Дніпропетровський Національний університет
Кафедра обчислювальної математики та математичної кібернетики

Чисельні методи в інформатиці

Завдання до лабораторної роботи № 5

Методи розв’язання задачі Коші

Тема: Методи розв’язання задачі Коші.
Мета: Познайомитись з методами Ейлера, Рунге-Кутта різного порядку точності та їх програмною реалізацією.

Постановка завдання:

Задано звичайне диференціальне рівняння

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

і початкова умова:

$$y(x_0) = y_0, \; x_0 \in [a, b], \tag{2}$$

де $f(x, y)$ – відома функція, $y(x)$ – шукана функція.

1. Знайти наближений розв’язок задачі Коші (1), (2) на відрізку $[a,b]$ наступними методами: 1) методом Ейлера; 2) методом Ейлера-Коші; 3) методом Ейлера з уточненням $(\varepsilon = 10^{-4})$. Для цього розробити програму розв’язання задачі Коші кожним з вказаних методів.

2. Знайти наближений розв’язок задачі (1), (2) на відрізку $[a,b]$ методом Рунге-Кутта. Для цього розробити програму розв’язання задачі Коші одним з методів Рунге-Кутта, вказаним в індивідуальному варіанті завдання. В точку $x = b$ треба прийти з точністю $\varepsilon_1 = 10^{-6}$. Розроблена програма повинна давати чисельний розв’язок задачі Коші в двох варіантах:
   a) з автоматичним вибором кроку $h_i, i = \overline{0, N}$ при заданій на кожному кроці точності $\varepsilon > 0$;
   b) з сталим кроком інтегрування $h = \dfrac{b-a}{N}$, де N – кількість кроків, одержаних в пункті а).

3. Знайти наближений розв’язок задачі (1), (2) на відрізку $[a,b]$ за допомогою екстраполяційного методу Адамса 4-го порядку точності $(N = 10)$. Початок таблиці значень наближеного розв’язку знайти методом Рунге – Кутта, який реалізовано у пункті 1.

4. Роздрукувати у вигляді порівняльної таблиці значення наближених розв’язків, одержаних методами Рунге-Кутта з автоматичним вибором кроку та зі сталим кроком інтегрування і за допомогою екстраполяційного методу Адамса, а також обчислене значення точного розв’язку.

5. Побудувати та порівняти між собою графіки одержаних розв’язків.

Література

1. Балашова С.Д. Чисельні методи: Ч.1. Методи розв’язування задач аналізу та алгебри: Навч. Посібник. – К.: НМК ВО, 1992. – 280 с.

2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: Т.1. – М.: Наука, 1976. – 304 с.

Методичні вказівки

При інтегруванні з автоматичним вибором кроку слід дотримуватись таких рекомендацій:

1. У вузлі x_0 взяти $h = h_0$, де h_0 – заданий початковий крок.
2. Методом Рунге-Кутта k –го порядку точності обчислити наближені розв’язки $\breve{y}$ та $\breve{\breve{y}}$ в одній і тій же точці $x_0 + h$ з кроком h та $h/2$ відповідно. Зауважимо, що для обчислення $\breve{\breve{y}}$ треба зробити два кроки по $h/2$ кожний.
3. Абсолютну похибку δ наближеного розв’язку $\breve{\breve{y}}$ (як більш точного) обчислити за формулою $\delta = \left|\frac{\breve{\breve{y}} - \breve{y}}{2^k - 1}\right|$, де k – порядок точності методу Рунге-Кутта.
4. Якщо $\delta \ge \varepsilon$, то крок h зменшити вдвічі і обчислення повторити, починаючи з точки x_0 (тобто перейти на п.2).
5. Якщо $\delta < \varepsilon$, то вважати, що значення шуканої функції $y(x)$ в точці $x_1 = x_0 + h$, одержане з заданною похибкою ε, є $y(x_1) \approx \breve{\breve{y}} + \frac{\breve{\breve{y}} - \breve{y}}{2^k - 1}$.
6. Розв’язок в наступному вузлі x_2 знаходимо аналогічно, вважаючи початковим вузол x_1. При цьому початковий крок для вузла x_2 вибираємо по кроку h, з яким було одержано розв’язок в вузлі x_1, в залежності від похибки δ. Якщо $\delta < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, то попередній крок збільшується вдвічі, в протилежному випадку крок не змінюється.
7. Аналогічно знаходяться розв’язки в наступних вузлах.
8. При підході до точки $x = b$ слід проявляти обережність, бо при значеннях $x > b$ права частина $f(x, y(x))$ диференціального рівняння (1) може бути невизначеною. Тому, після того, як знайдено значення y_k в черговому вузлі x_k і визначено крок h_k, з яким буде обчислюватись розв’язок в вузлі $x_k + h_k$, потрібно обчислити значення $\Delta_k = b - x_k$. (При достатньо малому значенні h_0 буде $\Delta_0 > 0$). Якщо $\Delta_k < \varepsilon_1$, де ε_1 – задана точність виходу в точку b, то можна вважати $x_k \approx b$ і на цьому процес інтегрування закінчити. Якщо $\Delta_k \ge \varepsilon_1$, інтегрування продовжується. При $h_k \le \Delta_k$ черговий вузол не виходить за точку b, тому інтегрування продовжується за прийнятим алгоритмом. При $h_k > \Delta_k$ слід прийняти $h_k = \Delta_k$.

Для полегшення аналізу одержаних результатів і побудови графіків розв’язків, результати доцільно розташувати у вигляді таблиці, що складається з чотирьох стовпців. В кожному рядку надрукувати значення $x_k, y(x_k), \breve{y}(x_k), y(x_k) - \breve{y}(x_k)$,

де $y(x_k)$ – значення точного розв’язку задачі Коші у вузлі x_k,

$\breve{y}(x_k)$ – значення наближеного розв’язку задачі в тому ж вузлі.

При цьому зручно, щоб перша частина таблиці відносилась до наближеного розв’язку, одержаного з автоматичним вибором кроку, а друга частина – до наближеного розв’язку, одержаного зі сталим кроком, третя – до наближеного розв’язку, одержаного за допомогою методу Адамса. Значення точного розв’язку доцільно одержати для кожного з цих наборів вузлів.

Варіанти завдань

Наближений розв’язок задачі шукати на відрізку $[0,1]$

1. $\begin{cases} y' + \sqrt{xy} = x, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' + x\sqrt{y} = 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' + \sin xy = 1, \\ y(0) = 2, \end{cases}$

4. $\begin{cases} y' + \sqrt{y} = x, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' + \sqrt{x+y} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

6. $\begin{cases} y' + \sqrt{x^2+y^2} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

7. $\begin{cases} y' + \dfrac{x}{y} = x, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

8. $\begin{cases} y' + \dfrac{x}{1+y} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

9. $\begin{cases} y' + \dfrac{\sqrt{y}}{1+x} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

10. $\begin{cases} y' + \dfrac{1+x}{y} = 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

11. $\begin{cases} y' + y^2\sqrt{x} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

12. $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x^2+y^2} = x, \\ y(0) = 1; \end{cases}$

13. $\begin{cases} y' + \sin^2 xy = 1, \\ y(0) = 2, \end{cases}$

14. $\begin{cases} y' + \sqrt{y+1} = x, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

15. $\begin{cases} y' + \sqrt{x^2+y} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

16. $\begin{cases} y' + \sqrt{x^2+y^2+x} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

17. $\begin{cases} y' + \dfrac{x^2-x}{y} = x, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

18. $\begin{cases} y' + \dfrac{x-2}{1+y} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

19. $\begin{cases} y' + \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{1+x} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

20. $\begin{cases} y' + \dfrac{1+x^2}{y} = 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

21. $\begin{cases} y' + y^2\sqrt{x+1} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

22. $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x^2+y^2+1} = x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y' + \sqrt{xy + x} = x, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

24. $\begin{cases} y' + x\sqrt{y^2 + y} = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y' + 2\sqrt[3]{x + y} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

26. $\begin{cases} y' + 3\sqrt[3]{x^2 + y^2} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

27. $\begin{cases} y' + 4\dfrac{x^2 + 1}{y + 1} = x, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

28. $\begin{cases} y' + 5\dfrac{x - y}{x + y} = x, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

29. $\begin{cases} y' + 2\dfrac{\sqrt{y^2 + x}}{y + x^2} = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

30. $\begin{cases} y' + 2\dfrac{1 + x}{1 + y} = 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

В непарних варіантах застосувати метод 3-го порядку точності

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1^{(n)} + 4k_2^{(n)} + k_3^{(n)}}{6}, \quad n = \overline{0, N-1}, \text{ де}$$

$$k_1^{(n)} = h\, f(x_n, y_n),$$

$$k_2^{(n)} = h\, f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2} \right),$$

$$k_3^{(n)} = h\, f(x_n + h, y_n - k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)}).$$

В парних варіантах –

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1^{(n)}}{4} + \frac{3k_3^{(n)}}{4}, \quad n = \overline{0, N-1}, \text{ де}$$

$$k_1^{(n)} = h\, f(x_n, y_n),$$

$$k_2^{(n)} = h\, f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{1}{3}k_1^{(n)} \right),$$

$$k_3^{(n)} = h\, f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2}{3}k_2^{(n)} \right).$$