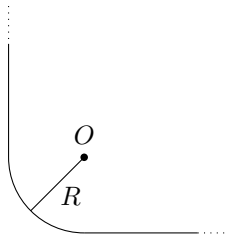


Esercizio settimanale n. 2

Guglielmo Bordin

17 marzo 2023

Un filo di lunghezza infinita e densità di carica uniforme λ viene disposto nella configurazione indicata in figura. Calcolare modulo e direzione del campo elettrico risultante nel punto O .



Suggerimento. Per risolvere l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx$$

potete usare la sostituzione $x/R = \tan u$. Vi invito a provare a fare i conti, ma se non riuscite a proseguire passate direttamente al risultato finale $\mathcal{I} = 1/R$, non toglierò punti.

Soluzione. Possiamo cominciare pensando di scomporre il campo totale nella somma (vettoriale) dei campi prodotti dai due tratti rettilinei di filo e di quello prodotto dal tratto curvo. Occupiamoci prima dei tratti rettilinei: esaminiamo il problema generico del campo prodotto da un filo infinitamente esteso lungo una sola direzione, in un punto distante R dall'estremità finita.

Facendo riferimento a figura 1, partiamo considerando un pezzetto infinitesimo di filo dx , che avrà carica λdx e produrrà nel punto di coordinate $x = 0$ e $y = R$ un campo di modulo

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)}. \quad (1)$$

Possiamo scomporre tale campo nelle componenti x e y : seguendo il disegno, la componente x sarà negativa e pari a

$$dE_x = -\frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)} \cos \vartheta = -\frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} dx. \quad (2)$$

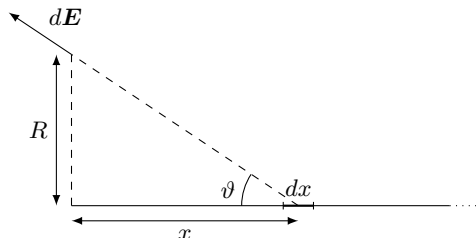


Figura 1: analisi del campo prodotto da uno dei tratti rettilinei di filo.

Da qui, possiamo integrare lungo x , partendo da $x = 0$ e proseguendo fino all'infinito, per ottenere la componente x del campo prodotto dal filo intero:

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx. \quad (3)$$

Per risolvere l'integrale possiamo sfruttare la sostituzione $u^2 = x^2 + R^2$, che differenziata restituisce

$$2u du = 2x dx. \quad (4)$$

Pertanto, ricordando di trasformare anche gli estremi di integrazione, otteniamo

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{x}{u^3} du = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{u} \right]_R^\infty = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (5)$$

Ritorniamo ora all'espressione del campo infinitesimo (1) e consideriamone invece la componente y :

$$dE_y = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)} \sin \vartheta, \quad (6)$$

che sostituendo l'espressione per $\sin \vartheta$, ricavata anche qui dal disegno, diventa

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx. \quad (7)$$

Ora possiamo integrare lungo x , come prima:

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx. \quad (8)$$

Sfortunatamente, l'assenza di x al numeratore complica notevolmente l'integrale. Una possibile strada per risolverlo è quella indicata dal suggerimento. Partiamo riarrangiando i termini al denominatore:

$$\int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx = \int_0^\infty \frac{R}{[R^2(1 + x^2/R^2)]^{3/2}} dx = \frac{1}{R^2} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2/R^2)^{3/2}} dx. \quad (9)$$