

ACT-2010

Séries Chronologiques

Exercices et solutions

Mis à jour le 8 octobre 2013
François Pelletier
École d'Actuariat, Université Laval

1 Modèles classiques pour séries chronologiques

1.1 Zone de stationnarité pour AR(2) (Théorique)

On obtient les racines de l'équation caractéristique en utilisant la formule quadratique habituelle

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$$

On considère les inverses des deux racines, A_1 et A_2 .

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2\phi_2}{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \\ &= \frac{2\phi_2}{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \left[\frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \right] \\ &= \frac{2\phi_2(-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})}{\phi_1^2 - (\phi_1^2 + 4\phi_2)} \\ &= \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \\ A_2 &= \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \end{aligned}$$

Il y a 2 situations possibles : soit les racines sont réelles ($\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$) ou elles sont complexes ($\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$).

- **Racines réelles** : Comme les racines doivent être plus grandes que 1, alors nécessairement leurs inverses $|A_1| < 1$ et $|A_2| < 1$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < 1 \\ \Leftrightarrow -2 &< \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 \end{aligned}$$

En observant la première inégalité, on a :

$$\begin{aligned} -2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} &\Leftrightarrow \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < \phi_1 + 2 \\ &\Leftrightarrow \phi_1^2 + 4\phi_2 < \phi_1^2 + 4\phi_1 + 4 \\ &\Leftrightarrow \phi_2 < \phi_1 + 1 \\ &\Leftrightarrow \phi_2 - \phi_1 < 1 \end{aligned}$$

Ce qui correspond à la seconde condition. En considérant la seconde inégalité, on obtient, de la même façon, la première inégalité :

$$\begin{aligned} \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} &< 2 \\ \Leftrightarrow \phi_1 + \phi_2 &< 1 \end{aligned}$$

Ces deux conditions réunies avec un discriminant positif forment la région de stationnarité pour des racines réelles.

- **Racines complexes :** On considère la situation où $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$. Ici, on aura des conjugués complexes et $|A_1| = |A_2| < 1$ seulement si $|A_1|^2 < 1$.

$$\begin{aligned} |A_1|^2 &= \frac{\phi_1^2 + (-\phi_1^2 - 4\phi_2)}{4} = -\phi_2 \\ &\Leftrightarrow \phi_2 > -1 \\ &\Leftrightarrow |\phi_2| < 1 \end{aligned}$$

Ce résultat réuni avec un discriminant négatif forment la région de stationnarité pour des racines complexes.

1.2 Ordre d'intégration (Théorique)

1.3 Inversion de processus d'ordre 1 (Théorique)

1.4 Construction d'une série autorégressive (Calculatrice)



Cette création est mise à disposition selon le contrat Paternité-Partage à l'identique 2.5 Canada de Creative Commons disponible à l'adresse <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/ca/deed.fr>

En vertu de ce contrat, vous êtes libre de :

- **partager** — reproduire, distribuer et communiquer l'œuvre ;
- **remixer** — adapter l'œuvre ;
- utiliser cette œuvre à des fins commerciales.

Selon les conditions suivantes :



Attribution — Vous devez attribuer l'œuvre de la manière indiquée par l'auteur de l'œuvre ou le titulaire des droits (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'œuvre).



Partage à l'identique — Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette œuvre, vous n'avez le droit de distribuer votre création que sous une licence identique ou similaire à celle-ci.