# ACT-2010

# Séries Chronologiques

## Exercices et solutions

Mis à jour le 8 octobre 2013

François Pelletier
École d'Actuariat, Université Laval

# 1 Modèles classiques pour séries chronologiques

## 1.1 Zone de stationnarité pour AR(2) (Théorique)

On obtient les racines de l'équation caractéristique en utilisant la formule quadratique habituelle

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$$

On considère les inverses des deux racines, $A_1$ et $A_2$.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2\phi_2}{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \\
&= \frac{2\phi_2}{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \left[\frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}\right] \\
&= \frac{2\phi_2(-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})}{\phi_1^2 - (\phi_1^2 + 4\phi_2)} \\
&= \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \\
A_2 &= \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}
\end{aligned}$$

Il y a 2 situations possibles : soit les racines sont réelles ($\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$) ou elles sont complexes ($\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$).

- **Racines réelles :** Comme les racines doivent être plus grandes que 1, alors nécessairement leurs inverses $|A_1| < 1$ et $|A_2| < 1$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
-1 < \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} &< \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < 1 \\
\Leftrightarrow -2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} &< \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2
\end{aligned}$$

  En observant la première inégalité, on a :

$$\begin{aligned}
-2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} &\Leftrightarrow \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < \phi_1 + 2 \\
&\Leftrightarrow \phi_1^2 + 4\phi_2 < \phi_1^2 + 4\phi_1 + 4 \\
&\Leftrightarrow \phi_2 < \phi_1 + 1 \\
&\Leftrightarrow \phi_2 - \phi_1 < 1
\end{aligned}$$

  Ce qui correspond à la seconde condition. En considérant la seconde inégalité, on obtient, de la même façon, la première inégalité :

$$\begin{aligned}
\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2& \\
&\Leftrightarrow \phi_1 + \phi_2 < 1
\end{aligned}$$

Ces deux conditions réunies avec un discriminant positif forment la région de stationnarité pour des racines réelles.

– **Racines complexes :** On considère la situation où $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$. Ici, on aura des conjugués complexes et $|A_1| = |A_2| < 1$ seulement si $|A_1|^2 < 1$.

$$\begin{aligned}|A_1|^2 &= \frac{\phi_1^2 + (-\phi_1^2 - 4\phi_2}{4} = -\phi^2 \\ &\Leftrightarrow \phi_2 > -1 \\ &\Leftrightarrow |\phi_2| < 1\end{aligned}$$

Ce résultat réuni avec un discriminant négatif forment la région de stationnarité pour des racines complexes.

## 1.2 Ordre d'intégration (Théorique)

### 1.3 Inversion de processus d'ordre 1 (Théorique)

### 1.4 Construction d'une série autorégressive (Calculatrice)