Esercizio settimanale n. 10

Guglielmo Bordin

17 maggio 2023

Una spira conduttrice di area $\Sigma = 15\,\mathrm{cm}^2$ e resistenza $R = 6\,\mathrm{m\Omega}$, ferma nello spazio, è attraversata da un campo magnetico B perpendicolare alla sua superficie. L'induttanza della spira è trascurabile. Nell'intervallo di tempo da 0 a $\tau = 2\,\mathrm{s}$ il flusso del campo attraverso la spira varia come

$$\Phi_B(t) = at(\tau - t).$$

- Determinare le unità di misura e il valore numerico della costante a, sapendo che B vale $10\,\mathrm{mT}$ a $t = \tau/2$.
- Calcolare l'energia dissipata sulla resistenza nell'intervallo di tempo $(0, \tau)$.

Soluzione. Il flusso magnetico ha unità $\mathrm{Wb} = \mathrm{T\,m^2}$, dunque a deve avere unità $\mathrm{Wb/s^2}$ per bilanciare il tempo al quadrato:

$$[a] = \frac{[\Phi_B]}{[t][\tau - t]} = \mathrm{Wb/s^2} = \mathrm{V/s}. \tag{1}$$

Poiché la superficie Σ è perpendicolare alla direzione del campo magnetico, possiamo scrivere il flusso come

$$\Phi_B(t) = B(t)\Sigma, \tag{2}$$

e dunque, utilizzando l'espressione fornita,

$$a = \frac{\Phi_B(t)}{t(\tau - t)} = \frac{B(t)\Sigma}{t(\tau - t)}. \tag{3}$$

Sostituendo $t = \tau/2$ e $B = 10\,\mathrm{mT}$ otteniamo

$$a = \frac{B(\tau/2)\Sigma}{\tau^2/4} = \frac{4(1 \times 10^{-2}\,\mathrm{T})(1{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2})}{4\,\mathrm{s^2}} = 1{,}5 \times 10^{-5}\,\mathrm{Wb/s^2}. \tag{4}$$

Il flusso di $\boldsymbol{B}$ attraverso la spira varia nel tempo, dunque vi si genera una forza elettromotrice $\mathcal{E}_\mathrm{i}$ la cui espressione è data dalla legge di Faraday:

$$\mathcal{E}_\mathrm{i}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi_B(t). \tag{5}$$

Il segno meno di Lenz in questo caso è irrilevante e possiamo ometterlo dai conti successivi; faremo calcoli energetici, quindi le direzioni e i segni non ci interessano. $\mathcal{E}_\mathrm{i}$ corrisponde alla differenza di potenziale che viene a formarsi ai capi della resistenza: la potenza dissipata per effetto Joule sarà quindi

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_\mathrm{i}^2(t)}{R}. \tag{6}$$

Calcoliamo dunque innanzitutto la f.e.m. indotta, derivando il flusso rispetto al tempo:

$$\mathcal{E}_\mathrm{i}(t) = \frac{d}{dt}[at(\tau - t)] = a\frac{d}{dt}(\tau t - t^2) = a(\tau - 2t). \tag{7}$$

Poi, osserviamo che la *potenza* è l'energia (in questo caso, l'energia dissipata) *per unità di tempo*. Per avere quindi l'energia dissipata complessivamente in un certo intervallo di tempo, dobbiamo integrare. In questo caso non basta moltiplicare per la durata dell'intervallo, perché la f.e.m. non è costante nel tempo.

Procediamo quindi con l'integrazione di $P(t)$ da $t = 0$ a $t = \tau$, per ottenere l'energia dissipata W:

$$W = \frac{a^2}{R} \int_0^{\tau} (\tau - 2t)^2 \, dt. \tag{8}$$

Qui possiamo fare la seguente sostituzione:

$$2t - \tau = u, \quad dt = du/2, \tag{9}$$

che implica (ricordandosi di trasformare anche gli estremi di integrazione)

$$W = \frac{a^2}{2R} \int_{-\tau}^{+\tau} u^2 \, du = \frac{a^2}{2R} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{u=-\tau}^{u=+\tau} = \frac{a^2}{2R} \left(\frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^3}{3} \right) = \frac{a^2 \tau^3}{3R}. \tag{10}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$W = \frac{(1{,}5 \times 10^{-5}\,\mathrm{V/s})^2 (2\,\mathrm{s})^3}{3(6 \times 10^{-3}\,\Omega)} = 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{J}. \tag{11}$$