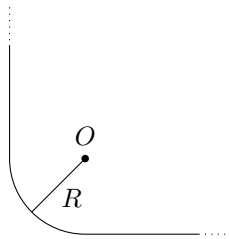


Esercizio settimanale n. 2

Guglielmo Bordin

24 marzo 2023

Un filo di lunghezza infinita e densità di carica uniforme λ viene disposto nella configurazione indicata in figura. Calcolare modulo e direzione del campo elettrico risultante nel punto O .



Suggerimento. Per risolvere l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx$$

potete usare la sostituzione $x/R = \tan u$. Vi invito a provare a fare i conti, ma se non riuscite a proseguire passate direttamente al risultato finale $\mathcal{I} = 1/R$, non toglierò punti.

Soluzione. Possiamo cominciare pensando di scomporre il campo totale nella somma (vettoriale) dei campi prodotti dai due tratti rettilinei di filo e di quello prodotto dal tratto curvo. Occupiamoci prima dei tratti rettilinei: esaminiamo il problema generico del campo prodotto da un filo infinitamente esteso lungo una sola direzione, in un punto distante R dall'estremità finita.

Facendo riferimento a figura 1, partiamo considerando un pezzetto infinitesimo di filo dx , che ha carica λdx e produce nel punto di coordinate $x = 0$ e $y = R$ un campo di modulo

$$dE_1 = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)}. \quad (1)$$

Possiamo scomporre tale campo nelle componenti x e y : seguendo il disegno, la componente x è negativa e pari a

$$dE_{1,x} = -\frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)} \cos \vartheta = -\frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} dx. \quad (2)$$

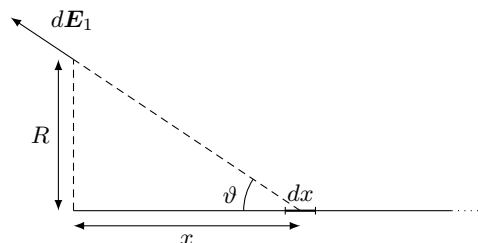


Figura 1: analisi del campo prodotto da uno dei tratti rettilinei di filo.

Da qui, possiamo integrare lungo x , partendo da $x = 0$ e proseguendo fino all'infinito, per ottenere la componente x del campo prodotto dall'intero filo:

$$E_{1,x} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx. \quad (3)$$

Per risolvere l'integrale possiamo sfruttare la sostituzione $u^2 = x^2 + R^2$, che differenziata restituisce

$$2u du = 2x dx. \quad (4)$$

Pertanto, ricordando di trasformare anche gli estremi di integrazione, otteniamo

$$E_{1,x} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{u}{u^3} du = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{u} \right]_R^\infty = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (5)$$

Ritorniamo ora all'espressione del campo infinitesimo (1) e consideriamone invece la componente y :

$$dE_{1,y} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)} \sin \vartheta, \quad (6)$$

che sostituendo l'espressione per $\sin \vartheta$, ricavata anche qui dal disegno, diventa

$$dE_{1,y} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx. \quad (7)$$

Ora possiamo integrare lungo x , come prima:

$$E_{1,y} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx. \quad (8)$$

Sfortunatamente, l'assenza di x al numeratore complica notevolmente l'integrale. Una possibile strada per risolverlo è quella indicata dal suggerimento. Partiamo riarrangiando i termini al denominatore:

$$\int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx = \int_0^\infty \frac{R}{[R^2(1 + x^2/R^2)]^{3/2}} dx = \frac{1}{R^2} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2/R^2)^{3/2}} dx, \quad (9)$$

e usiamo la sostituzione indicata:

$$x = R \tan u \implies 1 + \frac{x^2}{R^2} = 1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}. \quad (10)$$

Differenziando $x^2/R^2 = \tan^2 u$ otteniamo

$$\frac{2x dx}{R^2} = 2 \tan u \frac{d}{du}(\tan u) du = \frac{2 \tan u du}{\cos^2 u}, \quad (11)$$

che, semplificando i 2 e dividendo per $x = R \tan u$, diventa

$$\frac{dx}{R^2} = \frac{du}{R \cos^2 u}. \quad (12)$$

Mancano gli estremi di integrazione, che si possono trasformare così:

$$x = 0 \rightarrow u = 0, \quad x = \infty \rightarrow u = \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Procediamo quindi a sostituire dentro (9), ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^3 u \frac{du}{R \cos^2 u} \\ &= \frac{1}{R} \int_0^{\pi/2} \cos u du \\ &= \frac{1}{R} [\sin u]_0^{\pi/2} = \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (14)$$

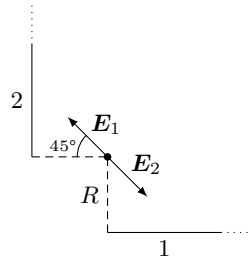


Figura 2: i campi prodotti dai due tratti rettilinei di filo. In modulo sono uguali e la direzione è la stessa ma con verso opposto, perciò la risultante è nulla.

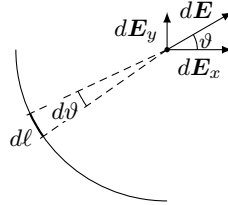


Figura 3: impostazione grafica del calcolo del campo prodotto dal tratto curvo di filo.

Sostituiamo quindi il risultato dentro (8):

$$E_{1,y} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (15)$$

Riassumendo, il campo prodotto dal filo in figura 1 ha componenti x e y uguali, ed è pertanto diretto a 45 gradi rispetto all'orizzontale, con modulo

$$E_1 = \sqrt{\left(-\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (16)$$

Il tratto di filo rettilineo posto in verticale produce un campo \mathbf{E}_2 di uguale modulo e direzione, ma verso opposto: si faccia riferimento a figura 2. Il campo risultante dalla somma è quindi nullo; rimane soltanto il contributo del tratto curvo di filo, che ora calcoleremo.

Il calcolo si può impostare come in figura 3: cominciamo considerando un tratto infinitesimo (curvo) di filo $d\ell$, che avrà carica $\lambda d\ell$. Il campo prodotto in O ha componenti

$$dE_x = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \vartheta, \quad dE_y = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \vartheta. \quad (17)$$

Possiamo poi riscrivere $d\ell$ come $R d\vartheta$, così da poter integrare su ϑ . Otteniamo perciò, per la componente x totale,

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\sin \vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (18)$$

e per la componente y

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [-\cos \vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (19)$$

Le due componenti sono uguali, pertanto l'angolo del vettore \mathbf{E} risultante è di 45° rispetto all'asse x . Il modulo vale

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (20)$$