

# Controlli Automatici T

## Progetto gruppo AO — Traccia 3A

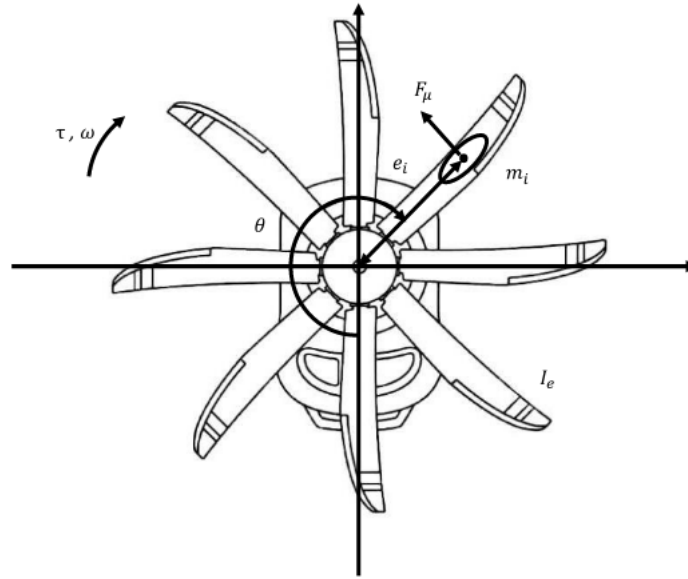
Giacomo Romanini

Guglielmo Palaferri

Luca Tacinelli

Pietro Girotti

6 luglio 2021



## 1 Linearizzazione nell'intorno di $(x_e, u_e)$

Il sistema del motore ad elica assegnato è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ (m_i e_i^2 + I_e) \dot{\omega} &= -\beta \omega - \mu_d m_i \omega^2 e_i^2 + \tau\end{aligned}$$

Si considerano

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \\ u(t) &= \tau(t) \\ y(t) &= \omega(t)\end{aligned}$$

Sostituendo i parametri è possibile ottenere le equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\beta}{(m_i e_i^2 + I_e)} x_2(t) - \frac{\mu_d m_i e_i^2}{(m_i e_i^2 + I_e)} x_2^2(t) + \frac{1}{(m_i e_i^2 + I_e)} u(t)\end{aligned}$$

Inoltre, poiché la dinamica di  $\theta$  è ininfluente per l'evoluzione del sistema, si conosce  $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 10000/2\pi \end{pmatrix}$  e  $y_e = \omega_e = 10000/2\pi$ .  $u_e$  può essere calcolato ponendo  $f_2(x_e, u_e) = 0$ :

$$-\beta x_{2e} - \mu_d m_i e_i^2 x_{2e}^2 + u_e = 0 \implies u_e \approx 1110.7222$$

Si procede a questo punto calcolando le matrici del sistema linearizzato:

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t)$$

$$A = \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m_i e_i^2 + I_e} - \frac{\mu_d m_i e_i^2}{m_i e_i^2 + I_e} 2\omega_e \end{bmatrix} \quad B = \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}$$

$$C = \left. \frac{\partial h(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = [0 \quad 1] \quad D = \left. \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = [0]$$

## 2 Funzione di trasferimento

Per calcolare la funzione di trasferimento, si utilizza l'espressione

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

dove

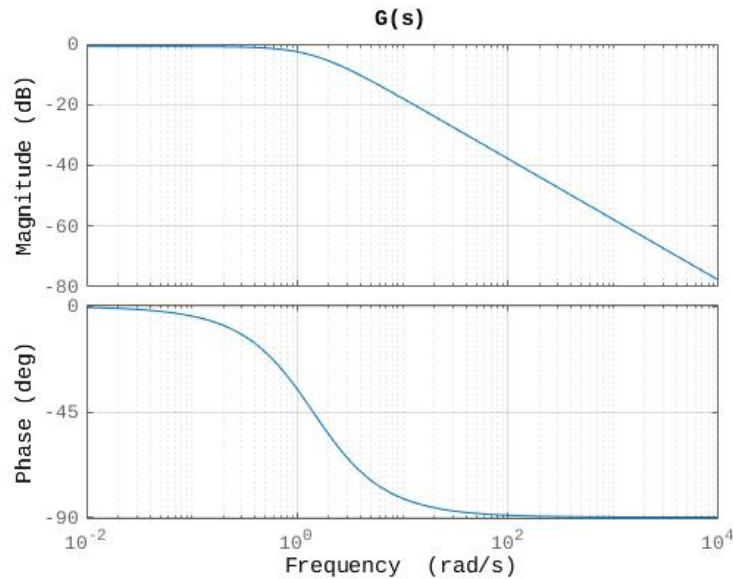
$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \begin{bmatrix} 1/s & \frac{1}{s(s+1.4139)} \\ 0 & \frac{1}{s+1.4139} \end{bmatrix}$$

Ottenendo quindi la funzione di trasferimento:

$$G(s) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/s & \frac{1}{s(s+1.4139)} \\ 0 & \frac{1}{s+1.4139} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2903 \end{bmatrix} + 0 = \frac{1.2903}{s + 1.4139}$$

Avendo un polo in  $s = -1.4139$ , è possibile constatare con certezza che il sistema sia BIBO stabile.

Di seguito il diagramma di Bode della funzione di trasferimento, ricavato tramite MATLAB.



### 3 Specifiche del regolatore

(3.1) Per ottenere un errore a regime nullo con riferimento a gradino  $w(t) = W1(t)$ ,  $L(s)$  deve presentare un polo nell'origine. Avendo un unico polo reale negativo, possiamo introdurre a questo scopo un regolatore statico con un polo nell'origine:  $R_s(s) = \frac{1}{s}$  ricavandone quindi  $G_e(s)$ :

$$G_e(s) = R_s(s)G(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{1.2903}{s + 1.4139} \right)$$

(3.2) Come si può notare, il sistema esteso rispetta le specifiche iniziali sul margine di fase ( $M_f \geq 45^\circ$ )

(3.3) La sovraelongazione percentuale massima accettabile è pari all'1%. Da questo ricaviamo un nuovo vincolo sul margine di fase, sapendo che  $M_f = \xi \cdot 100$

$$\xi^* = \sqrt{\frac{(\ln(0.01))^2}{\pi^2 + (\ln(0.01))^2}} = 0.8261$$

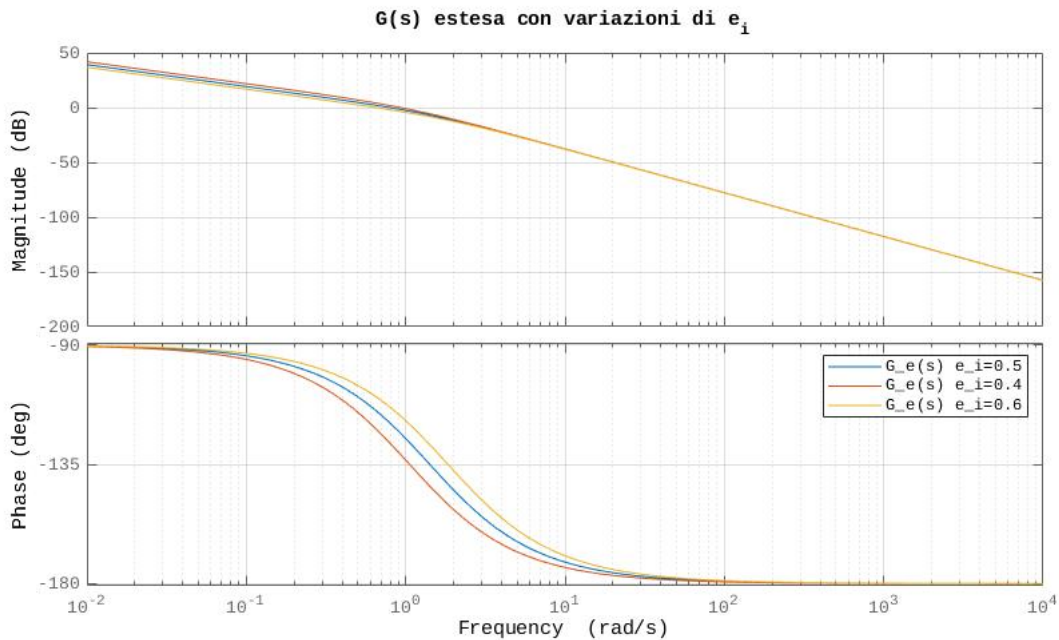
$$M_f = \xi \cdot 100 \implies M_{f,min}^* = 0.8261 \cdot 100 = 82.61 \implies \arg(L(j\omega_c)) \geq -97.39^\circ$$

Il nuovo vincolo sul margine di fase introduce quindi un minimo non rispettato dal sistema esteso.

(3.4) Il tempo di assestamento all'1% deve essere mantenuto al di sotto dei 6 secondi. Posso quindi ottenere  $\omega_{c,min}$

$$T_{a,1} = 6 \implies \omega_c \geq \frac{460}{6 \cdot 82.61} \implies \omega_c \geq 0.9281$$

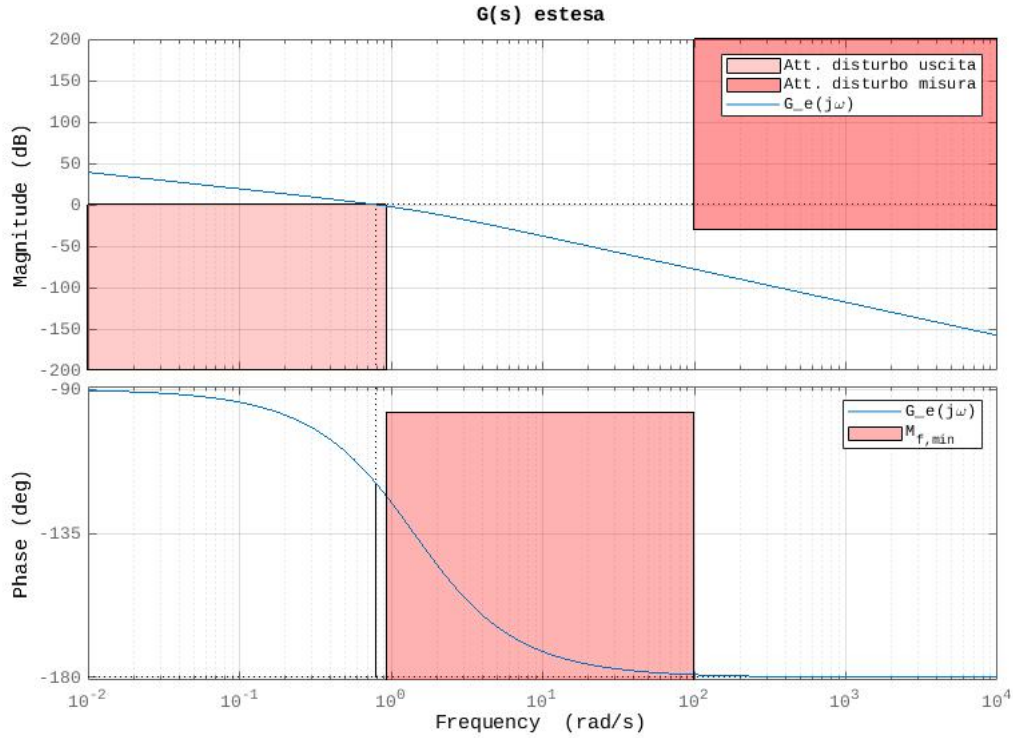
(3.5) Considerando variazioni del parametro  $e_i$  di  $\pm 0.1$ , si ottiene il seguente diagramma:



## 4 Disturbo di misura

Il disturbo di misura presenta componenti frequenziali maggiori di 100 rad/s e deve essere abbattuto di almeno 30 volte. Di conseguenza a frequenze  $\omega \geq 100 \text{ rad/s}$ , il grafico di  $L(j\omega)$  non potrà avere ampiezze maggiori di  $-30\text{dB}$ .

Di seguito il diagramma di Bode del sistema esteso con i vincoli ottenuti dalle specifiche.



Come si può notare, sia le specifiche sull'ampiezza che quelle sul margine di fase non vengono rispettate. In particolare notiamo che, se anche  $\omega_c$  si trovasse nel range  $[\omega_{c,min}, \omega_{c,max}]$ , le specifiche sul margine di fase non sarebbero rispettate. Possiamo ricondurci dunque ad uno scenario di tipo B.

## Sintesi del regolatore dinamico

Poiché ci interessa un anticipo di fase minore di  $90^\circ$ , per soddisfare le specifiche è sufficiente introdurre una rete anticipatrice con uno zero:

$$R_d(s) = \mu_d \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

Procedendo in maniera empirica abbiamo scelto  $\omega_c^* = 1.2281 \text{ rad/s}$ , valutando poi argomento ed ampiezza di  $G_e$  in  $\omega_c^*$ :

$$\arg(G_e(j\omega_c^*)) = -130.9762^\circ \quad |G_e(j\omega_c^*)|_{dB} = -5.0201\text{dB}$$

A questo punto possiamo calcolare  $\phi^*$  ed  $M^*$ :

$$\varphi_c^* = (M_f^* \min + 5) - 180 - (-\arg(G_e(j\omega_c^*))) = 38.5862 \quad M^* = 10^{\frac{-|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} = 1.7824$$

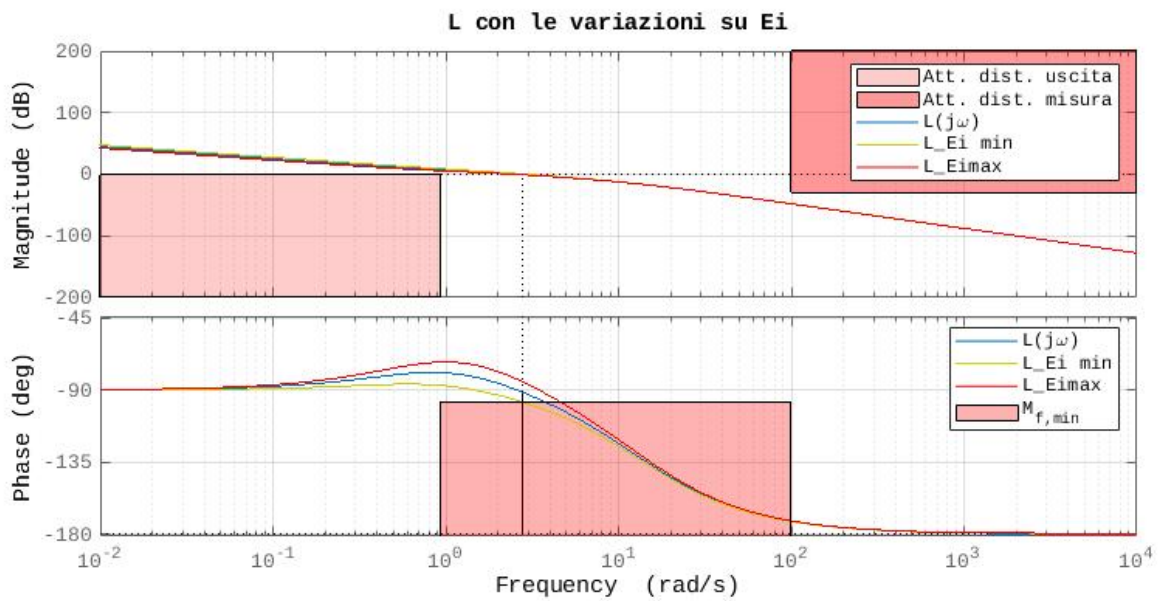
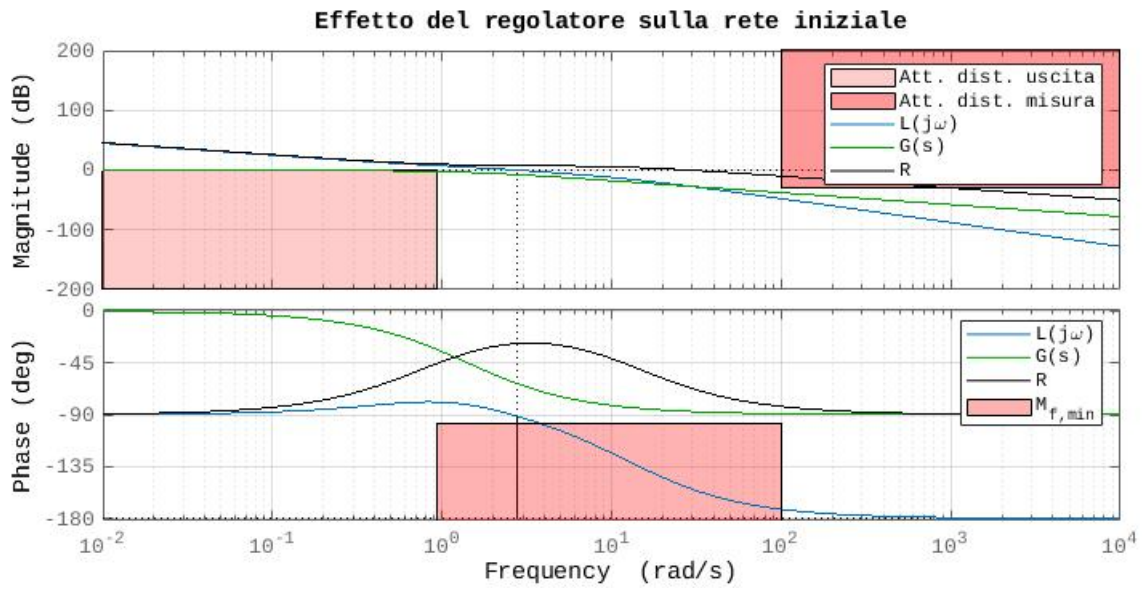
Ottenendo infine i valori di  $\tau$  ed  $\alpha\tau$  per determinare l'espressione di  $R_d(s)$

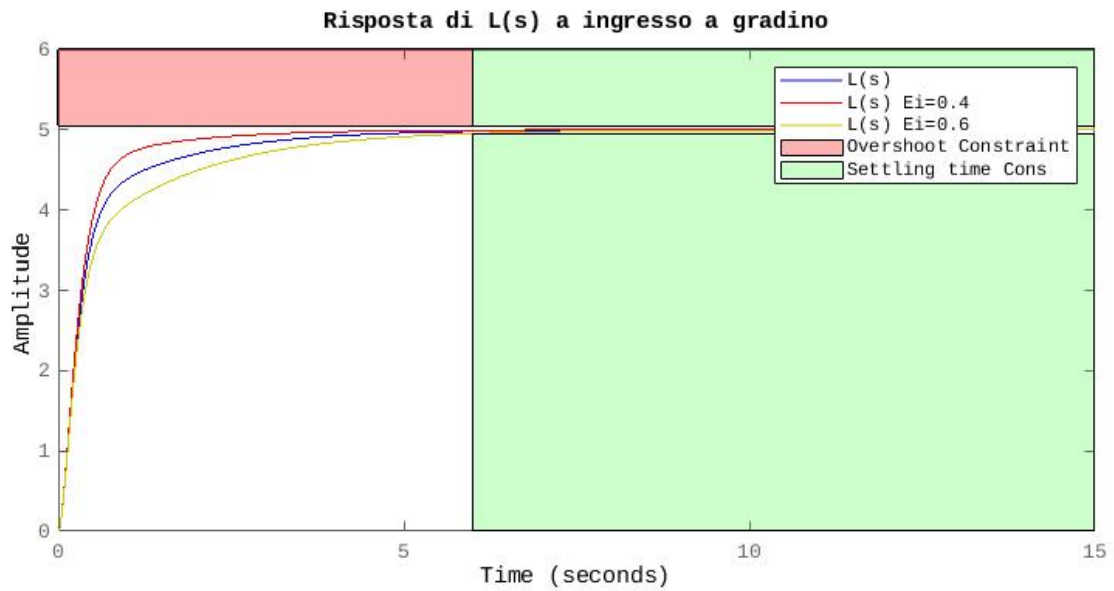
$$\tau = \frac{M^* - \cos(\varphi^*)}{\omega_c^* \cdot \sin(\varphi^*)} = 1.2087 \quad \alpha\tau = \frac{\cos(\varphi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin(\varphi^*)} = 0.1064$$

$$R_d(s) = 1.95 \frac{1 + 1.2087s}{1 + 0.1064s}$$

L'espressione finale di  $L(s)$  sarà quindi:

$$L(s) = R_d(s)G_e(s) = 1.95 \frac{1 + 1.2087s}{1 + 0.1064s} \frac{1}{s} \left( \frac{1.2903}{s + 1.4139} \right) = \frac{28.58(s + 0.8273)}{s(s + 9.4)(s + 1.4139)}$$





## 5 Test del regolatore

Mediante Simulink è possibile testare il regolatore sul modello non lineare (in allegato il file simulink). Il modello è stato testato fornendo un ingresso a gradino di ampiezza  $W = 5$  al tempo  $t = 1$

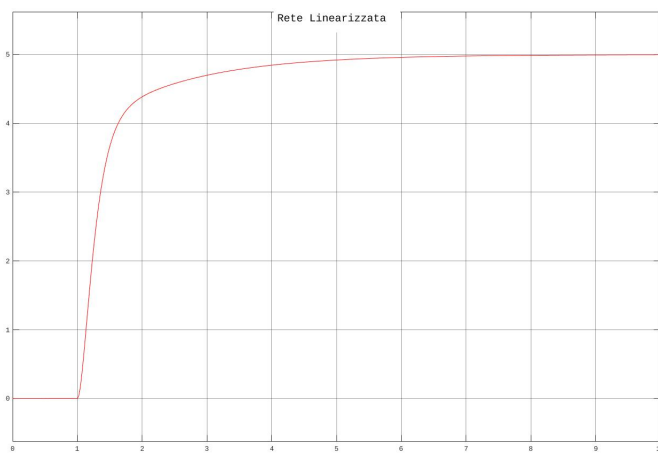


Figura 1: Rete linearizzata

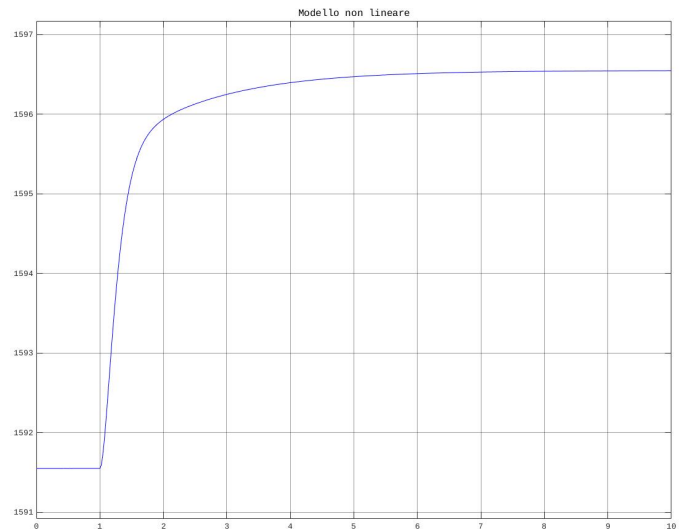


Figura 2: Modello non lineare

Come si può osservare, la rete non lineare risponde ai test riproducendo quasi perfettamente il comportamento della rete lineare.

## 6 Punti opzionali

**(6.2)** Testando il modello non lineare con condizioni iniziali nell'intorno del punto di equilibrio, il sistema risponde nel modo atteso. Impostando invece velocità iniziali molto elevate (in particolare con  $\omega_0 > 7 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ ), il sistema inizia a rispondere in modo anomalo, producendo un'uscita di questo tipo:



In questo caso una risposta anomala era in parte prevedibile per via della velocità iniziale estremamente elevata.

**(6.3)** Nel testare il sistema con variazioni del valore di riferimento  $W$ , abbiamo riscontrato una situazione simile a quella del punto precedente. Nonostante il sistema non presenti anomalie particolari anche per riferimenti  $W$  molto alti, il vincolo sul tempo di assestamento all'1% (6 secondi) cessa di essere soddisfatto per riferimenti  $W > 1400$

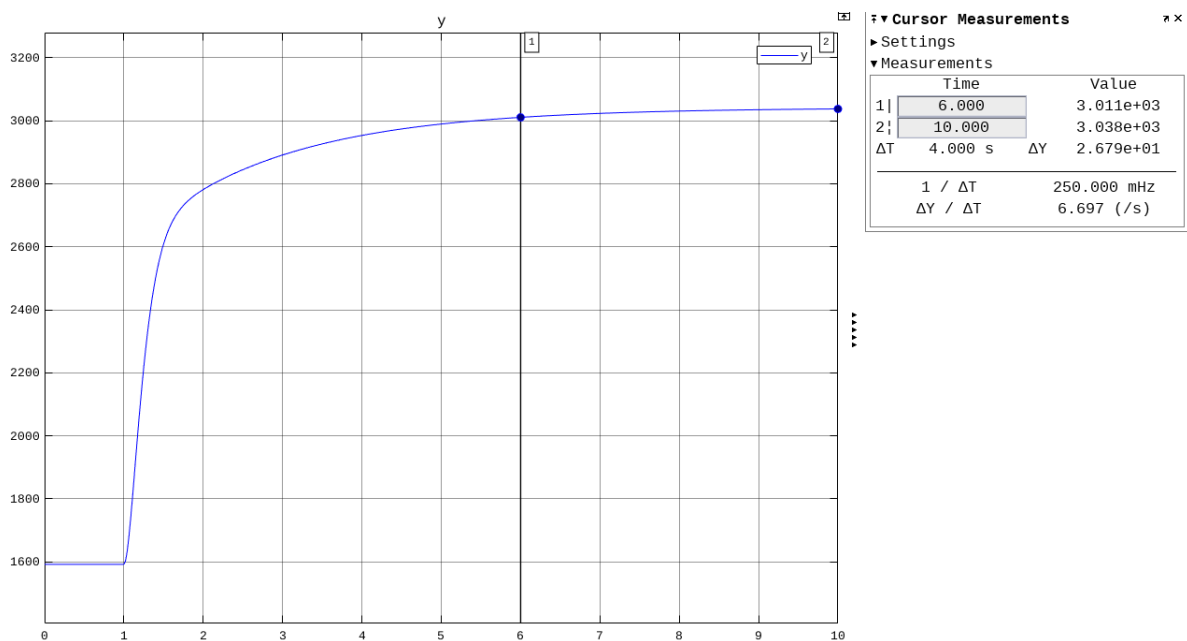


Figura 3: Risposta del sistema ad un riferimento  $W = 1450$