Esercizio settimanale n. 11

Guglielmo Bordin

25 maggio 2023

Una regione di spazio vuoto è pervasa da un campo elettrico variabile nel tempo descritto dall'espressione

$$\boldsymbol{E} = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right](\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}).$$

Derivare l'espressione del campo magnetico usando le leggi di Maxwell, sapendo che il suo modulo vale $B_0 = E_0/c$ nell'origine a $t = 0$.

Suggerimento. È sufficiente usare solo una delle quattro equazioni in forma differenziale (scegliete la più appropriata), e ricordarsi della costante di integrazione.

Soluzione. **Il testo che vi ho consegnato aveva un problema:** la condizione al contorno «B_0 nell'origina a $t = 0$» non è sufficiente a garantire una soluzione univoca. Una consegna corretta (vedere più avanti perché) sarebbe stata:

> [...] Derivare l'espressione del campo magnetico usando le leggi di Maxwell, *tralasciando termini costanti nel tempo.*

Ne terrò conto nella correzione, mi scuso per il disagio.

Conviene partire dalla legge di Faraday in forma differenziale:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

integrando rispetto al tempo entrambi i lati dell'equazione otteniamo

$$\boldsymbol{B}(t) = -\int \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(t)\, dt + \boldsymbol{B}_0. \tag{2}$$

Possiamo chiamare $\boldsymbol{B}_0$ la costante di integrazione, che potrà dipendere da x, y, z ma non dal tempo, la variabile su cui stiamo integrando.

Dobbiamo quindi calcolare il rotore del campo elettrico. Per farlo possiamo usare il trucco del determinante:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= \det\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{z}}.\end{aligned} \tag{3}$$

Nel nostro caso la componente z è nulla, mentre E_x ed E_y dipendono soltanto da z. Ciò che rimane è quindi

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{2\pi}{\lambda} E_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right](\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{4}$$

Riprendiamo ora l'equazione (2) e inseriamo quanto trovato:

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_0 - \frac{2\pi}{\lambda} E_0 (\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}) \int \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right] dt. \tag{5}$$

Qui possiamo effettuare la sostituzione di variabili

$$\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) = u, \tag{6}$$

che applicata ai differenziali dà

$$-\frac{2\pi c}{\lambda}\,dt = du \implies dt = -\frac{\lambda}{2\pi c}\,du. \tag{7}$$

Sostituendo nell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(t) &= \boldsymbol{B}_0 + \frac{E_0}{c}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}) \int \cos(u)\,du \\ &= \boldsymbol{B}_0 + \frac{E_0}{c}\sin(u)(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}) \\ &= \boldsymbol{B}_0 + \frac{E_0}{c}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right](\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}).\end{aligned} \tag{8}$$

Qui nel secondo passaggio abbiamo inglobato la nuova costante di integrazione in $\boldsymbol{B}_0$, e risostituito la definizione di u nel terzo.

Ora dobbiamo ricordare che $\boldsymbol{B}_0$, per quanto sappiamo, è costante solo rispetto al tempo: possiamo scrivere per completezza $\boldsymbol{B}_0(x, y, z)$. Nell'origine a $t = 0$ il termine con il seno è nullo e rimane soltanto $\boldsymbol{B}_0(0, 0, 0)$ ($\boldsymbol{B}_0$ calcolato nell'origine). Con le informazioni fornite possiamo concludere che $\boldsymbol{B}_0(0, 0, 0)$ è un vettore di modulo $B_0 = E_0/c$, ma niente di più! Seguiamo quindi la consegna «corretta» e tralasciamo i campi costanti nel tempo, ossia poniamo $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{0}$. La soluzione è dunque

$$\boldsymbol{B}(t) = \frac{E_0}{c}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right](\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{9}$$