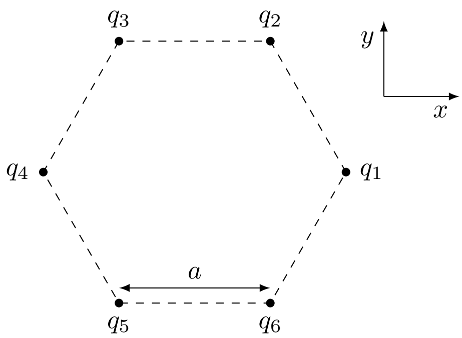
Esercizio settimanale n. 1

Guglielmo Bordin

23 marzo 2023

Sei cariche $q_n = nq$, con $n = 1, 2, \ldots, 6$ e $q = 1\,\mathrm{pC}$, sono disposte ai vertici di un esagono regolare di lato $a = 1\,\mathrm{cm}$ come in figura. Calcolare le componenti lungo gli assi x e y del campo elettrico al centro dell'esagono.



Soluzione. La carica q_n produce un campo elettrico che al centro dell'esagono vale, in modulo,

$$E_n = \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0 a^2}. \tag{1}$$

Le direzioni sono quelle indicate in figura 1, in grigio. Notiamo che sommando lungo le rette congiungenti le coppie di vertici opposti si ottengono tre campi, che denotiamo $\boldsymbol{E}_{1,4}$, $\boldsymbol{E}_{2,5}$ ed $\boldsymbol{E}_{3,6}$, di modulo

$$E_{n,n+3} = E_{n+3} - E_n = \frac{(n+3)q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}. \tag{2}$$

Guardando il disegno vediamo che la componente x del campo risultante $\boldsymbol{E}$ è uguale a $\boldsymbol{E}_{1,4}$, poiché nella somma degli altri due vettori le componenti orizzontali si cancellano

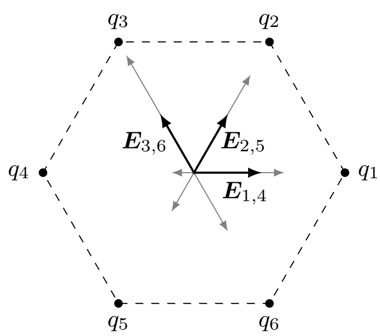


Figura 1: in grigio i campi prodotti dalle singole cariche, e in nero le somme lungo le rette congiungenti i vertici opposti.

per simmetria. La componente y di $\boldsymbol{E}$ sarà invece data dalla somma delle proiezioni di $\boldsymbol{E}_{2,5}$ ed $\boldsymbol{E}_{3,6}$ lungo l'asse y, ossia

$$E_y = E_{2,5}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + E_{3,6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}. \tag{3}$$

In definitiva avremo quindi

$$\boldsymbol{E} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{4}$$

e sostituendo i valori numerici,

$$E_x = 270\,\mathrm{N/C}, \quad E_y = 470\,\mathrm{N/C}. \tag{5}$$

Il modulo di $\boldsymbol{E}$ è invece pari a

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} = 540\,\mathrm{N/C}. \tag{6}$$

La direzione è quella di $\boldsymbol{E}_{2,5}$: lo si può capire ragionando sulla somma di $\boldsymbol{E}_{1,4}$ ed $\boldsymbol{E}_{3,6}$. Le componenti perpendicolari alla direzione di $\boldsymbol{E}_{2,5}$ si cancellano per simmetria, e rimangono solo le componenti parallele.