

Esercizio settimanale n. 8

Guglielmo Bordin

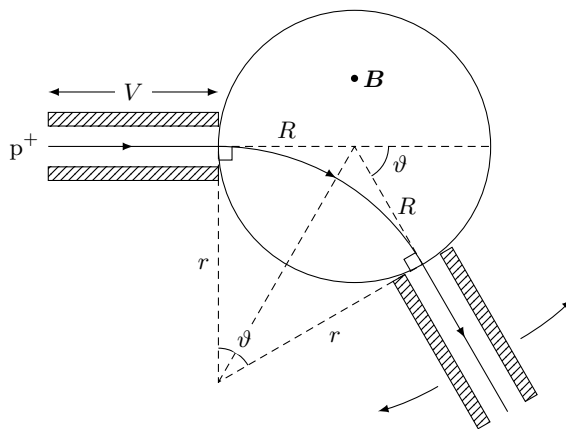
9 maggio 2023

Un rudimentale cannone protonico è dotato di un sistema di accelerazione e puntamento schematizzato in figura. Un fascio di protoni attraversa un canale dove è accelerato da una differenza di potenziale $V = 30 \text{ kV}$. All'uscita del canale i protoni entrano in una regione circolare di raggio $R = 1 \text{ m}$ permeata da un campo magnetico B uniforme e ortogonale al piano in cui si muovono i protoni, di intensità e verso regolabili.

Sotto l'azione del campo magnetico i protoni percorrono un tratto di circonferenza di raggio r all'interno della regione magnetizzata, per poi uscire dal cerchio in una direzione che forma un angolo ϑ con la direzione iniziale.

- Fissato il potenziale V , che valore di B bisogna impostare per sparare i protoni a un certo angolo ϑ ? In particolare, calcolare il valore necessario per sparare a 45° verso sinistra.
- Perché cambiamo B e non V per decidere la direzione del fascio? A cosa può servire variare V invece?

Suggerimento. A un certo punto servirà scrivere il raggio di curvatura r in funzione di R e ϑ : osservate il disegno per trovare la relazione geometrica.



Soluzione. I protoni vengono inizialmente accelerati dalla differenza di potenziale V fino a raggiungere una certa velocità v . Quando entrano nella regione con campo magnetico iniziano a risentire della forza di Lorentz, che se B ha verso uscente (come nel disegno) li fa curvare verso destra lungo un arco di circonferenza di raggio r , senza variare il modulo della velocità.

La forza di Lorentz agisce come forza centripeta lungo la traiettoria circolare. Considerando un singolo protone, possiamo dunque scrivere

$$eBv = \frac{mv^2}{r}, \quad (1)$$

dove r è il raggio di curvatura, e m è pari a $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Per determinare la velocità usiamo la conservazione dell'energia: l'energia cinetica all'entrata del cerchio è pari

all'energia potenziale elettrostatica dovuta alla differenza di potenziale V ,

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV. \quad (2)$$

Da qui troviamo subito

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}. \quad (3)$$

Usando queste relazioni, riprendiamo l'equazione (1) ricordando che stiamo cercando un'espressione di B in funzione degli altri parametri del sistema. Scriviamo quindi

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{m}{er} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2mV}{e}}. \quad (4)$$

Rimane da riscrivere r in funzione di altre grandezze che possano essere direttamente misurate. Come suggerito, queste sono il raggio del cerchio R e l'angolo di tiro ϑ . Se osserviamo il disegno, notiamo che i due triangoli rettangoli dai bordi tratteggiati sono uguali (hanno un lato in comune e i restanti uguali); dunque la linea tratteggiata che parte dal centro del cerchio di raggio R taglia in due l'angolo ϑ in basso. Concentrandoci su uno dei due triangoli rettangoli, possiamo quindi scrivere

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{R}{r}. \quad (5)$$

Sostituendo nell'equazione (4) troviamo

$$B(\vartheta) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2mV}{e}} \tan \frac{\vartheta}{2}. \quad (6)$$

Se vogliamo il valore corrispondente a un angolo di 45° *verso sinistra* dobbiamo sostituire $\vartheta = -\pi/4$, perché il disegno presuppone un'orientazione positiva in senso orario per ϑ . Dunque

$$B(-\pi/4) = \frac{1}{1\text{ m}} \sqrt{\frac{2(1,67 \times 10^{-27}\text{ kg})(30 \times 10^3\text{ V})}{1,60 \times 10^{-19}\text{ C}}}(-0,414) = -0,010\text{ T}. \quad (7)$$

Dalla teoria, o anche invertendo l'equazione (6) ponendo ϑ in funzione del resto, possiamo concludere che anche variando V potremmo variare l'angolo di tiro. La differenza principale sta nel fatto che, fissato un valore di B , saremmo in grado di sparare soltanto verso destra o verso sinistra! Ad esempio, con un vettore \mathbf{B} uscente dal foglio i protoni non possono che curvare verso destra. Variando il potenziale possiamo *cambiare la velocità*, e di conseguenza anche l'angolo di uscita, ma non possiamo «sconfinare» oltre la linea corrispondente a $\vartheta = 0$. Se cambiassimo il segno di V i protoni neanche arriverebbero al cerchio, perché verrebbero accelerati nella direzione opposta. In definitiva, conviene agire su V per regolare la velocità di uscita dei protoni e su B per regolarne la direzione.