

ACT-2010

Séries Chronologiques

Exercices et solutions

Mis à jour le December 9, 2013
François Pelletier
École d'Actuariat, Université Laval

2 Modèles classiques pour séries chronologiques

2.1 Zone de stationnarité pour AR(2) (Théorique)

Pour avoir la stationnarité, il faut que les racines du polynôme caractéristique soient inférieures à 1 en valeur absolue. Démontrez que pour le modèle AR(2), la stationnarité est possible si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$|\phi_2| < 1$$

2.2 Ordre d'intégration (Théorique)

1. Un polynôme d'ordre k en t est intégré d'ordre k puisque

$$(1 - B)^k(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_kt^k) = k!a_k$$

Démontrez cette affirmation.

2. Démontrez que si x_t est stationnaire, alors $(1 - B)x_t$ est aussi stationnaire.

2.3 Inversion de processus d'ordre 1 (Théorique)

1. Démontrez algébriquement qu'un processus AR(1) est équivalent à un processus MA(∞).
2. Démontrez algébriquement qu'un processus MA(1) est équivalent à un processus AR(∞).

2.4 Construction d'une série autorégressive (Calculatrice)

On considère les 10 nombres aléatoires suivants, issus d'une distribution normale centrée réduite:

[1] -1.21 0.28 1.08 -2.35 0.43 0.51 -0.57 -0.55 -0.56 -0.89

Construisez la série autorégressive d'ordre 1 avec coefficient:

1. $\phi = -0.5$
2. $\phi = 0.5$

Quelle différence observez-vous entre la série avec une corrélation négative et la série avec une corrélation positive ?

2.5 Deux processus MA(2) (Théorique)

On considère deux processus MA(2), un où $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{4}$, et un autre où $\theta_1 = -1$ et $\theta_2 = 4$. Démontrez que ces processus ont la même fonction d'autocorrélation.

2.6 Estimateur des moments pour le processus AR(2) (Théorique et calculatrice)

1. En utilisant les équations de Yule-Walker, dérivez un estimateur des moments pour les paramètres ϕ_1 et ϕ_2 d'un processus AR(2).
2. Estimez les paramètres du processus AR(2) à partir de la série suivante:

```
[1]  1.1617660  0.6981185  0.1693004 -0.6457205  1.4217278  1.3701445
[7] -1.6369769 -0.4596686 -0.2933815 -1.0995973
```

2.7 Terme d'erreur du processus ARMA(2,1) (Théorique)

1. Démontrez que le terme d'erreur ϵ_t d'un processus ARMA(2,1) peut être exprimé sous la forme suivante, où μ est une constante et ϕ_1, ϕ_2, θ sont les paramètres du modèle. On considère que la série est stationnaire.

$$\epsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i (y_{t-i} - \mu - \phi_1 y_{t-i-1} - \phi_2 y_{t-i-2})$$

2. De plus, démontrez qu'à partir de cette forme du terme d'erreur, on peut obtenir la représentation AR(∞) du processus ARMA(2,1).

2.8 Racines caractéristiques et prévision

On considère l'équation en différence suivante:

$$y_t = 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + \epsilon_t$$

1. À quel modèle correspond cette équation ?
2. Trouvez les racines de l'équation homogène.

3. Démontrez que les racines de l'équation $1 - 1.5B + 0.5B^2$ sont la réciproque des valeurs trouvées à la question précédente.
4. Est-ce que cette série est stationnaire ?
5. On suppose que l'on connaît les deux premiers termes de la série y_0 et y_1 . Trouvez la solution générale pour y_t en fonction de la séquence des valeurs de ϵ_t .
6. Identifiez la forme de la fonction de prédiction pour y_{T+s} , sachant les valeurs de y_{T-1} et y_T .
7. Évaluez $E[y_t]$, $E[y_{t+1}]$, $Var[y_t]$, $Var[y_{t+1}]$ et $Cov[y_t, y_{t+1}]$.
8. Donnez l'expression d'un intervalle de confiance à 95% pour la valeur de y_{t+1}

2.9 Somme de deux processus

Soit les deux processus suivants:

$$\begin{aligned} Y_t &= V_t + \alpha V_{t-1} \\ Z_t &= \delta_t \end{aligned}$$

On ajoute que V_t et δ_t sont indépendants.

1. Déterminer le modèle classique pour le processus $X_t = Y_t + Z_t$ sous la forme ARMA(p,q).
2. Évaluer les paramètres $\theta_1, \dots, \theta_n, \phi_1, \dots, \phi_n$ et σ_ϵ^2 du modèle identifié précédemment, considérant que $\alpha = 0.5, \sigma_V^2 = 0.04$ et $\sigma_\delta^2 = 0.01$.

2.10 Projection AR(1)

Trouver la valeur projetée x_{t+2} et l'intervalle de confiance à 95% pour le processus $AR(1)$ de paramètre $\phi = 0.4$ et $\sigma_\epsilon^2 = 0.25$, si $x_t = 1.5$.



Cette création est mise à disposition selon le contrat Paternité-Partage à l'identique 2.5 Canada de Creative Commons disponible à l'adresse <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/ca/deed.fr>

En vertu de ce contrat, vous êtes libre de :

- **partager** — reproduire, distribuer et communiquer l'œuvre;
- **remixer** — adapter l'œuvre;
- utiliser cette œuvre à des fins commerciales.

Selon les conditions suivantes:



Attribution — Vous devez attribuer l'œuvre de la manière indiquée par l'auteur de l'œuvre ou le titulaire des droits (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'œuvre).



Partage à l'identique — Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette œuvre, vous n'avez le droit de distribuer votre création que sous une licence identique ou similaire à celle-ci.