Лабораторная работа 1
Методы одномерной оптимизации

Используя методы половинного деления, золотого сечения и Фибоначчи найти минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

№	$f(x)$	$[a,b]$	№	$f(x)$	$[a,b]$
1	$y = \dfrac{x}{x^2+1} \to \min$	$\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$	16	$y = e^{2x-x^2} \to \max$	$[0;2]$
2	$y = \dfrac{\ln x - 1}{x} \to \min$	$\left[e;e^3\right]$	17	$y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x} \to \max$	$[0;4]$
3	$y = x + \dfrac{2}{x} \to \min$	$\left[\dfrac{1}{2};3\right]$	18	$y = x + \sqrt{3-x} \to \max$	$[0;3]$
4	$y = x + e^{-x} \to \min$	$[-2;2]$	19	$y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x \to \min$	$[-2;2]$
5	$y = x + e^{-x/2} \to \max$	$[1;3]$	20	$y = \dfrac{(x-1)^2}{x} \to \min$	$\left[\dfrac{1}{2};2\right]$
6	$y = x + \dfrac{4}{x^2} \to \min$	$[1;4]$	21	$y = \dfrac{x^2}{x+1} \to \min$	$\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$
7	$y = \dfrac{x}{(x+1)^2} \to \min$	$[0;2]$	22	$y = \dfrac{x^2-1}{x^2-4} \to \max$	$[-1;1]$
8	$y = \dfrac{x^2+1}{x} \to \max$	$\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$	23	$y = \dfrac{(x-1)^2}{x} \to \max$	$\left[-3;-\dfrac{1}{2}\right]$
9	$y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3} \to \min$	$\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$	24	$y = xe^x \to \min$	$[-3;3]$
10	$y = \lvert x \rvert + (x-1)^2 \to \min$	$[-1;1]$	25	$y = (x+2)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) \to \min$	$[1;3]$
11	$y = (x-3)\sqrt{x} \to \min$	$[0;2]$	26	$y = \dfrac{x^2-3x-1}{x+2} \to \max$	$[-6;-4]$
12	$y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \to \max$	$\left[e;e^3\right]$	27	$y = (x-1)e^x \to \min$	$[-1;1]$
13	$y = \dfrac{e^x}{x+1} \to \min$	$\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$	28	$y = x^2 + e^x \to \min$	$[-1;0]$
14	$y = \lvert x \rvert + 2x^2 \to \min$	$\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$	29	$y = \dfrac{x^3+4}{x^2} \to \min$	$[1;3]$
15	$y = x^2 e^{-x} \to \max$	$[1;3]$	30	$y = \dfrac{2x+1}{(x+3)(x-1)} \to \max$	$[2;5]$

Алгоритм метода деления пополам (метода дихотомии)

Начальный этап

Пусть $[a_1, b_1]$— отрезок, на котором находится минимум функции $f(x)$. Выбираем $\delta > 0$ и задаем точность $\varepsilon > 0$, причем $\varepsilon > \delta$. Полагаем $k = 1$ и переходим к основному этапу.

Основной этап

Шаг 1. Если $b_k - a_k < \varepsilon$, останавливаемся, точка минимума $\hat{x}$ принадлежит интервалу $[a_k, b_k]$. В качестве $\hat{x}$ можно принять $\frac{a_k + b_k}{2}$. В противном случае вычисляем

$$x_{2k-1} = \frac{a_k + b_k - \delta}{2} \quad \text{и} \quad x_{2k} = \frac{a_k + b_k + \delta}{2} = a_k + b_k - x_{2k-1},$$

и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляем значения целевой функции в точках x_{2k-1}, x_{2k}. Если

1) $f(x_{2k-1}) \le f(x_{2k})$, полагаем $a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_{2k}$;

2) $f(x_{2k-1}) > f(x_{2k})$, полагаем $a_{k+1} = x_{2k-1}; b_{k+1} = b_k$.

Заменяем k на $k+1$ и переходим к *шагу 1*.

Описание алгоритма окончено.

Пример. Методом ***дихотомии*** найти минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ на отрезке } [0,3].$$

Решение. Пусть $\varepsilon = 0,1$ и $\delta = 0,05$. Положим $a_1 = a = 0, b_1 = b = 3$. Определяем точки $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1 - \delta}{2} = \dfrac{0 + 3 - 0,05}{2} = 1,475$ и $x_2 = \dfrac{a_1 + b_1 + \delta}{2} = \dfrac{0 + 3 + 0,05}{2} = 1,525$.

Находим значения функции в полученных точках

$$f(x_1) = f(1,475) = -1,216 \qquad f(x_2) = f(1,525) = -1,028$$

Так как $f(x_1) \le f(x_2)$, тогда $a_2 = a_1 = 0, b_2 = x_2 = 1,525$ и получаем отрезок $[a_2, b_2] = [0;1,525]$. Так как $b_2 - a_2 > \varepsilon$ продолжаем вычисления.

$$x_3 = \frac{a_2 + b_2 - \delta}{2} = \frac{0 + 1,525 - 0,05}{2} = 0,737 \text{ и } x_4 = \frac{a_2 + b_2 + \delta}{2} = \frac{0 + 1,525 + 0,05}{2} = 0,788.$$

$$f(x_3) = f(0,737) = -1,811 \qquad f(x_4) = f(0,788) = -1,874.$$

Так как $f(x_3) > f(x_4)$, тогда $a_3 = x_3 = 0,737$ $b_3 = b_2 = 1,525$ и получаем отрезок $[a_3, b_3] = [0,737;1,525]$. Так как $b_3 - a_3 > \varepsilon$ продолжаем вычисления. Последующие вычисления занесены в таблицу 1.

Таблица 1.

k	a_k	x_{2k-1}	x_{2k}	b_k	$f(x_{2k-1})$	$f(x_{2k})$	$b_k - a_k$
1	0	1,475	1,525	3	– 1,216	– 1,028	3
2	0	0,737	0,788	1,525	– 1,811	–1,874	1,525
3	0,737	1,106	1,156	1,525	– 1,965	– 1,923	0,788
4	0,737	0,921	0,971	1,156	– 1,982	– 1,998	0,419
5	0,921	1,014	1,063	1,156	–1,999	– 1,988	0,235
6	0,921	0,967	1,017	1,063	– 1,997	– 1,999	0,142
7	**0,967**			**1,063**			**0,096**

Для нахождения точки минимума с точностью нам пришлось 12 раз вычислять значения функции. В качестве приближения к точке минимума можно взять точку $\bar{x}_n = x_{12} = 1,017$ и $f(\bar{x}_n) = -1,999$ (так как $f(x_{11}) > f(x_{12})$) или точку

$$z_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} = \frac{0,967 + 1,063}{2} = 1,015.$$

Используя классический подход:

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$;

$f''(x) = 6x$; $f''(-1) < 0$, значит, $x_1 = -1$ — точка максимума

$f''(1) > 0$, значит, $\underline{x_1 = 1}$ — ***точка минимума*** и $f_{\min} = f(1) = -2$.

Алгоритм метода золотого сечения

Начальный этап

Пусть $[a_1, b_1]$— отрезок, на котором находится минимум функции $f(x)$. Задаем точность $\varepsilon > 0$. Строим точки

$$x_1 = a_1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_1 - a_1) \text{ и } x_2 = a_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1)$$

и вычисляем значения целевой функции $f(x_1), f(x_2)$, полагаем $n = 1$ и переходим к основному этапу.

Основной этап

Шаг 1. Если $b_n - a_n < \varepsilon$, останавливаемся, точка минимума $\hat{x}$ принадлежит интервалу $[a_n, b_n]$. В качестве $\hat{x}$ можно принять $z_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

В противном случае, если отрезок $[a_n, b_n]$ построении и известна точка $\overline{x}_n$, тогда, если $a_n = a_{n-1}$, то переходим к шагу 2, если же $b_n = b_{n-1}$, то переходим к *шагу 3*.

Шаг 2. Строим точку $x_{n+1} = a_n + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}(b_n - a_n)$ и вычисляем $f(x_{n+1})$:

если $f(x_{n+1}) \le f(\overline{x}_n)$, то полагаем $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \overline{x}_n$, $\overline{x}_{n+1} = x_{n+1}$;

если $f(x_{n+1}) > f(\overline{x}_n)$, то полагаем $a_{n+1} = x_{n+1}$, $b_{n+1} = b_n$, $\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n$.

Переходим к *шагу 4*.

Шаг 3. Строим точку $x_{n+1} = a_n + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(b_n - a_n)$ и и вычисляем $f(x_{n+1})$:

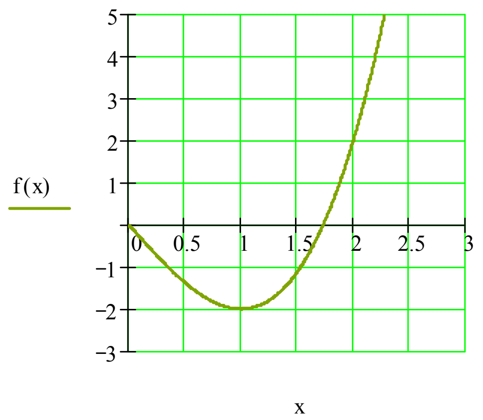
если $f(\overline{x}_n) \le f(x_{n+1})$, то полагаем $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_{n+1}$, $\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n$;

если $f(\overline{x}_n) > f(x_{n+1})$, то полагаем $a_{n+1} = \overline{x}_n$, $b_{n+1} = b_n$, $\overline{x}_{n+1} = x_{n+1}$.

Переходим к *шагу 4*.

Шаг 4. Заменяем n на $n+1$ и переходим к *шагу 1*.

$f(x) := x^3 - 3x \quad a := 0 \quad b := 3$



Пример. Методом ***золотого сечения*** найти минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$: $f(x)=x^3-3x$ на отрезке $[0,3]$.

Решение. Пусть $\varepsilon=0{,}1$. Положим $a_1=a=0, b_1=b=3$. Определяем точки

$$x_1=a_1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_1-a_1)=0+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(3-0)\approx 1{,}146$$

$$x_2=a_1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1-a_1)=0+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(3-0)\approx 1{,}854.$$

Находим значения функции в полученных точках

$$f(x_1)=f(1{,}146)=-1{,}933 \qquad f(x_2)=f(1{,}854)=0{,}812.$$

Так как $f(x_1)\le f(x_2)$, тогда $a_2=a_1=0, b_2=x_2=1{,}854,\ \bar{x}_2=x_1=1{,}146$ и получаем отрезок $[a_2,b_2]=[0;1{,}854]$ содержащий точку $\bar{x}_2=1{,}146$, которая осуществляет золотое сечение отрезка $[a_2,b_2]$и является приближенным значением точки минимума. Так как $b_2-a_2>\varepsilon$ продолжаем вычисления.

На отрезке$[a_2,b_2]$строим точку x_3 по формуле

$$x_3=a_2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_2-a_2)=0+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(1{,}854-0)=0{,}708$$

(отрезок $[a_2,b_2]$смещен в сторону левого конца $[a_1,b_1]$).

Находим значение $f(x_3)=-1{,}769$. Сравниваем значения целевой функции в точках x_3 и $\bar{x}_2$: $f(x_3)=f(0{,}708)=-1{,}769>f(\bar{x}_2)=f(1{,}146)=-1{,}933$.

Строим отрезок $[a_3,b_3]$. В силу того, что $f(x_3)>f(\bar{x}_2)$ полагаем

$$a_3=x_3=0{,}708,\quad b_3=b_2=1{,}854,\quad \bar{x}_3=\bar{x}_2=1{,}146,$$

причем $f(\bar{x}_3)=\min(f(x_3);f(\bar{x}_2))=\min(-1{,}769;-1{,}933)=-1{,}933$. Так как $b_3-a_3>\varepsilon$ продолжаем вычисления.

Строим точку x_4 по формуле:

$$x_4=a_3+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_3-a_3)=0{,}708+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(1{,}854-0{,}708)=1{,}416$$

(так как $f(x_3)>f(\bar{x}_2)$ и отрезок $[a_3,b_3]$смещен в сторону правого конца$[a_2,b_2]$). Находим $f(x_4)=-1{,}408$ и т.д.

Все последующие вычисления занесены в таблицу 2.

Таблица 2.

k	a_k	x_{k+1}	$\overline{x}_k$	b_k	$f(x_{k+1})$	$f(\overline{x}_k)$	$b_k - a_k$
1	0	1,854	1,146	3	0,812	– 1,933	3
2	0	0,708	1,146	1,854	– 1,769	– 1,933	1,854
3	0,708	1,416	1,146	1,854	– 1,408	– 1,933	1,146
4	0,708	0,979	1,146	1,416	– 1,999	– 1,933	0,708
5	0,708	0,875	0,979	1,146	– 1,955	– 1,999	0,438
6	0,875	1,043	0,979	1,146	– 1,994	– 1,999	0,271
7	0,875	0,939	0,979	1,043	– 1,989	– 1,999	0,167
8	0,939	1,003	0,979	1,043	– 2,00	– 1,999	0,103
9	0,979	1,018	**1,003**	1,043	– 1,999	**– 2,00**	0,064

В качестве приближенного решения берем либо точку $\overline{x}_9 = 1{,}003$, либо точку

$$z_9 = \frac{a_9 + b_9}{2} = 1{,}011.$$

Алгоритм метода Фибоначчи

Начальный этап

Шаг 1. Задать точность $\varepsilon > 0$ вычисления минимума целевой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]=[a_1,b_1]$, положить $F_1 = F_2 = 1$.

Шаг 2. Положить $k = 1$.

Шаг 3. Вычислить $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Шаг 4. Если $F_{k+1} \le \dfrac{b-a}{\varepsilon} \le F_{k+2}$, то полагаем $n = k$ и переходим к *шагу 5*, в противном случае полагаем $k = k+1$ и переходим к *шагу 3*.

Шаг 5. Находим точки

$$u_1 = a_1 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_1 - a_1); \quad v_1 = a_1 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_1 - a_1).$$

Шаг 6. Вычислить значения целевой функции $f(u_1)$ и $f(v_1)$.

Если $f(u_1) \le f(v_1)$, то $a_2 = a_1, b_2 = v_1$. Переходим к *шагу 7*.

Если $f(u_1) > f(v_1)$, то $a_2 = u_1, b_2 = b_1$. Переходим к *шагу 7*.

Шаг 7. Полагаем $k = 2$.

Основной этап

Шаг 8.

1) Если $f(u_{k-1}) \le f(v_{k-1})$, вычисляем точку $u_k = a_k + \dfrac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b-a)$, вычисляем значение целевой функции $f(u_k)$ и переходим к *шагу 9*.

2) Если $f(u_{k-1}) > f(v_{k-1})$, то полагаем $u_k = v_{k-1}$, $f(u_k) = f(v_{k-1})$, $a_k = u_{k-1}$ и переходим к *шагу 10*.

Шаг 9. Полагаем $v_k = u_{k-1}$, $f(v_k) = f(u_{k-1})$ и переходим к *шагу 11*.

Шаг 10. Вычисляем точку $v_k = a_k + \dfrac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b-a)$, вычисляем значение целевой функции $f(v_k)$ и переходим к *шагу 11*.

Шаг 11. Если $f(u_k) \le f(v_k)$, то полагаем $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = v_k$, переходим к *шагу 12*, в противном случае, $a_{k+1} = u_k, b_{k+1} = b_k$ и переходим к *шагу 12*.

Шаг 12. Если $k < n$, то полагаем $k = k+1$ и переходим к шагу 8, в противном случае, полагаем $z_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ и заканчиваем вычисления.

Алгоритм описан.

Пример. Методом ***Фибоначчи*** найти минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ на отрезке } [0,3].$$

Решение. Пусть $\varepsilon = 0,1$. Положим $a = 0, b = 3$. Определим число n вычислений значений целевой функции

$$F_{n+1} \le \frac{3}{0,1} \le F_{n+2} \Leftrightarrow F_{n+1} \le 30 \le F_{n+2}.$$

Так как $F_8 = 21, F_9 = 34$, тогда $n+1 = 8 \Rightarrow n = 7$.

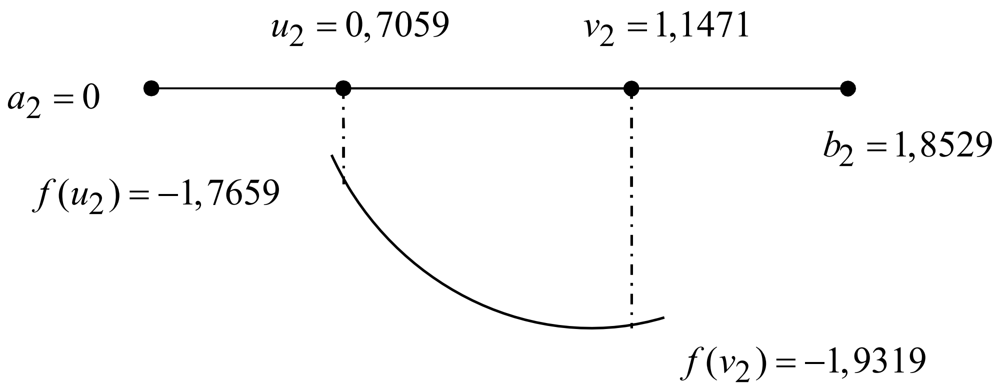
Определяем точки

$$u_1 = 0 + \frac{F_7}{F_9}(3-0) = \frac{13}{34}\cdot 3 = 1,1471; \quad v_1 = 0 + \frac{F_8}{F_9}(3-0) = \frac{21}{34}\cdot 3 = 1,8529.$$

Находим $f(u_1) = -1,9319$; $f(v_1) = 0,803$. Так как $f(u_1) \le f(v_1)$, тогда полагаем $a_2 = a = 0, b_2 = v_1 = 1,8529$. Вычисляем

$$u_2 = a_2 + \frac{F_{7-2+1}}{F_{7+2}}(b-a) = 0 + \frac{F_6}{F_9}(3-0) = 0 + \frac{8}{34}\cdot 3 = 0,7059 \text{ и } f(u_2) = -1,7659.$$

Полагаем $v_2 = u_1 = 1,1471$, тогда $f(v_2) = f(u_1) = f(1,1471) = -1,9319$.



Так как $f(u_2) > f(v_2)$, полагаем $a_3 = u_2 = 0,7059$ и $b_3 = b_2 = 1,8529$. Далее полагаем $u_3 = v_2 = 1,1471$ и $f(u_3) = -1,9319$. Находим точку v_3

$$v_3 = a_3 + \frac{F_{7-3+2}}{F_{7+2}}(b-a) = 0,7059 + \frac{F_6}{F_9}\cdot 3 = 1,4118,$$

и вычисляем значение $f(v_3) = -1,4215$.

Так как $f(u_3) \le f(v_3)$, полагаем $a_4 = a_3, b_4 = v_3, v_4 = u_3$ и вычисляем точку

$$u_4 = a_4 + \frac{F_{7-4+1}}{F_9}(b-a) = 0,7059 + \frac{F_4}{F_9}\cdot 3 = 0,9706$$

и вычисляем значение $f(u_4) = -1,9974$.

Сравниваем значения $f(u_4)$ и $f(v_4)$ и т.д. Результаты вычислений занесены в таблицу 3.

Таблица 3

k	a_k	b_k	u_k	v_k	$f(u_k)$	$f(v_k)$
1	0	3	1,1471	1,8529	– 1,9319	0,803
2	0	1,8529	0,7059	1,1471	– 1,7659	– 1,9319
3	0,7059	1,8529	1,1471	1,4118	– 1,9319	– 1,4215
4	0,7059	1,4118	0,9706	1,1471	– 1,9974	– 1,9319
5	0,7059	1,1471	0,8824	0,9706	– 1,9601	– 1,9974
6	0,8824	1,1471	0,9706	1,0588	– 1,9974	– 1,9894
7	0,8824	1,0588	0,9706	0,9706	– 1,9974	– 1,9974

В качестве точки минимума может быть взята середина последнего отрезка

$$z_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} = \frac{0,8824 + 1,0588}{2} = 0,9706 \approx 0,971 .$$