Séries chronologiques

Exercices et solutions

Séries chronologiques

Exercices et solutions

François Pelletier

École d'actuariat
Université Laval

Première édition - Automne 2013

Historique de publication
Décembre 2013 : Première édition

Code source
Le code source LaTeX de ce document est disponible à l'adresse

https://github.com/franc00018/ACT-2010-Exercices

ou en communiquant directement avec les auteurs.

Table des matières

1 Méthodes de lissage et saisonnalité

1.1 On considère les taux d'inflation sur 12 mois disponibles dans le fichier `cg130823a001-fra.csv`. On représente cette série chronologique par la variable aléatoire Y_t. L'an passé, les Canadiens ont dépensé en moyenne 674$ en cadeaux au mois de décembre 2012. Notre objectif est de prévoir quel sera le montant dépensé pour l'achat de cadeaux en décembre 2013.

a) Tracez un graphique de la série chronologique Y_t à l'aide d'un logiciel statistique. Êtes vous en mesure de déceler visuellement la présence d'une tendance et/ou d'une saisonnalité ?

b) Utilisez l'opérateur différentiel ∇_{12} afin d'éliminer la saisonnalité annuelle de la série chronologique Y_t et obtenir la série Z_t. Tracez à nouveau un graphique avec les données obtenues. Remarquez-vous toujours la présence de saisonnalité ? Tracez le graphique de la composante de saisonnalité s_t.

c) Maintenant, nous voulons déceler s'il y a présence d'une tendance dans les données. En utilisant la méthode de la moyenne mobile avec $q = 1$ et $q = 5$, du lissage exponentiel double avec $\alpha = 5\%$ et de la régression linéaire simple, estimer la tendance $\hat{m}_t$. Faire le graphique superposé des 5 tendances.

d) En utilisant le résultat de la régression linéaire précédente, prévoir la valeur non saisonnalisée en décembre 2013. En évaluant la moyenne des différences entre la série Y_t et la valeur de la régression pour les mois de décembre des années précédente, on peut estimer la valeur $\hat{s}_{12}$. Ajouter cette valeur au résultat obtenu pour obtenir une estimation du taux d'inflation en décembre 2013.

e) En applicant ce taux d'inflation à la donnée du problème, prédire le montant dépensé pour l'achat de cadeaux en décembre 2013.

1.2 On a estimé la tendance d'un ensemble de données d'incendie pour une année. Cependant, suite à un problème informatique, certaines données sont manquantes. Identifiez ces données.

Mois	Incendies	Moyenne Mobile	
1	4	-	
2	3	-	
3	a	4,8	
4	b	4,8	
5	2	5,4	
6	4	5,2	
7	6	3,6	
8	c	3,6	
9	0	4,4	
10	2	3,8	
11	8	-	
12	3	-	

1.3 Nous sommes le 28 juin 2013, à l'heure de la fermeture des marchés financiers. Vous possédez un titre de la compagnie BlackBerry dont la valeur est de $S_0 = 10.46$. Un analyste vous suggère d'acheter une option de vente européenne d'échéance de 84 jours ($t = 84/365$) avec un prix d'exercice équivalant à la valeur nominale d'un contrat à terme de même échéance afin de couvrir le risque de baisse de la valeur de ce titre. On considère des rendements sur une période de 28 jours et un taux sans risque composé continument de $r = 1.75\%$. En utilisant les logarithmes des valeurs historique à la fermeture du titre disponibles dans le fichier `blackberry.csv`, ainsi que la méthode de différenciation, évaluez les rendements mensuels du titre, qui correspondent aux résidus de ce processus différentié. Ensuite, en évaluant la moyenne et l'écart-type de cette composante, il est possible d'estimer la tendance linéaire μ et la volatilité σ mensuelles de la série des rendements. En supposant que le prix peut prendre deux valeurs à l'échéance, soit $S_0 u = S_0 e^{3(\mu+\sigma/(2\sqrt{3}))}$ et $S_0 d = S_0 e^{3(\mu-\sigma/(2\sqrt{3}))}$, évaluez le prix de l'option de vente en utilisant la probabilité neutre au risque d'une hausse $p^* = \frac{e^{rt}-d}{u-d}$ et évaluez le profit que vous effectuerez en exercant l'option de vente le 20 septembre 2013, considérant que vous empruntez au taux $r + 2\%$ pour acheter l'option.

1.4 On considère un ensemble de 10 observations :

$$\mathcal{A} = \{1.2,1.5,1.4,2.1,1.8,1.9,2.2,2.4,2.0,1.9\}$$

En utilisant une méthode de lissage exponentiel avec $\alpha = 0.4$ et $\alpha = 0.7$, déterminez laquelle des méthodes produit la moins grande erreur quadratique moyenne (MSE).

1.5 En utilisant les données du problème précédent, déterminez, à l'aide d'un algorithme informatique, la valeur de α comprise entre 0.4 et 0.7 qui minimise l'erreur quadratique moyenne (MSE) pour un lissage exponentiel double.

1.6 On considère les 20 observations de la valeur ajustée à la fermeture (valeur qui tient compte des dividendes) du titre de la Bank of America pour chaque lundi entre le 20 mai 2013 et le 30 septembre 2013. Ces données se trouvent dans le fichier `BoA.csv`.

a) En utilisant le test du corrélogramme avec un seuil de tolérance de $\alpha = 10\%$, déterminez s'il s'agit d'une série stationnaire (Bruit blanc).

b) En utilisant le test du changement de direction avec un seuil de tolérance de $\alpha = 10\%$, déterminez s'il s'agit d'une série stationnaire.

c) En utilisant le test de Portmanteau avec un seuil de tolérance de $\alpha = 10\%$, déterminez s'il s'agit d'une série stationnaire.

d) Est-ce que ces tests sont équivalents ? Commentez.

e) En utilisant la différenciation et le logarithme des données, évaluez la série des rendements hebdomadaires.

f) En utilisant le même principe que pour la moyenne mobile, évaluez la variance mobile de la série précédente avec $q = 2$. Que remarquez-vous ? Peut-on affirmer que c'est une série stationnaire à l'aide du test de Portmanteau avec un seuil de tolérance de $\alpha = 10\%$?

1.7 Une série présentant une racine unitaire se présente sous la forme $Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t$. Quelle est la différence entre la variance du 5^e terme et du 7^e terme de cette série si $\epsilon_t \sim N(0,0.1t^2)$?

2 Modèles classiques pour séries chronologiques

2.1 Pour avoir la stationnarité, il faut que les racines du polynôme caractéristique soient inférieures à 1 en valeur absolue. Démontrez que pour le modèle AR(2), la stationnarité est possible si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies :

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ |\phi_2| &< 1 \end{aligned}$$

2.2 a) Un polynôme d'ordre k en t est intégré d'ordre k puisque

$$(1-B)^k(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k) = k! a_k$$

Démontrez cette affirmation.

b) Démontrez que si x_t est stationnaire, alors $(1-B)x_t$ est aussi stationnaire.

2.3 a) Démontrez algébriquement qu'un processus AR(1) est équivalent à un processus MA(∞).

b) Démontrez algébriquement qu'un processus MA(1) est équivalent à un processus AR(∞).

2.4 On considère les 10 nombres aléatoires suivants, issus d'une distribution normale centrée réduite :

```
[1] -1.21  0.28  1.08 -2.35  0.43  0.51 -0.57 -0.55 -0.56 -0.89
```

Construisez la série autorégressive d'ordre 1 avec coefficient :

a) $\phi = -0.5$

b) $\phi = 0.5$

Quelle différence observez-vous entre la série avec une corrélation négative et la série avec une corrélation positive ?

2.5 On considère deux processus MA(2), un où $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{4}$, et un autre où $\theta_1 = -1$ et $\theta_2 = 4$. Démontrez que ces processus ont la même fonction d'autocorrélation.

2.6 a) En utilisant les équations de Yule-Walker, dérivez un estimateur des moments pour les paramètres ϕ_1 et ϕ_1 d'un processus AR(2).

b) Estimez les paramètres du processus AR(2) à partir de la série suivante :

```
[1]  1.1617660  0.6981185  0.1693004 -0.6457205  1.4217278  1.3701445
[7] -1.6369769 -0.4596686 -0.2933815 -1.0995973
```

2.7 a) Démontrez que le terme d'erreur ϵ_t d'un processus ARMA(2,1) peut être exprimé sous la forme suivante, où μ est une constante et ϕ_1, ϕ_2, θ sont les paramètres du modèle. On considère que la série est stationnaire.

$$\epsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i \left(y_{t-i} - \mu - \phi_1 y_{t-i-1} - \phi_2 y_{t-i-2}\right)$$

b) De plus, démontrez qu'à partir de cette forme du terme d'erreur, on peut obtenir la représentation AR(∞) du processus ARMA(2,1).

2.8 On considère l'équation en différence suivante :

$$y_t = 1.5 y_{t-1} - 0.5 y_{t-2} + \epsilon_t$$

a) À quel modèle correspond cette équation ?

b) Trouvez les racines de l'équation homogène.

c) Démontrez que les racines de l'équation $1 - 1.5B + 0.5B^2$ sont la réciproque des valeurs trouvées à la question précédente.

d) Est-ce que cette série est stationnaire ?

e) On suppose que l'on connaît les deux premiers termes de la série y_0 et y_1. Trouvez la solution générale pour y_t en fonction de la séquence des valeurs de ϵ_t.

f) Identifiez la forme de la fonction de prédiction pour y_{T+s}, sachant les valeurs de y_{T-1} et y_T.

g) Évaluez $E[y_t]$, $E[y_{t+1}]$, $Var[y_t]$, $Var[y_{t+1}]$ et $Cov[y_t, y_{t+1}]$.

h) Donnez l'expression d'un intervalle de confiance à 95% pour la valeur de y_{t+1}

2.9 Soit les deux processus suivants :

$$\begin{aligned} Y_t &= V_t + \alpha V_{t-1} \\ Z_t &= \delta_t \end{aligned}$$

On ajoute que V_t et δ_t sont indépendants.

a) Déterminer le modèle classique pour le processus $X_t = Y_t + Z_t$ sous la forme ARMA(p,q).

b) Évaluer les paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_n, \phi_1, \ldots \phi_n$ et σ_ϵ^2 du modèle identifié précédemment, considérant que $\alpha = 0.5, \sigma_V^2 = 0.04$ et $\sigma_\delta^2 = 0.01$.

2.10 Trouver la valeur projetée x_{t+2} et l'intervalle de confiance à 95% pour le processus $AR(1)$ de paramètre $\phi = 0.4$ et $\sigma_\epsilon^2 = 0.25$, si $x_t = 1.5$.

3 Modèles de volatilité stochastique

3.1 On considère un processus ARCH(2) dont le carré des résidus répond à l'équation suivante[1] :

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2.$$

On suppose que les résidus proviennent du modèle suivant :

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t.$$

Trouvez la variance conditionnelle et inconditionnelle de $\{y_t\}$.

1. Cet exercice est inspiré de l'exercice 8 du chapitre 3 de Enders (2004)

A Solutions

Chapitre 1

1.1 a)
```
> library(xtable)
> library(TTR)
> Yt <- read.csv("inflation.csv",header=TRUE,sep="\t")[,2]
> Yt.ts <-ts(Yt,start=c(2008,7),deltat=1/12)
```
```
> xtable(Yt.ts,digits=1) ## Générer une table LaTeX
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2008							-0.1	0.5	0.7	0.9	1.4	2.3
2009	1.5	0.9	2.2	0.8	0.2	0.3	1.0	0.3	0.8	0.4	1.6	2.0
2010	3.2	2.3	1.4	0.6	0.7	1.1	-0.2	1.4	0.9	1.4	1.4	1.9
2011	3.1	2.1	2.7	1.7	1.7	0.1	0.9	1.6	1.6	2.5	2.4	2.6
2012	2.0	3.2	2.9	1.4	1.1	1.3	1.4	1.4	1.5	1.7	2.3	2.4
2013	3.0	2.3	2.3	1.9	1.7	0.5	0.9					

On retrouve le graphique de la série Y_t à la figure A.1.

b)
```
> xtable(Zt.ts <- diff(Yt.ts,12),digits=1)
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009							1.1	-0.2	0.1	-0.5	0.2	-0.3
2010	1.7	1.4	-0.8	-0.2	0.6	0.8	-1.2	1.2	0.1	1.1	-0.2	-0.1
2011	-0.1	-0.2	1.4	1.0	1.0	-0.9	1.1	0.2	0.7	1.1	1.0	0.8
2012	-1.1	1.1	0.1	-0.3	-0.6	1.1	0.5	-0.2	-0.1	-0.8	-0.1	-0.2
2013	1.0	-0.9	-0.6	0.5	0.5	-0.8	-0.5					

On retrouve le graphique de la série désaisonnalisée Z_t à la figure A.2.

On élimine la composante de saisonnalité

```
> xtable(Yt.ts-Zt.ts,digits=1)
```

On retrouve le graphique de la composante de saisonnalité $Y_t - Z_t$ à la figure A.3.

c) On élimime maintenant la tendance :

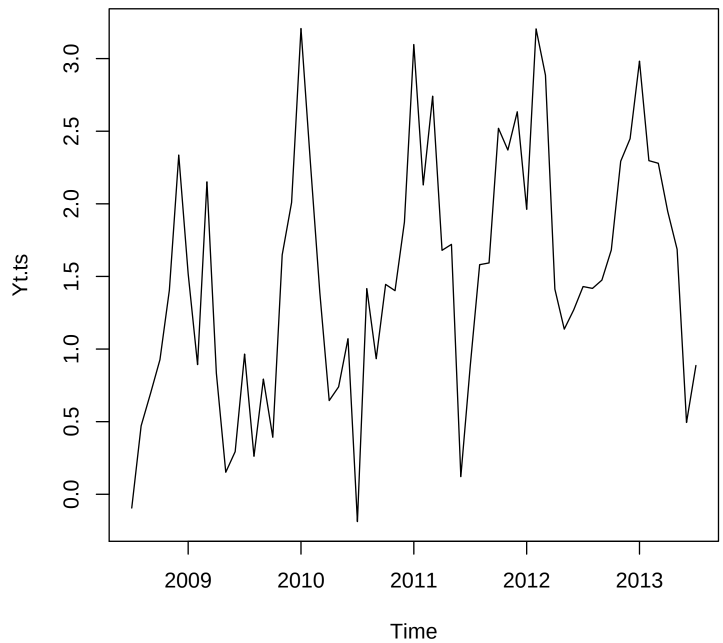

FIG. A.1: Graphique de la série Y_t

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009							-0.1	0.5	0.7	0.9	1.4	2.3
2010	1.5	0.9	2.2	0.8	0.2	0.3	1.0	0.3	0.8	0.4	1.6	2.0
2011	3.2	2.3	1.4	0.6	0.7	1.1	-0.2	1.4	0.9	1.4	1.4	1.9
2012	3.1	2.1	2.7	1.7	1.7	0.1	0.9	1.6	1.6	2.5	2.4	2.6
2013	2.0	3.2	2.9	1.4	1.1	1.3	1.4					

On utilise une moyenne mobile avec $q = 1$. Comme la fonction *SMA()* utilise les $2q + 1$ données précédentes et que nous voulons une moyenne mobile centrée, nous devons utiliser l'opérateur de rétrodécalage $B()$ pour décaler la série.

```
> ## Simple Moving Average(q=1)
> xtable(mt1 <- lag(SMA(Zt.ts,n=3),1),digits=2)
```

Moyenne mobile avec $q = 5$

```
> ## Simple Moving Average(q=5)
> xtable(mt2 <- lag(SMA(Zt.ts,n=11),5),digits=2)
```

Lissage exponentiel double avec $\alpha = 0.75$

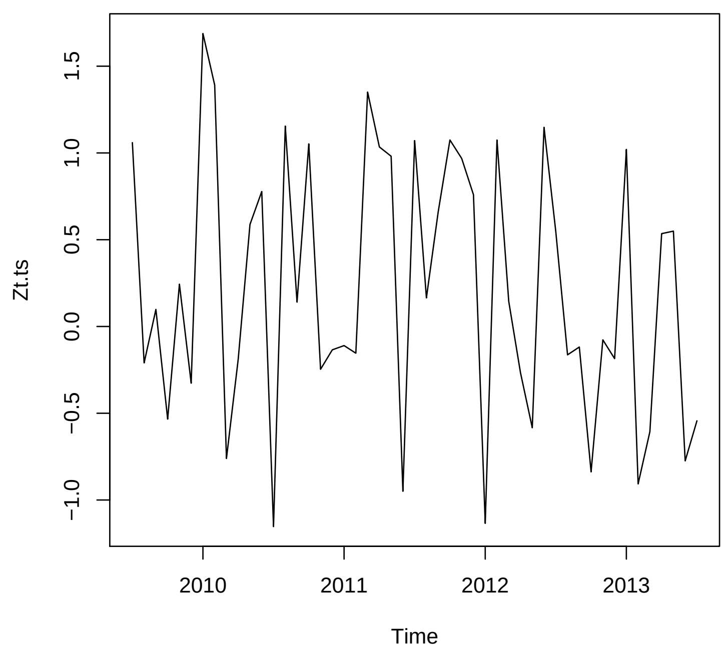

FIG. A.2: Graphique de la série désaisonnalisée Z_t

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009								0.32	-0.22	-0.06	-0.21	0.54
2010	0.92	0.77	0.15	-0.12	0.39	0.07	0.26	0.05	0.78	0.32	0.22	-0.16
2011	-0.13	0.36	0.74	1.12	0.36	0.37	0.10	0.63	0.63	0.90	0.93	0.20
2012	0.23	0.03	0.32	-0.24	0.10	0.37	0.51	0.09	-0.37	-0.34	-0.37	0.25
2013	-0.02	-0.16	-0.33	0.16	0.10	-0.26						

```
> ## Double Exponential Moving Average
> xtable(mt3 <- DEMA(Zt.ts,n=1,ratio=.05),digits=2)
```

Régression linéaire

```
> t <- 0:48
> (lm1 <- lm(Zt.ts~t)) ## Modèle de régression sur une variable
```

```
Call:
lm(formula = Zt.ts ~ t)

Coefficients:
(Intercept)            t
   0.446924    -0.009856
```

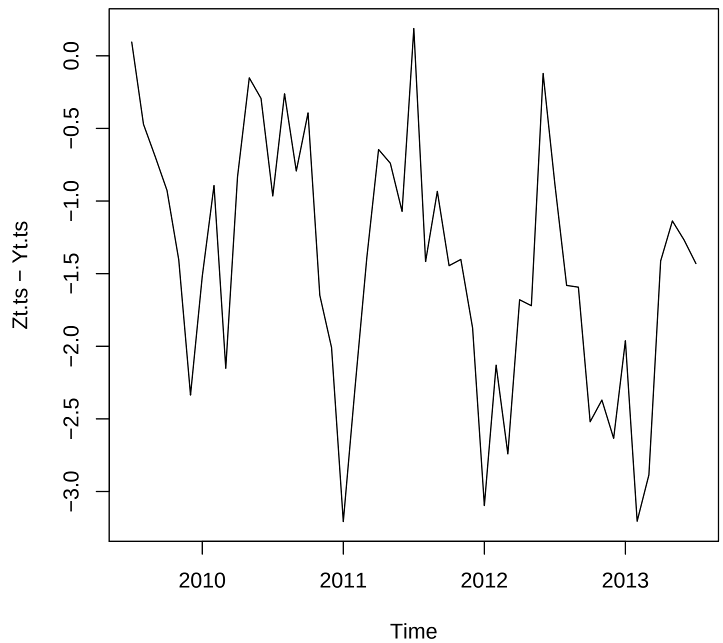

FIG. A.3: Graphique de la composante de saisonnalité $Y_t - Z_t$

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009												0.28
2010	0.25	0.17	0.26	0.32	0.40	0.40	0.24	0.10	0.16	0.30	0.34	0.36
2011	0.37	0.37	0.37	0.33	0.45	0.55	0.63	0.54	0.52	0.44	0.32	0.36
2012	0.36	0.40	0.32	0.22	0.05	-0.02	0.06	0.06	-0.04	-0.07	0.03	-0.02
2013	-0.14	-0.18										

```
> coeff1 <- coefficients(lm1)
```

```
> xtable(mt4 <- ts(coeff1[1]+t*coeff1[2],start=c(2009,7),deltat=1/12),digits=2
```

On retrouve le graphique de la tendance m_t à la figure A.4.

d)
```
> projection <- coeff1[1]+53*coeff1[2]
> saisonnalite <- mean((Yt.ts-Zt.ts)[6+12*0:3])
> (taux.inf.dec.2013 <- (projection+saisonnalite))
```

```
(Intercept)
   2.137743
```

Le taux d'inflation prejeté en décembre 2013 est 2.14%

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009							1.06	0.94	0.85	0.71	0.66	0.55
2010	0.65	0.72	0.57	0.48	0.48	0.50	0.33	0.39	0.36	0.41	0.33	0.28
2011	0.22	0.17	0.27	0.33	0.38	0.24	0.31	0.29	0.31	0.38	0.43	0.45
2012	0.29	0.36	0.33	0.26	0.17	0.25	0.27	0.22	0.18	0.07	0.04	0.01
2013	0.09	-0.02	-0.09	-0.04	0.00	-0.09	-0.14					

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009							0.45	0.44	0.43	0.42	0.41	0.40
2010	0.39	0.38	0.37	0.36	0.35	0.34	0.33	0.32	0.31	0.30	0.29	0.28
2011	0.27	0.26	0.25	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.17	0.16
2012	0.15	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04
2013	0.03	0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.02	-0.03					

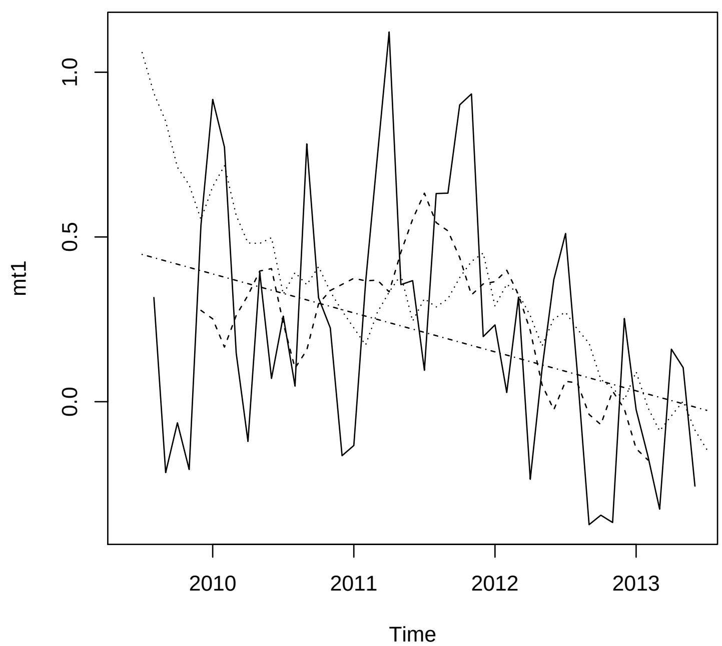

Fig. A.4: Graphique de la tendance m_t

e)
```
> depense.dec.2008 <- 674
> depense.dec.2013 <- 674*(1+taux.inf.dec.2013/100)
```

Le montant projeté des achats de cadeaux en décembre 2013 est 688.41

$

1.2 On remarque d'abord que $q = 2$.
On peut ensuite poser les équations suivantes :

$$4+3+a+b+2=24 \tag{A.1}$$
$$b+2+4+6+c=26 \tag{A.2}$$
$$c+0+2+8+3=19 \tag{A.3}$$

En résolvant, on obtient la solution.

Solution :

Mois	Incendies	Moyenne Mobile
1	4	-
2	3	-
3	**7**	4,8
4	**8**	4,8
5	2	5,4
6	4	5,2
7	6	3,6
8	**6**	3,6
9	0	4,4
10	2	3,8
11	8	-
12	3	-

1.3
```
> rf <- 0.0175
> rB <- rf+0.02
> S0 <- 10.46
> ST <- 8.73
> K <- S0*exp(rf*84/365)
> bbry <- read.csv("blackberry.csv",header=TRUE,sep=";")
> bbry.sel <- bbry[as.POSIXlt(bbry$Date)$wday==5,][1+3:12*4,]$Close
> l.bbry.sel <- log(bbry.sel)
> (diff.l.bbry.sel <- diff(l.bbry.sel))

[1]  0.288637639  0.112996047 -0.061344651 -0.103095509
[5] -0.017497594 -0.086523113  0.005008358 -0.340978628
[9] -0.090637274

> (mu.diff.l.bbry.sel <- mean(diff.l.bbry.sel))

[1] -0.03260386

> (sigma.diff.l.bbry.sel <- sd(diff.l.bbry.sel))

[1] 0.170735
```

```
> (prix.arbre <- S0*(ud <- exp(3*(mu.diff.l.bbry.sel+c(1,-1)*
+                                    sigma.diff.l.bbry.sel/(2*sqrt(3))))))

[1] 10.996838  8.181586

> (p.rn <- (exp(rf*84/365)-ud[2])/(ud[1]-ud[2]))

[1] 0.8243048

> q.rn <- 1-p.rn
> (P0 <- sum(exp(-rf*84/365)*(c(p.rn,q.rn)*pmax(K-prix.arbre,0))))

[1] 0.406084

> (BT <- P0*exp(rB*84/365))

[1] 0.4096037

> (K-ST)-BT

[1] 1.362608
```

La valeur du paramètre μ de rendement moyen est -0.0326. La valeur du paramètre σ de volatilité est 0.1707. La valeur des prix de l'arbre binomial sont 10.9968 et 8.1816. La valeur de la probabilité neutre au risque d'une hausse est 0.8243. La valeur de l'option est 0.4061. Le profit, qui correspont à la différence entre la réclamation contingente de l'option et le coût d'acquisition, est de 1.3626.

1.4 On calcule d'abord les deux séries lissées

$\mathcal{A}$	$\alpha = 0{,}4$	$\alpha = 0{,}7$
1,2	1,2000	1,2000
1,5	1,3200	1,4100
1,4	1,3520	1,4030
2,1	1,6512	1,8909
1,8	1,7107	1,8273
1,9	1,7864	1,8782
2,2	1,9519	2,1035
2,4	2,1311	2,3110
2,0	2,0787	2,0933
1,9	2,0072	1,9580

On évalue ensuite l'erreur quadratique pour chaque terme

$\mathcal{A}$	$SE(\alpha = 0{,}4)$	$SE(\alpha = 0{,}7)$
1,2		
1,5	0,0324	0,0081
1,4	0,0023	0,0000
2,1	0,2014	0,0437
1,8	0,0080	0,0007
1,9	0,0129	0,0005
2,2	0,0616	0,0093
2,4	0,0723	0,0079
2,0	0,0062	0,0087
1,9	0,0115	0,0034

On obtient enfin l'erreur quadratique moyenne

	$\alpha = 0{,}4$	$\alpha = 0{,}7$
MSE	0,0454	0,0092

Les calculs effectués se trouvent dans le fichier `Lissage.Exponentiel.I.ods`[1].

Avec R, on obtient les résultats suivants en utilisant la fonction de lissage exponentiel *EMA()*.

```
> A <- c(1.2, 1.5, 1.4, 2.1, 1.8, 1.9, 2.2, 2.4, 2.0, 1.9)
> n.A <- length(A)
> A.EMA.4 <- EMA(A,n=1,ratio=0.4)
> A.EMA.7 <- EMA(A,n=1,ratio=0.7)
> A.SE <- (A-cbind(A.EMA.4,A.EMA.7))^2
> cbind(A,A.EMA.4,A.EMA.7,A.SE)

        A  A.EMA.4  A.EMA.7     A.EMA.4      A.EMA.7
 [1,] 1.2 1.200000 1.200000 0.000000000 0.0000000000
 [2,] 1.5 1.320000 1.410000 0.032400000 0.0081000000
 [3,] 1.4 1.352000 1.403000 0.002304000 0.0000090000
 [4,] 2.1 1.651200 1.890900 0.201421440 0.0437228100
 [5,] 1.8 1.710720 1.827270 0.007970918 0.0007436529
 [6,] 1.9 1.786432 1.878181 0.012897691 0.0004760688
 [7,] 2.2 1.951859 2.103454 0.061573857 0.0093210722
 [8,] 2.4 2.131116 2.311036 0.072298864 0.0079145417
 [9,] 2.0 2.078669 2.093311 0.006188861 0.0087069216
[10,] 1.9 2.007202 1.957993 0.011492180 0.0033632189

> (A.MSE <- colMeans(A.SE)*(n.A/(n.A-1)))

   A.EMA.4    A.EMA.7
0.04539420 0.00915081
```

La valeur $\alpha = 0.7$ produit une erreur quadratique moyenne inférieure.

1. Ce fichier est au format OpenDocument et s'ouvre avec la plupart des suites bureautiques

1.5 Une solution assez simple est d'utiliser le solveur intégré au logiciel tableau que vous utilisez et d'optimiser la valeur de la cellule contenant α avec comme critère de minimisation la cellule contenant l'erreur quadratique moyenne (MSE).

On peut aussi construire une fonction d'optimisation dans R qui réplique le comportement du chiffrier que nous avons construit dans le logiciel tableur.

```
> funOptAlphaDEMA <- function(alpha,data)
+ {
+   data.n <- length(data)
+   data.DEMA <- DEMA(A,n=1,ratio=alpha)
+   data.SE <- (data-data.DEMA)^2
+   data.MSE <- mean(data.SE)*data.n/(data.n-1)
+   print(c(data.MSE,alpha))
+   data.MSE
+ }
> optimize(funOptAlphaDEMA,c(0.4,0.7),A)
```

```
[1] 0.006416607 0.514589803
[1] 0.003674206 0.585410197
[1] 0.002489337 0.629179607
[1] 0.001912478 0.656230590
[1] 0.001607733 0.672949017
[1] 0.001437559 0.683281573
[1] 0.001338969 0.689667444
[1] 0.00128047 0.69361413
[1] 0.001245226 0.696053315
[1] 0.001223788 0.697560814
[1] 0.001210668 0.698492500
[1] 0.001202609 0.699068314
[1] 0.001197648 0.699424186
[1] 0.001194588 0.699644128
[1] 0.0011927 0.6997801
[1] 0.001191534 0.699864069
[1] 0.001190814 0.699915990
[1] 0.00119025 0.69995669
[1] 0.00119025 0.69995669
$minimum
[1] 0.6999567

$objective
[1] 0.00119025
```

Tout comme pour le lissage exponentiel effectué à la question précédente, la valeur $\alpha = 0.7$ produit une erreur quadratique moyenne inférieure.

1.6 On importe d'abord l'ensemble de données

```
> BoA <- ts(read.csv("BoA.csv",header=TRUE,sep="\t"))
```

a) On trace ensuite le corrélogramme (figure A.5) La fonction *acf* nous permet d'afficher un corrélogramme

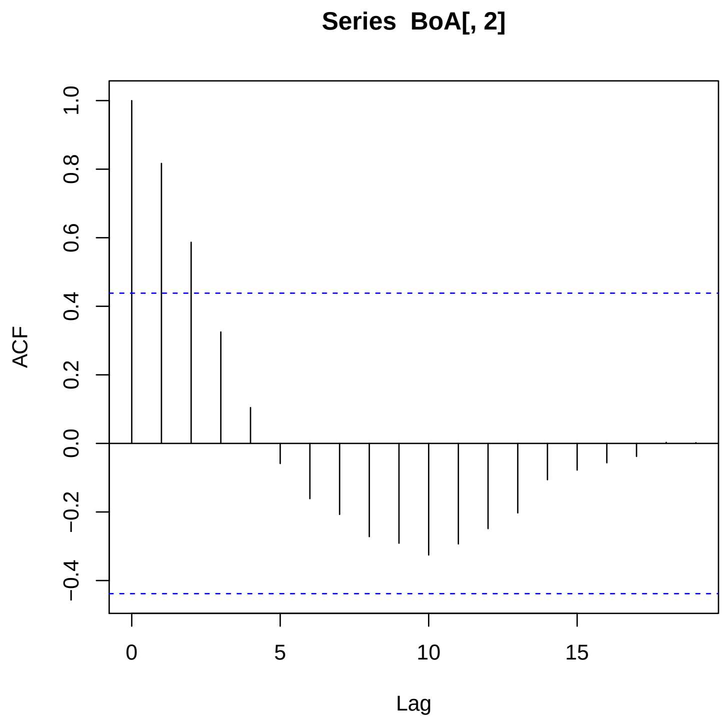

FIG. A.5: Corrélogramme de la série BoA

La fonction d'autocorrélation empirique $\hat{\rho}$ prend les valeurs suivantes :

```
> (BoA.acf <- acf(BoA[,2],lag.max=19))
Autocorrelations of series 'BoA[, 2]', by lag

     0      1      2      3      4      5      6 
 1.000  0.817  0.587  0.325  0.105 -0.059 -0.161 
     7      8      9     10     11     12     13 
-0.207 -0.272 -0.291 -0.325 -0.293 -0.249 -0.203 
    14     15     16     17     18     19 
-0.106 -0.078 -0.057 -0.038  0.003  0.002 
> dummy <- dev.off()
```

En utilisant la méthode vue dans le cours, on construit un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha = 0.9$ à partir de la distribution normale. La valeur de n est 20.

```
> (BoA.acf.IC <- round(c(1/sqrt(20)*qnorm(0.05),-1/sqrt(20)*qnorm(0.05)),4))
```

```
[1] -0.3678  0.3678
```

$$\begin{aligned} IC &= \frac{1}{\sqrt{n}}[-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{20}}[-z_{0.05}, z_{0.05}] \\ &= [-0.3678, 0.3678] \end{aligned}$$

```
> (BoA.nbacfplus <- sum(BoA.acf$acf[-1]<BoA.acf.IC[1]) +
+     sum(BoA.acf$acf[-1]>BoA.acf.IC[2]))
```

```
[1] 2
```

Comme 2 valeurs sur 20, soit 10% de celles-ci, sont à l'extérieur de l'intervalle de confiance, alors on ne peut rejeter l'hypothèse selon laquelle la série est stationnaire lorsqu'on se base sur le test du corrélogramme.

b) Ici, on n'a qu'à tracer la série et compter les changements de direction (figure A.6)

On en dénombre 9.

```
> BoA.chdir <- abs((9-(2/3)*18)/sqrt((16*20-29)/90))
> BoA.chdir > qnorm(0.95)
```

```
[1] TRUE
```

On évalue la statistique de test, qui prend la valeur 1.6684. Comme cette valeur est supérieure au seuil de 1.6449, on rejette l'hypothèse de stationnarité avec le test du changement de direction.

c) Il existe deux tests de type Portmanteau. Celui que vous avez vu en classe est le test de Box-Pierce où h commence à 1.

```
> Box.test(BoA[,2],lag=19,type="Box-Pierce")
```

```
        Box-Pierce test

data:  BoA[, 2]
X-squared = 33.5182, df = 19, p-value = 0.02093
```

```
> qchisq(0.9,19)
```

```
[1] 27.20357
```

On rejette l'hypothèse de stationnarité car la valeur de $Q^* = 33.5182$ est supérieure au quantile $\chi^2_{0.1}(19) = 27.20357$

d) Les tests sont indépendants, différents entre eux et ne sont pas équivalents car leurs statistiques ne suivent pas la même distribution asymptotique.

e)
```
> round(diff(log(BoA[,2])),4)
```

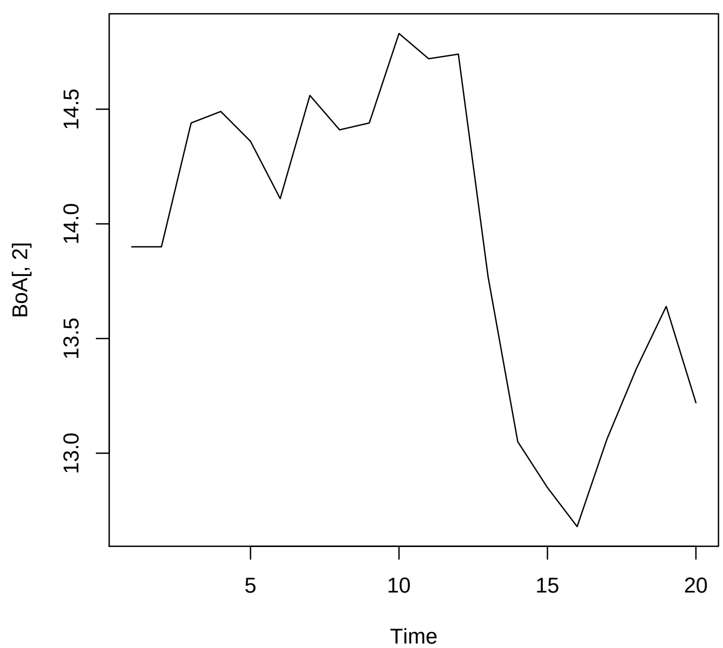

Fig. A.6: Corrélogramme de la série BoA

```
Time Series:
Start = 2
End = 20
Frequency = 1
 [1]  0.0000  0.0381  0.0035 -0.0090 -0.0176  0.0314
 [7] -0.0104  0.0021  0.0267 -0.0074  0.0014 -0.0681
[13] -0.0537 -0.0154 -0.0133  0.0295  0.0235  0.0200
[19] -0.0313
```

f)

```
> (BoA.hist.var <- na.trim(apply(cbind(BoA[,2],
+                                      lag(BoA[,2],1),
+                                      lag(BoA[,2],2),
+                                      lag(BoA[,2],3),
+                                      lag(BoA[,2],4)),
+                                1,
+                                var)))
 [1] 0.08642 0.06185 0.03017 0.02963 0.02753 0.06795
 [7] 0.03257 0.03617 0.18785 0.61597 0.79813 0.71857
[13] 0.17257 0.06697 0.15075 0.12818
> Box.test(BoA.hist.var,lag=15,type="Box-Pierce")
```

```
        Box-Pierce test

data:  BoA.hist.var
X-squared = 13.7076, df = 15, p-value = 0.5478
> qchisq(0.9,15)
[1] 22.30713
```

On remarque que la série des volatilités historiques avec $q = 2$ est stationnaire bien que la volatilité ne soit pas constante.

1.7 La variance du t^e terme est équivalente à la somme de la variance des t premiers termes d'erreurs. La différence entre les variances des 5^e terme et du 7^e terme est donc égale à la somme :

$$\begin{aligned} V[\epsilon_6] + V[\epsilon_7] &= 0.1(6^2 + 7^2) \\ &= 8.5 \end{aligned}$$

Chapitre 2

2.1 On obtient les racines de l'équation caractéristique en utilisant la formule quadratique habituelle

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$$

On considère les inverses des deux racines, A_1 et A_2.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2\phi_2}{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \\ &= \frac{2\phi_2}{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \left[\frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \right] \\ &= \frac{2\phi_2(-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})}{\phi_1^2 - (\phi_1^2 + 4\phi_2)} \\ &= \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \\ A_2 &= \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \end{aligned}$$

Il y a 2 situations possibles : soit les racines sont réelles ($\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$) ou elles sont complexes ($\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$).

— **Racines réelles :** Comme les racines doivent être plus grandes que 1, alors nécessairement leurs inverses $|A_1| < 1$ et $|A_2| < 1$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
-1 < \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} &< \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < 1 \\
\Leftrightarrow -2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} &< \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2
\end{aligned}$$

En observant la première inégalité, on a :

$$\begin{aligned}
-2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} &\Leftrightarrow \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < \phi_1 + 2 \\
&\Leftrightarrow \phi_1^2 + 4\phi_2 < \phi_1^2 + 4\phi_1 + 4 \\
&\Leftrightarrow \phi_2 < \phi_1 + 1 \\
&\Leftrightarrow \phi_2 - \phi_1 < 1
\end{aligned}$$

Ce qui correspond à la seconde condition. En considérant la seconde inégalité, on obtient, de la même façon, la première inégalité :

$$\begin{aligned}
\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 & \\
&\Leftrightarrow \phi_1 + \phi_2 < 1
\end{aligned}$$

Ces deux conditions réunies avec un discriminant positif forment la région de stationnarité pour des racines réelles.

— **Racines complexes :** On considère la situation où $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$. Ici, on aura des conjugués complexes et $|A_1| = |A_2| < 1$ seulement si $|A_1|^2 < 1$.

$$\begin{aligned}
|A_1|^2 &= \frac{\phi_1^2 + (-\phi_1^2 - 4\phi_2}{4} = -\phi^2 \\
&\Leftrightarrow \phi_2 > -1 \\
&\Leftrightarrow |\phi_2| < 1
\end{aligned}$$

Ce résultat réuni avec un discriminant négatif forment la région de stationnarité pour des racines complexes.

2.2 a) On obtient ce résultat par récurrence. Par exemple, pour $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
(1-B)^2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) &= (1-B)((a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \\
&\quad - (a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2)) \\
&= (1-B)(a_1 + a_2(2t+1)) \\
&= (a_1 + a_2(2t+1)) - (a_1 + a_2(2(t-1)+1)) \\
&= 2a_2
\end{aligned}$$

En général, on obtient :

$$\begin{aligned}(1-B)^k(a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_kt^k) &= (1-B)^{k-1}((a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_kt^k)\\ &\quad -(a_0+a_1(t-1)+a_2(t-1)^2+\ldots+a_k(t-1)^k))\\ &= (1-B)^{k-1}(a_1+2a_2t+\ldots+a_k(t^k-(t-1)^k))\end{aligned}$$

On remarque qu'à chaque itération, le premier terme de la série disparait. Ainsi, après k itérations, il ne restera que le terme en a_k avec son coefficient, qui correspont à $k!$. On obtient ainsi la solution générale.

b) Une série est dite stationnaire lorsque chaque terme est un terme d'erreur dont la distribution est constante au fil du temps. Ainsi, la distribution de la différence de deux termes consécutifs de la série sera aussi constante au fil du temps. Par exemple :

$$\begin{aligned}\epsilon_t &\sim N(0,\sigma^2)\\ \epsilon_t-\epsilon_{t-1} &\sim N(0,2\sigma^2)\end{aligned}$$

2.3 a) Un processus AR(1) est défini par $y_t=\phi_1y_{t-1}+\epsilon_t$. En développant le terme y_{t-1}, on obtient $y_t=\phi_1^2y_{t-2}+\phi_1\epsilon_{t-1}+\epsilon_t$. De manière récursive, on obtient $y_t=\phi_1^t\epsilon_0+\phi_1^{t-1}\epsilon_1+\ldots+\phi_1\epsilon_{t-1}+\epsilon_t$. ainsi, en faisant tendre $t\to\infty$, on obtient une représentation MA(∞).

b) Un processus MA(1) est défini par $y_t=\epsilon_t-\theta_1\epsilon_{t-1}$. On cherche à substituer le terme ϵ_{t-1}. On développe le terme précédent de la série : $y_{t-1}=\epsilon_{t-1}-\theta_1\epsilon_{t-2}$ et on substitue dans la première expression pour obtenir $y_t=\epsilon_t-\theta_1y_{t-1}-\theta_1^2\epsilon_{t-2}$. De manière récursive, on obtient $y_t=-\theta_1^ty_0-\theta_1^{t-1}y_1-\ldots-\theta_1y_{t-1}+\epsilon_t$. Lorsque $t\to\infty$, on obtient une représentation AR(∞).

2.4 On utilise la formule $y_t=\phi_1y_{t-1}+\epsilon_t$.

	ϕ	
$N(0,1)$	-0,5	0,5
-1,21	-1,2100	-1,2100
0,28	0,8850	-0,3250
1,08	0,6375	0,9175
-2,35	-2,6688	-1,8913
0,43	1,7644	-0,5156
0,51	-0,3722	0,2522
-0,57	-0,3839	-0,4439
-0,55	-0,3580	-0,7720
-0,56	-0,3810	-0,9460
-0,89	-0,6995	-1,3630

Les séries avec une corrélation négative ont tendance à aller dans la direction contraire des termes précédents alors que celles avec une corrélation positive ont tendance à aller dans la même direction que les termes précédents.

Le tableur `constructionserieAR.ods` contient les calculs effectués.

2.5 Il suffit de calculer la fonction d'autorégression pour chaque processus MA(2). Ensuite, on peut évaluer la fonction d'autocorrélation et comparer le résultat obtenu.

a) Premier processus avec :

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{4}$$

Fonction d'autocovariance

$$\begin{aligned}
\phi_0^{(1)} &= V[Y_t] \\
&= V[e_t] + \frac{1}{16}V[e_{t-1}] + \frac{1}{16}V[e_{t-2}] \\
&= (1 + \frac{1}{8})\theta_e^2 \\
&= \frac{9}{8}\sigma_e^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(1)} &= Cov(Y_t, Y_{t-1}) \\
&= Cov(e_t - \frac{1}{4}e_{t-1} - \frac{1}{4}e_{t-2}, e_{t-1} - \frac{1}{4}e_{t-2} - \frac{1}{4}e_{t-3}) \\
&= Cov(-\frac{1}{4}e_{t-1}, e_{t-1}) + Cov(-\frac{1}{4}e_{t-2}, -\frac{1}{4}e_{t-2}) \\
&= (-\frac{1}{4} + (-\frac{1}{4})(-\frac{1}{4}))\sigma_e^2 \\
&= -\frac{3}{16}\sigma_e^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2^{(1)} &= Cov(Y_t, Y_{t-2}) \\
&= Cov(e_t - \frac{1}{4}e_{t-1} - \frac{1}{4}e_{t-2}, e_{t-2} - \frac{1}{4}e_{t-3} - \frac{1}{4}e_{t-4}) \\
&= Cov(-\frac{1}{4}e_{t-2}, e_{t-2}) \\
&= -\frac{1}{4}\sigma_e^2
\end{aligned}$$

$$\phi_k^{(1)} = 0, \qquad \forall k \geq 3$$

Fonction d'autocorrélation

$$\begin{aligned}\rho_1^{(1)} &= \frac{\phi_1^{(1)}}{\phi_0^{(1)}}\\ &= \frac{\frac{-3}{16}\sigma_e^2}{\frac{9}{8}\sigma_e^2}\\ &= \frac{-1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_2^{(1)} &= \frac{\phi_2^{(1)}}{\phi_0^{(1)}}\\ &= \frac{\frac{-1}{4}\sigma_e^2}{\frac{9}{8}\sigma_e^2}\\ &= \frac{-2}{9}\end{aligned}$$

b) Second processus avec :

$$\theta_1 = -1 \quad \theta_2 = 4$$

Fonction d'autocovariance

$$\begin{aligned}\phi_0^{(2)} &= V[Y_t]\\ &= V[e_t] + V[e_{t-1}] + 16V[e_{t-2}]\\ &= 18\sigma_e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1^{(2)} &= Cov(Y_t, Y_{t-1})\\ &= Cov(e_t + e_{t-1} - 4e_{t-2}, e_{t-1} + e_{t-2} - 4e_{t-3})\\ &= Cov(e_{t-1}, e_{t-1}) + Cov(-4e_{t-2}, e_{t-2})\\ &= (1 + (-1)(4))\sigma_e^2\\ &= -3\sigma_e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2^{(2)} &= Cov(Y_t, Y_{t-2})\\ &= Cov(e_t + e_{t-1} - 4e_{t-2}, e_{t-2} + e_{t-3} - 4e_{t-4})\\ &= Cov(-4e_{t-2}, e_{t-2})\\ &= -4\sigma_e^2\end{aligned}$$

Fonction d'autocorrélation

$$\begin{aligned}\rho_1^{(2)} &= \frac{\phi_1^{(2)}}{\phi_0^{(2)}} \\ &= \frac{-3\sigma_e^2}{18\sigma_e^2} \\ &= \frac{-1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_2^{(2)} &= \frac{\phi_2^{(2)}}{\phi_0^{(2)}} \\ &= \frac{-4\sigma_e^2}{18\sigma_e^2} \\ &= \frac{-2}{9}\end{aligned}$$

On remarque clairement que $\rho_1^{(1)} = \rho_1^{(2)}$ et $\rho_2^{(1)} = \rho_2^{(2)}$. La fonction d'autocovariance vaut toujours 1 pour ρ_1 et vaut 0 ailleurs.

2.6 a) Les deux équations de Yule-Walker pour le modèle AR(2) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1 + \rho_1\phi_2 \\ \rho_2 &= \rho_1\phi_1 + \phi_2\end{aligned}$$

En utilisant l'estimateur de la fonction d'autocovariance $\hat{\rho}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1 &= \frac{\hat{\rho}_1(1-\hat{\rho}_2)}{1-\hat{\rho}_1{}^2} \\ \hat{\phi}_2 &= \frac{\hat{\rho}_2-\hat{\rho}_1{}^2}{1-\hat{\rho}_1{}^2}\end{aligned}$$

b)
```
> set.seed(123)
> (serie <- arima.sim(n = 10, list(ar = c(0.5,-0.25))))

Time Series:
Start = 1
End = 10
Frequency = 1
 [1]  1.1617660  0.6981185  0.1693004 -0.6457205
 [5]  1.4217278  1.3701445 -1.6369769 -0.4596686
 [9] -0.2933815 -1.0995973
```

```
> acf.serie <- acf(serie,type="correlation",plot=FALSE)$acf[2:3]
> phi1 <- acf.serie[1]*(1-acf.serie[2]) / (1-acf.serie[1]^2)
> phi2 <- (acf.serie[2] - acf.serie[1]^2) / (1-acf.serie[1]^2)
```

On obtient $\hat{\rho_1} = 0.07455$ et $\hat{\rho_2} = -0.28041$. Ce qui nous donne les paramètres du modèle AR(2) suivants : $\hat{\phi_1} = 0.09599$ et $\hat{\phi_2} = -0.28757$.

2.7 a) On représente le processus ARMA(2,1) sous la forme suivante :

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$$

En utilisant l'opérateur de rétrodécalage B, on peut exprimer cette équation sous la forme suivante :

$$(1-\theta B)\epsilon_t = y_t - \mu - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2}$$

On divise ensuite de chaque côté par $(1-\theta B)$, pour obtenir :

$$\epsilon_t = \frac{1}{(1-\theta B)}\left(y_t - \mu - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2}\right)$$

L'hypothèse de stationnarité nous permet de poser que $|\theta| < 1$, ce qui nous permet d'utiliser la série géométrique définie comme suit :

$$\frac{1}{1-\theta B} = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i B^i$$

On obtient donc que

$$\epsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i B^i \left(y_t - \mu - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2}\right)$$

En appliquant l'opérateur de rétrodécalage à la parenthèse, on obtient la solution :

$$\epsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i \left(y_{t-i} - \mu - \phi_1 y_{t-i-1} - \phi_2 y_{t-i-2}\right)$$

b) On exprime l'équation précédente en fonction de y_t :

$$\begin{aligned}
y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} - \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i \left(y_{t-i} - \phi_1 y_{t-i-1} - \phi_2 y_{t-i-2}\right) + \epsilon_t + \frac{\mu}{1-\theta} \\
&= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} - \left[\theta\left(y_{t-1} - \phi_1 y_{t-2} - \phi_2 y_{t-3}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} \theta^i \left(y_{t-i} - \phi_1 y_{t-i-1} - \phi_2 y_{t-i-2}\right)\right] + \epsilon_t + \frac{\mu}{1-\theta} \\
&= (\phi_1 - \theta) y_{t-1} - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\theta_i + \phi_1 \theta^{i-1} - \phi_2 \theta_{i-2}\right) y_{t-i} + \epsilon_t + \frac{\mu}{1-\theta}
\end{aligned}$$

Ce qui correspont à la forme autorégressive AR(∞) suivante :

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i y_{t-i} + \epsilon_t$$

Avec les paramètres

$$\begin{aligned} c &= \frac{\mu}{1-\theta} \\ \pi_1 &= (\phi_1 - \theta) \\ \pi_i &= -\Big(\theta_i + \phi_1\theta^{i-1} - \phi_2\theta_{i-2}\Big), \quad i = 2{,}3,\ldots \end{aligned}$$

2.8 a) C'est un modèle AR(2) de paramètres $\phi_1 = 1.5$ et $\phi_2 = -0.5$.

b) L'équation caractéristique prend la forme suivante :

$$y_t - 1.5y_{t-1} + 0.5y_{t-2} = 0$$

On pose la solution générale $y_t = A\alpha^t$:

$$A\alpha^t - 1.5A\alpha^{t-1} + 0.5A\alpha^{t-2} = 0$$

On divise ensuite par $A\alpha^{t-2}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 - 1.5\alpha + 0.5 \\ \alpha &= \frac{1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 4*1*0.5}}{2} \\ &= \{0.5;1\} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 1 - 1.5B + 0.5B^2 &= 0 \\ (1-B)(1-0.5B) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} B &= \{1;2\} \\ B^{-1} &= \{1;0.5\} \end{aligned}$$

d) Nous n'avons pas la stationnarité, car α n'est pas à l'intérieur du cercle unité

e)

$$\begin{aligned} y_2 &= 1.5y_1 - 0.5y_0 + \epsilon_2 \\ y_3 &= 1.5y_2 - 0.5y_1 + \epsilon_3 \\ &= \epsilon_3 + 1.5\epsilon_2 + 1.75y_1 - 0.75y_0 \\ y_4 &= 1.5y_3 - 0.5y_2 + \epsilon_4 \\ &= \epsilon_4 + 1.5\epsilon_3 + 1.75\epsilon_2 + 1.875y_1 - 0.875y_0 \end{aligned}$$

On peut observer un motif répétifif, que l'on représente sous la forme

$$y_t = \sum_{i=0}^{t-2} \alpha_i \epsilon_{t-i} + \alpha_{t-1} y_1 + \alpha_t y_0$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1 \\
\alpha_1 &= 1.5 \\
\alpha_t &= 1 - \alpha_{t-1}\alpha_i & &= 1.5\alpha_{i-1} - 0.5\alpha_{i-2}
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
y_s &= \sum_{i=0}^{s-2} \alpha_i \epsilon_{s-i} + \alpha_{s-1} y_1 + \alpha_s y_0 \\
y_{t+s} &= \sum_{i=0}^{s-2} \alpha_i \epsilon_{t+s-i} + \alpha_{s-1} y_{t+1} + \alpha_s y_t \\
E_{t+1}\left[y_{t+s}\right] &= \alpha_{s-1} y_{t+1} + \alpha_s y_t
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
E\left[y_t\right] &= \alpha_{t-1} y_1 + \alpha_t y_0 \\
E\left[y_{t+1}\right] &= \alpha_t y_1 + \alpha_{t+1} y_0 \\
Var\left[y_t\right] &= \left[1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{t-2}^2\right]\sigma^2 \\
Var\left[y_{t+1}\right] &= Var\left[y_t\right] + \alpha_{t-1}^2 \sigma^2 \\
Cov\left[y_t, y_{t+1}\right] &= \left[\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_{t-3}\alpha_{t-2}\right]\sigma^2
\end{aligned}$$

h)

$$\alpha_t y_1 + \alpha_{t+1} y_0 \pm 1.96 * \sigma \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{t-2}^2 + \alpha_{t-1}^2}$$

2.9 a)

$$\begin{aligned}
Var[X_t] &= Var[Y_t] + Var[Z_t] \\
&= (1+\alpha^2)\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2 \\
E[X_t, X_{t-1}] &= E[(v_t + \delta_t + \alpha v_{t-1})(v_{t-1} + \delta_{t-1} + \alpha v_{t-2})] \\
&= \alpha\sigma_V^2 \\
E[X_t, X_{t-k}] &= 0, \quad \forall k \neq \{0,1\} \\
&\Rightarrow \gamma_0, \gamma_1 \neq 0; \gamma_k = 0 \forall k \neq \{0,1\}
\end{aligned}$$

Par conséquent, il s'agit d'un modèle MA(1).

b)

$$\gamma_0 = (1+\theta_1^2)\sigma_\epsilon^2 = (1+\alpha^2)\sigma_V^2 + \sigma_\delta^2$$
$$\gamma_1 = \theta\sigma_\epsilon^2 = \alpha\sigma_V^2$$

On résous ce système d'équations numériquement :

```
> fun1 <- function(par,alpha,sV,sdelta)
+ {
+   sqrt(((1+alpha^2)*sV+sdelta-(1+par[1]^2)*par[2])^2
+        +(alpha*sV-par[1]*par[2])^2)
+ }
> paramoptimaux1 <- round(optim(c(0.4,0.04),fun1,,0.5,0.04,0.01)$par,5)
```

On a donc que θ = 0.38197 et σ_ϵ^2 = 0.05236 On obtient le meme résultat en utilisant un logiciel de calcul symbolique comme Maxima.

2.10

$$E_t[x_{t+2}] = \phi^2 x_t = 0.4^2 * 1.5 = 0.24$$
$$V_t[x_{t+2}] = (1+\phi^2)\sigma_\epsilon^2 = (1+0.4^2) * 0.25 = 0.29$$

Intervalle de confiance :

$$\begin{aligned} IC &= E_t[x_{t+2}] \pm \Phi^{-1}(0.975)\sqrt{V_t[x_{t+2}]} \\ &= 0.4^2 * 1.5 \pm 1.96\sqrt{(1+0.4^2) * 0.25} \\ &= [-0.815492; 1.295492] \end{aligned}$$

Chapitre 3

3.1 On identifie d'abord la moyenne conditionnelle de y_t :

$$E_{t-1}[y_t] = E_{t-1}[a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t] \quad (A.4)$$
$$= a_0 + a_1 y_{t-1} \quad (A.5)$$

La variance conditionnelle peut alors s'obtenir en utilisant la définition habituelle :

$$\begin{aligned} V_{t-1}[y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots] &= E_{t-1}[y_t - E_{t-1}[y_t]]^2 \\ &= E_{t-1}[(a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t) - (a_0 + a_1 y_{t-1})]^2 \\ &= E_{t-1}[\epsilon_t]^2 \\ &= E_{t-1}[\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\epsilon_{t-2}^2] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\epsilon_{t-2}^2 \end{aligned}$$

La variance inconditionnelle s'obtient en trouvant la solution particulière pour y_t :

$$\begin{aligned}
y_t &= a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t \\
&= (1 + a_1)a_0 + a_1^2 y_{t-2} + a_1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \cdots \\
&= (a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots)a_0 + \epsilon_t + a_1\epsilon_{t-1} + a_2\epsilon_{t-2} + \dots \\
&= \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \epsilon_{t-i}
\end{aligned}$$

On évalue la variance de cette dernière expression :

$$\begin{aligned}
Var[y_t] &= Var[\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \epsilon_{t-i}] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_1^{2i} Var[\epsilon_{t-i}] \\
&= \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}
\end{aligned}$$

À partir de la définition, on a que :

$$E[\epsilon_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E_[\epsilon_{t-1}^2] + \alpha_2 E[\epsilon_{t-2}^2].$$

Comme la variance inconditionnelle de ϵ_t est identique à celle de ϵ_{t-1} et ϵ_{t-2}, on peut affirmer que :

$$\begin{aligned}
E[\epsilon_t^2] &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc que la variance inconditionnelle de y_t est

$$Var[y_t] = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)(1 - a_1^2)}.$$