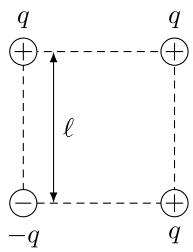
Esercizio settimanale n. 3

Guglielmo Bordin

25 marzo 2023

Quattro particelle cariche di massa m e carica q, tre positive e una negativa, sono poste ai vertici di un quadrato di lato ℓ come mostrato in figura. La particella in alto a destra viene poi rilasciata, lasciando le altre vincolate al loro posto.

1. Dove si dirigerà? Indicare la direzione come angolo rispetto all'orizzontale.
2. Che velocità avrà quando si troverà a grandissima distanza dalle altre cariche?



Soluzione. I campi prodotti dalla carica in alto a sinistra e da quella in basso a destra sono uguali in modulo, e diretti rispettivamente lungo il verso positivo dell'asse x e lungo il verso positivo dell'asse y. Il campo risultante, che possiamo chiamare $\boldsymbol{E}_+$, ha espressione

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \ell^2}(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{1}$$

Il campo prodotto dall'unica carica negativa ha invece modulo

$$E_- = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 \ell^2}, \tag{2}$$

poiché la distanza che separa la carica e il punto in cui stiamo valutando il campo è, in questo caso, $\sqrt{2}\ell$, la diagonale del quadrato. Per proiettare lungo x e y dobbiamo moltiplicare per $-\cos(\pi/4) = -1/\sqrt{2}$, ottenendo

$$\boldsymbol{E}_- = -\frac{q}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 \ell^2}(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{3}$$

Sommando $\boldsymbol{E}_+$ ed $\boldsymbol{E}_-$ otteniamo il campo prodotto complessivamente dalle tre cariche,

$$\boldsymbol{E} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \ell^2}(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{4}$$

Il prefattore numerico $1 - \sqrt{2}/4 \approx 0{,}65$ è positivo, quindi il verso è positivo lungo la direzione individuata da $\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}$, che è inclinata di 45° rispetto all'asse x. La carica rilasciata è positiva: si muoverà pertanto lungo il verso positivo del campo percepito, allontanandosi dal quadrato.

Per calcolare la velocità a grandissima distanza conviene ragionare sulla conservazione dell'energia. La particella inizialmente è ferma, ma ha un'energia potenziale dovuta all'interazione elettrostatica con le altre tre particelle del quadrato. Aumentando la distanza l'interazione elettrostatica diminuisce e l'energia potenziale iniziale viene convertita in energia cinetica; la conversione sarà totale solo nel limite di distanza infinita. Possiamo dunque scrivere l'equivalenza

$$qV_0 = \frac{1}{2} m v_\infty^2, \tag{5}$$

dove V_0 rappresenta il potenziale sentito dalla carica nella configurazione iniziale, e v_∞ la velocità raggiunta all'infinito.

Per calcolare V_0 sommiamo i contributi delle altre tre cariche:

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \ell} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \ell} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{2}\ell)} = \left(\frac{4-\sqrt{2}}{2} \right) \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}. \tag{6}$$

Inserendo il risultato nell'equazione (5) otteniamo

$$\left(\frac{4-\sqrt{2}}{\cancel{2}} \right) \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \ell} = \frac{1}{\cancel{2}} m v_\infty^2, \tag{7}$$

che porta all'espressione cercata

$$v_\infty = \sqrt{\frac{(4-\sqrt{2}) q^2}{4\pi\varepsilon_0 m \ell}}. \tag{8}$$