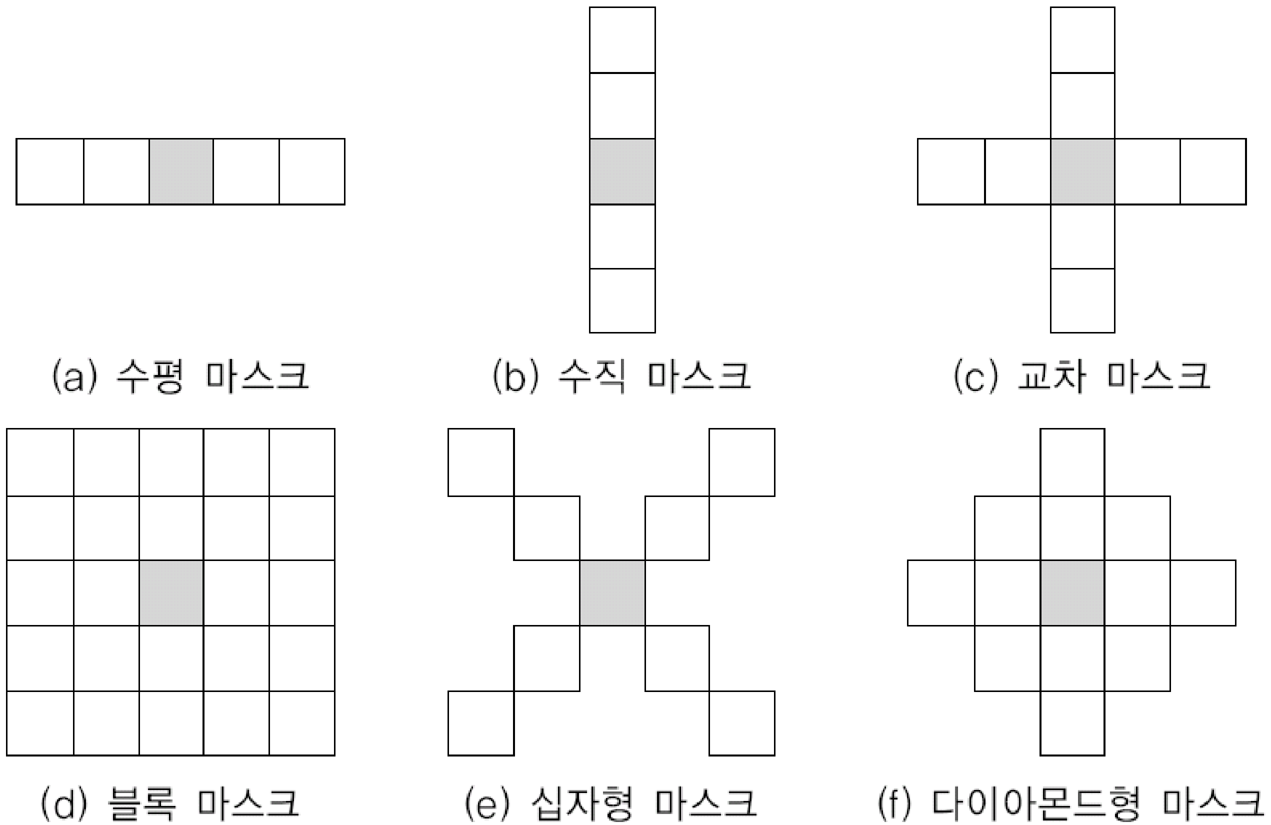


(c) 평균 필터링

평균 필터로 잡음제거한 영상

중간 값 필터링으로 잡음제거

- 중간 값 필터(**Median Filter**, 미디언 필터)는 이웃 화소의 값을 오름차순으로 정렬한 뒤 가운데에 있는 값을 출력 값으로 선택
- 제거하려는 잡음에 따라 중간 값 필터의 마스크도 결정

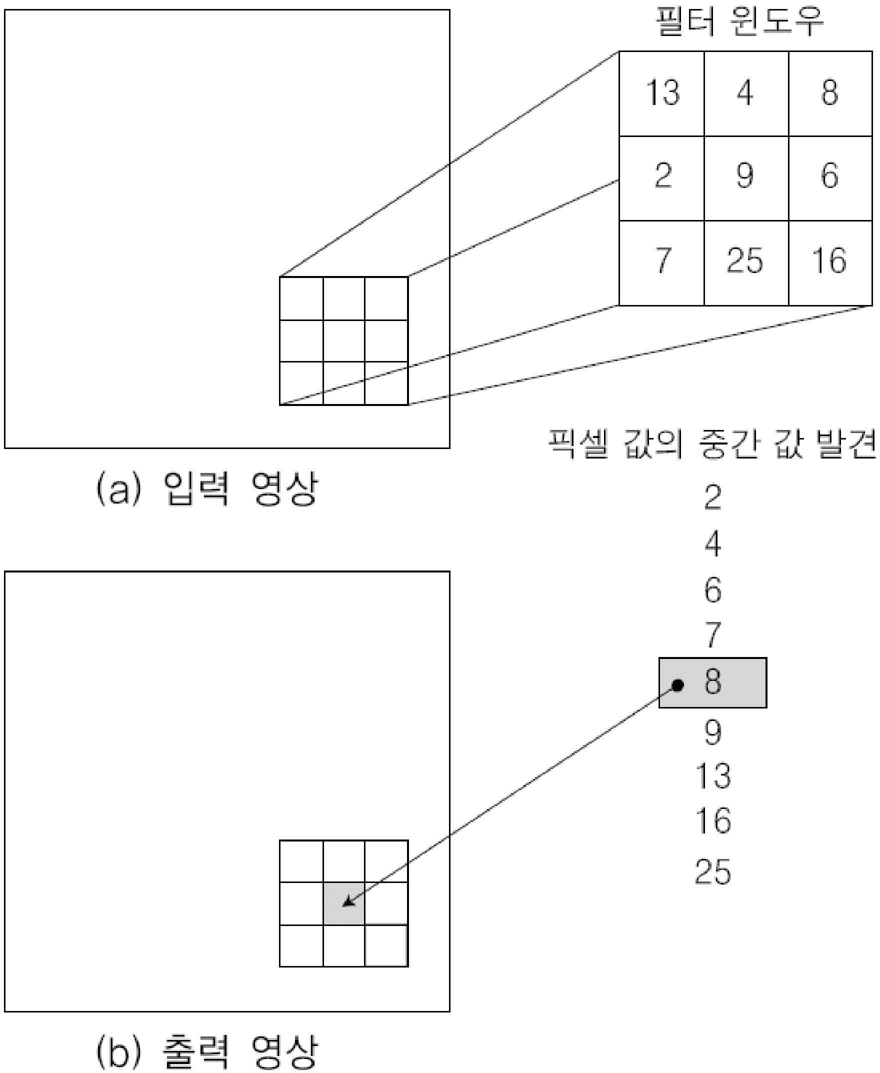


[그림 12-15] 다양한 중간 값 필터 마스크

중간 값 필터의 잡음제거 동작

- 중간 값 필터는 영상에 스파크처럼 급격한 색 변화가 있는 임펄스 잡음을 제거하는 데 사용
- 장점
  - 기존의 평균 필터를 이용한 선형 공간 필터링 방법에 비해 블러링 현상이 적고 객체의 경계를 잘 보존함
  - 즉, 평균 필터를 이용한 방법의 단점을 보완한 방법
- 단점
  - 중간 값을 구하려고 비교하는 과정에서 많은 시간이 소모됨.

중간 값 필터의 잡음제거 동작(계속)

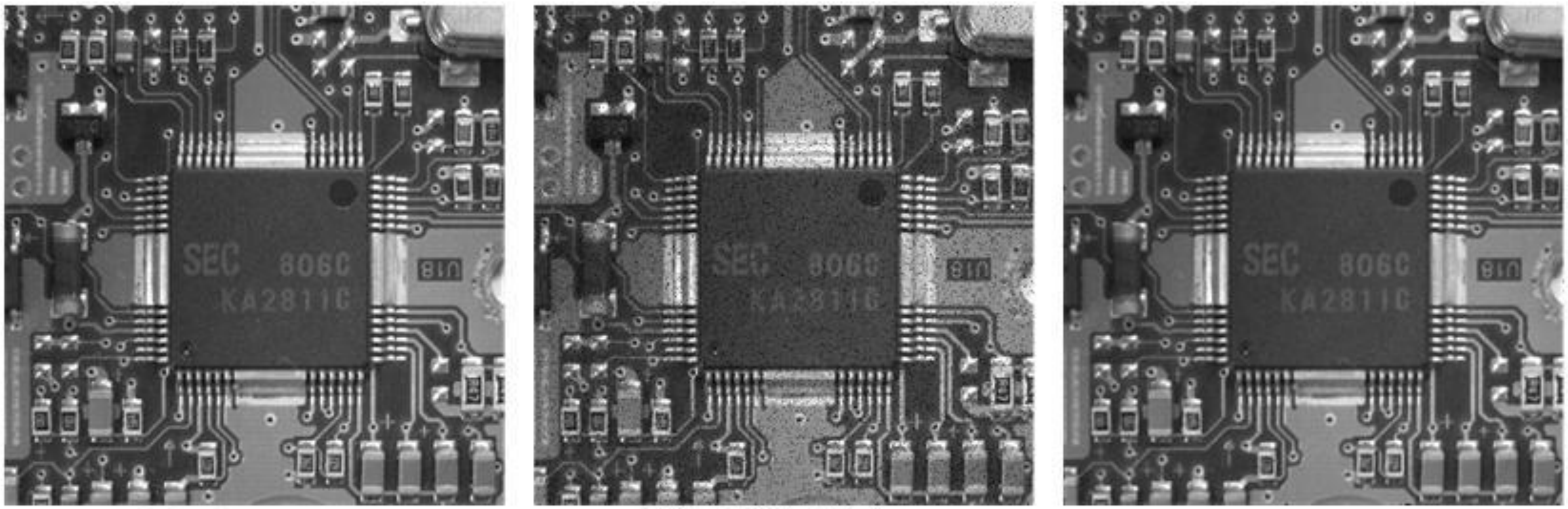


[그림 12-16] 중간 값 필터 회선 마스크의 원리

[실습하기 12-4] 중간 값 필터링으로 잡음 제거하는 프로그램

⑤ 프로그램 실행 결과 영상

- **(b)**는 원본 영상에 임펄스 잡음을 첨가한 것
- **(c)**는 첨가된 임펄스 잡음을 중간 값 필터를 이용하여 제거한 결과 영상

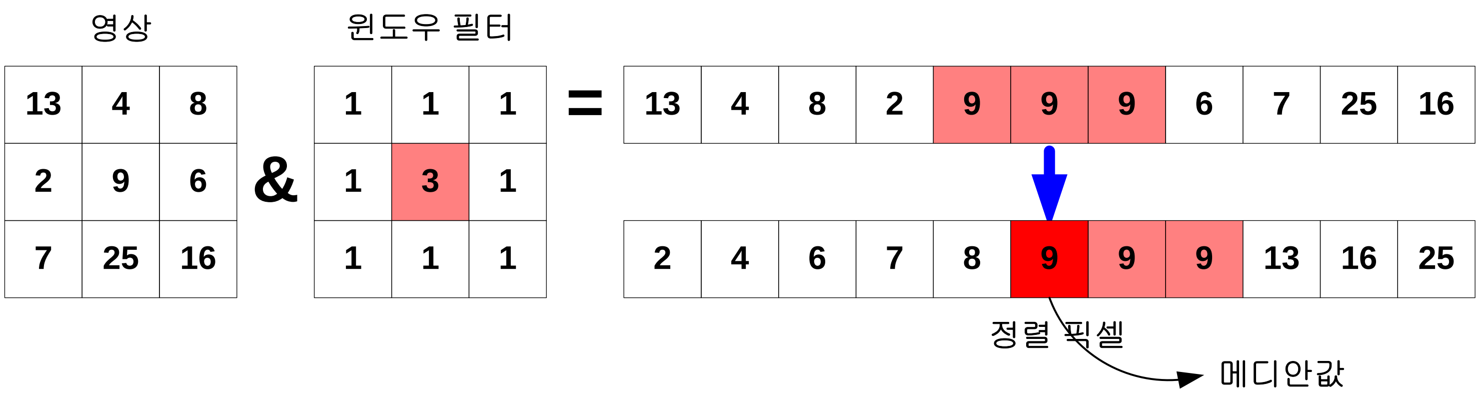


(a) 원본 영상 (b) 잡음 첨가 (c) 중간 값 필터링

중간 값을 이용해 임펄스 잡음제거

가중 중간 값 필터

- 중간 값 필터는 경계 부분을 잘 보존하는 편이지만, 좀더 세부적인 경계 영역까지도 보존할 수 있는 방법이 필요함. 이를 위해 표준 중간 값 필터를 확장한 가중 중간 값 필터(**Weighted Median Filter**)가 제안됨.
- 이 방법은 가중치를 설정하여 영상 내의 세부 정보인 경계 영역을 보존하면서 동시에 잡음을 제거하는 특성이 있음.



가중 중간 값 필터의 원리

최소/최대 필터링으로 잡음제거

- 중심 화소를 이웃 화소의 중간 값으로 치환하는 대신 최소값이나 최대값으로 치환하는 방법을 최소/최대(**Min/Max**) 필터링이라고 함.
- 중간 값 필터링과 비슷한 방법
- 영상에 있는 극단적인 임펄스 값을 제거하는 데 사용되는 필터링 기법으로, 의료 영상에 주로 사용됨.
- 혼합된 임펄스 잡음을 제거하기는 어려움.

- 정렬된 값 중에서 최소값을 선택하는 최소값 필터링은 밝은 임펄스 값을 제거함.
  - 출력 영상의 전체 밝기가 감소
- 정렬된 값 중에서 최대값을 선택하는 최대값 필터링은 어두운 임펄스 값을 제거함
  - 출력 영상의 전체 밝기가 증가

요약

- 필터를 이용한 영상처리
  - 화소의 영역 처리에 해당
  - 컨벌루션으로 수행됨.
- 시스템
  - 일련의 입력 신호를 처리하여 또 다른 일련의 출력 신호를 만들어 내는 실체
  - 시스템의 성격에 따라 그 종류가 다양
- 선형 시불변 시스템(LTI)
  - 시스템을 설계하는 데 가장 적합
  - 선형이라는 특성과 시간에 따라 변하지 않는 시스템
- 필터 개념
  - 입력되는 신호의 일부 성분을 제거하거나 일부 특성을 변경하려고 설계된 하나의 시스템
- 필터 종류
  - 유한임펄스응답(FIR) 필터: 필터의 길이가 한정
  - 무한임펄스응답(IIR) 필터: 필터의 길이가 무한정
- 컨벌루션
  - 선형 시불변 시스템에 입력되는 신호가 어떤 신호를 출력하는지 결정해 줌.
- 필터링을 이용한 영상처리
  - 2차원의 컨벌루션을 수행함.
  - 2차원 컨벌루션은 회선

요약

- 영상처리에서 수행되는 회선 처리
  - 이웃 화소 각각에 회선 마스크의 가중치를 곱하여 더한 값으로 현재 화소를 변경하는 것
- 공간 주파수
  - 단위 공간에서 같은 화소 값이나 같은 색이 반복되는 횟수
  - 고주파: 변화가 빠르거나 색의 변화가 급격한 곳
  - 저주파: 밝기 변화가 늦거나 색의 변화가 적은 곳
- 공간 필터링
  - 영상에 있는 공간 주파수 대역을 제거하거나 강조하는 필터 처리
  - 사용되는 필터의 계수에 따라 특정 주파수를 제거하거나 강조하므로, 필터 마스크 또는 회선 마스크의 가중치 선택이 공간 필터의 행동을 결정함.
- 저주파 통과 필터(LPF)
  - 신호 성분 중 저주파 성분은 통과시키고 고주파 성분은 차단하는 필터
  - 잡음을 제거하거나 흐릿한 영상을 얻을 때 주로 사용
  - 고주파 성분을 제거하므로 고주파 차단 필터라고도 함
- 고주파 통과 필터(HPF)
  - 신호 성분 중 고주파 성분은 통과시키고 저주파 성분은 차단하는 필터
  - 저주파 성분을 차단하므로 저주파 차단 필터라고도 함.
- 고주파 강조 필터
  - 저주파 영역의 상쇄에 해당하는 부분에 일정량의 이득을 주어 낮은 공간 주파수에 해당하는 성분의 손실을 어느 정도 보상할 수 있음

요약

- 샤프닝 필터
  - 고주파 통과 필터에서 발생하는 낮은 공간 주파수 성분 손실 문제점을 보완해 주는 회선 마스크
  - 샤프닝 필터링된 영상은 원본 영상에 고주파 통과 필터링된 영상을 합한 것과 결과 비슷
- 저주파 통과 필터
  - 잡음에 해당하는 고주파 성분을 제거할 수 있음.
  - 선형 공간 필터링을 이용한 잡음제거 기법이라고도 함: 회선 마스크의 계수와 곱한 화소의 선형 합으로 연산을 수행하기 때문
- 평균 필터
  - 장점: 기준 화소 주변의 이웃 화소를 참조하여 평균 값으로 기준 화소 값을 변경하므로 영상 내의 급격한 변화를 나타내는 임펄스 잡음을 잘 제거
  - 단점: 전체에 블러링이 수행되어 원하지 않는 부분이 흐려짐.
- 비선형 공간 필터링
  - 필터 마스크의 상수 가중치를 곱한 화소의 선형적인 합으로 계산할 수 없는 방법
  - 이웃의 화소를 포함하는 비선형 연산을 바탕으로 한 공간 필터링
- 중간 값 필터(미디언 필터)
  - 이웃 화소의 값을 오름차순으로 정렬한 뒤 가운데에 있는 값을 출력 값으로 선택
  - 장점: 임펄스 잡음을 제거하는 데 사용되며, 블러링 현상이 적고 객체의 경계를 잘 보존함.
  - 단점: 중간 값을 구하려면 비교하는 과정에서 많은 시간이 소모됨.

요약

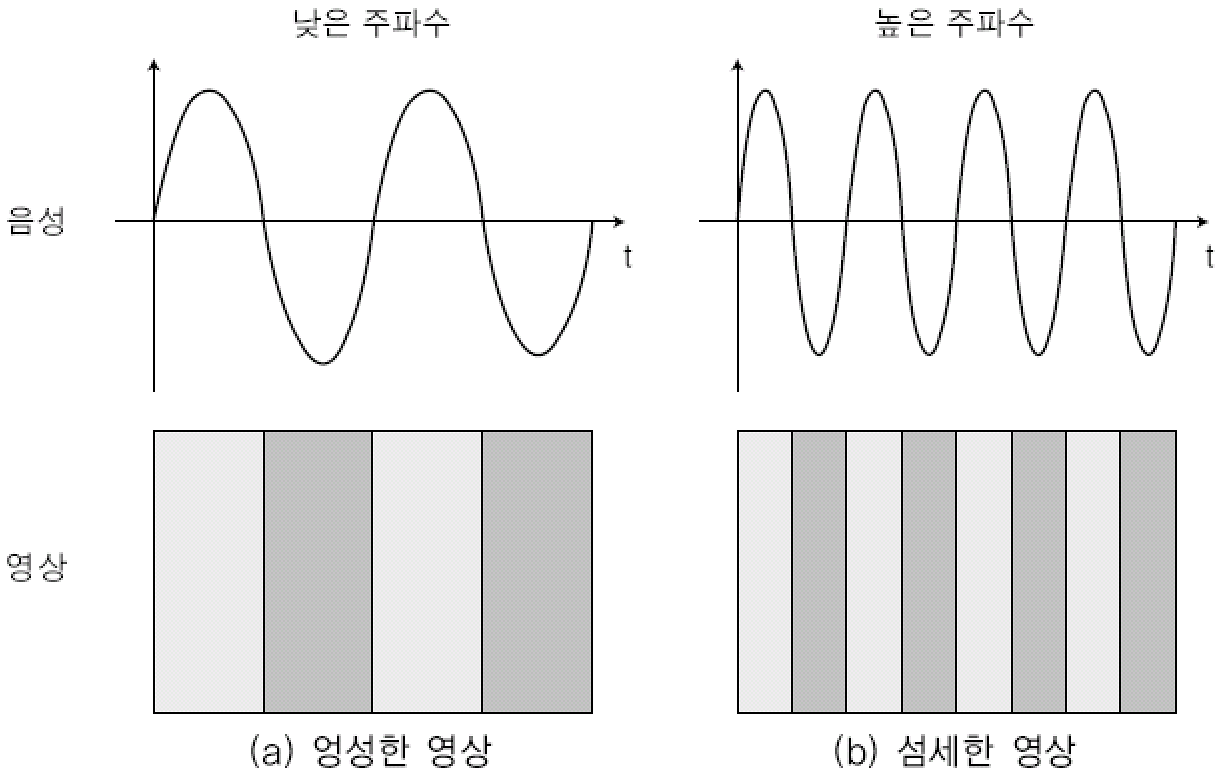
- 가중 중간 값 필터(**Weighted Median Filter**)
  - 가중치를 설정하여 영상 내의 세부 정보인 경계 영역을 보존하면서 동시에 잡음을 제거하는 특성이 있음.
- 최소/최대 필터링
  - 중간 값 필터링과 비슷한 방법인 중심 화소를 이웃 화소의 중간 값으로 치환하는 대신 최소값이나 최대값으로 치환하는 방법
  - 최소값 필터링: 정렬된 값 중에서 최소값을 선택. 밝은 임펄스 값을 제거→출력 영상의 전체 밝기가 감소
  - 최대값 필터링: 정렬된 값 중에서 최대값을 선택. 어두운 임펄스 값을 제거→출력 영상의 전체 밝기가 증가
- 폐쇄/개방형 필터링
  - 최대 필터와 최소 필터를 연속적으로 수행하면 혼합된 임펄스 잡음을 제거 가능
  - 폐쇄형 필터링: 최대 필터링→최소 필터링
  - 개방형 필터링: 최소 필터링→최대 필터링

학습 목표

- Cosine transform에 대해 설명할 수 있다.
- Fourier transform에 대해 설명할 수 있다.
- Spectrum의 특성에 대해 설명할 수 있다.
- 주파수 공간에서의 필터링 종류를 구분하여 설명할 수 있다.

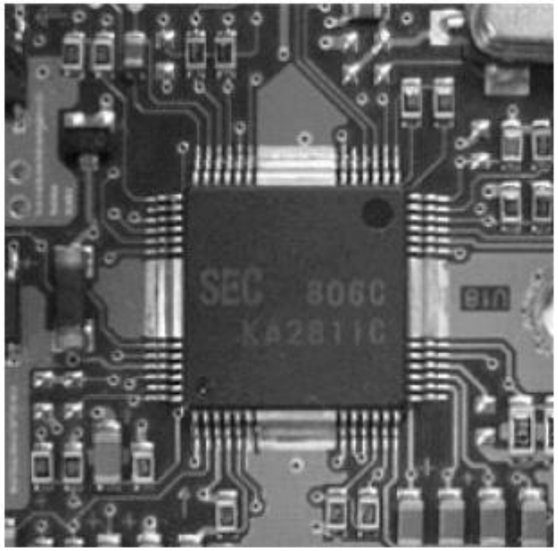
주파수

- 영상에서 화소 밝기의 변화 정도를 나타내는 것은 화소 값의 변화율
- 주파수는 밝기가 얼마나 빨리 변화하는가에 따라서 고주파와 저주파로 분류



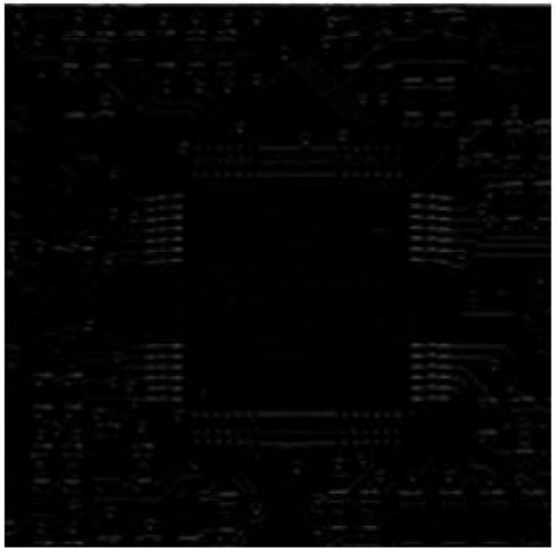
[그림 13-1] 저주파 영상과 고주파 영상의 개념

영상 변환의 개요(계속)



(a) 원본 영상

(b) 고역을 낮춤
(섬세한 부분이 없어져 둔해진다.)



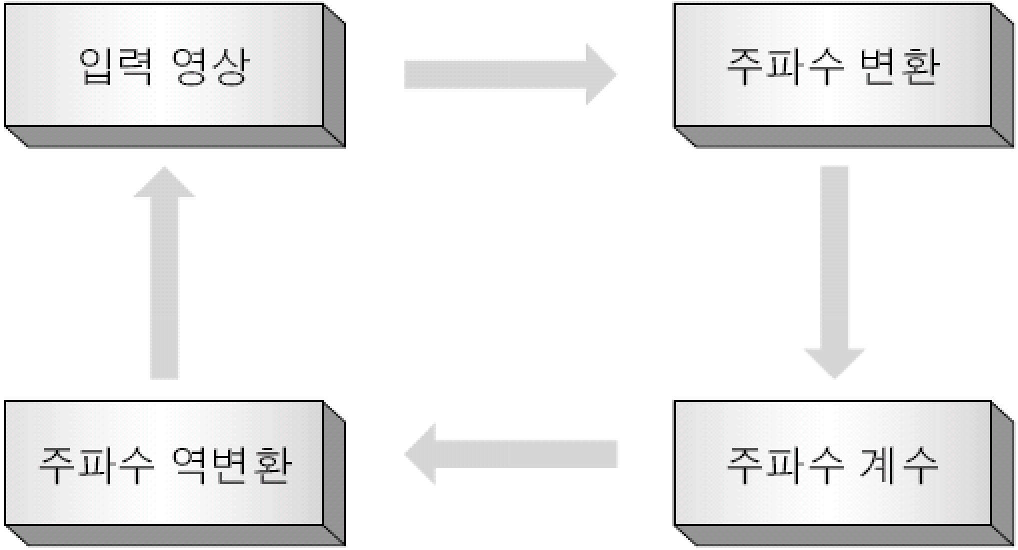
(c) 저역을 낮춤
(엉성한 부분이 없어져 에지가 강조된다.)

[그림 13-2] 영상의 주파수 영역에서 주파수 처리

- 영상을 공간 주파수 영역으로 변환하면 저주파와 고주파 성분으로 분리됨
  - 높은 주파수 성분을 낮추면 섬세한 부분이 사라지고, 부드럽고 엉성한 영상으로 변함.
  - 낮은 주파수 성분을 낮추면 엉성한 부분이 사라지면서 섬세한 부분에 해당하는 경계가 강조됨.

주파수 변환

- 공간 영역 형태의 영상을 주파수 영역 형태의 기본 주파수로 분리하는 것
- 정규적인 변환이 성립하려면 역변환도 성립되어야 함
  - 주파수 변환에는 주파수 형태의 영상을 공간 형식으로 변환하는 역주파수 변환이 반드시 있어야 함.



[그림 13-3] 주파수 변환의 개념

이산 코사인 변환(Discrete Cosine Transform: DCT)

- 영상을 압축하는 가장 효과적인 방법임이 검증
- 이산 코사인 변환은 푸리에 변환의 실수 부분의 코사인과 매우 비슷
- 기저 함수가 코사인 함수가 됨.
- 실수부만 다루므로 신호 처리를 효과적으로 수행할 수 있음.
- 1차원 이산 코사인 변환 쌍

$$F(u) = k(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right], \qquad u = 0,1,\ldots,N-1$$

$$f(x) = \sum_{x=0}^{N-1} k(u)F(u)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right], \qquad x = 0,1,\ldots,N-1$$

- 영상에 적용하는 2차원 이산 코사인 변환 쌍

$$F(u,v) = k(u)k(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} k(u)k(v)F(u,v)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

Cosine Transform

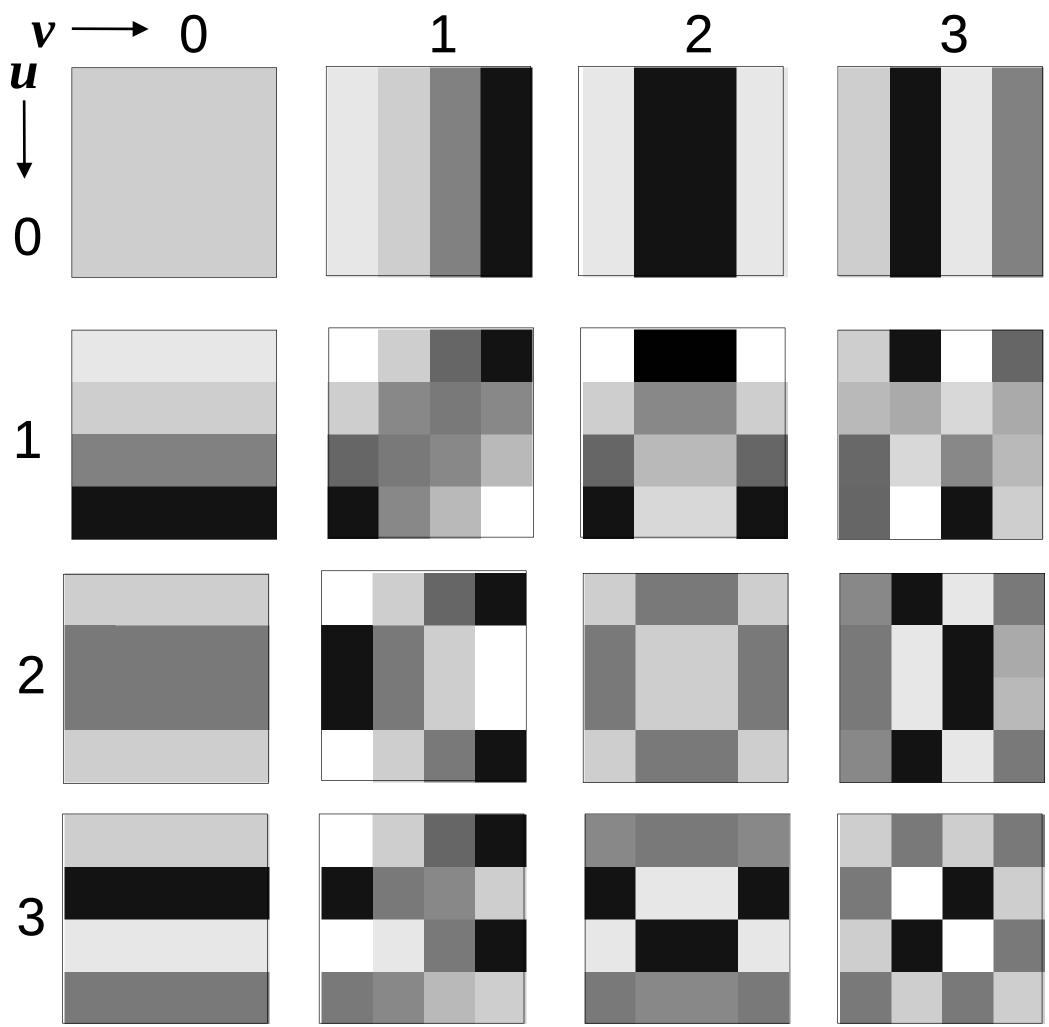
- Use only cosine function
- Use only real arithmetic
- Used in image compression (JPEG, MPEG)
- 2-D Discrete Cosine Transform (DCT)

$$C(u,v) = \alpha(u)\alpha(v)\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{c=0}^{N-1} I(r,c)\left[\cos[\frac{(2r+1)u\pi}{2N}]\cos[\frac{(2c+1)v\pi}{2N}]\right]$$

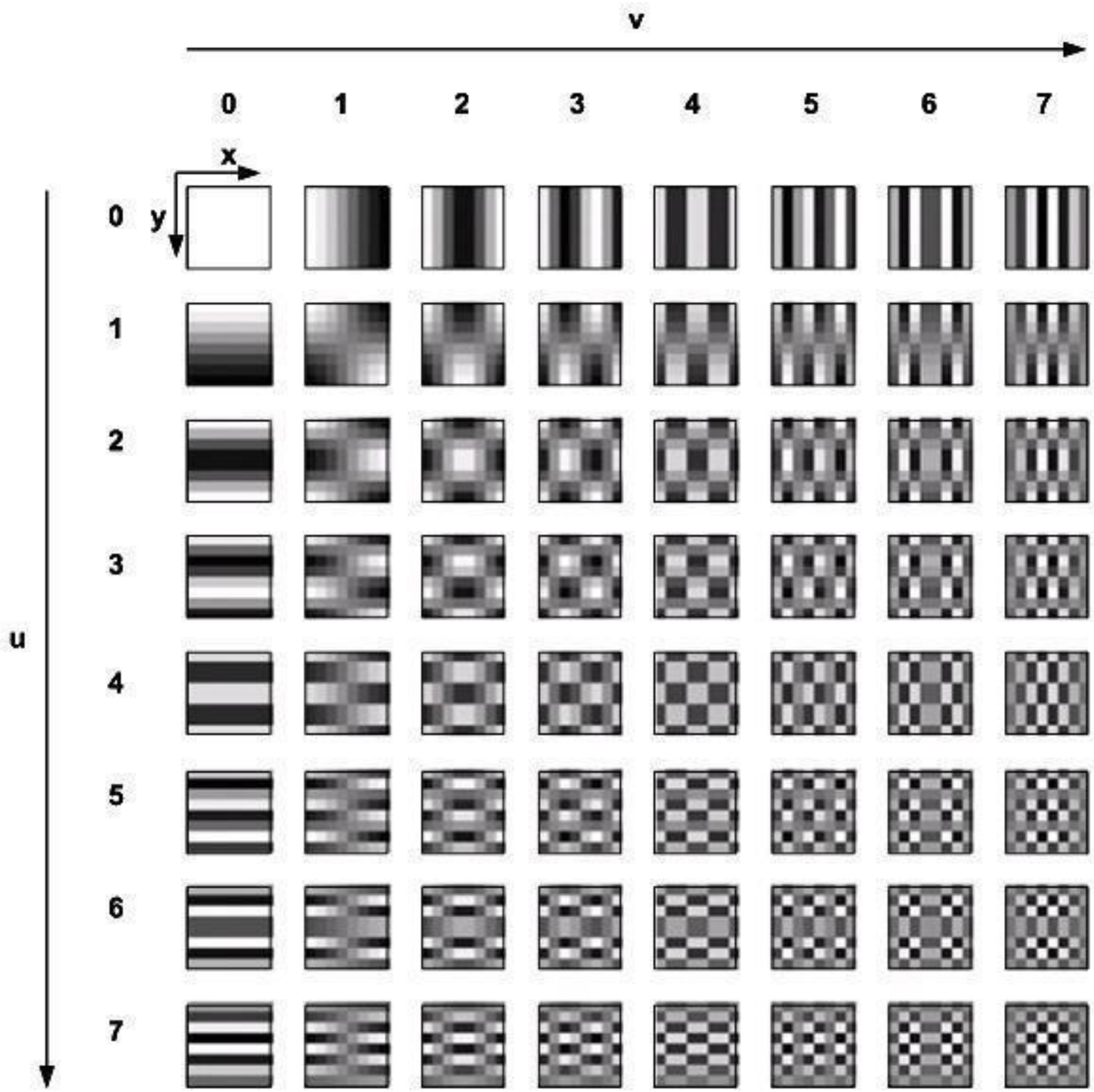
$$\alpha(u),\alpha(v) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{N}} & for\ u,v=0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} & for\ u,v=1,2,\ldots N-1 \end{cases}$$

$$I(r,c) = \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v)C(u,v)\left[\cos[\frac{(2r+1)u\pi}{2N}]\cos[\frac{(2c+1)v\pi}{2N}]\right]$$

Basis Images for DCT



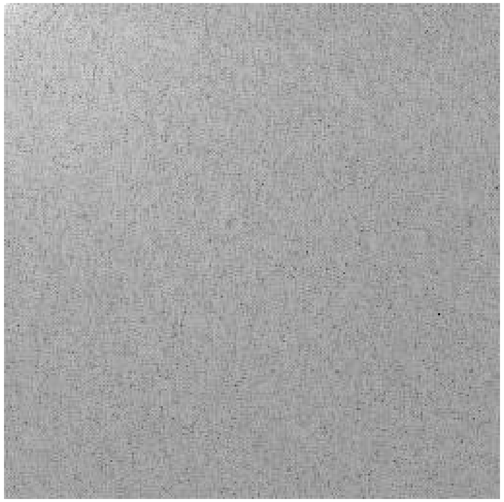
이산 코사인 변환(계속)



[그림 13-15] 이산 코사인 변환의 기저 함수

Original Image

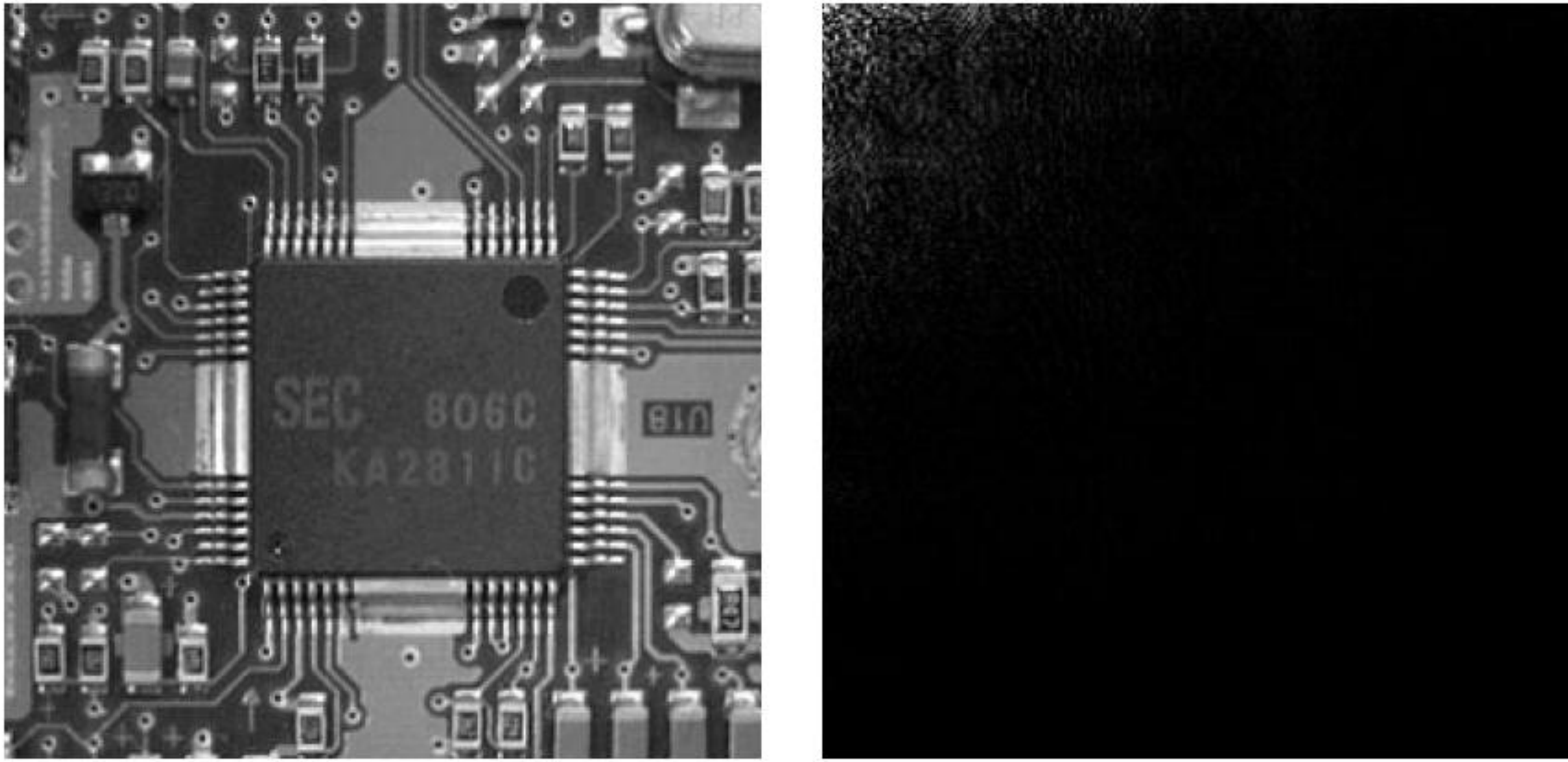
Cosine transform linearly remapped image



Cosine transform log remapped image

영상은 Computer Imaging (CRC Press)에서 가져왔음

이산 코사인 변환(계속)



(a) 입력 영상　　　　(b) 결과 영상

[그림 13-16] 이산 코사인 변환의 결과 영상

Fourier Transform (1)

- Most well-known and most widely used
- 2-D discrete Fourier transform
  - Decompose an image into a weighted sum of 2-D sinusoidal terms

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{c=0}^{N-1} I(r,c)e^{-j2\pi\frac{(ur+vc)}{N}}$$

- Euler's identity

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{c=0}^{N-1} I(r,c)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}(ur+vc)\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}(ur+vc)\right)\right]$$

a complex spectral component

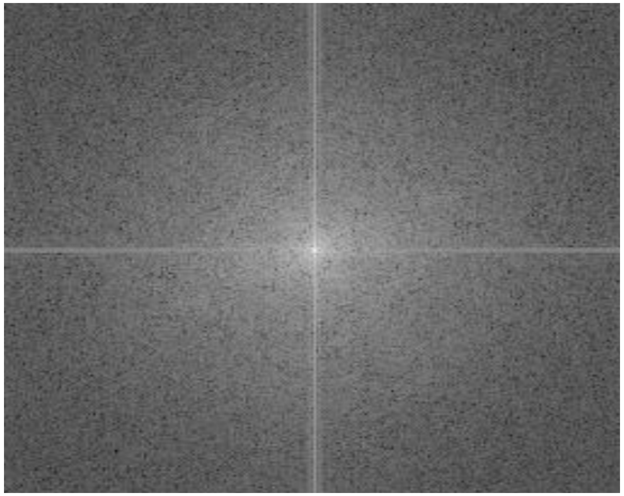
$$\mathrm{F}(u,v) = \mathrm{R}(u,v) + j\mathrm{I}(u,v)$$

Magnitude : related to contrast

$$\left|F(u,v)\right| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

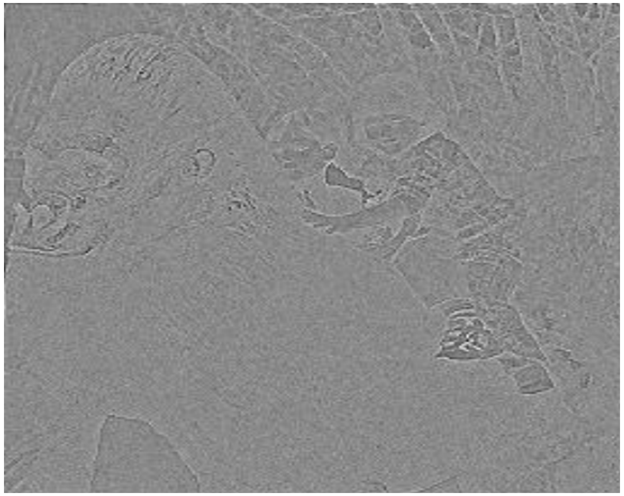
Phase : related to where objects are in an image

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$



Fourier Transform

Original Image



Phase-only Image

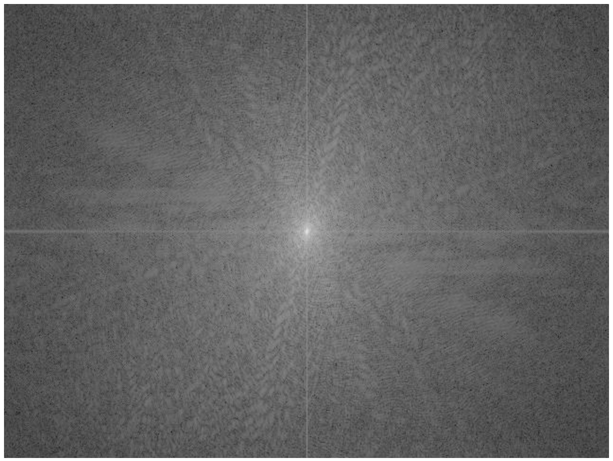
영상은 Computer Imaging (CRC Press)에서 가져왔음

Fourier Transform (2)

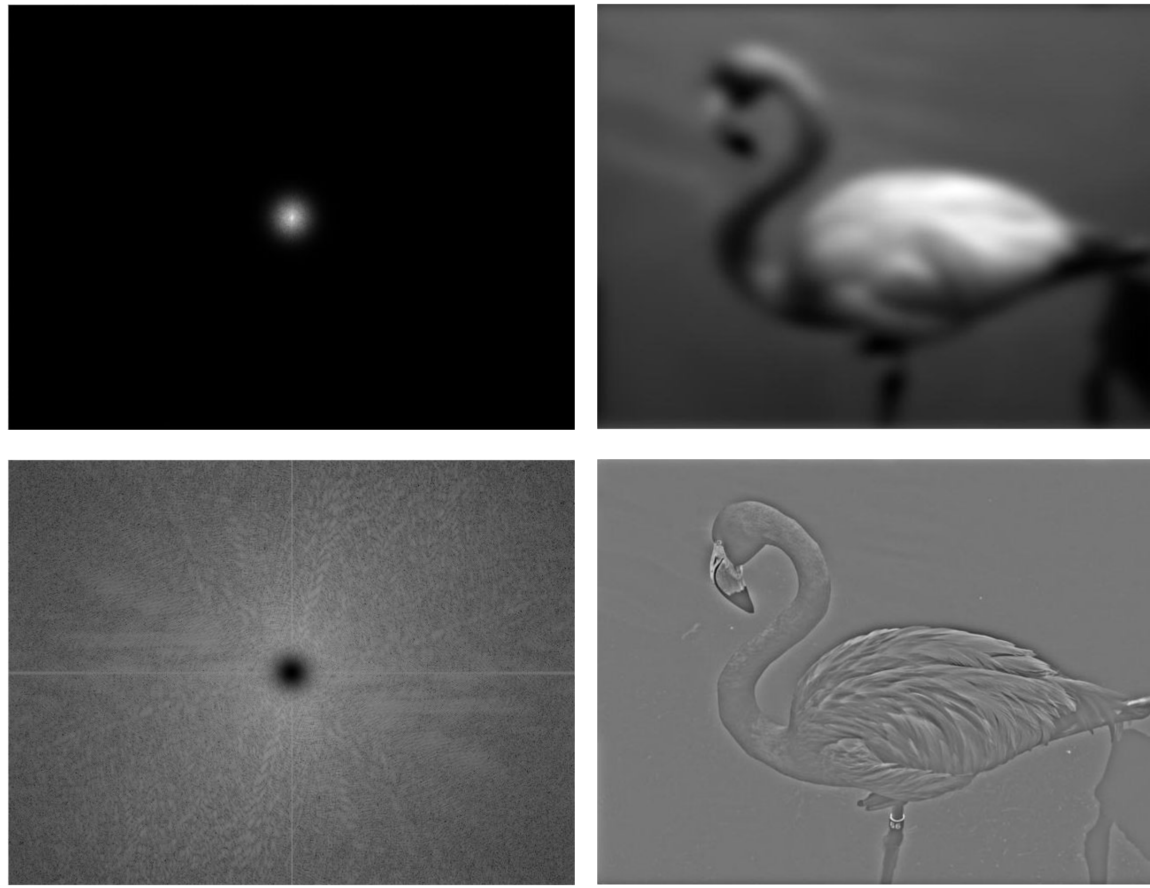
- 2-D discrete Inverse Fourier Transform
  - Get the original image back

$$I(r,c) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi\frac{(ur+vc)}{N}}$$

- Fourier transform & Inverse Fourier transform
  - basis functions' exponent is changed from -1 to +1
  - Same in the frequency and magnitude of the basis functions



Fourier Transform



Fourier Transform의 특성

- Separability
  - If two dimensional transform is separable
    - By successive application of two one-dimensional transforms

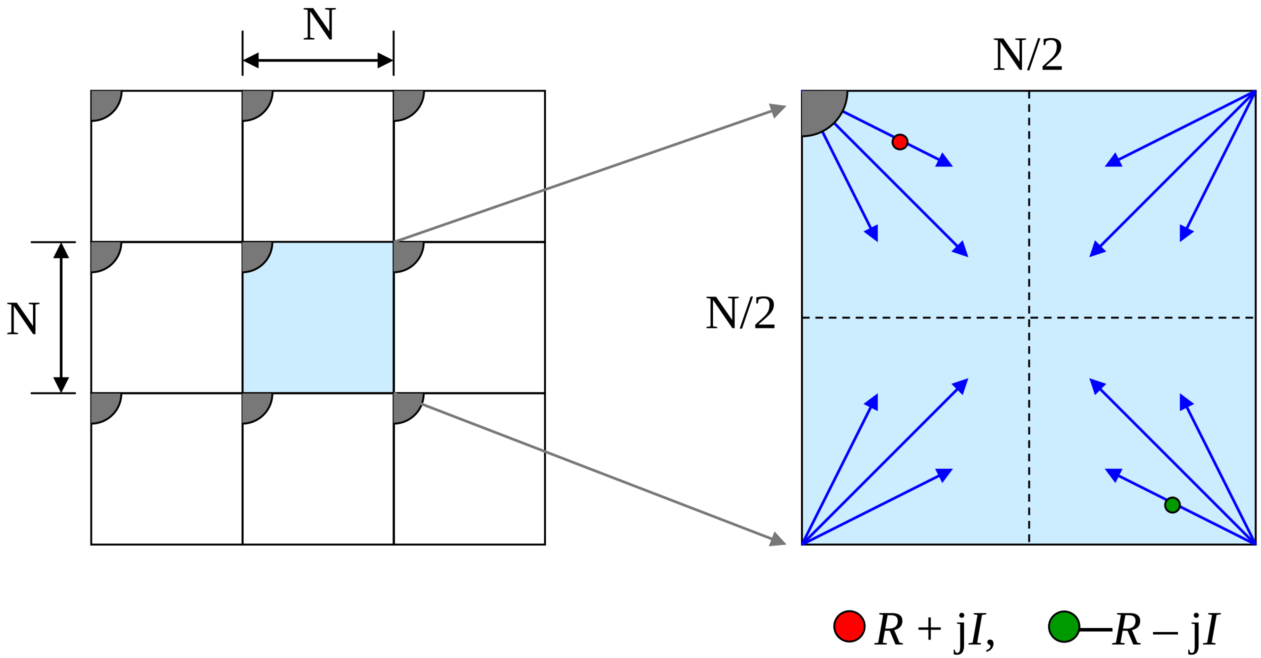
$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\exp[-j2\pi ur/N]\left(\sum_{c=0}^{N-1} I(r,c)\exp[-j2\pi vc/N]\right)$$

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}F(r,v)\exp[-j2\pi ur/N]$$

$$F(r,v) = N\left[\frac{1}{N}\sum_{c=0}^{N-1} I(r,c)\exp[-j2\pi vc/N]\right]$$

Properties of Spectrum

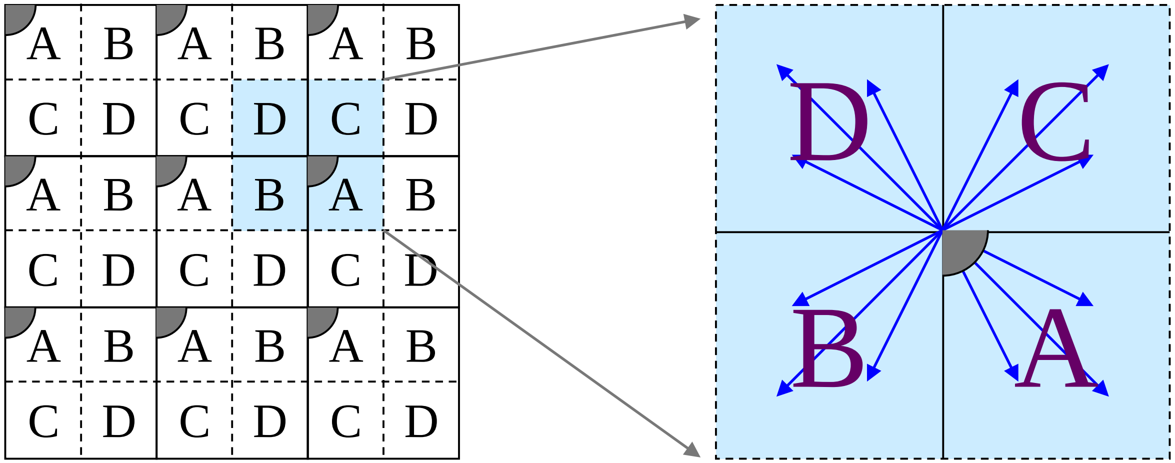
- Fourier Transform: Periodicity and Conjugate Symmetry
  - N×N spectrum is repeated in all directions to infinity
    - F(u,v) = F(u+N, v) = F(u,v+N) = F(u+N, v+N)
  - F(u,v) = F*(-u,-v)

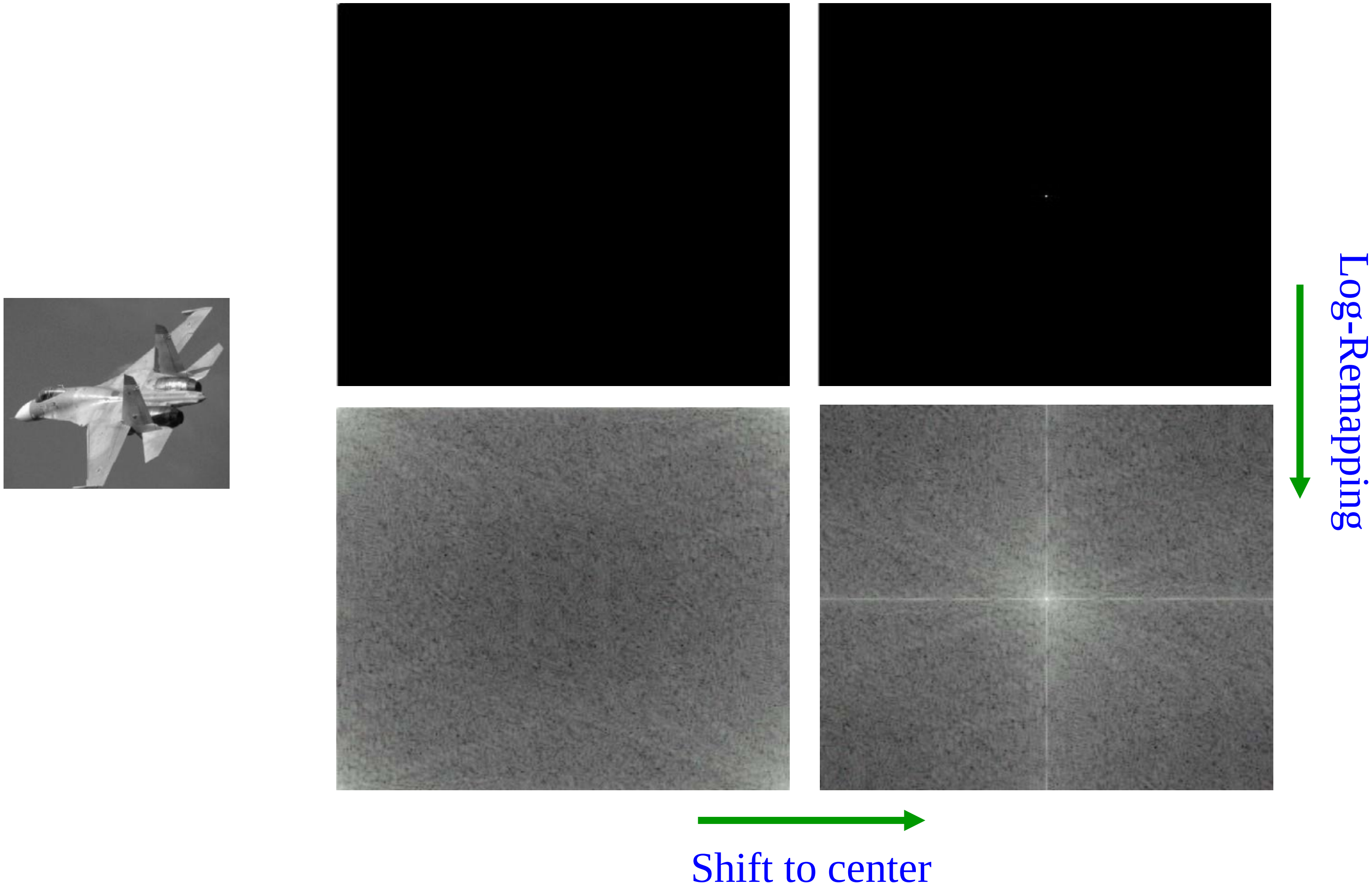


Properties of Spectrum

- Frequency Translation
  - Shift the origin of the spectrum to the center for display and filtering purpose
- Log transform of spectrum
  - Greatly enhance the visual information in the spectrum

$$\log(u,v) = k\log\left[1+\left|F(u,v)\right|\right]$$

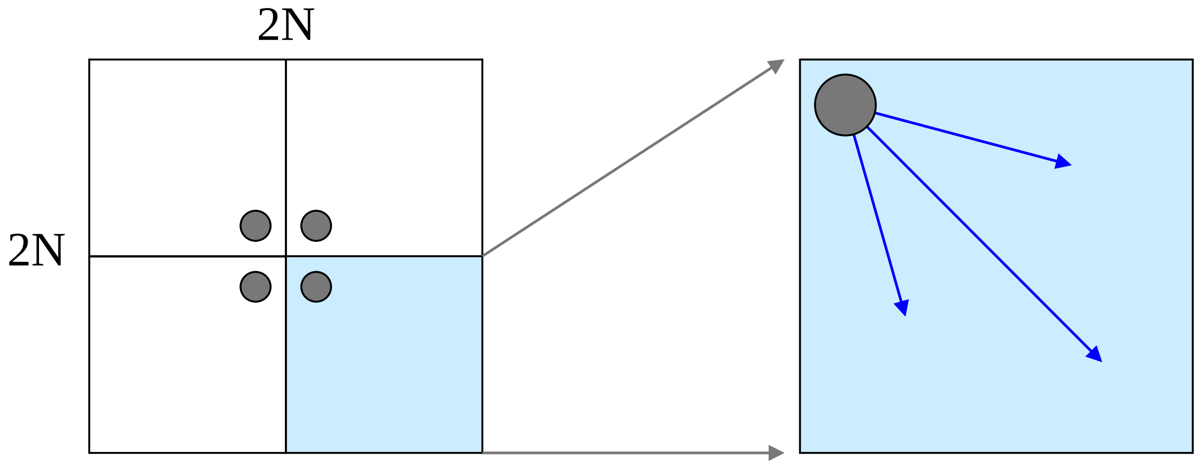




영상은 Computer Imaging (CRC Press)에서 가져왔음

Properties of Spectrum

- In Cosine Transform,



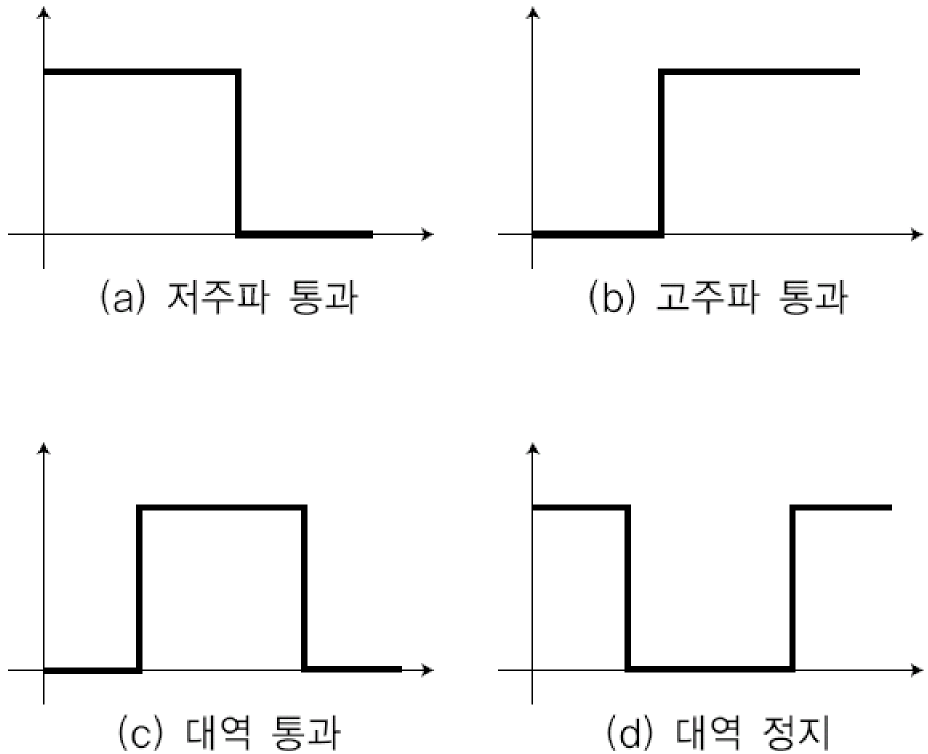
X

Filtering

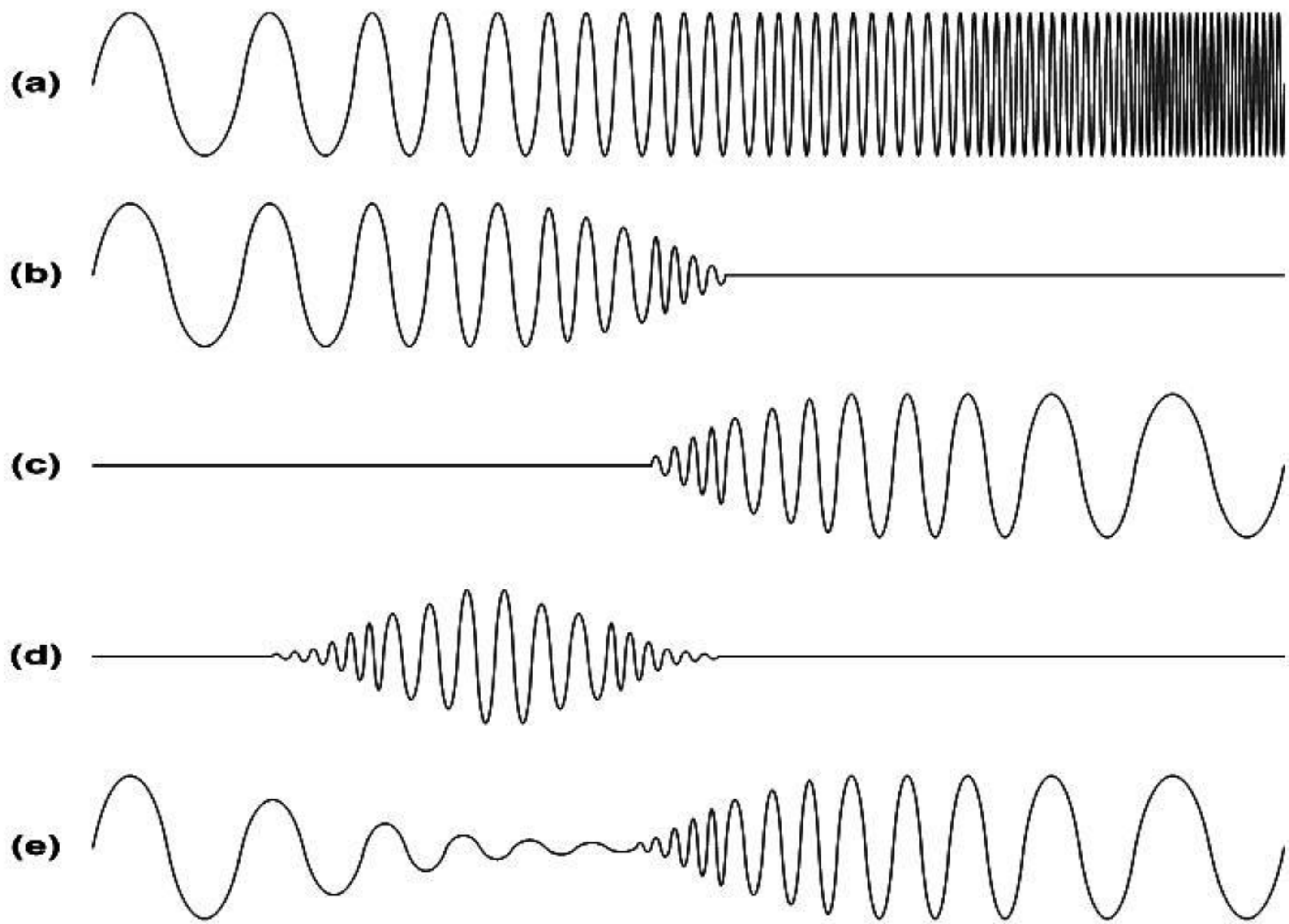
- Four Types of Filtering
  - Lowpass filtering
    - Remove high-frequency information, blurring an image
  - Highpass filtering
    - Remove low-frequency information, sharpen an image
  - Bandpass filtering
    - Extract frequency information in specific parts
  - Bandreject filtering
    - Eliminate frequency information in specific parts

Section 03 주파수 영역에서의 필터링

- 영상의 푸리에 변환을 수행하는 목적 중 하나는 주파수 영역에서 필터링을 수행하기 위해서 임.
- 푸리에 변환 뒤 주파수 영역에서의 필터링은 영상에 포함된 주파수 성분을 파악하여 이를 토대로 영상에 포함된 주파수 성분을 필터링하는 것



[그림 13-17] 기본적인 필터의 종류



[그림 13-18] 기본 필터로 필터링한 결과

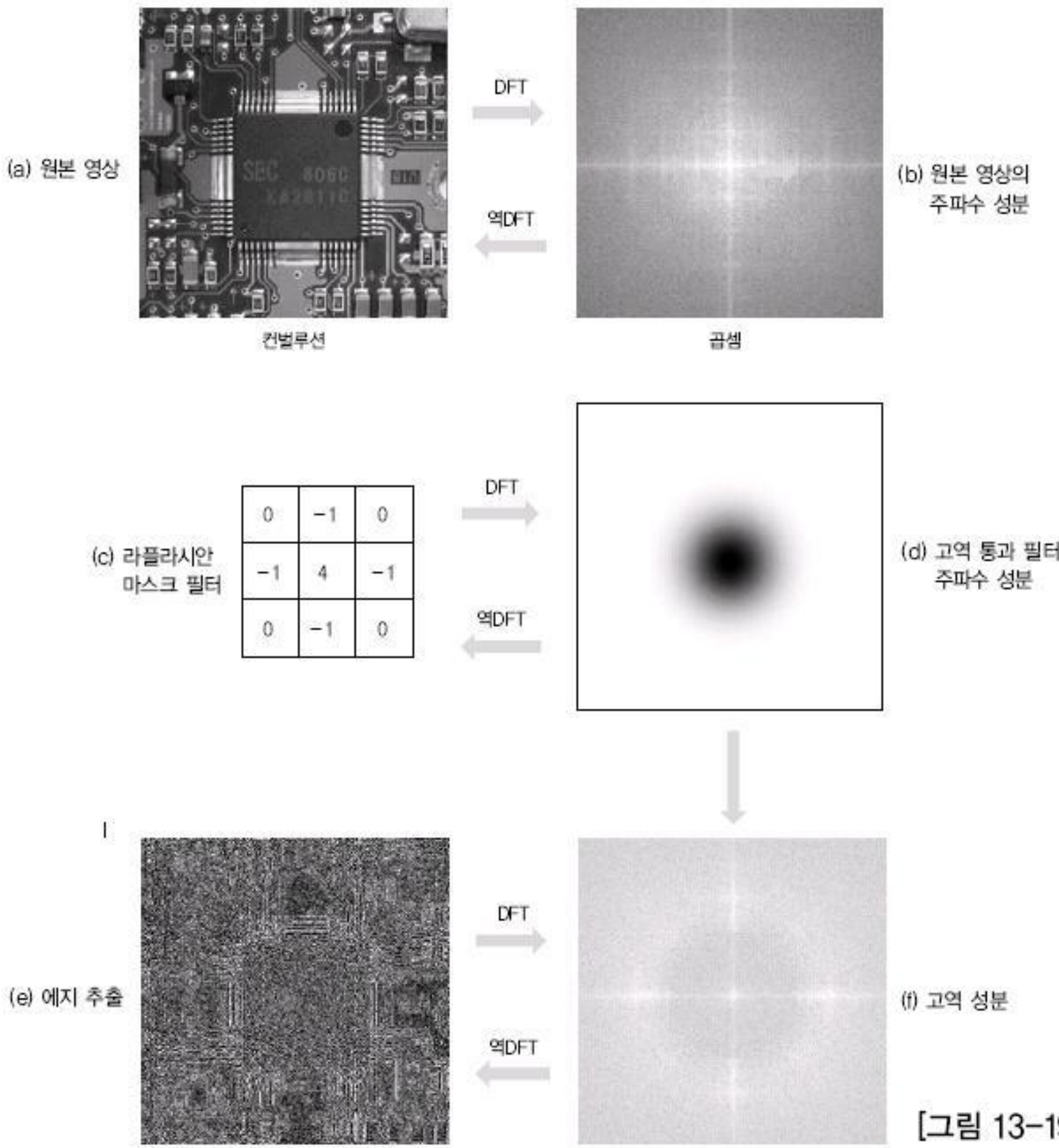
주파수 영역에서 필터링 수행 방법

- 주파수 영역에서 필터링의 수행은 공간 영역에서의 필터링보다 쉬움.
- 공간 영역에서의 필터링은 컨볼루션으로 수행하지만, 주파수 영역에서는 영상의 주파수 성분과 필터의 주파수 성분을 곱해서 해결
  → 컨벌루션 정리(Convolution Teorem)
- 컨벌루션 연산의 기호를 *로 표시

$$f(x, y)*h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)\times H(u, v)$$
$$F(u, v)*H(u, v) \Leftrightarrow f(x, y)\times h(x, y)$$

  - f(x, y)와 h(x, y)는 공간 영역에서의 영상 데이터와 필터 계수
  - F(u, v)와 H(u, v)는 주파수 영역에서 영상 주파수 데이터와 필터 계수의 주파수 데이터
  - u와 v는 x와 y 방향의 주파수 성분

주파수 영역에서 필터링 수행 방법(계속)



[그림 13-19] 필터링 수행의 비교

주파수 영역에서 필터링 수행 방법(계속)

- 필터에 주파수 영역의 마스크가 주어진다면 주파수 영역에서 필터링은 다음 순서를 따름.

  ① 영상의 푸리에 변환을 구한다.

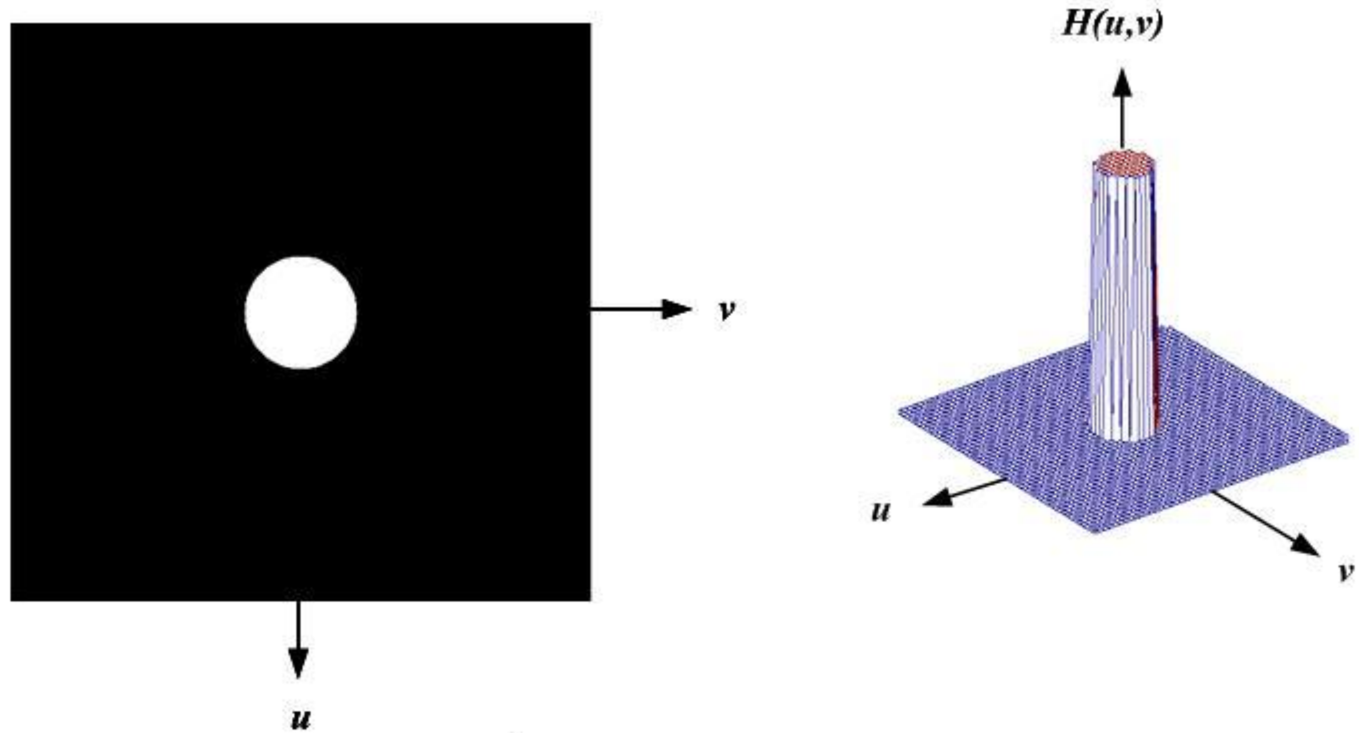
  ② 푸리에 변환된 영상과 필터 마스크를 곱한다.

  ③ ②의 결과에 역푸리에 변환을 구한다.

주파수 영역에서 저주파와 고주파 필터링

- 주파수 영역에서 필터링을 수행하려면, 먼저 주파수 영역의 필터 마스크를 만들어야 함.
  - 첫 번째 생성 방법: 공간 영역 필터 마스크를 주파수 영역 필터 마스크로 변환하는 것. 저주파와 고주파 필터 마스크를 푸리에 변환으로 얻을 수 있음(12장에서 소개)
  - 두 번째 생성 방법 : 주파수 영역에서 직접 마스크를 계산하여 얻는 것
- 이상적인 저주파 통과 필터의 생성
  - 고주파 성분을 감쇄시켜 영상을 흐릿하게 만드는 이상적인 저주파 통과 필터 **(Ideal Low Pass Filter)**는 원점에서 어느 거리 내의 저주파 성분은 **1**을 곱해 통과시키고, 거리 밖의 고주파 성분은 **0**을 곱해 차단하도록 주파수 영역을 설계
  - 이상적인 저주파 통과 필터 수식
  - $$H(u,v) = \begin{cases} 1, & r(u,v) \le r_0 \\ 0, & r(u,v) > r_0 \end{cases}$$
    - r_0는 필터의 반경이며, 차단 주파수라고 함.

주파수 영역에서 저주파와 고주파 필터링(계속)



[그림 13-20] 이상적인 저주파 통과 필터의 특성

Filtering: Lowpass Filtering

- Pass low frequency and eliminate high frequency information ➞ Blur images
- Used for hiding effects caused by noise
- Performed by multiplying the spectrum by a low-pass filter and then applying the inverse transform to obtain the filtered image

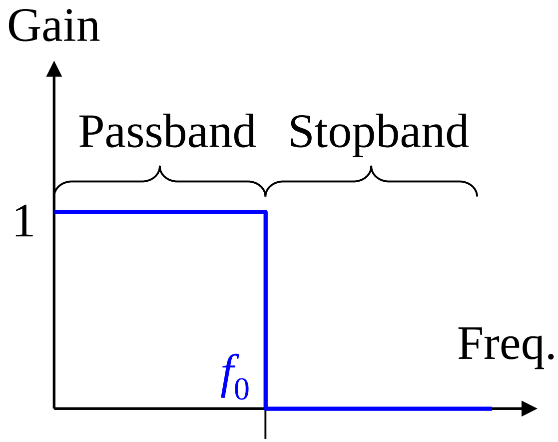
$$\mathbf{ILPF}(r, c) = \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{T}(u, v)\mathbf{HLPF}(u, v)]$$

Convolution Theorem

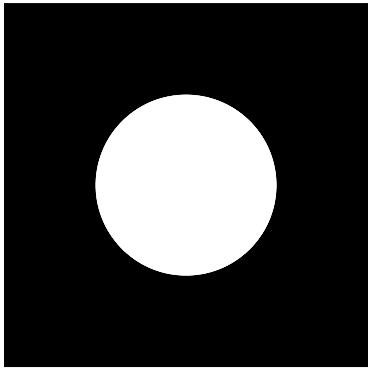
$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$
$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y)$$

Filtering: Lowpass Filtering

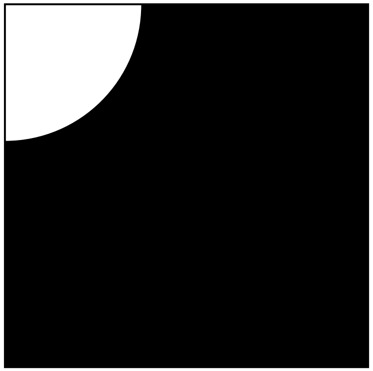
- Some Terminologies
  - Cutoff frequency, f0
    - the frequency at which we start to eliminate information
  - Passband
    - not filtered out frequency
  - Stopband
    - filtered out frequency
  - Ideal filter
    - leave undesirable artifacts in image
  - Nonideal filter (Butterworth filter)
    - avoid the problem of ideal filter



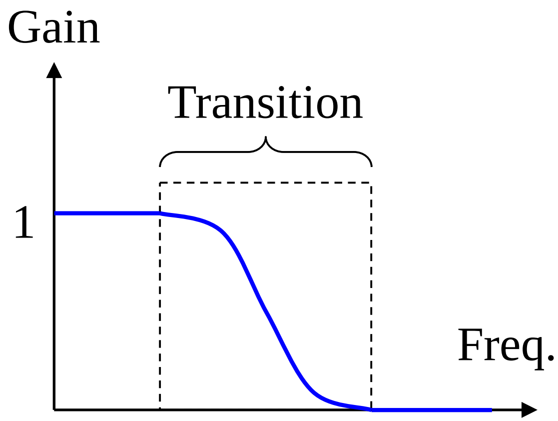
1D Lowpass Ideal Filter



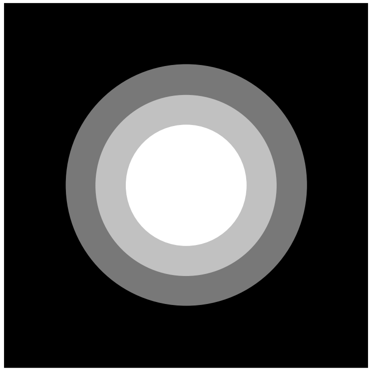
2D LPIF for Fourier spectrum



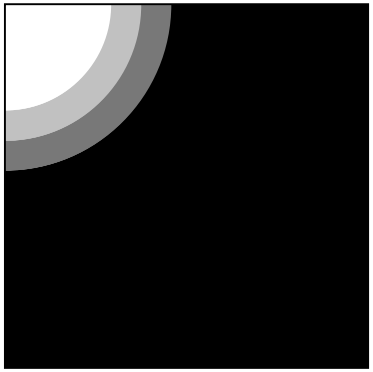
2D LPIF for Cosine



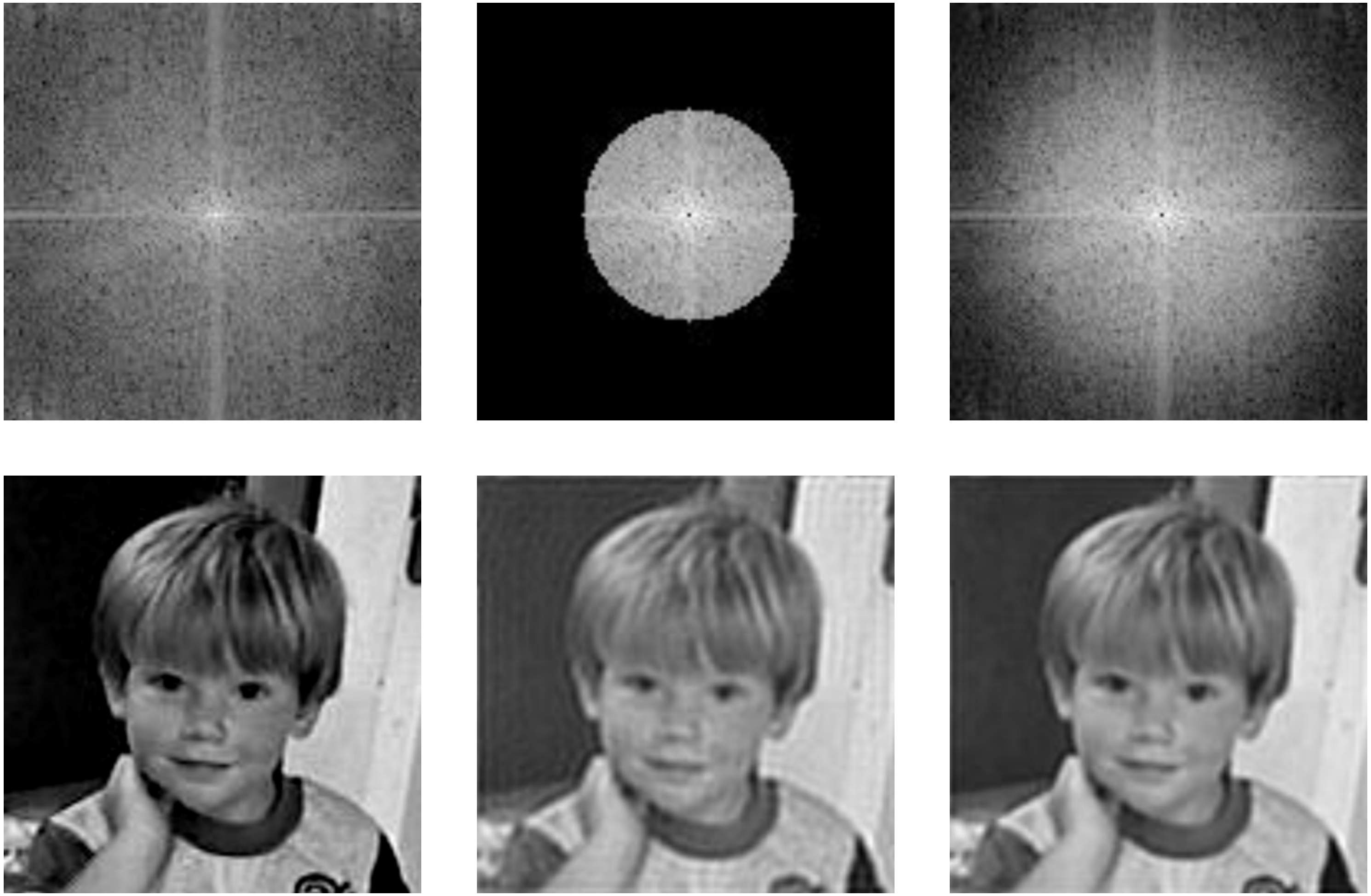
1D Lowpass Nonideal Filter



2D LPNIF for Fourier spectrum

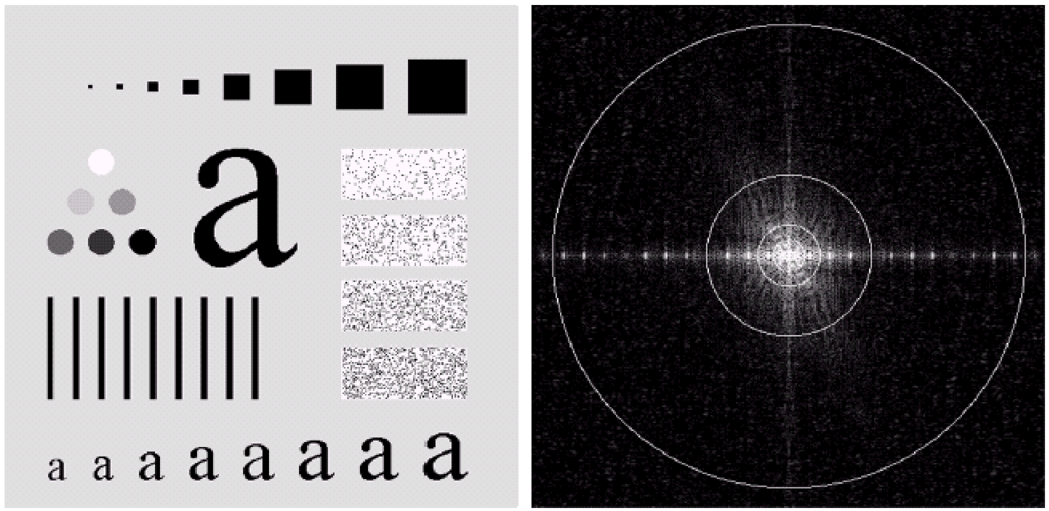


2D LPNIF for Cosine



ripple artifact

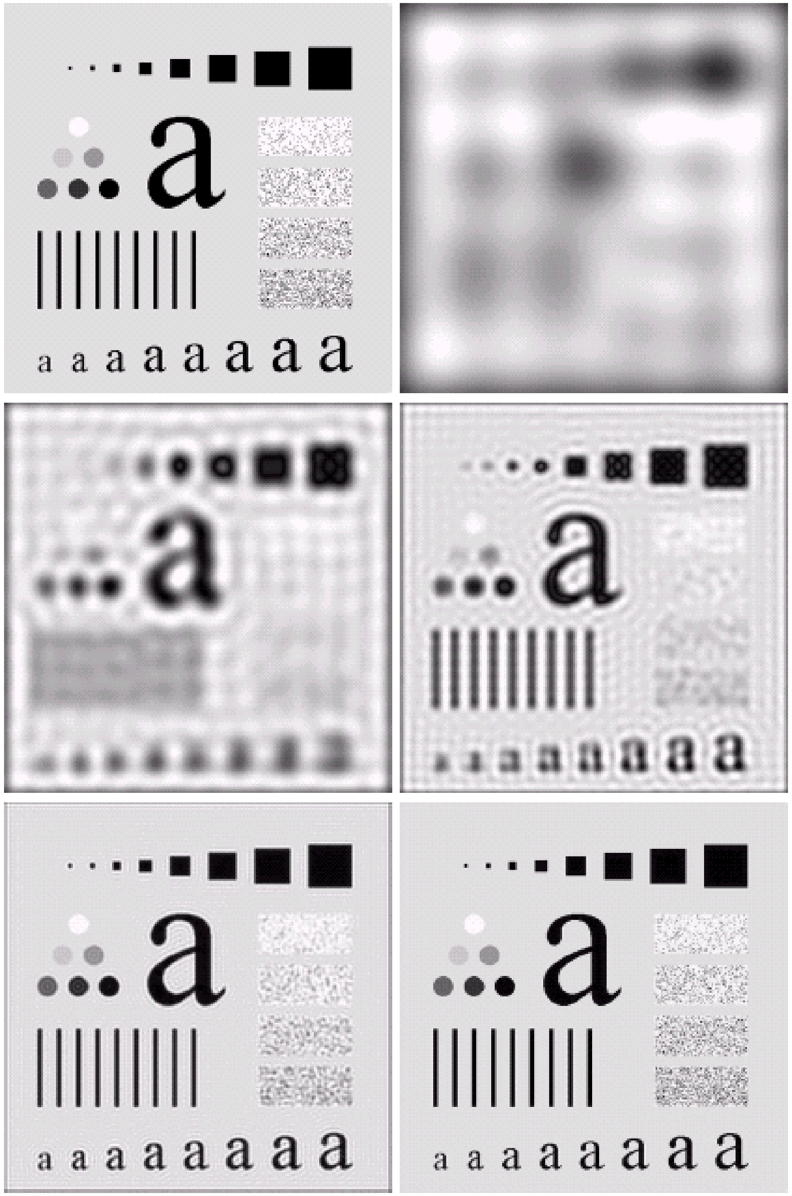
영상은 Digital Image Processing (Prentice Hall)에서 가져왔음



a b

FIGURE 4.11 (a) An image of size 500 × 500 pixels and (b) its Fourier spectrum. The superimposed circles have radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, which enclose 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, and 99.5% of the image power, respectively.

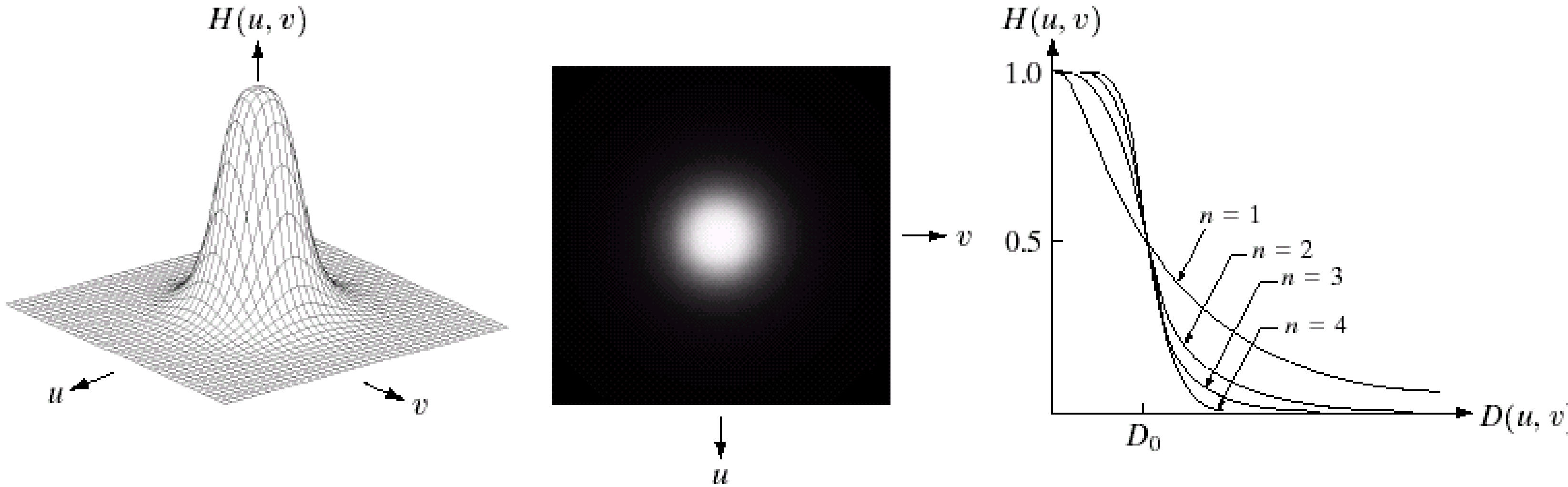
영상은 Digital Image Processing (Prentice Hall)에서 가져왔음



a	b
c	d
e	f

FIGURE 4.12 (a) Original image. (b)–(f) Results of ideal lowpass filtering with cutoff frequencies set at radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). The power removed by these filters was 8, 5.4, 3.6, 2, and 0.5% of the total, respectively.

영상은 Digital Image Processing (Prentice Hall)에서 가져왔음



a b c

FIGURE 4.14 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

영상은 Digital Image Processing (Prentice Hall)에서 가져왔음

Filter Order = 1

Filter Order = 3

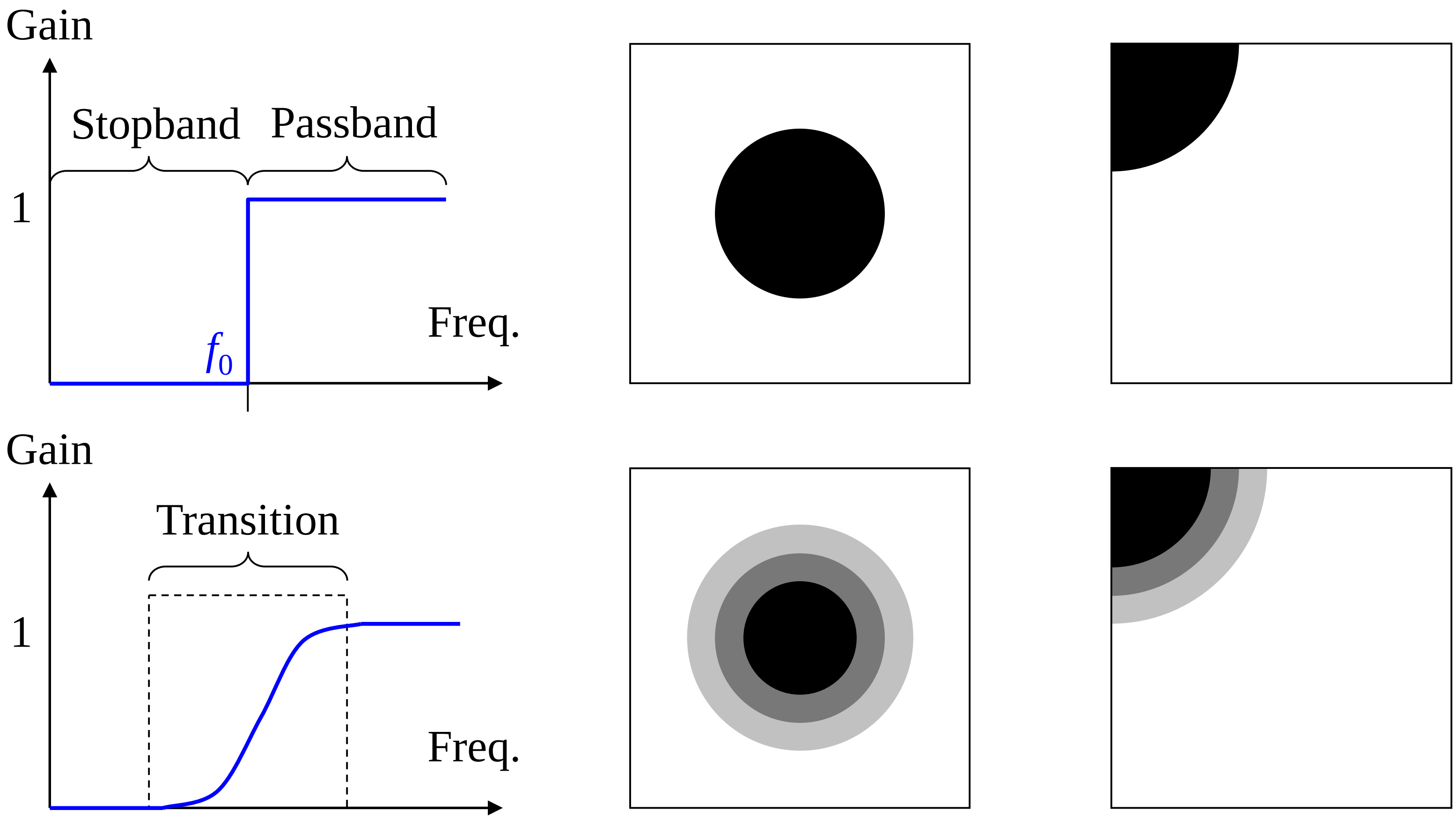
Filter Order = 6

Filter Order = 8

영상은 Digital Image Processing (Prentice Hall)에서 가져왔음

Filtering: Highpass Filtering

- Pass high frequency information for edge enhancement



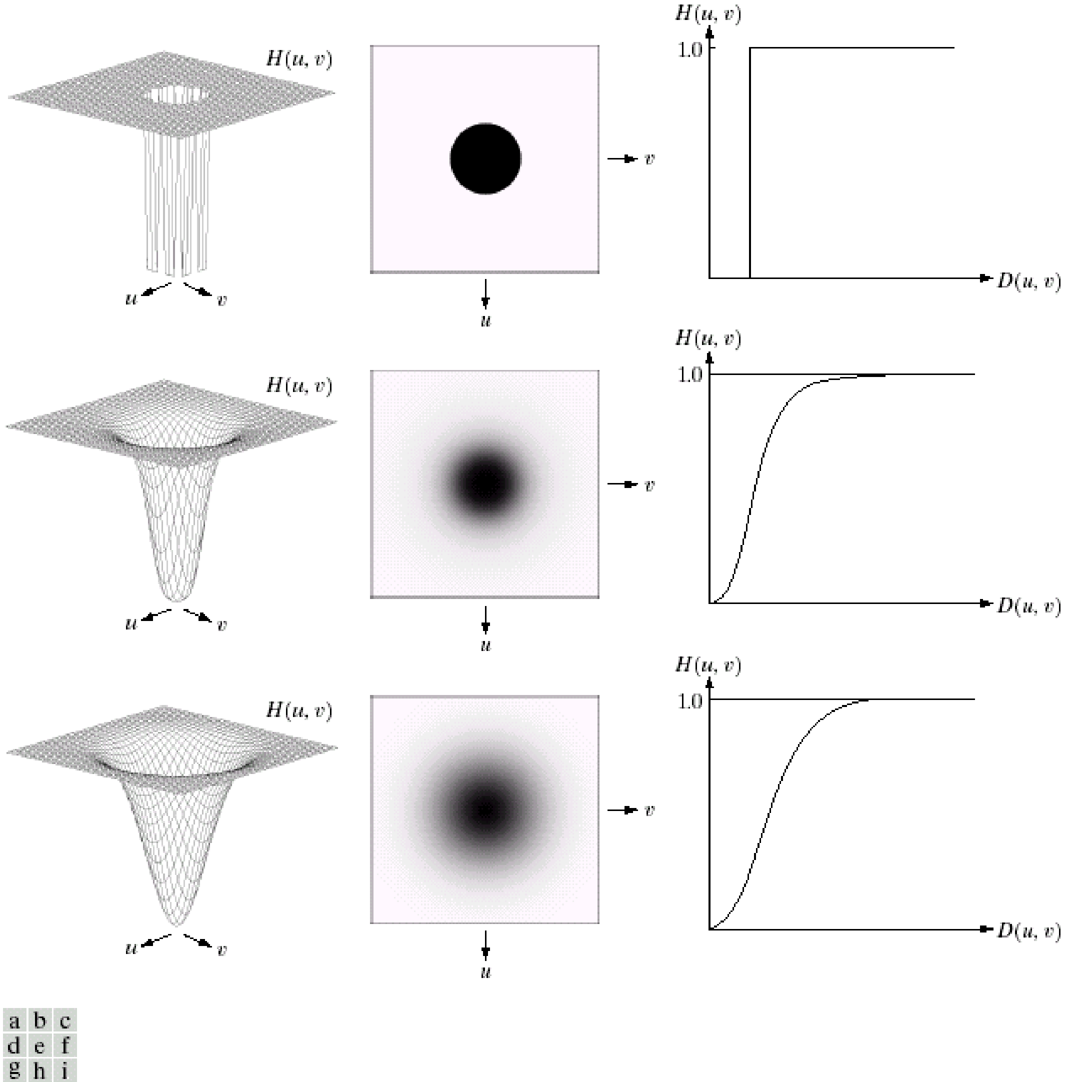
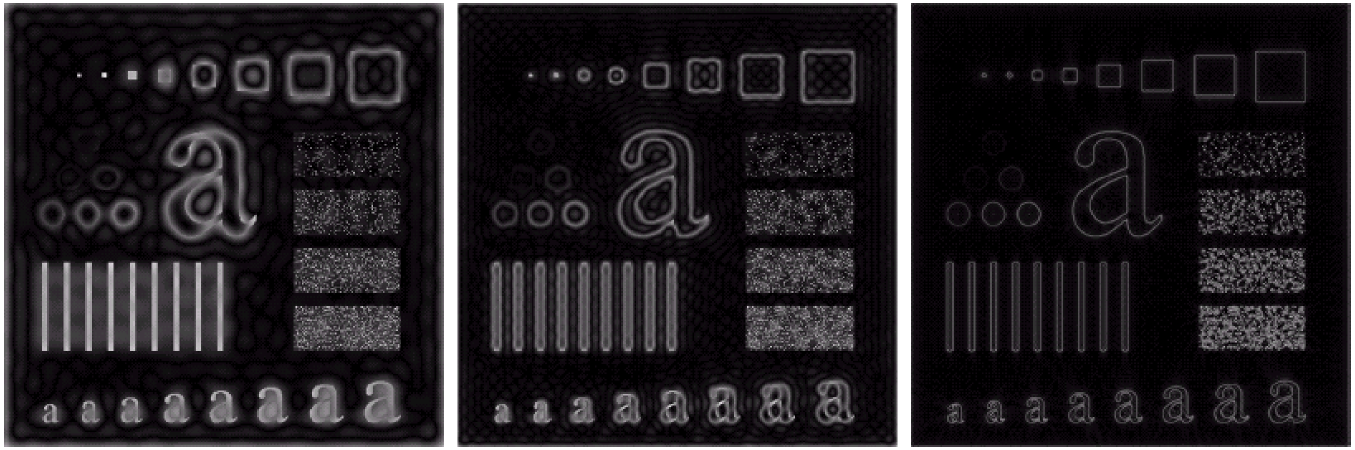


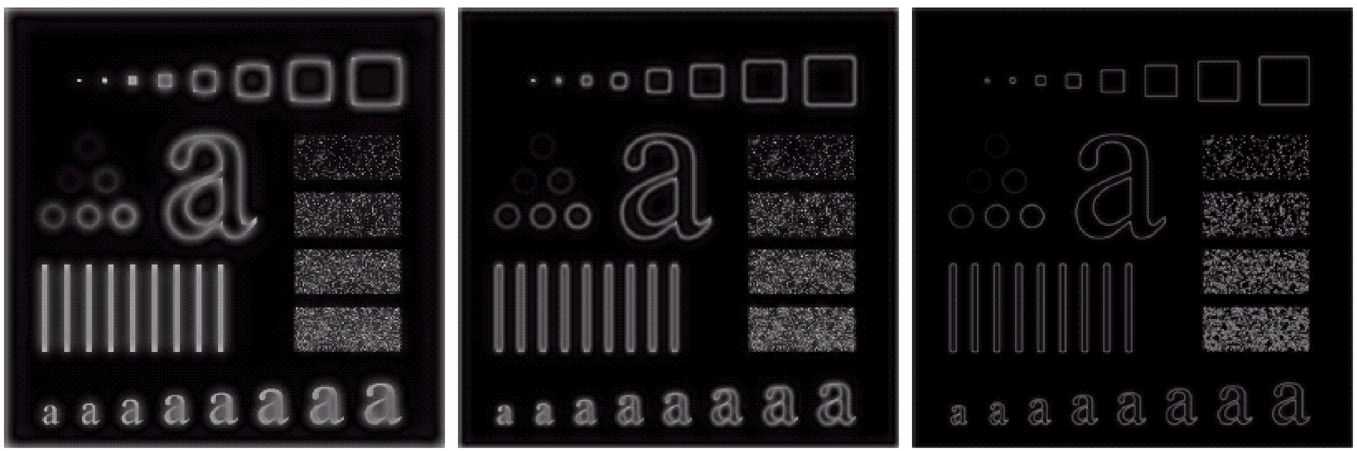
FIGURE 4.22 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

영상은 Digital Image Processing (Prentice Hall)에서 가져왔음



a b c

FIGURE 4.24 Results of ideal highpass filtering the image in Fig. 4.11(a) with $D_0 = 15$, 30, and 80, respectively. Problems with ringing are quite evident in (a) and (b).

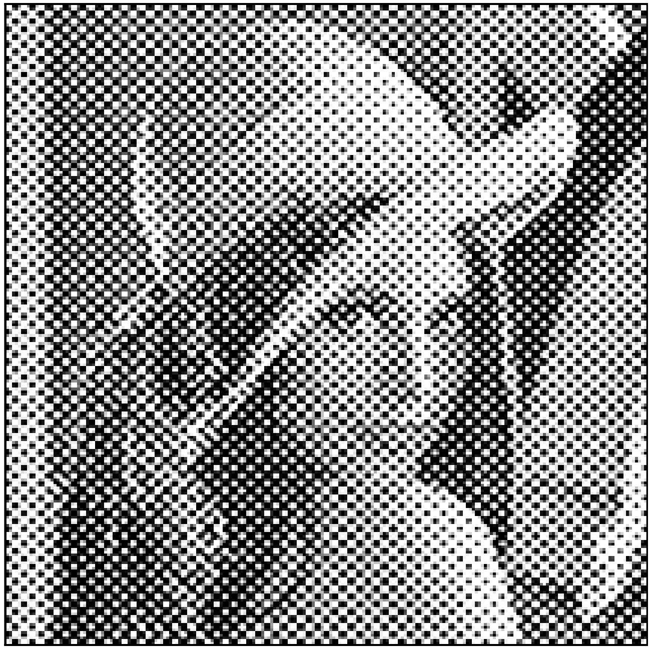


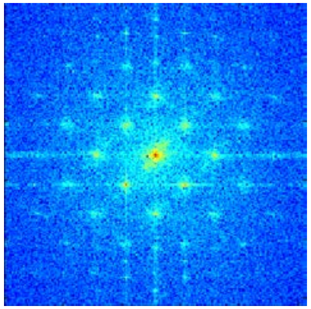
a b c

FIGURE 4.25 Results of highpass filtering the image in Fig. 4.11(a) using a BHPF of order 2 with $D_0 = 15$, 30, and 80, respectively. These results are much smoother than those obtained with an ILPF.

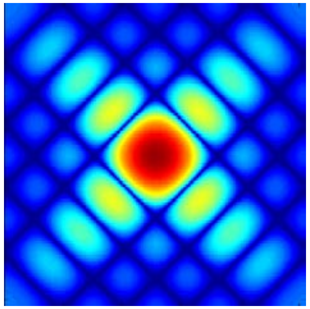
영상은 Digital Image Processing (Prentice Hall)에서 가져왔음

Inverse Halftoning

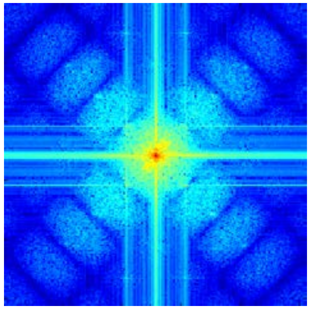




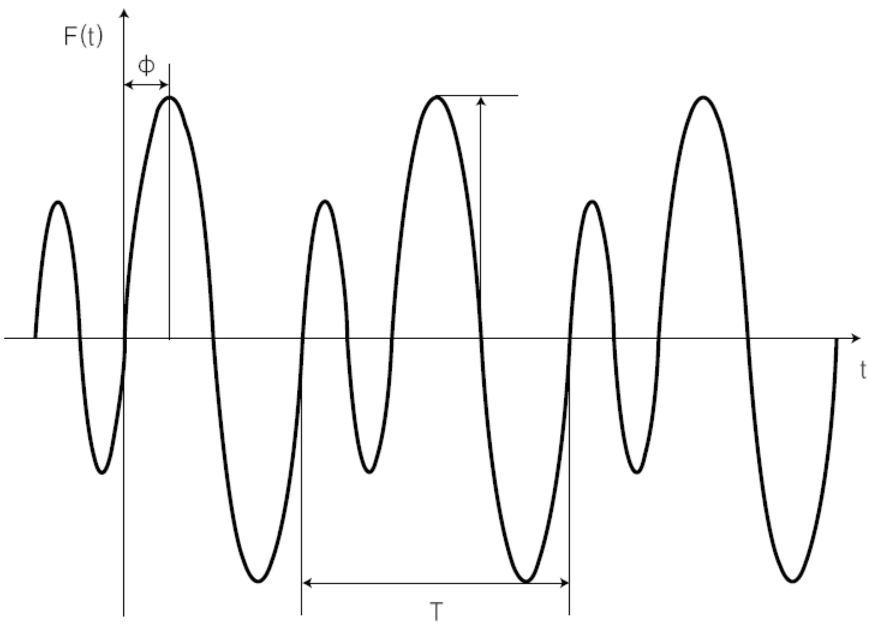
X



=

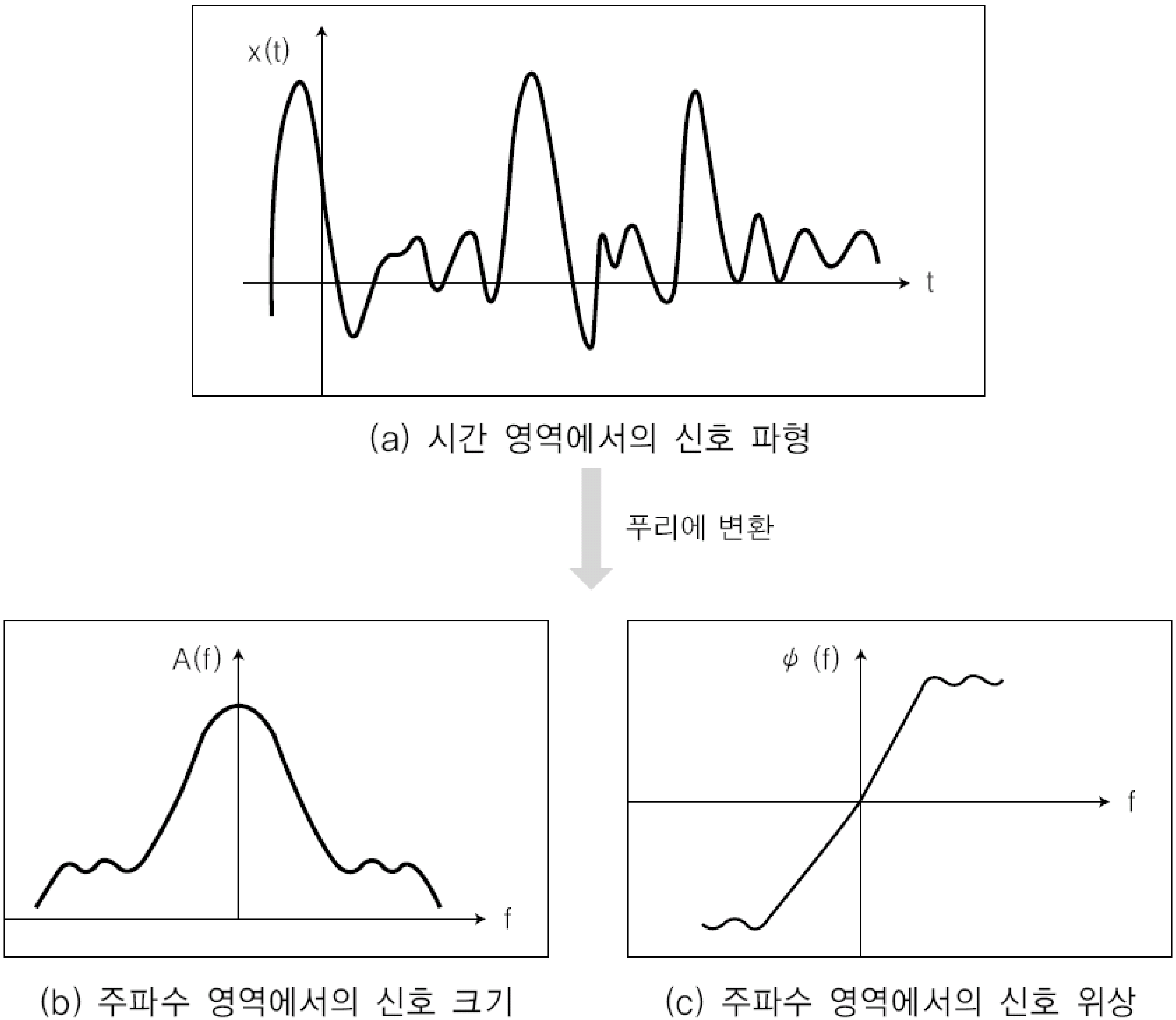


- 푸리에 변환(Fourier Transform)
  - 주파수 영역으로 변환하는 가장 일반적인 방법
  - 주기성이 있는 신호는 연속된 정현파의 조합으로 표현
- 신호를 구성하는 세 가지 요소
  - 주기 T: 반복되는 시간
  - 진폭 A: 파형의 크기. 0에서 양의 최대 높이까지의 거리
  - 위상 Φ : 파형의 시작이 얼만큼 지연되고 선행되었는지를 나타내는 시간 차이



[그림 13-4] 신호의 구성요소

푸리에 변환(변환)



[그림 13-6] 푸리에 변환을 이용한 주파수 영역으로의 변환

푸리에 변환(계속)

- 연속 푸리에 변환
  - 연속적인 시간 영역의 신호를 주파수 영역으로 변환하는 것.

$$\Im\{g(t)\} = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

  - 2차원 연속 푸리에 변환 공식

$$\Im^{-1}\{G(f)\} = g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}\,df$$

$$\Im\{g(x,y)\} = G(f_x, f_y) = \iint_{-\infty} g(x,y)e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)}\,dxdy$$

$$\Im^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = g(x,y) = \iint_{-\infty} G(f_x, f_y)e^{j2\pi(f_x x + f_y y)}\,df_x df_y$$

순방향 고속 푸리에 변환

- FFT를 영상에 적용하려면 필수적으로 영상의 크기도 2의 지수 승이어야 함(예를 들어, $N=2^j$, $M=2^k$).
- 영상의 크기가 2의 지수 승이 아니라면 0의 값을 삽입하여 강제적으로 2의 지수 승을 만듦. 1차원 FFT는 두 단계로 구현됨.
  - 첫 번째 단계: 스크램블링
    - 재귀적인 DFT 계산 주기와 맞추려고 데이터를 적절히 재배치

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\ ,\ \ k=0,1\cdots,N-1$$

  - 두 번째 단계: 버터플라이 함수 적용
    - 데이터를 점(Pointer)의 집합으로 나눠 이웃한 점의 DFT 변환 수행

$$W_N^{nk}=e^{-j2\pi(nk/N)}$$

  - 결국, 다음과 같이 정리할 수 있음.

$$X(k)=G(k)+W_N^kH(k)$$

영상 스펙트럼

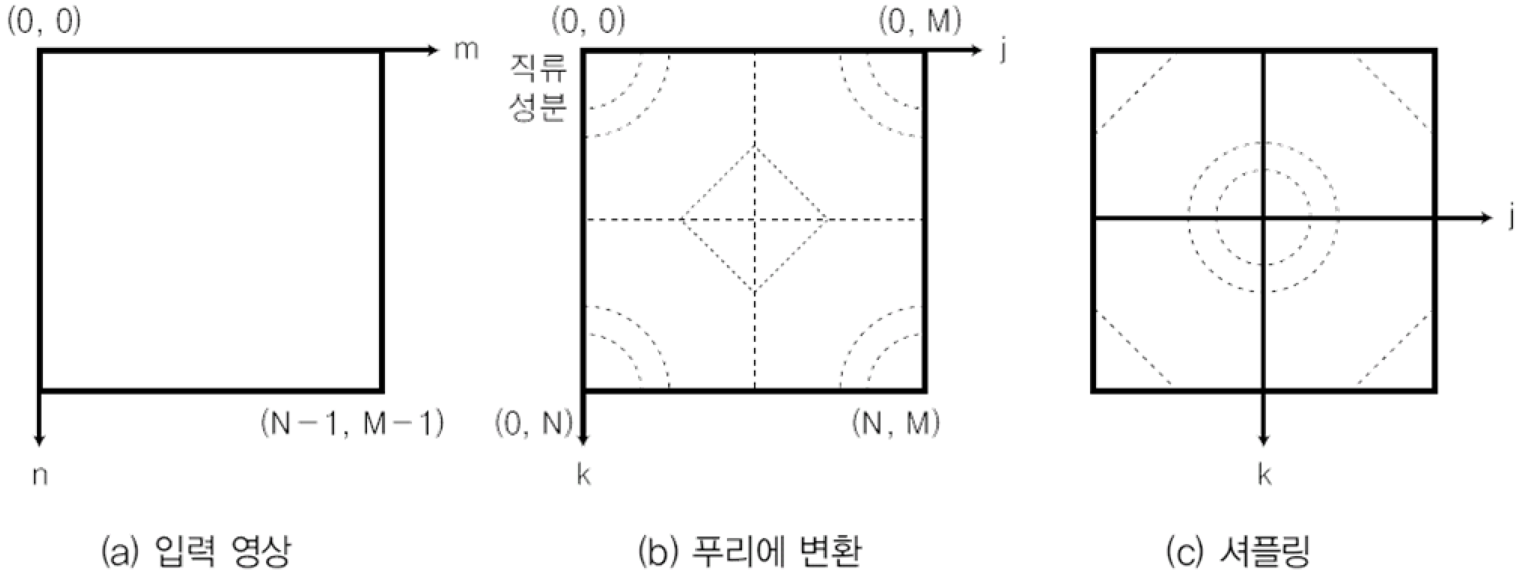
- 스펙트럼(Spectrum) 영상
  - 디지털 영상이 이산 푸리에 변환으로 주파수 영역 영상으로 변환되는 것
- 스펙트럼 영상을 나타낼 때 구한 주파수 데이터의 동적 범위가 너무 넓음
- 스펙트럼의 상용 대수식

$$D(u,v) = c\log[1 + |G(\hat{f}_n, \hat{f}_m)|]$$

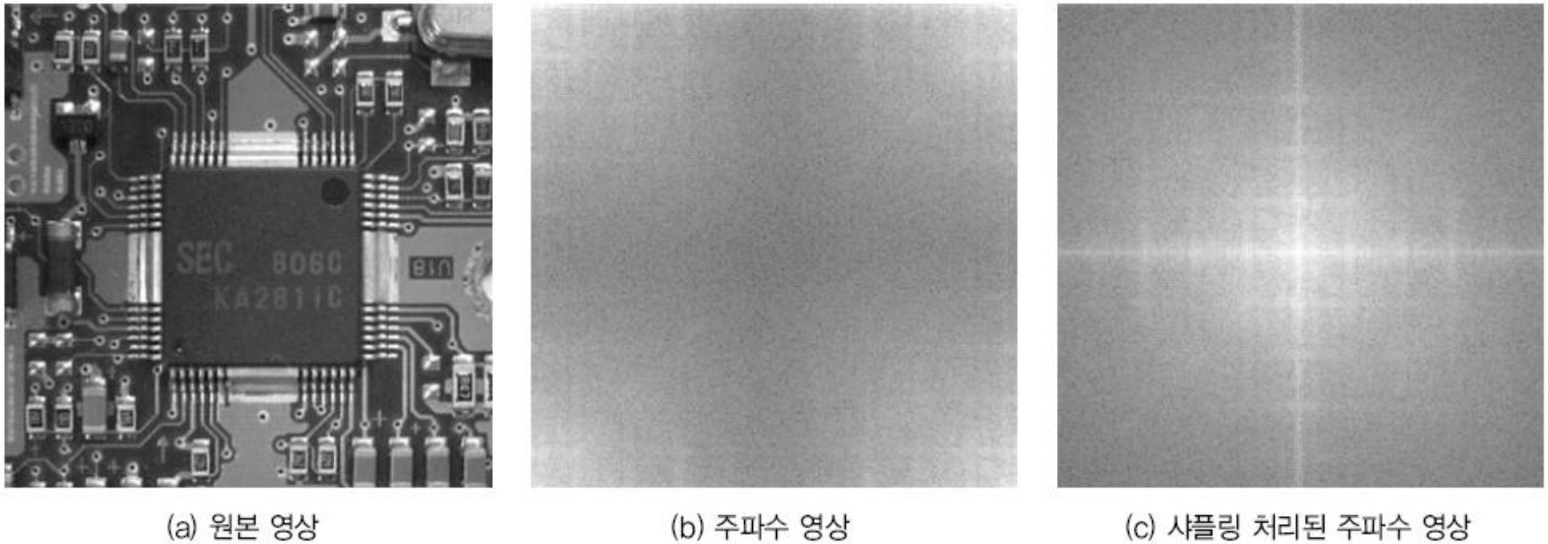
  - 1을 더하는 이유는 화소 값이 0일 때를 고려한 것임

- 스펙트럼 영상에는 푸리에 변환의 켤레 대칭성으로 대칭 성분이 발생하여 사각형의 네 구석에 직류 성분이 있게 됨.
- 샤플링(Shuffling)은 푸리에 변환의 주기성을 이용하여 주파수 4분 면을 영상의 가운데로 이동시키는 것으로, 좀더 쉽게 해석해 주는 역할 함.

영상 스펙트럼(계속)



[그림 13-11] 스펙트럼 영상의 대칭성과 샤플링



[그림 13-12] FFT 처리된 영상과 셔플링 처리된 영상

요약

영상 변환
- 영상 데이터를 다른 형태의 데이터로 변환하는 것으로, 데이터를 바라보는 관점을 변경하여 새로운 정보를 얻는 것
- 영상의 개선, 복원, 압축, 해석 등 다양한 영상처리 작업을 공간에서 처리하는 것보다 더 쉽고 효율적으로 수행할 수 있게 함.

주파수
- 영상에서 밝기의 변화 정도를 나타내는 것으로, 화소 값의 변화율을 뜻함.
- 밝기가 얼마나 빨리 변화하는가에 따라서 고주파와 저주파로 분류

영상에서 높은 주파수 성분을 낮추면
- 섬세한 부분이 사라지고, 부드럽고 엉성한 영상으로 변함.

낮은 주파수 성분을 낮추면
- 엉성한 부분이 사라지면서 섬세한 부분에 해당하는 경계가 강조됨.

주파수 변환
- 공간 영역 형태의 영상을 주파수 영역 형태의 기본 주파수로 분리하는 것
- 정규적인 변환이 성립하려면 역변환도 성립되어야 함.

요약

- 푸리에 변환
  - 주파수 영역으로 변환하는 가장 일반적인 방법
- 고속의 푸리에 변환(FFT)
  - 이산 푸리에 변환 공식에서 반복 계산을 제거하면 변환을 빠르게 수행할 수 있는 장점이 있음.
- 1차원 FFT는 두 단계로 구현됨
  - 1단계: 스크램블링 단계

    재귀적인 DFT 계산 주기와 맞추려고 데이터를 적절히 재배치함.
  - 2단계 : 버터플라이 함수 적용 단계

    데이터를 점의 집합으로 나눠 이웃한 점의 DFT 변환을 수행함.
- 스펙트럼 영상
  - 디지털 영상이 이산 푸리에 변환으로 주파수 영역 영상으로 변환되는 것
  - 스펙트럼의 상용 대수식을 이용하여 스펙트럼 영상을 생성함.

학습 정리

- Fourier transform
  - 사인 및 코사인 함수의 조합으로 된 기저 함수를 사용
  - 스펙트럼은 복소수 값으로 표현
  - 신호(영상) 분석에 주로 사용
- Consine transform
  - 코사인 함수를 기저 함수로 사용
  - 스펙트럼은 실수 값으로 표현
  - 영상 압축에 주로 사용
- 스펙트럼의 특성 (Properties of Spectrum)
  - Fourier Transform: Periodicity and Conjugate Symmetry
- Four Types of Filtering
  - Lowpass filtering, Highpass filtering, Bandpass filtering, Bandreject filtering

Reference

- Scott E Umbaugh, **Computer Imaging**, CRC Press, 2005
- R. Gonzalez, R. Woods, **Digital Image Processing (2nd Edition),** Prentice Hall, 2002

Thank you