Розв'язати задачі на умовний екстремум методом множників Лагранжу:

№	умова
1	$x^2 + y^2 - 12xy + 2x - 6y \to \text{extr}, \quad x + y = 3, 2x + 3y \le 6$
2	$3x^2 + 2y^2 - 3x + 1 \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 = 4$
3	$xyz \to \text{extr}, \quad x + y + z = 6, xy + yz + xz = 12$
4	$3x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr}, \quad x + y = 1$
5	$(x-2)^2 + (y-3)^2 \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 \le 52$
6	$4x + 3y \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 = 1$
7	$x^2 + y^2 \to \text{extr}, \quad 3x + 4y = 1$
8	$\exp(xy) \to \text{extr}, \quad x + y = 1$
9	$5x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr}, \quad x + y = 1$
10	$x^2 + y^2 + z^2 \to \text{extr}, \quad x + y + z \le 12, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
11	$xy^2z^3 \to \text{extr}, \quad x + y + z = 1$
12	$xyz \to \text{extr}, \quad x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$
13	$xyz \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1$
14	$2x + 3y^2 + z^2 \to \text{extr}, \quad x + y + z = 8$
15	$(x-3)^2 + (y-5)^2 \to \text{extr}, \quad y = 2x - 5$
16	$x^2 - y^2 \to \text{extr}, \quad x - y = 4$
17	$xyz \to \text{extr}, \quad x + y + z \le 6, xy + yz + xz \le 8$
18	$x - 2y + 2z \to \text{extr}, \; x^2 + y^2 + z^2 \le 9$
19	$x^2 + 4y^2 - 4xy - 2yz - 2xz \to \text{extr}, \quad 3x^2 + 6y^2 + 2z^2 \le 1$
20	$xy \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 \le 2$
21	$x^3 + y^3 \to \text{extr}, \quad x + y = 12, x \ge 0, y \ge 0$
22	$2x^2 + 2x + 4y - 3z \to \text{extr}, \quad 8x - 3y + 3z \le 40, -2x + y - z = -3, y \ge 0$
23	$3y^2 - 11x - 3y - z \to \text{extr}, \quad x - 7y + 3z + 7 \le 0, \; 5x + 2y - z \le 2, z \ge 0$
24	$x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to \text{extr}, \quad x + y = 3$
25	$x^2 - y^2 - 4x + 6y \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 \le 4$
26	$5x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 12y \to \text{extr}, \quad x + y \le 12$
27	$3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to \text{extr}, \quad x + y \le 8, \; 3x + 4y = 12$
28	$x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to \text{extr}, \quad x + y + z = 12, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
29	$3xy - x^2y - xy^2 \to \text{extr}, \quad 3x^2 + 6y^2 \le 16$
30	$x^2 + y^2 + z^2 \to \text{extr}, \quad 2x - y + z = 12, x + y + z = 3$

Метод множників Лагранжа для задачі умовної оптимізації з обмеженнями у формі рівностей

Нехай потрібно розв'язати задачу

$$f(x) \to \min, x \in X \subset E^n \tag{1}$$

при умовах

$$X = \{x \mid g_i(x) = 0\}, \quad i = \overline{1,s} \tag{2}$$

Припустимо, що функції $f(x), g_1(x), ..., g_s(x)$ визначені і диференційовані на множині X та $s < n$.

Основна ідея методу множників Лагранжа полягає у переході від задачі на умовний екстремум до задачі знаходження безумовного екстремуму спеціально побудованої функції Лагранжа з наступним застосуванням класичного методу пошуку екстремуму.

Введемо змінні $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_s$ і побудуємо функцію Лагранжа

$$L(x,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x) \tag{3}$$

Теорема (Ознака Лагранжа). Для того, щоб вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)$ був розв'язком задачі (1), (2), необхідно існування вектора $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_s)$, такого що його компоненти $\lambda_i \ (i = \overline{1,s})$ одночасно не дорівнюють нулю і такі, що всі частинні похідні першого порядку функції Лагранжа $L(x,\lambda)$ за змінними $x_k (k = 1,...,n)$ в точці $\hat{x}$ дорівнюють нулю, тобто виконується умова

$$\frac{\partial L(\hat{x},\lambda)}{\partial x_k} = \lambda_0 \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,n} \ \& \ \lambda \neq 0 \tag{4}$$

У багатьох практичних задачах $\lambda_0 = 1$.

Алгоритм методу множників Лагранжа

Крок 1. Будуємо функцію Лагранжа у вигляді

$$L(x,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x).$$

В задачі на мінімум вважаємо $\lambda_0 = 1$, на максимум — $\lambda_0 = -1$. Складемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_k} = 0 \quad k = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0 \quad i = \overline{1,s} \end{cases}$$

Крок 2. Розв'язавши отриману систему алгебраїчних рівнянь, отримаємо стаціонарні точки x функції Лагранжа.

Крок 3. Залучаючи необхідні умови або достатні умови, або аналізуючи поведінку цільової функції в околі стаціонарних точок, виберемо серед стаціонарних точок точки мінімуму.

Метод множників Лагранжа для задачі умовної оптимізації з обмеженнями у формі нерівностей

Знайдемо розв'язок задачі (1) при умовах

$$X = \{x \mid g_i(x) \le 0\}, \quad i = \overline{1,s}. \tag{5}$$

Припустимо, що функції $f(x), g_1(x), ..., g_s(x)$ визначені і диференційовані на множині X та $s < n$.

У цьому випадку застосовується такий алгоритм:

Алгоритм методу для задачі з обмеженнями у формі нерівностей

Крок 1. Задачу (1), (5) розв'язуємо класичним методом, тобто знаходимо стаціонарні точки, які є розв'язками системи алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_k} = 0 \quad k = \overline{1,n}$$

потім перевіряємо чи задовольняють ці точки умові $g_i(x) \le 0, i = \overline{1,s}$. Якщо не задовольняють, виключаємо їх з подальшого розгляду, у протилежному випадку – досліджуємо чи є ці стаціонарні точки точками мінімуму цільової функції.

Крок 2. Розв'язуємо задачу $f(x) \to \min$, $g_i(x) = 0, i = \overline{1,s}$ методом множників Лагранжа для обмежень у формі рівностей.

Крок 3. Серед всіх знайдених точок вибираємо точки мінімуму.

Приклад 1. Знайти екстремуми функції $f(x,y) = 4x^2 + y^2$, при умові $x + y = 5$.

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = \lambda_0\left(4x^2 + y^2\right) + \lambda_1(x + y - 5)$$

Виписуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 8\lambda_0 x + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2\lambda_0 y + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_1} = x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

Нехай $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Цей випадок не підходить. Покладемо $\lambda_0 = 1$. Розв'язуємо отриману систему та дістаємо єдину стаціонарну точку.

$$\begin{cases} 8x + \lambda_1 = 0 \\ 2y + \lambda_1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ \lambda_1 = 8 \end{cases}.$$

За теоремою Вейєрштрасса існує розв'язок задачі на мінімум і на максимум.

Застосуємо необхідну умову другого порядку. Складаємо матрицю Гессе (матрицю других похідних).

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 8 > 0, \Delta_2 = 16 > 0$$

Згідно критерію Сильвестра матриця H є додатно визначеною. Точка (1,4) задовольняє необхідній умові другого порядку на мінімум. Отже, точка (1,4) є точкою мінімуму. Крім того $f_{\min} = f(1,4) = 20$.

Нагадаємо критерій Сильвестра.

Матриця A є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі її головні мінори $\Delta_k (k = 1,...,n)$ додатні.

Матриця A є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі її головні мінори знакозмінні $(-1)^k \Delta_k > 0, k = \overline{1,n}$, тобто $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0,...$

Приклад 2. $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-8)^2 \to \text{extr}$, при умові $x + y \le 6$

Розв'язання. Використовуємо необхідні умови і знаходимо стаціонарну точку:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-8) = 0 \end{cases}$$

Отже, точка $A_1(2,8)$ – стаціонарна точка. Перевіряємо виконання умови $x + y \le 6$. Так як 2+8=10>6, точка A_1 не задовольняє обмеженням, тому виключаємо її з розгляду.

Складаємо тепер функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = \lambda_0 \left((x-2)^2 + (y-8)^2 \right) + \lambda_1 (x + y - 6)$$

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 2\lambda_0 (x-2) + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 2\lambda_0 (y-8) + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda_1} = x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\lambda_0 \ne 0$. Вважаємо $\lambda_0 = 1$. Розв'язуємо отриману систему

$$\begin{cases} 2(x-2) + \lambda_1 = 0 \\ 2(y-8) + \lambda_1 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ \lambda_1 = 4 \end{cases}$$

Отже, точка $A_2(0,6)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа. Складемо матрицю других похідних в цій точці.

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \Delta_1=2>0,\Delta_2=4>0.$$

Матриця H є додатно визначена. Точка (0,6) задовольняє необхідній умові другого порядку на мінімум. Отже, точка $A_2(0,6)$ є точкою мінімуму. $f_{\min}=f(0,6)=8$

Приклад 3. $f(x)=f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4\to \text{extr},\quad x_1^2+x_2^2=1$

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x,\lambda)=\lambda_0\left(x_1^4+x_2^4\right)+\lambda_1(x_1^2+x_2^2-1)$$

Виписуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1}=4\lambda_0 x_1^3+2\lambda_1 x_1=0\\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2}=4\lambda_0 x_2^3+2\lambda_1 x_2=0\\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_1}=x_1^2+x_2^2-1=0\end{cases}$$

Нехай $\lambda_0=0$, тоді $\lambda_1\neq 0$ і з перших двох рівнянь ми маємо, що $x_1=x_2=0$, але в цій точці не виконується умова $x_1^2+x_2^2=1$. Покладемо тепер $\lambda_0=1$. Тоді

$$\begin{cases}2x_1^3+\lambda_1 x_1=0\\ 2x_2^3+\lambda_1 x_2=0\\ x_1^2+x_2^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1(2x_1^2+\lambda_1)=0\\ x_2(2x_2^2+\lambda_1)=0\\ x_1^2+x_2^2-1=0\end{cases}$$

Тоді $\hat{x}_1=0\Rightarrow \hat{x}_2=\pm 1$ або $\hat{x}_2=0\Rightarrow \hat{x}_1=\pm 1$. Якщо $\hat{x}_1\neq 0,\hat{x}_2\neq 0$, тоді $\hat{x}_1^2=\hat{x}_2^2=-\dfrac{1}{2\lambda_1}$.

Звідси маємо, що $\lambda_1=-1$. Тоді $|\hat{x}_1|=|\hat{x}_2|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Отже ми отримали стаціонарні точки

$$A_1(0,1);\ A_2(0,-1);\ A_3(1,0);\ A_4(-1,0);$$

$$A_5\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);A_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);A_7\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);A_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Знайдемо матрицю других похідних

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x_1^2-1 & 0\\ 0 & 6x_2^2-1\end{pmatrix}.$$

Матриці $H_1(0,1)=H_2(0,-1)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $H_3(1,0)=H_4(-1,0)=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ не є ні додатно ні від'ємно визначеними, отже, точки A_{1-4} не будуть точками локального екстремуму.

Матриці $H_{5-8}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ є додатне визначеними, отже точки A_5-A_8 задовольняють необхідній умові другого порядку на мінімум, отже ці точки є точками локального мінімуму функції $f(x)$ і $f_{\min}=0,5$.