6) $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ é L.I

• $\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC}$

$\vec{AC} = -\vec{OA} + \vec{OC}$

$\vec{AC} = -\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{a} + x\vec{b}$

$\vec{AC} = 4\vec{a} + (x-2)\vec{b}$

• $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC}$

$\vec{BC} = -\vec{OB} + \vec{OC}$

$\vec{BC} = -3\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{a} + x\vec{b}$

$\vec{BC} = 2\vec{a} + (x-2)\vec{b}$

$\{\vec{AC}, \vec{BC}\}$ é L.D

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \vec{AC} = \lambda \vec{BC}$

• $4\vec{a} + (x-2)\vec{b} = \lambda(2\vec{a} + (x-2)\vec{b})$

$4\vec{a} + (x-2)\vec{b} = 2\vec{a}\lambda + \lambda(x-2)\vec{b}$

$(4\vec{a} - 2\vec{a}\lambda) + [(x-2)\vec{b} - \lambda(x-2)\vec{b}] = \vec{0}$

$\vec{a}(4 - 2\lambda) + \vec{b}[(x-2) - \lambda(x-2)] = \vec{0}$

Como $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ é L.I:

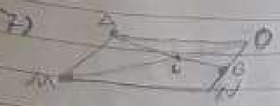
$$\begin{cases} 4 - 2\lambda = 0 \longrightarrow -2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{2} = 2 \\ (x-2) - \lambda(x-2) = 0 \end{cases}$$

$(x-2) - 2(x-2) = 0$

$(x-2) - 2x + 4 = 0$

$-x - 2 = 0$

$x = 2$

7) 

A, B, C são colineares $\iff \{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ é L.D

$\bullet\ \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$ $\qquad \vec{AO} = \vec{MN}$

$\vec{AB} = -\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OB}$ $\qquad \vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON}$

$\vec{AB} = -\vec{OM} + \vec{ON} + \frac{1}{m}\vec{ON}$ $\qquad \vec{MN} = -\vec{OM} + \vec{ON}$

$\bullet\ \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$

$\vec{AC} = \frac{1}{1+m}\vec{OM} - \vec{OA}$

$\vec{AC} = \frac{1}{1+m}\vec{OM} + \vec{AO}$

$\Rightarrow \vec{AC} = \left(\frac{1}{1+m}\vec{OM} - \vec{OM} + \vec{ON}\right.$

$\vec{AC} = \vec{OM}\left(\frac{1}{1+m} - 1\right) + \vec{ON}$

$\vec{AC} = \frac{-m}{1+m}\vec{OM} + \vec{ON}$

$\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ é L.D $\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^* / \vec{AB} = \lambda\vec{AC}$

$\Rightarrow -\vec{OM} + \vec{ON} + \frac{1}{m}\vec{ON} = \lambda\left(\frac{-m}{1+m}\vec{OM} + \vec{ON}\right)$

$\left(-1 - \frac{\lambda m}{1+m}\right)\vec{OM} + \vec{ON}\left[\left(\frac{m+1}{m}\right) - \lambda\right] = \vec{0}$

$\{\vec{OM}, \vec{ON}\}$ é L.I, portanto:

$$\begin{cases} -1 - \frac{\lambda m}{1+m} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda m}{1+m} \Rightarrow \lambda = \frac{m+1}{m} \\ \left(\frac{m+1}{m}\right) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{m+1}{m} \end{cases}$$

Conclusão: $\vec{AB} \parallel \vec{AC} \Rightarrow$ colineares

B) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é base para plano $\Rightarrow$ $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.I

portanto para $\{2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - 2\vec{v}\}$ ser plano tem que ser também L.I

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.I $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \\ \alpha = \beta = 0 \text{ (necessariamente)} \end{cases}$

considere $\vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{u} - 2\vec{v}$

$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ é L.I $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \vec{0} \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \text{ (necessariamente)} \end{cases}$

$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \vec{0}$

$\alpha_1 (2\vec{u} + \vec{v}) + \alpha_2 (\vec{u} - 2\vec{v}) = \vec{0}$

$(2\alpha_1 + \alpha_2)\vec{u} + (\alpha_1 - 2\alpha_2)\vec{v} = \vec{0}$

$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & ① \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 & ② \end{cases}$ $\quad 2 \cdot ① \rightarrow 4\alpha_1 + 2\alpha = 0$

① + ② $\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5\alpha_1 = 0$

$\alpha_1 = 0$

① : $2 \cdot 0 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$ $\quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$

conclusão : $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.I $\Rightarrow \{2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - 2\vec{v}\}$ é L.I

10- a- $\vec{AB} = (1,0,-1) - (1,3,2) = (1-1, 0-3, -1-2) = (0,-3,-3)$

$\vec{BC} = (1,1,0) - (1,0,-1) = (1-1, 1-0, 0-(-1)) = (0,1,1)$

$\vec{CA} = (1,3,2) - (1,1,0) = (1-1, 3-1, 2-0) = (0,2,2)$

b- $\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = (0,-3,-3) + (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (0+0, -3+\frac{2}{3}, -3+\frac{2}{3})$

$= (0, \frac{-7}{3}, \frac{-7}{3})$

c- $C + \frac{1}{2}\vec{AB} = (1,1,0) + (0, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}) = (1, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2})$

d- $A - 2\vec{BC} = (1,3,2) - (0,2,2) = (1,1,0)$

11- a- $\{(2,3),(0,2)\}$ é LI?

α em ② $3 \cdot 0 + 2\beta = 0$

$\alpha(2,3) + \beta(0,2) = (0,0)$

$0 + 2\beta = 0$

$\beta = 0$

① $\{ 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

② $\{ 3\alpha + 2\beta = 0$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

conclusão: $\{(2,3),(0,2)\}$ é LI

b- $\{(3,0),(-2,0)\}$ é LI?

matriz coeficientes: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

FORON:

conclusão: conjunto $\{(3,0),(-2,0)\}$ é LD

32 a- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI

$\{\underbrace{\vec{u}+\vec{v}}_{\vec{a}}, \underbrace{\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}}_{\vec{b}}, \underbrace{\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}}_{\vec{c}}\}$ é LI $\iff \alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0}$

$$\begin{cases} \alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0} \\ \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \text{ (necessariamente)} \end{cases} \quad , \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^*$$

$\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0}$

$\alpha_1(\vec{u}+\vec{v})+\alpha_2(\vec{u}-\vec{v}+\vec{w})+\alpha_3(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})=\vec{0}$

$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\vec{u}+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)\vec{v}+(\alpha_2+\alpha_3)\vec{w}=\vec{0}$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \ \dots ① \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0 \ \dots ② \\ \alpha_2+\alpha_3=0 \ \dots ③ \rightarrow \alpha_2=0 \end{cases}$$

③ em ①: $\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)=0$

$\alpha_1+0=0$

$\alpha_1=0$

② $(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3=0$

$(0+0)+\alpha_3=0$

$\alpha_3=0$

$$\begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases}$$

conclusão: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI $\rightarrow \{\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\}$ é LI

b- $\{\vec{u}+\vec{t}, \vec{v}+\vec{t}, \vec{w}+\vec{t}\}$ é LI $\iff a+b+c \neq -1$

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ / $x(\vec{u}+\vec{t})+y(\vec{v}+\vec{t})+z(\vec{w}+\vec{t})=\vec{0}$

$x[\vec{u}+a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}]+y[\vec{v}+a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}]+z[\vec{w}+a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}]=\vec{0}$

$x[\vec{u}(1+a)+b\vec{v}+c\vec{w}]+y[\vec{v}(1+b)+a\vec{u}+c\vec{w}]+z[\vec{w}(1+c)+a\vec{u}+b\vec{v}]=\vec{0}$

mas $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI

FORON:

$\vec{u}(1+a)x + b\vec{v}x + c\vec{w}x + \vec{v}(1+b)y + a\vec{u}y + c\vec{w}y + \vec{w}(1+c)z + a\vec{u}z +$
$b\vec{v}z = \vec{0}$

$\vec{u}\,[(1+a)x + ay + az] + \vec{v}\,[bx + (1+b)y + bz] + \vec{w}\,[cx + cy +$
$(1+c)z] = \vec{0}$

$$\begin{cases} (1+a)x + ay + az = 0 \\ bx + (1+b)y + bz = 0 \\ cx + cy + (1+c)z = 0 \end{cases}$$

Determinante matriz coef.:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1+a & a & a & 1+a & a \\ b & 1+b & b & b & 1+b \\ c & c & 1+c & c & c \end{array}\right| = (1+a)(1+b)(1+c) + abc + abc - ac(1+b) - bc(1+a) - ab(1+c)$$

$= (1+b+a+ab)(1+c) + 2abc - ac - \cancel{abc} - bc - \cancel{abc} - ab - abc$

$= 1 + c + b + \cancel{bc} + a + \cancel{ac} + \cancel{abc} + \cancel{ab} - \cancel{ac} - \cancel{bc} - \cancel{ab} - \cancel{abc}$

$= a + b + c + 1$

Conclusão: $\{\vec{u}+\vec{t}, \vec{v}+\vec{t}, \vec{w}+\vec{t}\}$ é L.I. se $a+b+c+1 \neq 0$, ou seja, $x = y = z = 0$ é a única solução possível do sistema.

c- $\{(2,3,4),(0,3,3)\}$ é LI?

$(2,3,4) = \lambda(0,3,3)$

$\begin{cases} 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \\ 3\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 4/3 \\ 0 = 2 \Rightarrow \text{impossível} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 4/3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ assume 2 valores diferentes, portanto não é LD

$\{(2,3,4),(0,3,3)\}$ é LI

d- $\{(1,-1,2),(1,1,0),(1,-1,1)\}$ é LI?

$x(1,-1,2) + y(1,1,0) + z(1,-1,1) = (0,0,0)$

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ det matriz coef.: $\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}\Bigg|$ $= 0$

$(2+0+1)$ $(2-2+0)$

$= 0 - 1 - 1 = -2$

Conclusão: $\{(1,-1,2),(1,1,0),(1,-1,1)\}$ é LI

e- $\{(1,-1,1),(-1,2,1),(-1,2,2)\}$ é LI?

$x(1,-1,1) + y(-1,2,1) + z(-1,2,2) = (0,0,0)$

$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ det matriz: $\left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\Bigg|$ $= ?$

$= (4-2+1) - (-2+2+2) = 3 - 2 = 1$

Conclusão: $\{(1,-1,1),(-1,2,1),(-1,2,2)\}$ é LI

FORONI

f - $\{(1,0,1),(0,0,1),(2,0,5)\}$ é LI?

$x(1,0,1) + y(0,0,1) + z(2,0,5) = (0,0,0)$

$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$ det M: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0$

Conclusão: $\{(1,0,1),(0,0,1),(2,0,5)\}$ é LD

12) a - $\vec{w} = (1,1)$ $\vec{u} = (2,-1)$ $\vec{v} = (1,-1)$

① $\begin{cases} 1 = \alpha 2 + \beta 1 \\ 1 = -\alpha - \beta \end{cases}$ ② $\rightarrow -\beta = 1 + \alpha \; (-1)$

$\beta = -1 - \alpha$

② em ①: $2\alpha + (-1 - \alpha) = 1$

$2\alpha - 1 - \alpha = 1$

$\alpha - 1 = 1$

$\alpha = 1 + 1$

$\alpha = 2$

$\hookrightarrow \beta = -1 - 2$

$\beta = -3$

$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$ solução única

Conclusão: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Rightarrow \vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

b - $z = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$(1,2,3) = x(1,1,1) + y(0,1,1) + z(1,1,0)$

① $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ② ③ $\rightarrow x = 3 - y$

$\hookrightarrow x = 3 - y$

③ em ②: $3 - y + y + z = 2$

$3 + z = 2$

$z = 2 - 3$

$z = -1$

① : $x + (-1) = 1$

$\hookrightarrow 2 - 3 = -y \Rightarrow y = 1$

FORON: $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = +1 \\ z = -1 \end{cases}$, $\vec{w} = (1, 2, 1)$ na base $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ é $(2, 1, -1)$

13) a - $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}^* / \vec{u} = \lambda \vec{v}$

$\vec{u} = (1, m-1, m)$ $\rightarrow (1, m-1, m) = \lambda (m, 2m, 4)$

$\vec{v} = (m, 2m, 4)$

$$\begin{cases} ① \ \lambda m = 1 \\ ② \ \lambda 2m = m - 1 \\ ③ \ 4\lambda = m \Rightarrow \lambda = \frac{m}{4} \rightarrow \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

③ em ① : $\frac{m}{4} \cdot m = 1$

$\frac{m^2}{4} = 1 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \sqrt{4} = \pm 2$

② : $\frac{1}{2} 2m = \frac{1}{2} - 1$ $\begin{cases} m = \pm 2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$m = -\frac{1}{2}$

conclusão: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD $\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = -1/2 \end{cases}$

b - $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}^* / \vec{u} = \lambda \vec{v}$

$\vec{u} = (1, m, m+1)$ $(1, m, m+2) = \lambda (m, m+1, 8)$

$\vec{v} = (m, m+1, 8)$

$$\begin{cases} ① \ \lambda m = 1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{m} \rightarrow \frac{1}{2} \\ ② \ \lambda(m+1) = m \\ ③ \ \lambda 8 = m + 1 \end{cases}$$

FORONI

① em ②: $\frac{1}{m}\cdot(m+1) = m$

$\frac{m}{m} + \frac{1}{m} = m \Rightarrow \frac{m+1}{m} = m$

$m+1 = m^2$

② em ③: $x\cdot 8 = m^2$

$\frac{1}{m}\cdot 8 = m^2$

$\frac{8}{m} = m^2 \Rightarrow m^3 = 8$

$m = \sqrt[3]{8} = 2$

$m=2$ em ②:

$m+1 = m^2$

$m+1 = 2^2$

$m+1 = 4$

$m = 4-1$

$m = 3$

$\begin{cases} m=2 \\ m=3 \end{cases}$

conclusão: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D $\Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=3 \end{cases}$

14) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.I para todo $m \in \mathbb{R}$

Determinante das coordenadas:

$$\begin{vmatrix} m & -1 & m^2+1 \\ m^2+1 & m & 0 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 0 + (m^2+1)^2 - m^2(m^2+1) + m^2 + 1$$

$$= m^2 + \cancel{m^4} + 2m^2 + 1 - \cancel{m^4} - \cancel{m^2} + \cancel{m^2} + 1$$

$$= 3m^2 + 2$$

O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D $\Leftrightarrow 3m^2 + 2 = 0$

$m^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \nexists\, m \in \mathbb{R} \,/\, 3m^2 + 2 = 0$

conclusão: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.I para todo $m \in \mathbb{R}$

$(3m^2 + 2 \neq 0$ sempre!$)$

15) a- $C = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}) = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,-1)\}$ é L.I?

det matriz coef.:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0+1+0)-(0+1-1) = 1 - 0 = 1$$

$\det \neq 0 \Rightarrow$ L.I

Conclusão: visto que o conjunto dos vetores é L.I, é possível formar uma base V^3

b - $\vec{v} = (2,3,7)_C$ na base B, onde $C = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$

Relação entre B e C.

$$\begin{cases} \vec{f_1} = (1,1,0)_B = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{f_2} = (1,0,1)_B = \vec{e_1} + \vec{e_3} \\ \vec{f_3} = (1,1,-1)_B = \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \\ \vec{f_3} \end{pmatrix}^t = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix}\right]^t$$

$$\Rightarrow (\vec{f_1} \ \vec{f_2} \ \vec{f_3}) = (\vec{e_1} \ \vec{e_2} \ \vec{e_3}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = (2,3,7)_C = (\vec{f_1} \ \vec{f_2} \ \vec{f_3}) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{e_1} \ \vec{e_2} \ \vec{e_3}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{e_1} \ \vec{e_2} \ \vec{e_3}) \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} = (12, 9, -4)_B$$

c) $\vec{v} = (2,3,7)_B$ na base C, onde $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$$(\vec{f_1}\ \vec{f_2}\ \vec{f_3}) = (\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{e_3})\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{e_3}) = (\vec{f_1}\ \vec{f_2}\ \vec{f_3})\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot adj(A)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = \left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right| = (0+0+1)-(0+1-1) = 1-0 = 1$$

$cof(A)$: $a_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 1\cdot(-1) = -1$

$\vec{v} = (2,3,7) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$

$a_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) = 1$

$a_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 1 = 1$

$a_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -1\cdot(-2) = 2$

$a_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} = 1\cdot(-1) = -1$

$a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -1\cdot 1 = -1$

$a_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 1 = 1$

FORON:

$a_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0$

$a_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$

$\text{adjunta}(A) = [\text{cof}(A)]^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$

$(\vec{e_1} \ \vec{e_2} \ \vec{e_3}) = (\vec{f_1} \ \vec{f_2} \ \vec{f_3}) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$= (\vec{f_1} \ \vec{f_2} \ \vec{f_3}) \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} = (11, -1, -8)_c$

Lista - 5

$\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$ e $\vec{AF} = \vec{f}$

1 - a) $\vec{BF} \rightarrow \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AF} \rightarrow \vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB}$

$\vec{BF} = \vec{f} - \vec{b}$

b) $\vec{AG} \rightarrow \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AG} \rightarrow \vec{AG} = \vec{AC} + \vec{BF}$ • $\vec{BF} = \vec{CG}$

$\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{f} - \vec{b}$

$\vec{AG} = \vec{c} + \vec{f} - \vec{b}$

c) $\vec{AE} \rightarrow \vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF} \rightarrow \vec{AE} = \vec{AF} - \vec{EF}$ • $\vec{EF} = \vec{AB}$

$\vec{AE} = \vec{AF} - \vec{AB}$

$\vec{AE} = \vec{f} - \vec{b}$

d) $\vec{BG} \rightarrow \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{BG}$ • $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{c} - \vec{b}$

$\vec{BG} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{f} - \vec{b}$ • $\vec{CG} = \vec{BF} = \vec{f} - \vec{b}$

$\vec{BG} = \vec{f} + \vec{c} - 2\vec{b}$

e) $\vec{HB} \rightarrow \vec{BD} + \vec{DH} = \vec{HB}$ • $\vec{BD} = -\vec{AB} + \vec{AD}$ • $\vec{AD} = \vec{BC}$

$\vec{HB} = \vec{c} - 2\vec{b} + \vec{f} - \vec{b}$ $\vec{BD} = -\vec{AB} + \vec{BC}$ • $\vec{DH} = \vec{CG} = \vec{BF}$

$\vec{HB} = \vec{f} + \vec{c} - 3\vec{b}$ $\vec{BD} = -b + \vec{c} - b$

$\vec{BD} = \vec{c} - 2b$

f) $\vec{AB} + \vec{FG} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{b}$ • $\vec{FG} = \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

$\vec{AB} + \vec{FG} = \vec{c} + \vec{0} = \vec{c}$

g) $\vec{AD} + \vec{HG} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{b}$ • $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

$\vec{AD} + \vec{HG} = \vec{c} + \vec{0} = \vec{c}$ • $\vec{HG} = \vec{EF} = \vec{AB} = \vec{b}$

h) $\vec{HF} + \vec{AG} - \vec{EF} =$ • $\vec{HF} = \vec{DB} = -\vec{BD} = -\vec{c} + 2\vec{b}$

$= \cancel{-\vec{c}} + \cancel{2\vec{b}} + \cancel{\vec{c}} + \vec{f} \cancel{- \vec{b}} \cancel{- \vec{b}}$ • $\vec{AG} = \vec{c} + \vec{f} - \vec{b}$

$= \vec{f}$ • $-\vec{EF} = -\vec{AB} = -\vec{b}$

• $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD}$
$\vec{BD} = -\vec{AB} + \vec{AD}$
$\vec{BD} = -2\vec{v} + 5\vec{u}$
$\vec{BD} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$

• $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA}$
$\vec{CA} = -\vec{BC} + (-\vec{AB})$
$\vec{CA} = -3\vec{u} - 2\vec{v}$

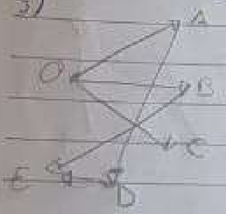
b) Para ser trapézio, um par de lados opostos devem ser paralelos.

$\vec{AD} = 5\vec{u}$ $\quad \vec{BC} = 3\vec{u} \rightarrow \vec{AD} \parallel \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AD} = \alpha \vec{BC}$

$\hookrightarrow \vec{AD} = \alpha \vec{BC} \rightarrow 5\vec{u} = \alpha 3\vec{u} \rightarrow \alpha = \frac{5\vec{u}}{3\vec{u}} = \frac{5}{3}$

Portanto: $\vec{AD} \parallel \vec{BC}$, visto que tanto o vetor $\vec{AD}$ quanto o vetor $\vec{BC}$ são múltiplos de $\vec{u}$, provando que possuem a mesma direção.

5)



$\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AO} + \vec{OB} + \vec{BE}$
$\vec{DE} = -\vec{AD} - \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{BE}$
$\vec{DE} = -\frac{1}{4}\vec{c} - \vec{a} + \vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a}$

$\vec{DE} = -\frac{1}{6}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$

FORONI:

1) $2\vec{AD} - \vec{FC} - \vec{BH} + \vec{GH} =$
$= 2\vec{c} - 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{b} - (-\vec{f} - \vec{c} + 3\vec{b}) - \vec{b}$
$= 2\vec{c} - 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{b} + \vec{f} + \vec{c} - 3\vec{b} - \vec{b}$
$= 2\vec{c} + \vec{f} - 7\vec{b}$

- $2\vec{AD} = 2\vec{BC} = 2(\vec{c} - \vec{b})$
- $\vec{FC} = \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$
- $\vec{BH} = -\vec{HB} = -\vec{f} - \vec{c} + 3\vec{b}$
- $\vec{GH} = -\vec{AB} = -\vec{b}$

2- a) $\vec{OF} = \vec{DC} + \vec{CO} + \vec{OF}$
$\vec{OF} = \vec{DC} + 2\vec{DE}$

e) $\vec{EC} = -\vec{DE} + \vec{DC}$

b) $\vec{DA} = \vec{DC} + \vec{CO} + \vec{OE} + \vec{EA}$
$\vec{DA} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{DC} + \vec{DE}$
$\vec{DA} = 2\vec{DC} + 2\vec{DE}$

f) $\vec{EB} = \vec{EO} + \vec{OB}$
$\vec{EB} = 2\vec{DC}$

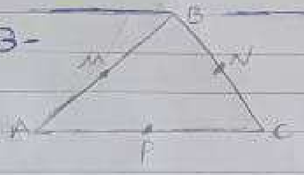
c) $\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{CO} + \vec{OB}$
$\vec{DB} = 2\vec{DC} + \vec{DE}$

g) $\vec{OC} = \vec{DE}$

h) $\vec{AF} = -\vec{DC}$

d) $\vec{DO} = \vec{DC} + \vec{CO}$
$\vec{DO} = \vec{DC} + \vec{DE}$

3-



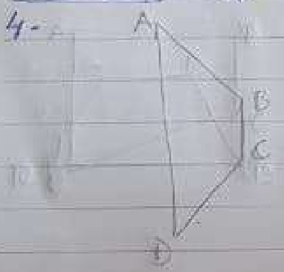
- $\vec{BP} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

- $\vec{AN} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB}$
$\vec{AN} = \vec{AC} + \frac{1}{2}(-\vec{AC} + \vec{AB})$
$\vec{AN} = \vec{AC} - \frac{\vec{AC}}{2} + \frac{\vec{AB}}{2}$

$\vec{CM} = -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

- $\vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$
$-\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{CB}$

4-



a) - $\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC}$
$\vec{CD} = 5\vec{u} - (2\vec{v} + 3\vec{u})$
$\vec{CD} = 5\vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{u}$
$\vec{CD} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

- $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$
$\vec{AC} = 2\vec{v} + 3\vec{u}$