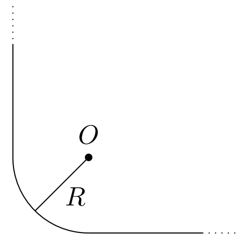
Esercizio settimanale n. 2

Guglielmo Bordin

18 marzo 2023

Un filo di lunghezza infinita e densità di carica uniforme λ viene disposto nella configurazione indicata in figura. Calcolare modulo e direzione del campo elettrico risultante nel punto O.



Suggerimento. Per risolvere l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\, dx$$

potete usare la sostituzione $x/R = \tan u$. Vi invito a provare a fare i conti, ma se non riuscite a proseguire passate direttamente al risultato finale $\mathcal{I} = 1/R$, non toglierò punti.

Soluzione. Possiamo cominciare pensando di scomporre il campo totale nella somma (vettoriale) dei campi prodotti dai due tratti rettilinei di filo e di quello prodotto dal tratto curvo. Occupiamoci prima dei tratti rettilinei: esaminiamo il problema generico del campo prodotto da un filo infinitamente esteso lungo una sola direzione, in un punto distante R dall'estremità finita.

Facendo riferimento a figura 1, partiamo considerando un pezzetto infinitesimo di filo dx, che ha carica $\lambda\, dx$ e produce nel punto di coordinate $x = 0$ e $y = R$ un campo di modulo

$$dE_1 = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)}. \tag{1}$$

Possiamo scomporre tale campo nelle componenti x e y: seguendo il disegno, la componente x è negativa e pari a

$$dE_{1,x} = -\frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)} \cos\vartheta = -\frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}\, dx. \tag{2}$$

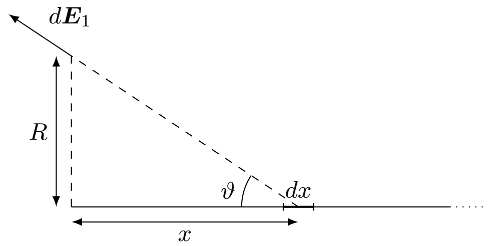


Figura 1: analisi del campo prodotto da uno dei tratti rettilinei di filo.

Da qui, possiamo integrare lungo x, partendo da $x = 0$ e proseguendo fino all'infinito, per ottenere la componente x del campo prodotto dall'intero filo:

$$E_{1,x} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\, dx. \tag{3}$$

Per risolvere l'integrale possiamo sfruttare la sostituzione $u^2 = x^2 + R^2$, che differenziata restituisce

$$\cancel{2}u\, du = \cancel{2}x\, dx. \tag{4}$$

Pertanto, ricordando di trasformare anche gli estremi di integrazione, otteniamo

$$E_{1,x} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{\cancel{u}}{u^{\cancel{3}\,2}}\, du = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{u}\right]_R^\infty = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{5}$$

Ritorniamo ora all'espressione del campo infinitesimo (1) e consideriamone invece la componente y:

$$dE_{1,y} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)} \sin\vartheta, \tag{6}$$

che sostituendo l'espressione per $\sin\vartheta$, ricavata anche qui dal disegno, diventa

$$dE_{1,y} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\, dx. \tag{7}$$

Ora possiamo integrare lungo x, come prima:

$$E_{1,y} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\, dx. \tag{8}$$

Sfortunatamente, l'assenza di x al numeratore complica notevolmente l'integrale. Una possibile strada per risolverlo è quella indicata dal suggerimento. Partiamo riarrangiando i termini al denominatore:

$$\int_0^\infty \frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\, dx = \int_0^\infty \frac{R}{[R^2(1+x^2/R^2)]^{3/2}}\, dx = \frac{1}{R^2}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2/R^2)^{3/2}}\, dx, \tag{9}$$

e usiamo la sostituzione indicata:

$$x = R\tan u \implies 1 + \frac{x^2}{R^2} = 1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}. \tag{10}$$

Diferenziando $x^2/R^2 = \tan^2 u$ otteniamo

$$\frac{2x\, dx}{R^2} = 2\tan u \frac{d}{du}(\tan u)\, du = \frac{2\tan u\, du}{\cos^2 u}, \tag{11}$$

che, semplificando i 2 e dividendo per $x = R\tan u$, diventa

$$\frac{dx}{R^2} = \frac{du}{R\cos^2 u}. \tag{12}$$

Mancano gli estremi di integrazione, che si possono trasformare così:

$$x = 0 \to u = 0, \quad x = \infty \to u = \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Procediamo quindi a sostituire dentro (9), ottenendo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\, dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^3 u \frac{du}{R\cos^2 u} \\ &= \frac{1}{R}\int_0^{\pi/2} \cos u\, du \\ &= \frac{1}{R}[\sin u]_0^{\pi/2} = \frac{1}{R}.\end{aligned} \tag{14}$$

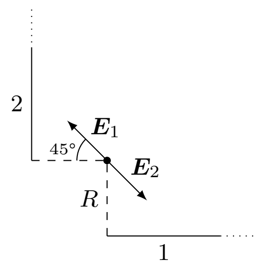


Figura 2: i campi prodotti dai due tratti rettilinei di filo. In modulo sono uguali e la direzione è la stessa ma con verso opposto, perciò la risultante è nulla.

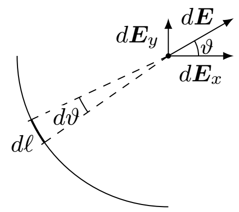


Figura 3: impostazione grafica del calcolo del campo prodotto dal tratto curvo di filo.

Sostituiamo quindi il risultato dentro (8):

$$E_{1,y} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{15}$$

Riassumendo, il campo prodotto dal filo in figura 1 ha componenti x e y uguali, ed è pertanto diretto a 45 gradi rispetto all'orizzontale, con modulo

$$E_1 = \sqrt{\left(-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{16}$$

Il tratto di filo rettilineo posto in verticale produce un campo $\boldsymbol{E}_2$ di uguale modulo e direzione, ma verso opposto: si faccia riferimento a figura 2. Il campo risultante dalla somma è quindi nullo; rimane soltanto il contributo del tratto curvo di filo, che ora calcoleremo.

Il calcolo si può impostare come in figura 3: cominciamo considerando un tratto infinitesimo (curvo) di filo $d\ell$, che avrà carica $\lambda\, d\ell$. Il campo prodotto in O ha componenti

$$dE_x = \frac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\vartheta, \quad dE_y = \frac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\vartheta. \tag{17}$$

Possiamo poi riscrivere $d\ell$ come $R\, d\vartheta$, così da poter integrare su ϑ. Otteniamo perciò, per la componente x totale,

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}[\sin\vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}, \tag{18}$$

e per la componente y

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}[-\cos\vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{19}$$

Le due componenti sono uguali, pertanto l'angolo del vettore $\boldsymbol{E}$ risultante è di 45° rispetto all'asse x. Il modulo vale

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{20}$$