ACT-2010

Séries Chronologiques

Exercices et solutions

Mis à jour le November 23, 2013

François Pelletier
École d'Actuariat, Université Laval

2 Modèles classiques pour séries chronologiques

2.1 Zone de stationnarité pour AR(2) (Théorique)

Pour avoir la stationnarité, il faut que les racines du polynôme caractéristique soient inférieures à 1 en valeur absolue. Démontrez que pour le modèle AR(2), la stationnarité est possible si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ |\phi_2| &< 1 \end{aligned}$$

2.2 Ordre d'intégration (Théorique)

1. Un polynôme d'ordre k en t est intégré d'ordre k puisque

   $$(1-B)^k(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k) = k! a_k$$

   Démontrez cette affirmation.

2. Démontrez que si x_t est stationnaire, alors $(1-B)x_t$ est aussi stationnaire.

2.3 Inversion de processus d'ordre 1 (Théorique)

1. Démontrez algébriquement qu'un processus AR(1) est équivalent à un processus MA(∞).

2. Démontrez algébriquement qu'un processus MA(1) est équivalent à un processus AR(∞).

2.4 Construction d'une série autorégressive (Calculatrice)

On considère les 10 nombres aléatoires suivants, issus d'une distribution normale centrée réduite:

```
[1] -1.21  0.28  1.08 -2.35  0.43  0.51 -0.57 -0.55 -0.56 -0.89
```

Construisez la série autorégressive d'ordre 1 avec coefficient:

1. $\gamma = -0.5$

2. $\gamma = 0.5$

Quelle différence observez-vous entre la série avec une corrélation négative et la série avec une corrélation positive ?

2.5 Deux processus MA(2) (Théorique)

On considère deux processus MA(2), un où $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{4}$, et un autre où $\theta_1 = -1$ et $\theta_2 = 4$. Démontrez que ces processus ont la même fonction d'autocorrélation.

2.6 Estimateur des moments pour le processus AR(2) (Théorique et calculatrice)

1. En utilisant les équations de Yule-Walker, dérivez un estimateur des moments pour les paramètres ϕ_1 et ϕ_1 d'un processus AR(2).

2. Estimez les paramètres du processus AR(2) à partir de la série suivante:

```
[1]  1.1617660  0.6981185  0.1693004 -0.6457205  1.4217278  1.3701445
[7] -1.6369769 -0.4596686 -0.2933815 -1.0995973
```

2.7 Terme d'erreur du processus ARMA(2,1) (Théorique)

1. Démontrez que le terme d'erreur ϵ_t d'un processus ARMA(2,1) peut être exprimé sous la forme suivante, où μ est une constante et $\gamma_1, \gamma_2, \theta$ sont les paramètres du modèle.

$$\epsilon_t = \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i \left(y_{t-i} - \mu - \gamma_1 y_{t-i-1} - \gamma_2 y_{t-i-2} \right)$$

2. De plus, démontrez qu'à partir de cette forme du terme d'erreur, on peut obtenir la représentation AR(∞) du processus ARMA(2,1).