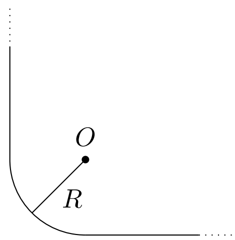
Esercizio settimanale n. 2

Guglielmo Bordin

10 marzo 2023

Un filo di lunghezza infinita e densità di carica uniforme λ viene disposto nella configurazione indicata in figura. Calcolare modulo e direzione del campo elettrico risultante nel punto O.



Suggerimento. Per risolvere l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\,dx$$

potete usare la sostituzione $x/R = \tan u$. Vi invito a provare a fare i conti, ma se non riuscite a proseguire passate direttamente al risultato finale $\mathcal{I} = 1/R$, non toglierò punti.

Soluzione. Possiamo cominciare pensando di scomporre il campo totale nella somma (vettoriale) dei campi prodotti dai due tratti rettilinei di filo e di quello prodotto dal tratto curvo. Occupiamoci prima dei tratti rettilinei: esaminiamo il problema generico del campo prodotto da un filo infinitamente esteso lungo una sola direzione, in un punto distante R dall'estremità finita.

Facendo riferimento a figura **??**, partiamo considerando un pezzetto infinitesimo di filo dx, che avrà carica $\lambda\,dx$ e produrrà nel punto di coordinate $x = 0$ e $y = R$ un campo di modulo

$$dE = \frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)}. \tag{1}$$

Possiamo scomporre tale campo nelle componenti x e y: seguendo il disegno, la componente x sarà negativa e pari a

$$dE_x = -\frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)}\cos\vartheta = -\frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}\,dx. \tag{2}$$

Da qui, possiamo integrare lungo x, partendo da $x = 0$ e proseguendo fino all'infinito, per ottenere la componente x del campo prodotto dal filo intero:

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\,dx. \tag{3}$$

Per risolvere l'integrale possiamo sfruttare la sostituzione $u^2 = x^2 + R^2$, che differenziata restituisce

$$\cancel{2}u\,du = \cancel{2}x\,dx. \tag{4}$$

Pertanto, ricordando di trasformare anche gli estremi di integrazione, otteniamo

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{\cancel{u}}{u^{\cancel{3}\,2}}\,du = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{u}\right]_R^\infty = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{5}$$

Ritorniamo ora all'espressione del campo infinitesimo (1) e consideriamone invece la componente y:

$$dE_y = \frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}\sin\vartheta, \tag{6}$$

che sostituendo l'espressione per $\sin\vartheta$, ricavata anche qui dal disegno, diventa

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx. \tag{7}$$

Ora possiamo integrare lungo x, come prima:

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx. \tag{8}$$

Sfortunatamente, l'assenza di x al numeratore complica notevolmente l'integrale. Una possibile strada per risolverlo è quella indicata dal suggerimento. Partiamo riarrangiando i termini al denominatore:

$$\int_0^\infty \frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{R}{[R^2(1+x^2/R^2)]^{3/2}}\,dx = \frac{1}{R^2}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2/R^2)^{3/2}}\,dx. \tag{9}$$