ACT-2010

Séries Chronologiques

Exercices et solutions

Mis à jour le 20 octobre 2013
François Pelletier
École d'Actuariat, Université Laval

1 Méthodes de lissage et saisonnalité

1.1 Noël s'en vient !

```
> library(xtable) # Librairie contenant la fonction xtable permettant de
>                                         #générer des tables an LaTeX
> library(TTR) ## Librairie contenant les outils de lissage de données
> Yt <- read.csv("inflation.csv",header=TRUE,sep="\t")[,2] ## Importer les données
> Yt.ts <-ts(Yt,start=c(2008,7),deltat=1/12) ## Définir la série chronologique
```

Tableau des données

```
> xtable(Yt.ts,digits=1) ## Générer une table LaTeX
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2008							-0.1	0.5	0.7	0.9	1.4	2.3
2009	1.5	0.9	2.2	0.8	0.2	0.3	1.0	0.3	0.8	0.4	1.6	2.0
2010	3.2	2.3	1.4	0.6	0.7	1.1	-0.2	1.4	0.9	1.4	1.4	1.9
2011	3.1	2.1	2.7	1.7	1.7	0.1	0.9	1.6	1.6	2.5	2.4	2.6
2012	2.0	3.2	2.9	1.4	1.1	1.3	1.4	1.4	1.5	1.7	2.3	2.4
2013	3.0	2.3	2.3	1.9	1.7	0.5	0.9					

Élimination de la saisonnalité

```
> xtable(Zt.ts <- diff(Yt.ts,12),digits=1)
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009							1.1	-0.2	0.1	-0.5	0.2	-0.3
2010	1.7	1.4	-0.8	-0.2	0.6	0.8	-1.2	1.2	0.1	1.1	-0.2	-0.1
2011	-0.1	-0.2	1.4	1.0	1.0	-0.9	1.1	0.2	0.7	1.1	1.0	0.8
2012	-1.1	1.1	0.1	-0.3	-0.6	1.1	0.5	-0.2	-0.1	-0.8	-0.1	-0.2
2013	1.0	-0.9	-0.6	0.5	0.5	-0.8	-0.5					

Composante de saisonnalité

```
> xtable(Yt.ts-Zt.ts,digits=1)
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009							-0.1	0.5	0.7	0.9	1.4	2.3
2010	1.5	0.9	2.2	0.8	0.2	0.3	1.0	0.3	0.8	0.4	1.6	2.0
2011	3.2	2.3	1.4	0.6	0.7	1.1	-0.2	1.4	0.9	1.4	1.4	1.9
2012	3.1	2.1	2.7	1.7	1.7	0.1	0.9	1.6	1.6	2.5	2.4	2.6
2013	2.0	3.2	2.9	1.4	1.1	1.3	1.4					

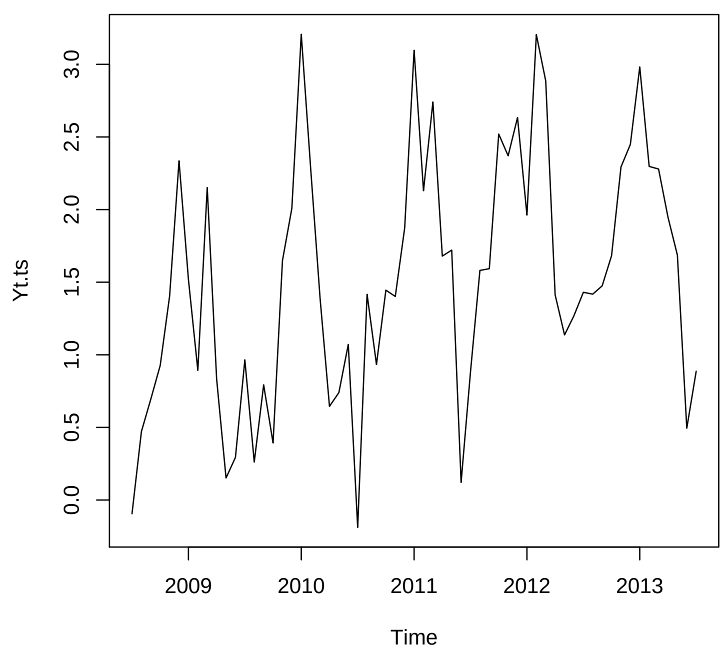

FIGURE 1 – Graphique de la série Y_t

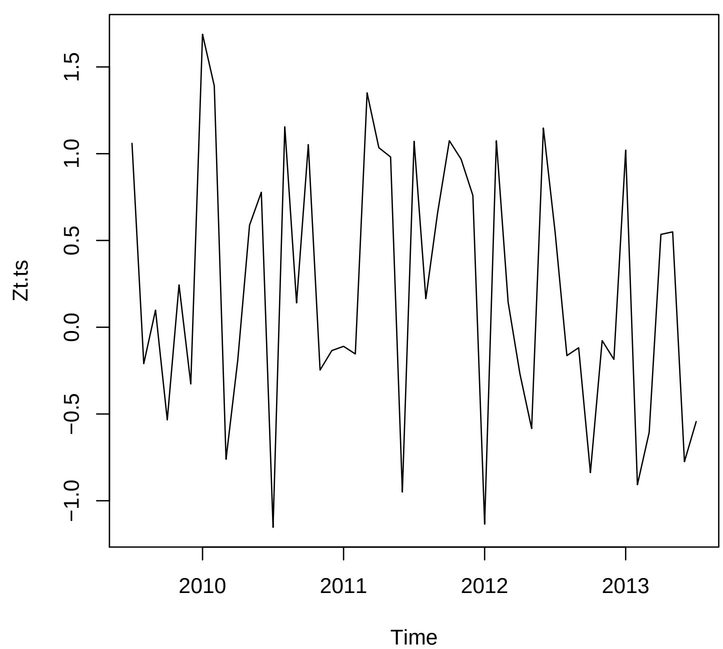

FIGURE 2 – Graphique de la série désaisonnalisée Z_t

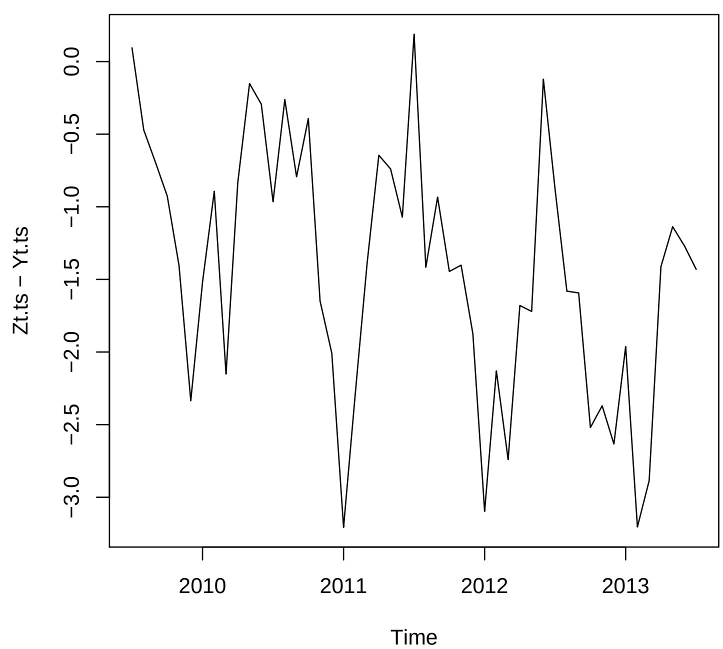

FIGURE 3 – Graphique de la composante de saisonnalité $Y_t - Z_t$

Élimination de la tendance

Moyenne mobile avec $q = 1$. Comme la fonction *SMA()* utilise les $2q + 1$ données précédentes et que nous voulons une moyenne mobile centrée, nous devons utiliser l'opérateur de rétrodécalage $B()$ pour décaler la série.

```
> xtable(mt1 <- lag(SMA(Zt.ts,n=3),1),digits=2) ## Simple Moving Average(q=1)
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009								0.32	-0.22	-0.06	-0.21	0.54
2010	0.92	0.77	0.15	-0.12	0.39	0.07	0.26	0.05	0.78	0.32	0.22	-0.16
2011	-0.13	0.36	0.74	1.12	0.36	0.37	0.10	0.63	0.63	0.90	0.93	0.20
2012	0.23	0.03	0.32	-0.24	0.10	0.37	0.51	0.09	-0.37	-0.34	-0.37	0.25
2013	-0.02	-0.16	-0.33	0.16	0.10	-0.26						

Moyenne mobile avec $q = 5$

```
> xtable(mt2 <- lag(SMA(Zt.ts,n=11),5),digits=2) ## Simple Moving Average(q=5)
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009												0.28
2010	0.25	0.17	0.26	0.32	0.40	0.40	0.24	0.10	0.16	0.30	0.34	0.36
2011	0.37	0.37	0.37	0.33	0.45	0.55	0.63	0.54	0.52	0.44	0.32	0.36
2012	0.36	0.40	0.32	0.22	0.05	-0.02	0.06	0.06	-0.04	-0.07	0.03	-0.02
2013	-0.14	-0.18										

Lissage exponentiel double avec $\alpha = 0.75$

```
> xtable(mt3 <- DEMA(Zt.ts,n=1,ratio=.05),digits=2) ## Double Exponential
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009							1.06	0.94	0.85	0.71	0.66	0.55
2010	0.65	0.72	0.57	0.48	0.48	0.50	0.33	0.39	0.36	0.41	0.33	0.28
2011	0.22	0.17	0.27	0.33	0.38	0.24	0.31	0.29	0.31	0.38	0.43	0.45
2012	0.29	0.36	0.33	0.26	0.17	0.25	0.27	0.22	0.18	0.07	0.04	0.01
2013	0.09	-0.02	-0.09	-0.04	0.00	-0.09	-0.14					

```
>                                                      ## Moving Average
```

Régression linéaire

```
> t <- 0:48
> (lm1 <- lm(Zt.ts~t)) ## Modèle de régression sur une variable

Call:
lm(formula = Zt.ts ~ t)

Coefficients:
(Intercept)            t
   0.446924    -0.009856

> coeff1 <- coefficients(lm1)

> xtable(mt4 <- ts(coeff1[1]+t*coeff1[2],start=c(2009,7),deltat=1/12),digits=2)
```

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
2009							0.45	0.44	0.43	0.42	0.41	0.40
2010	0.39	0.38	0.37	0.36	0.35	0.34	0.33	0.32	0.31	0.30	0.29	0.28
2011	0.27	0.26	0.25	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.17	0.16
2012	0.15	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04
2013	0.03	0.02	0.01	0.00	-0.01	-0.02	-0.03					

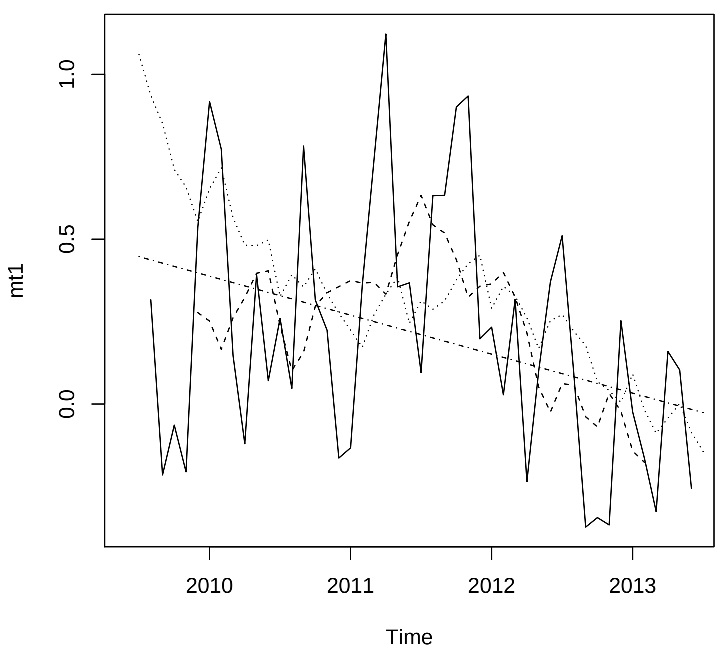

FIGURE 4 – Graphique de la tendance m_t

Projection du taux d'inflation

```
> projection <- coeff1[1]+53*coeff1[2]
> saisonnalite <- mean((Yt.ts-Zt.ts)[6+12*0:3])
> (taux.inf.dec.2013 <- (projection+saisonnalite))

(Intercept)
   2.137743
```

Le taux d'inflation prejeté en décembre 2013 est 2.14%

Solution du problème

```
> depense.dec.2008 <- 674
> depense.dec.2013 <- 674*(1+taux.inf.dec.2013/100)
```

Le montant projeté des achats de cadeaux en décembre 2013 est 688.41 $

1.2 Incendies

On remarque d'abord que $q = 2$.
On peut ensuite poser les équations suivantes :

$$4 + 3 + a + b + 2 = 24 \tag{1}$$
$$b + 2 + 4 + 6 + c = 26 \tag{2}$$
$$c + 0 + 2 + 8 + 3 = 19 \tag{3}$$

En résolvant, on obtient la solution.

Solution :

Mois	Incendies	Moyenne Mobile
1	4	-
2	3	-
3	**7**	4,8
4	**8**	4,8
5	2	5,4
6	4	5,2
7	6	3,6
8	**6**	3,6
9	0	4,4
10	2	3,8
11	8	-
12	3	-

1.3 Option de vente

```
> rf <- 0.0175
> rB <- rf+0.02
> S0 <- 10.46
> ST <- 8.73
> K <- S0*exp(rf*84/365)
> bbry <- read.csv("blackberry.csv",header=TRUE,sep=";")
> bbry.sel <- bbry[as.POSIXlt(bbry$Date)$wday==5,][1+3:12*4,]$Close
>                                         #Extraire le prix un vendredi sur 4
> l.bbry.sel <- log(bbry.sel)
> (diff.l.bbry.sel <- diff(l.bbry.sel))

[1]  0.288637639  0.112996047 -0.061344651 -0.103095509 -0.017497594
[6] -0.086523113  0.005008358 -0.340978628 -0.090637274

>                                         #On obtient la série des rendements
>                                         #mensuels
> (mu.diff.l.bbry.sel <- mean(diff.l.bbry.sel))

[1] -0.03260386

> (sigma.diff.l.bbry.sel <- sd(diff.l.bbry.sel))

[1] 0.170735

>                                         #Moyenne et écart-type des rendements
>                                         #mensuels
> (prix.arbre <- S0*(ud <- exp(3*(mu.diff.l.bbry.sel+c(1,-1)*
+                                  sigma.diff.l.bbry.sel/(2*sqrt(3))))))

[1] 10.996838  8.181586

>                                         #Prix de l'arbre binomial
> (p.rn <- (exp(rf*84/365)-ud[2])/(ud[1]-ud[2]))

[1] 0.8243048

>                                         #Probabilité neutre au risque
> q.rn <- 1-p.rn
> (P0 <- sum(exp(-rf*84/365)*(c(p.rn,q.rn)*pmax(K-prix.arbre,0))))

[1] 0.406084

>                                         #Prix de l'option de vente
> (BT <- P0*exp(rB*84/365)) #Montant emprunté avec intérêts

[1] 0.4096037
```

```
> (K-ST)-BT  #Profit
[1] 1.362608
```

La valeur du paramètre μ de rendement moyen est -0.0326. La valeur du paramètre σ de volatilité est 0.1707. La valeur des prix de l'arbre binomial sont 10.9968 et 8.1816. La valeur de la probabilité neutre au risque d'une hausse est 0.8243. La valeur de l'option est 0.4061. Le profit, qui correspont à la différence entre la réclamation contingente de l'option et le coût d'acquisition, est de 1.3626.

1.4 Lissage exponentiel I

On calcule d'abord les deux séries lissées

$\mathcal{A}$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,7$
1,2	1,2000	1,2000
1,5	1,3200	1,4100
1,4	1,3520	1,4030
2,1	1,6512	1,8909
1,8	1,7107	1,8273
1,9	1,7864	1,8782
2,2	1,9519	2,1035
2,4	2,1311	2,3110
2,0	2,0787	2,0933
1,9	2,0072	1,9580

On évalue ensuite l'erreur quadratique pour chaque terme

$\mathcal{A}$	$SE(\alpha = 0,4)$	$SE(\alpha = 0,7)$
1,2		
1,5	0,0324	0,0081
1,4	0,0023	0,0000
2,1	0,2014	0,0437
1,8	0,0080	0,0007
1,9	0,0129	0,0005
2,2	0,0616	0,0093
2,4	0,0723	0,0079
2,0	0,0062	0,0087
1,9	0,0115	0,0034

On obtient enfin l'erreur quadratique moyenne

	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,7$
MSE	0,0454	0,0092

Les calculs effectués se trouvent dans le fichier `Lissage.Exponentiel.I.ods`[1].

Avec R, on obtient les résultats suivants en utilisant la fonction de lissage exponentiel *EMA()*.

```
> A <- c(1.2, 1.5, 1.4, 2.1, 1.8, 1.9, 2.2, 2.4, 2.0, 1.9)
> n.A <- length(A)
> A.EMA.4 <- EMA(A,n=1,ratio=0.4)
> A.EMA.7 <- EMA(A,n=1,ratio=0.7)
> A.SE <- (A-cbind(A.EMA.4,A.EMA.7))^2
> cbind(A,A.EMA.4,A.EMA.7,A.SE)
```

1. Ce fichier est au format OpenDocument et s'ouvre avec la plupart des suites bureautiques

```
        A  A.EMA.4  A.EMA.7     A.EMA.4      A.EMA.7
 [1,] 1.2 1.200000 1.200000 0.000000000 0.0000000000
 [2,] 1.5 1.320000 1.410000 0.032400000 0.0081000000
 [3,] 1.4 1.352000 1.403000 0.002304000 0.0000090000
 [4,] 2.1 1.651200 1.890900 0.201421440 0.0437228100
 [5,] 1.8 1.710720 1.827270 0.007970918 0.0007436529
 [6,] 1.9 1.786432 1.878181 0.012897691 0.0004760688
 [7,] 2.2 1.951859 2.103454 0.061573857 0.0093210722
 [8,] 2.4 2.131116 2.311036 0.072298864 0.0079145417
 [9,] 2.0 2.078669 2.093311 0.006188861 0.0087069216
[10,] 1.9 2.007202 1.957993 0.011492180 0.0033632189
```

```
> (A.MSE <- colMeans(A.SE)*(n.A/(n.A-1)))
```

```
   A.EMA.4    A.EMA.7
0.04539420 0.00915081
```

La valeur $\alpha = 0.7$ produit une erreur quadratique moyenne inférieure.

1.5 Lissage exponentiel II

Une solution assez simple est d'utiliser le solveur intégré au logiciel tableau que vous utilisez et d'optimiser la valeur de la cellule contenant α avec comme critère de minimisation la cellule contenant l'erreur quadratique moyenne (MSE).

On peut aussi construire une fonction d'optimisation dans R qui réplique le comportement du chiffrier que nous avons construit dans le logiciel tableur.

```
> funOptAlphaDEMA <- function(alpha,data)
+   {
+     data.n <- length(data)
+     data.DEMA <- DEMA(A,n=1,ratio=alpha)
+     data.SE <- (data-data.DEMA)^2
+     data.MSE <- mean(data.SE)*data.n/(data.n-1)
+     print(c(data.MSE,alpha))
+     data.MSE
+   }
> optimize(funOptAlphaDEMA,c(0.4,0.7),A)
```

```
[1] 0.006416607 0.514589803
[1] 0.003674206 0.585410197
[1] 0.002489337 0.629179607
[1] 0.001912478 0.656230590
[1] 0.001607733 0.672949017
[1] 0.001437559 0.683281573
[1] 0.001338969 0.689667444
[1] 0.00128047 0.69361413
```

```
[1] 0.001245226 0.696053315
[1] 0.001223788 0.697560814
[1] 0.001210668 0.698492500
[1] 0.001202609 0.699068314
[1] 0.001197648 0.699424186
[1] 0.001194588 0.699644128
[1] 0.0011927 0.6997801
[1] 0.001191534 0.699864069
[1] 0.001190814 0.699915990
[1] 0.00119025 0.69995669
[1] 0.00119025 0.69995669
$minimum
[1] 0.6999567

$objective
[1] 0.00119025
```

Tout comme pour le lissage exponentiel effectué à la question précédente, la valeur $\alpha = 0.7$ produit une erreur quadratique moyenne inférieure.

1.6 Bank of America (calculatrice et informatique)

On importe d'abord l'ensemble de données

```
> BoA <- ts(read.csv("BoA.csv",header=TRUE,sep="\t"))
```

1. On trace ensuite le corrélogramme (figure 5) La fonction *acf* nous permet d'afficher un corrélogramme
   La fonction d'autocorrélation empirique $\hat{\rho}$ prend les valeurs suivantes :

```
> (BoA.acf <- acf(BoA[,2],lag.max=19))

Autocorrelations of series ‘BoA[, 2]’, by lag

     0      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
 1.000  0.817  0.587  0.325  0.105 -0.059 -0.161 -0.207 -0.272 -0.291 -0.325
    11     12     13     14     15     16     17     18     19
-0.293 -0.249 -0.203 -0.106 -0.078 -0.057 -0.038  0.003  0.002

> dummy <- dev.off()
```

   En utilisant la méthode vue dans le cours, on construit un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha = 0.9$ à partir de la distribution normale. La valeur de n est 20.

```
> (BoA.acf.IC <- round(c(1/sqrt(20)*qnorm(0.05),-1/sqrt(20)*qnorm(0.05)),4))

[1] -0.3678  0.3678
```

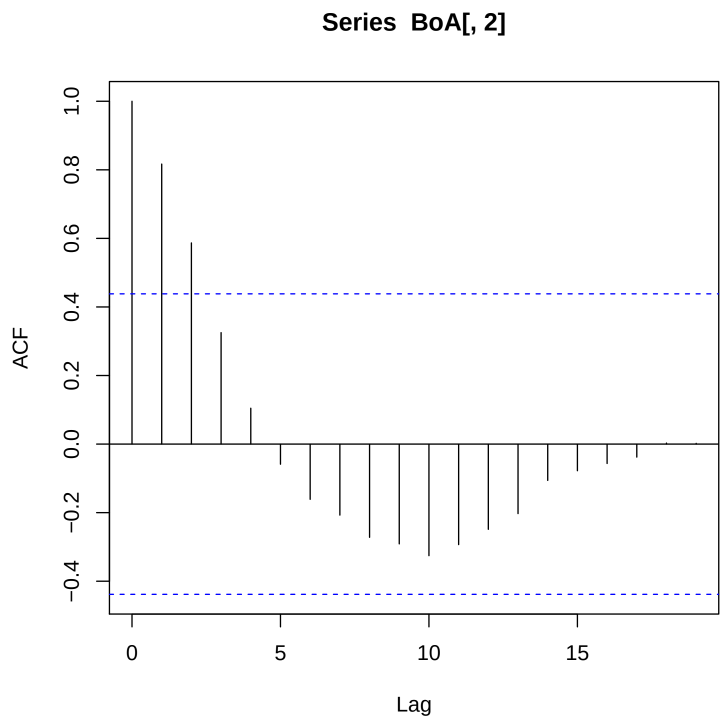

FIGURE 5 – Corrélogramme de la série BoA

$$
\begin{aligned}
IC &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{20}}\left[-z_{0.05}, z_{0.05}\right] \\
&= [-0.3678, 0.3678]
\end{aligned}
$$

```
> (BoA.nbacfplus <- sum(BoA.acf$acf[-1]<BoA.acf.IC[1]) +
+  sum(BoA.acf$acf[-1]>BoA.acf.IC[2]))
```

```
[1] 2
```

Comme 2 valeurs sur 20, soit 10% de celles-ci, sont à l'extérieur de l'intervalle de confiance, alors on ne peut rejeter l'hypothèse selon laquelle la série est stationnaire lorsqu'on se base sur le test du corrélogramme.

2. Ici, on n'a qu'à tracer la série et compter les changements de direction (figure 6)

   On en dénombre 9.

```
> BoA.chdir <- abs((9-(2/3)*18)/sqrt((16*20-29)/90))
> BoA.chdir > qnorm(0.95)
```

```
[1] TRUE
```

On évalue la statistique de test, qui prend la valeur 1.6684. Comme cette valeur est supérieure au seuil de 1.6449, on rejette l'hypothèse de stationnarité avec le test du changement de direction.

3. Il existe deux tests de type ■portmanteau■. Celui que vous avez vu en classe est le test de Box-Pierce où h commence à 1.

```
> Box.test(BoA[,2],lag=19,type="Box-Pierce")
```

```
        Box-Pierce test

data:  BoA[, 2]
X-squared = 33.5182, df = 19, p-value = 0.02093
```

```
> qchisq(0.9,19)
```

```
[1] 27.20357
```

On rejette l'hypothèse de stationnarité car la valeur de $Q^* = 33.5182$ est supérieure au quantile $\chi^2_{0.1}(19) = 27.20357$

4. Les tests sont indépendants, différents entre eux et ne sont pas équivalents car leurs statistiques ne suivent pas la même distribution asymptotique.

5. `> round(diff(log(BoA[,2])),4)`

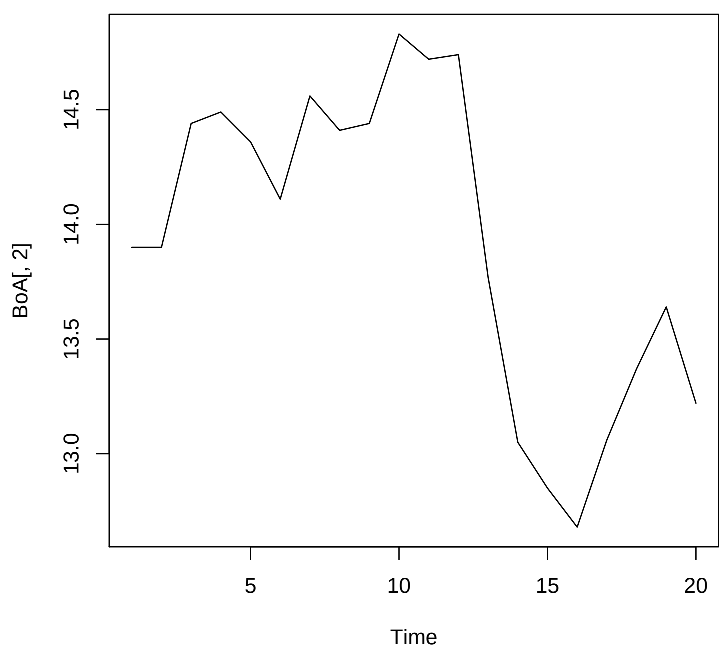

FIGURE 6 – Corrélogramme de la série BoA

```
Time Series:
Start = 2
End = 20
Frequency = 1
 [1]  0.0000  0.0381  0.0035 -0.0090 -0.0176  0.0314 -0.0104  0.0021  0.0267
[10] -0.0074  0.0014 -0.0681 -0.0537 -0.0154 -0.0133  0.0295  0.0235  0.0200
[19] -0.0313
```

6.
```
> (BoA.hist.var <- na.trim(apply(cbind(BoA[,2],
+                                       lag(BoA[,2],1),
+                                       lag(BoA[,2],2),
+                                       lag(BoA[,2],3),
+                                       lag(BoA[,2],4)),
+                                 1,
+                                 var)))

 [1] 0.08642 0.06185 0.03017 0.02963 0.02753 0.06795 0.03257 0.03617 0.18785
[10] 0.61597 0.79813 0.71857 0.17257 0.06697 0.15075 0.12818

> Box.test(BoA.hist.var,lag=15,type="Box-Pierce")

        Box-Pierce test

data:  BoA.hist.var
X-squared = 13.7076, df = 15, p-value = 0.5478

> qchisq(0.9,15)

[1] 22.30713
```

On remarque que la série des volatilités historiques avec $q = 2$ est stationnaire bien que la volatilité ne soit pas constante.

1.7 Variance d'une série non-stationnaire

La variance du t^e terme est équivalente à la somme de la variance des t premiers termes d'erreurs. La différence entre les variances des 5^e terme et du 7^e terme est donc égale à la somme :

$$\begin{aligned} V[\epsilon_6] + V[\epsilon_7] &= 0.1(6^2 + 7^2) \\ &= 8.5 \end{aligned}$$