Esercizio settimanale n. 6

Guglielmo Bordin

24 aprile 2023

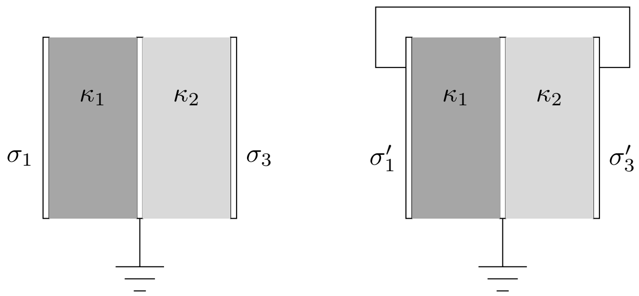
Tre armature piane conduttrici, di area $\Sigma = 0{,}25\,\mathrm{m}^2$, sono disposte rispettivamente nei piani di equazione $x_1 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, $x_2 = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, $x_3 = 4{,}5\,\mathrm{cm}$. L'armatura centrale è collegata a terra, mentre le armature 1 e 3 sono isolate, con densità di carica $\sigma_1 = 5\,\mathrm{\mu C/m^2}$ e $\sigma_3 = -2\,\mathrm{\mu C/m^2}$ rispettivamente. Tra le armature 1 e 2 e tra le armature 2 e 3 si trovano due dielettrici di costanti dielettriche relative $\kappa_1 = 3$ e $\kappa_2 = 2$ rispettivamente.

- Determinare il potenziale $V(x)$ in funzione della posizione x all'interno del sistema di armature, in particolare il valore di $V(x_3)$.

Le armature 1 e 3 vengono poi collegate tra loro da un filo conduttore.

- Determinare le densità di carica σ_1' e σ_3' presenti ora sulle armature 1 e 3.

Suggerimento. Quando sono collegate le armature si trovano allo stesso potenziale.



Soluzione. L'armatura centrale, seppur non carica come quelle esterne, è anch'essa conduttrice: dunque per induzione elettrostatica sulla sua superficie affacciata al dielettrico 1 si deposita una densità di carica $-\sigma_1$ (negativa), mentre sulla superficie affacciata all'altro dielettrico si deposita una densità di carica $-\sigma_3$ (positiva). In sostanza, il sistema diventa equivalente a due condensatori in serie; nella regione occupata dal dielettrico 1 il campo è quello di un condensatore con carica $\pm\sigma_1$ sulle armature, cioè $\sigma_1/\kappa_1\varepsilon_0$, e analogamente per la regione occupata dal dielettrico 2, dove il campo è quello di un condensatore con carica $\pm|\sigma_3|$ sulle armature, cioè $|\sigma_3|/\kappa_2\varepsilon_0$.

Per calcolare il potenziale integriamo il campo elettrico. Innanzitutto, poniamo come riferimento di potenziale nullo l'armatura centrale collegata a terra. Poi possiamo iniziare dalla regione 1, dove il campo è $\sigma_1/\kappa_1\varepsilon_0$ diretto verso destra:

$$V(x) = \cancel{V(x_2)} - \int_{x_2}^{x} \frac{\sigma_1}{\kappa_1\varepsilon_0}\,dx' = \frac{\sigma_1}{\kappa_1\varepsilon_0}(x_2 - x) \qquad \text{per } x \in [x_1, x_2]. \tag{1}$$

Proseguiamo nella regione 2, dove il campo è $|\sigma_3|/\kappa_2\varepsilon_0 = -\sigma_3/\kappa_2\varepsilon_0$ diretto verso destra:

$$V(x) = \cancel{V(x_2)} - \int_{x_2}^{x} \left(-\frac{\sigma_3}{\kappa_2\varepsilon_0}\right) dx' = \frac{\sigma_3}{\kappa_2\varepsilon_0}(x - x_2) \quad \text{per } x \in [x_2, x_3]. \tag{2}$$

Nelle considerazioni sui segni è importante tenere a mente che se il potenziale centrale è nullo, sull'armatura carica positivamente ci aspettiamo un potenziale *positivo* e su quella carica negativamente un potenziale *negativo* (come appunto succede per le espressioni scritte sopra).

Il potenziale in $x = x_3$ vale dunque

$$V(x_3) = \frac{\sigma_3}{\kappa_2 \varepsilon_0}(x_3 - x_2) = -\frac{2 \times 10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}}{2(8{,}9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m})}(1{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}) = -1{,}7\,\mathrm{kV}. \tag{3}$$

Quando le armature 1 e 3 vengono collegate dal filo conduttore, la carica presente su di esse si redistribuisce affinché raggiungano lo stesso potenziale. Abbiamo quindi due condizioni da imporre per trovare σ_1' e σ_3': la conservazione della carica *totale*:

$$\sigma_1' + \sigma_3' = \sigma_1 + \sigma_3, \tag{4}$$

e il raggiungimento dello stesso potenziale, ossia $V'(x_1) = V'(x_3)$ (ricicliamo quindi le espressioni ricavate in precedenza sostituendo le densità di carica):

$$\frac{\sigma_1'}{\kappa_1 \varepsilon_0}(x_2 - x_1) = \frac{\sigma_3'}{\kappa_2 \varepsilon_0}(x_3 - x_2). \tag{5}$$

Poiché $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ troviamo subito dalla (5)

$$\sigma_3' = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\sigma_1', \tag{6}$$

che sostituita nella (4) dà

$$\left(1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma_3. \tag{7}$$

Dunque in definitiva:

$$\sigma_1' = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{3}{5}(3\,\mathrm{\mu C/m^2}) = 1{,}8\,\mathrm{\mu C/m^2}, \tag{8}$$

$$\sigma_3' = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{2}{5}(3\,\mathrm{\mu C/m^2}) = 1{,}2\,\mathrm{\mu C/m^2}. \tag{9}$$