

ACT-2010

Séries Chronologiques

---

Exercices et solutions

---

Mis à jour le 10 décembre 2013  
François Pelletier  
École d'Actuariat, Université Laval

### 3 Modèles de volatilité stochastique

#### 3.1 Variance du processus ARCH(2)

On identifie d'abord la moyenne conditionnelle de  $y_t$  :

$$E_{t-1}[y_t] = E_{t-1}[a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t] \quad (1)$$

$$= a_0 + a_1 y_{t-1} \quad (2)$$

La variance conditionnelle peut alors s'obtenir en utilisant la définition habituelle :

$$\begin{aligned} V_{t-1}[y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots] &= E_{t-1}[y_t - E_{t-1}[y_t]]^2 \\ &= E_{t-1}[(a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t) - (a_0 + a_1 y_{t-1})]^2 \\ &= E_{t-1}[\epsilon_t]^2 \\ &= E_{t-1}[\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 \end{aligned}$$

La variance inconditionnelle s'obtient en trouvant la solution particulière pour  $y_t$  :

$$\begin{aligned} y_t &= a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t \\ &= (1 + a_1)a_0 + a_1^2 y_{t-2} + a_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \dots \\ &= (a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots)a_0 + \epsilon_t + a_1 \epsilon_{t-1} + a_2 \epsilon_{t-2} + \dots \\ &= \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \epsilon_{t-i} \end{aligned}$$

On évalue la variance de cette dernière expression :

$$\begin{aligned} Var[y_t] &= Var\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \epsilon_{t-i}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_1^{2i} Var[\epsilon_{t-i}] \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2} \end{aligned}$$

À partir de la définition, on a que :

$$E[\epsilon_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E[\epsilon_{t-1}^2] + \alpha_2 E[\epsilon_{t-2}^2].$$

Comme la variance inconditionnelle de  $\epsilon_t$  est identique à celle de  $\epsilon_{t-1}$  et  $\epsilon_{t-2}$ , on peut affirmer que :

$$\begin{aligned} E[\epsilon_t^2] &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

On obtient donc que la variance inconditionnelle de  $y_t$  est

$$Var[y_t] = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)(1 - a_1^2)}.$$



Cette création est mise à disposition selon le contrat Paternité-Partage à l'identique 2.5 Canada de Creative Commons disponible à l'adresse <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/ca/deed.fr>

En vertu de ce contrat, vous êtes libre de :

- **partager** — reproduire, distribuer et communiquer l'œuvre ;
- **remixer** — adapter l'œuvre ;
- utiliser cette œuvre à des fins commerciales.

Selon les conditions suivantes :



**Attribution** — Vous devez attribuer l'œuvre de la manière indiquée par l'auteur de l'œuvre ou le titulaire des droits (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'œuvre).



**Partage à l'identique** — Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette œuvre, vous n'avez le droit de distribuer votre création que sous une licence identique ou similaire à celle-ci.