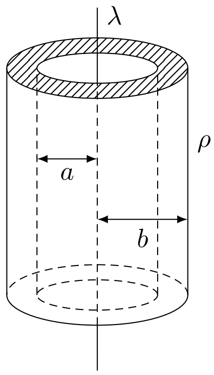
Esercizio settimanale n. 4

Guglielmo Bordin

3 aprile 2023

Su un filo sottile di lunghezza infinita è presente una densità di carica uniforme $\lambda = -2\,\mathrm{nC/cm}$. All'esterno del cavo, coassiale a esso, è posto un guscio cilindrico di lunghezza infinita e carico uniformemente, di raggio interno $a = 1\,\mathrm{cm}$ e raggio esterno $b = 3\,\mathrm{cm}$. Calcolare la densità di carica volumetrica ρ del guscio cilindrico sapendo che il campo elettrico totale al suo esterno è nullo.



Soluzione. Per rispondere conviene applicare il teorema di Gauss. Consideriamo una superficie cilindrica Σ di raggio r maggiore del raggio esterno b del guscio cilindrico e altezza h arbitraria. Il flusso del campo elettrico attraverso Σ è, per ipotesi, nullo: il flusso parziale attraverso la superficie superiore e quella inferiore è nullo per via della direzione delle linee di campo, che è radiale per ragioni di simmetria, e anche il flusso attraverso la superficie laterale è nullo perché vogliamo $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ all'esterno del cilindro.

Per la legge di Gauss abbiamo

$$\Phi_\Sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

dove Q_{int} è la carica totale racchiusa dalla superficie costruita. Per avere $\Phi_E = 0$ dobbiamo quindi calcolare Q_{int} e azzerarla.

La carica dovuta al filo è semplicemente la densità lineare λ moltiplicata per la lunghezza del tratto «tagliato» da Σ. La carica dovuta al guscio cilindrico è data invece dalla densità volumetrica ρ moltiplicata per il volume tagliato, cioè $\pi h(b^2 - a^2)$.[1] Arriviamo dunque a

$$\lambda\cancel{h} + \rho\pi\cancel{h}(b^2 - a^2) = 0, \tag{2}$$

e quindi la densità cercata è data da

$$\rho = -\frac{\lambda}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{2\,\mathrm{nC/cm}}{\pi[(3\,\mathrm{cm})^2 - (1\,\mathrm{cm})^2]} = 80\,\mathrm{pC/cm^3} = 80\,\mathrm{\mu C/m^3}. \tag{3}$$

1. Per ricavare questa formula si può pensare al volume di un cilindro di raggio b e altezza h, che è $\pi b^2 h$, e sottrarci il volume di un cilindro di uguale altezza ma raggio a, cioè $\pi a^2 h$.