



# Física Experimental 2

## - Circuitos RLC en Régimen - Permanente

Resonancia y Factor de Calidad  
Inductancias Reales

Integrantes:

- Gulnara Nocetti
- Pedro Escudero

### 1. Introducción

En esta experiencia se busca profundizar el comportamiento de circuitos en régimen, en particular en los Circuitos RLC. Dichos circuitos, presentan un fenómeno llamado *resonancia*, el cual posee ciertas características que son de interés al analizar, llevando a aplicaciones tanto en las telecomunicaciones, filtrado de señales, entre otros.

#### 1.1. Circuito RLC - Fasores

Considerese un circuito formado por una fuente de voltaje sinusoidal, una resistencia  $R$ , condensador  $C$  y un inductor  $L$  en serie, como se ve en la Figura ???. Notar que, como los elementos  $R$  y  $C$ , la inductancia ideal  $L$ , posee una ecuación representativa de la forma:

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1)$$

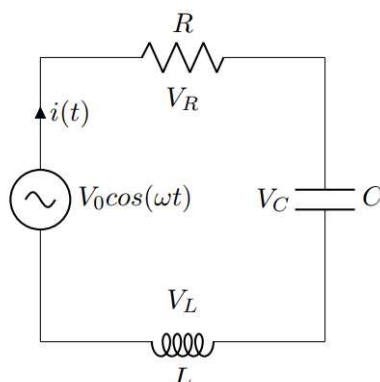


Figura 1: Circuito RLC - En Régimen Sinusoidal

Al tener en mente ??, se llega a una ecuación diferencial que describe al circuito para todo tiempo:

$$V_0 \cos(\omega t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad (2)$$

Al poseer la derivada segunda de la carga ( mediante el termino asociado al inductor), la ecuación es 2<sup>do</sup> orden, lineal a coeficientes constantes. Como es de interés el comportamiento en régimen, el análisis mediante fasores brinda la herramienta para trabajar de forma algebraica ecuaciones diferenciales, y simplificar el estudio.

Recordando la expresión, por ejemplo de la corriente en fasores, se define el desfase  $\Phi$  respecto a la tensión de la fuente, con lo cual se tiene  $I_0$  la corriente en fasores del circuito, como:

$$I_0 = |I_0| e^{j\phi} \quad (3)$$

$$i(t) = \text{Re}[I_0 e^{j\omega t}] \quad (4)$$

Definiendo entonces, los fasores de cada componente del circuito, se obtiene:

$$V_R = I_0 R \quad (5)$$

$$V_C = I_0 * \frac{1}{j\omega C} \quad (6)$$

$$V_L = I_0 L j\omega \quad (7)$$

Notese, que para el caso del inductor, la tensión en bornes del mismo siempre esta adelantada  $\frac{\pi}{2}$  respecto al fador  $I_0$ . En cambio el condensador se atrasa  $\frac{\pi}{2}$  y  $V_R$  esta en fase con  $I_0$ , lo cual se puede notar en la Figura ?? siguiente, para generar ideas intuitivas en el comportamiento de los Circuitos *RLC*.

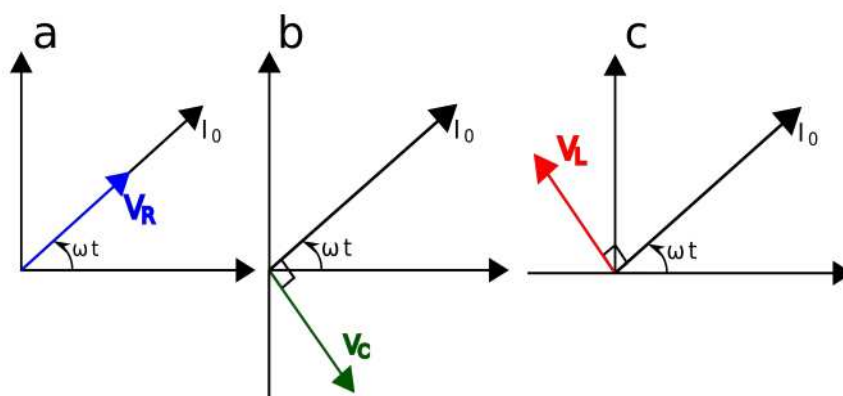


Figura 2: Diagrama de Fasores  $V_R$ ,  $V_C$  y  $V_L$  de izquierda a derecha - Relación frente al Fador  $I_0$

Es de interés notar, que a medida que aproximo las bajas frecuencias, la tensión en bornes del  $C$  crece, mientras que  $L$  decrece(ver ?? y ??). Para  $\omega \gg 1$ , ocurre el efecto contrario,  $|V_L|$  sube y  $|V_C|$  baja.



3.1

Esta observación es importante, pues como sucede en los circuitos  $RLC$ , que el comportamiento de  $C$  implementa un filtro, existe la posibilidad que un  $RLC$  de igual modo, pero de comportamiento distinto por poseer una inductancia.

Para ver dicho efecto, vemos la expresión de la corriente/tensión que describe en régimen en el circuito:

$$V_0 = I_0 \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \quad (8)$$

Obteniendo el modulo y fase ( $\phi$ ), se obtienen las siguientes expresiones:

$$|I_0| = \frac{|V_0|}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (9)$$

$$\phi = \text{Arctg} \left( \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R} \right) \quad (10)$$

Notar que en la expresiones ?? y ??, la corriente es máxima en la frecuencia,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11)$$

donde la corriente se encuentra en fase con la fuente. A su vez, la tensión por  $R$  esta en fase con  $I_0$ , y como  $I_0$  es máxima,  $V_R$  lo es también. Para que se cumpla esto, la suma algebraica de tensiones (Kirchoff) de  $V_L$  y  $V_C$  debe de dar 0, con lo cual, ambas son opuestas, teniendo el mismo modulo pero desfasados  $\pi$  entre ellos.

De variar relativamente poco de dicha frecuencia, la corriente disminuye rápidamente, con lo cual, es razonable pensar el Circuito  $RLC$  como un filtro pasa-banda, es decir, quedarse con un rango intermedio de frecuencias. Notar que la **frecuencia de resonancia**, como se le denomina a  $\omega_0$ , no depende de la resistencia del circuito.

## 1.2. Factor de Calidad - $Q_0$

Al estar en la frecuencia de resonancia siendo alimentado por una fuente sinusoidal en régimen, como se vio anteriormente, la tensión en bornes de  $R$  es máxima. Sin embargo, de no tener la fuente  $V_0$ , es posible llegar a tener  $V_R$ , tomando el inductor  $L$  como generador de ondas, pues al interceptar un campo magnético, se genera una corriente a través de  $L$ .

La idea es "*sintonizar*" la frecuencia  $\omega_0$  (puede llegar a ser variable) del circuito, y recibir la onda deseada, con lo cual hay cierto **factor de calidad** en la señal que se quiere, en este caso la tension en  $R$ .

Se define el factor de calidad en resonancia como  $Q$ , planteando la idea de que tanto se disipa frente a lo que se recibe, **factor de calidad**:

$$Q_0 = 2\pi \frac{\overline{P}_a}{\overline{P}_d} \quad (12)$$

Donde  $\overline{P}_a$  es la potencia media almacenada en el circuito y  $\overline{P}_d$  es la potencia media disipada por el mismo. Para calcular  $\overline{P}_a$ , se calcula en un periodo la energía almacenada en  $C$  en forma de campo eléctrico, y en  $L$  en forma de campo magnético, obteniendo:

$$\overline{P}_a = \frac{\omega}{8\pi} \left( L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) i_0^2 \quad (13)$$

De manera similar calculamos la potencia media disipada en un periodo, siendo la disipada por  $R$ :

4.1

$$P_d = V_R i(t) = R i_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) \Rightarrow \overline{P}_d = \frac{1}{2} R i_0^2 \quad (14)$$

Se ve, entonces, el factor de calidad en el caso de estar en la frecuencia de resonancia, siendo:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2} \frac{L + \frac{1}{\omega_0^2 C}}{R} = \omega_0 \frac{L}{R} \quad (15)$$

4.2

Cuanto mayor la inductancia y menor la resistencia el factor de calidad aumenta, lo cual posee cierto sentido, a menor  $R$ , menos potencia disipada y menos "deterioro" de la señal recibida.

Para seguir con esta idea, es de interés analizar la potencia disipada  $\overline{P}_d$ , pues a partir de ella podemos definir un criterio en el cual es aceptable mirar a la señal en términos de potencia. A continuación en la Figura ??, se muestra  $\overline{P}_d$  para distintos valores de  $R$ .

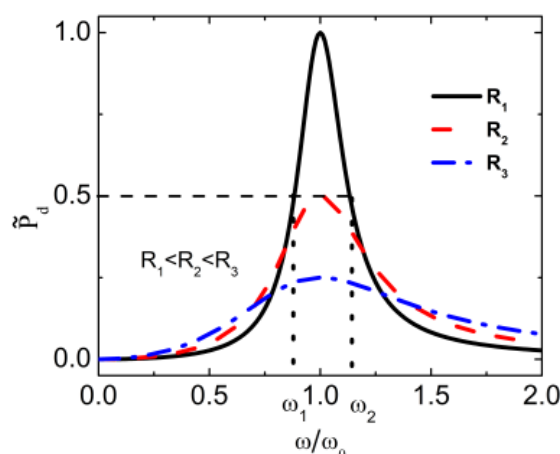


Figura 3: Curvas de la Potencia Disipada en Frecuencia para Diferentes Valores de  $R$



Notar, a medida que se incrementa el valor de  $R$ , el pico es menos angosto, pero a su vez decae mas suavemente. La idea es definir un  $\Delta\omega$ , para el cual la potencia disipada es la mitad del pico, siendo útil para definir un ancho de banda referido al pico de potencia. Entonces, se define, como:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad (16)$$

Mientras menor el valor de  $\Delta\omega$ , mayor factor de calidad, pues es posible reescribir la expresión vista anteriormente de  $Q_0$ , como:

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (17)$$

Existe un compromiso en filtrar frecuencias cercanas a  $\omega_0$ , o tener mayor ancho de banda al ver la señal.

### 1.3. Inductor Real - $R_L$

Una bobina no ideal posee efectos resistivos debido a armado, y no idealidades del cable utilizado(cable enrollado no ideal,efectos de las corrientes parásitas del núcleo de la bobina,etc). En el ultimo caso mencionado de un transformador con núcleo, la resistencia asociada a este efecto es mucho mas grande si se compara a la resistencia del bobinado. Para el caso de esta practica nos interesa calcular esta resistencia asociada al transformador (que se tomara como inductor), y comparar las mencionadas resistencias. La resistencia total por estos efectos la llamaremos  $R_L$ .

Es , a su vez, de interés saber si  $R_L$  es comparable en magnitud a  $R$  para ver si es o no despreciable frente a  $R$ . La idea es, que si  $R_L$  es grande, la tensión en bornes del inductor no se adelante  $\frac{\pi}{2}$  frente a  $I_0$ , modificando los resultados obtenidos anteriormente sobre resonancia. Si bien el efecto se produce, las expresiones se ven modificadas, y las relaciones que se cumplen también.

Si se considera resonancia, se puede calcular  $R_L$ . Midiendo la amplitud  $V_R$  en (cuando está en fase con  $V_0$ ), vale:

$$R_L = \left( \frac{V_0}{V_R} - 1 \right) R \quad (18)$$

$$R_T = R_L + R = \frac{V_0}{V_R} R \quad (19)$$

## 2. Metodología

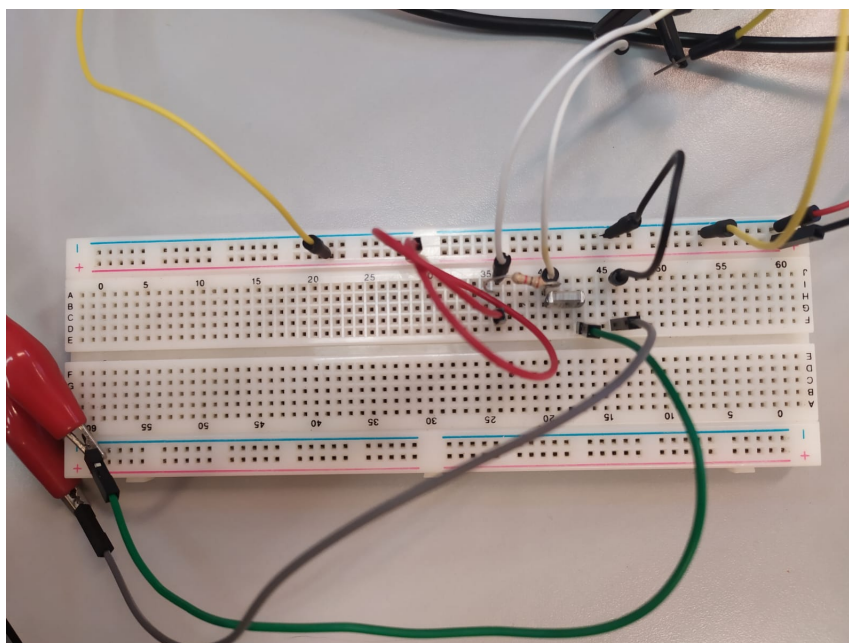


Figura 4: Setup Experimental - Protoboard con el Circuito Implementado

Para llevar a cabo ésta experiencia, se armó un circuito RLC en serie en la protoboard como se observa en la figura ???. El circuito en cuestión es alimentado por un generador de ondas conectado al circuito mediante cables de pinza cocodrilo.

Con el fin de poder realizar las mediciones pertinentes al circuito, se conecta un osciloscopio mediante las puntas de medición, siendo en su punta un gancho, conectando en particular en CH - 1 el generador de ondas (entrada al circuito) y en CH - 2 la caída de tensión en bornes de  $R$ . Es necesario a su vez, conectar a la misma referencia (tierra), las puntas de medición, pues el osciloscopio y el generador poseen la misma tierra (de la red eléctrica).

Los valores teóricos que se saben de las componentes son:

- $R = (1000 \pm 50)\Omega$
- $C = (100 \pm 5)nF$

Las incertidumbres de  $R$  y  $C$  corresponden al 5% de los valores teóricos respectivamente.

Se procede con cuidado de no alimentar con ondas de muy baja amplitud (mediante el generador de ondas) A pesar de ser el osciloscopio preciso, bajas amplitudes se pueden ver sumergidas en el ruido intrínseco de la señal. Para el caso donde las divisiones son  $> 100mV$ :

$$\Delta V = 0,03 * Lectura + 0,2 * Escala(División) + 100mV \quad (20)$$

Destaquemos que la incertidumbre asociada al tiempo (eje horizontal), es irrelevante para esta práctica, pues es muy pequeña (del orden de  $10^{-6}$ ).

Teniendo en cuenta las anteriores nociones, se encontró la frecuencia de resonancia variando los valores del generador de frecuencias hasta que ambas ondas estuviesen en fase y se midió una vez encontrada, su incertidumbre. Habiendo hallado esto, se calculó el valor de la inductancia  $L$  y su incertidumbre  $\Delta_L$  a partir de la ecuación ??:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \quad (21)$$

$$\Delta_L = \frac{\Delta_C}{\omega_0^2 C^2} \quad (22)$$

una vez obtenido este es posible calcular el valor de  $V_L$  y por ende también el valor de  $V_R$ .

Se puede determinar  $R_L$  a partir de la ecuación ?? y por el principio de propagación de la incertidumbre tenemos que:

$$\Delta_{RL} = \sqrt{\left(\frac{R}{V_r}\right)^2 \Delta_{V_0}^2 + \left(\frac{V_0}{V_r^2}\right)^2 \Delta_{V_r}^2 + \left(\frac{V_0}{V_r} - 1\right)^2 \Delta_{V_r}^2} \quad (23)$$

A su vez tenemos los datos necesarios determinar el valor de la resistencia total  $R_{TOT} = R_L + R$  y su incertidumbre:

$$\Delta_{R_{TOT}} = \sqrt{\Delta_{R_L}^2 + \Delta_R^2} \quad (24)$$

Luego de esto, se midió el valor de  $V_R$  para diversas frecuencias y con estos datos se calculó  $P_D = \frac{V_R^2}{R}$  (ver ecuación ??) y se graficó dicha potencia en función de la frecuencia  $\omega$ .

Finalmente, se calculó el factor de calidad  $Q_0$  del circuito, usando dos métodos diferentes, para luego comparar los resultados y ver cuál es el mas indicado( evaluando incertidumbres).

Si llamamos  $Q_0^1$  y  $Q_0^2$  a los valores de factor de calidad obtenidos a partir de las expresiones ?? y ?? respectivamente, entonces las incertidumbres asociadas a cada uno de ellos se calculan como:

$$\Delta_{Q_0^1} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 \Delta_L}{R_{TOT}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0 L \Delta_{R_{TOT}}}{(R_{TOT})^2}\right)^2} \quad (25)$$

$$\Delta_{Q_0^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 \Delta_{\omega_2}}{(\omega_2 - \omega_1)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0 \Delta_{\omega_1}}{(\omega_2 - \omega_1)^2}\right)^2} \quad (26)$$

### 3. Tratamiento de datos

#### 3.1. Determinación $\omega_0$ , $L$ y $R_L$

Variando la frecuencia de la fuente hasta que el desfase  $V_R$  y  $V_O$  fuera nulo llegamos al siguiente valor de frecuencia de resonancia experimental  $f_{0EXP} = 419,5\text{Hz}$ , en esta instancia también se observó que el valor de  $V_R$  era máximo.

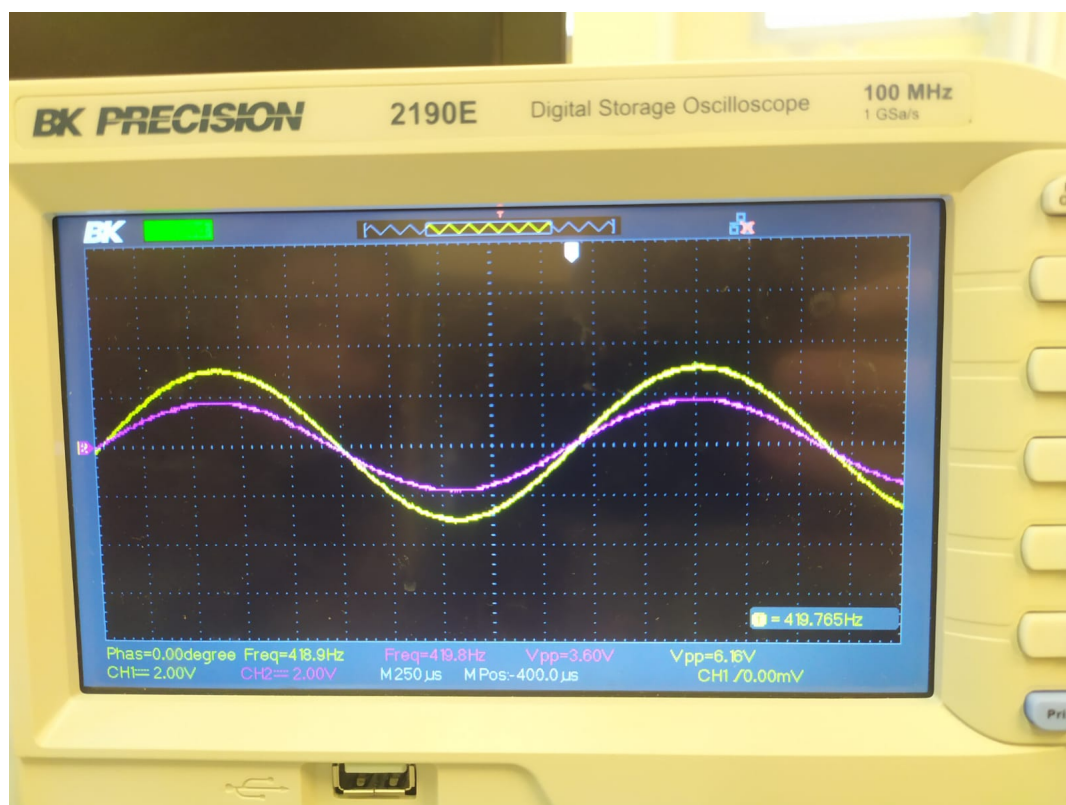


Figura 5: Pantalla del osciloscopio en  $f_{0EXP}$

El valor de la frecuencia angular ( $\omega_0$ ) se calculó multiplicando el dato mencionado previamente por  $2\pi$ .

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2637,78 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Luego, a partir de las ecuaciones ?? y ?? se calculó el valor de la inductancia  $L$  del inductor con su incertidumbre.

$$L = (1,43 \pm 0,06)\text{H}$$



Posteriormente, basándonos en las ecuaciones ?? y ?? hallamos el valor de  $R_L$

$$R_L = (696 \pm 23)\Omega$$

Finalmente hallamos la resistencia total del circuito que queda determinada como:

$$R_{TOT} = (1696 \pm 55)\Omega$$

### 3.2. Gráficas potencia disipada y defasaje en función de $\omega$

Para cada uno de los valores medidos de la amplitud del voltaje en la resistencia  $V_R$  se pudieron obtener los datos de la potencia disipada en la misma ( $P_D = \frac{V_R^2}{R}$ ) en función de  $\omega$ .

A partir de los valores obtenidos se realizó la gráfica de  $P_D(\omega)$  con su curva teórica correspondiente a la ecuación ??.

Se calculo el valor de la incertidumbre asociados a los datos de potencia con propagacion de incertidumbres, obteniendo:

$$\Delta_{Pd} = \sqrt{r \left(2 \frac{V_r}{R}\right)^2 \Delta_V^2 r + \left(\frac{V_r^2}{R^2}\right)^2 \Delta_R^2}$$

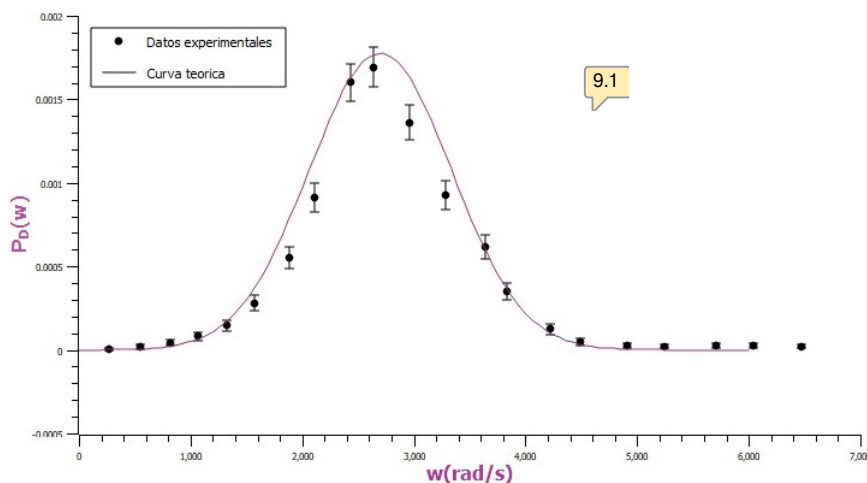


Figura 6: Respuesta en Frecuencia -  $\overline{P_d}$  en función de  $\omega$

Para las mismas frecuencias, se registraron simultáneamente los datos del desfase  $\phi_R$  y se realizó la gráfica de éstos en función de  $\omega$  que se observa en la figura ?? .

En éste caso, los datos teóricos cumplen la relación descripta por la ecuación ??.

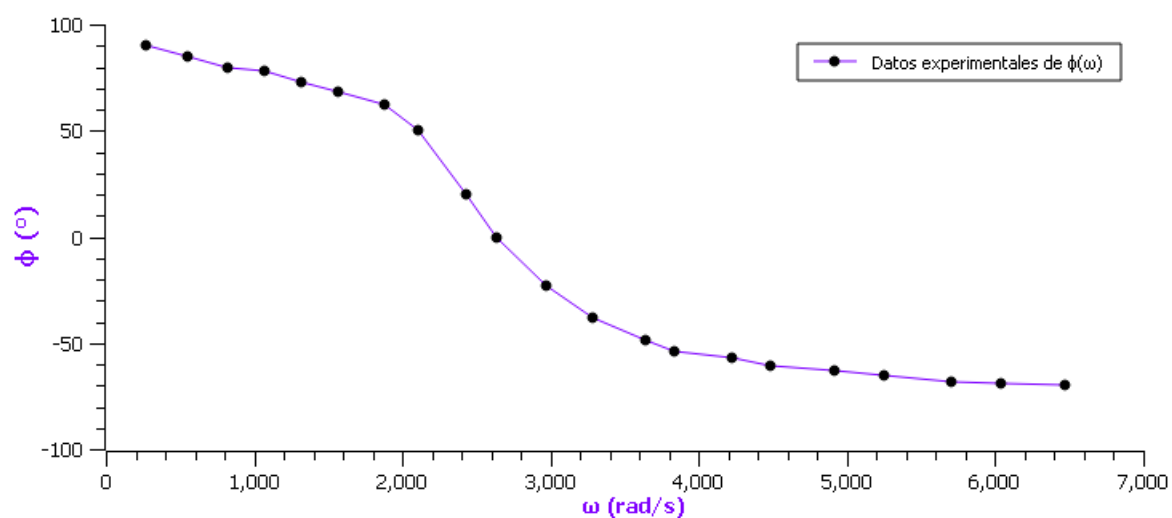


Figura 7: Curva de  $\phi_R$  (Desfasaje de  $V_R$  respecto a la fuente) para diferentes valores de  $\omega$

10.1

### 3.3. Cálculo de $Q$

Para hallar el factor de calidad fueron utilizados dos métodos distintos, primero a partir de la ecuación ?? obtenemos un resultado que llamaremos  $Q_0^1$ , por otra parte a partir de la ?? y midiendo el valor de  $w_2 - w_1$  ( $\Delta w$ ) de la gráfica (como se observa en la figura ??), obtenemos como resultado el valor de  $Q_0^2$ .

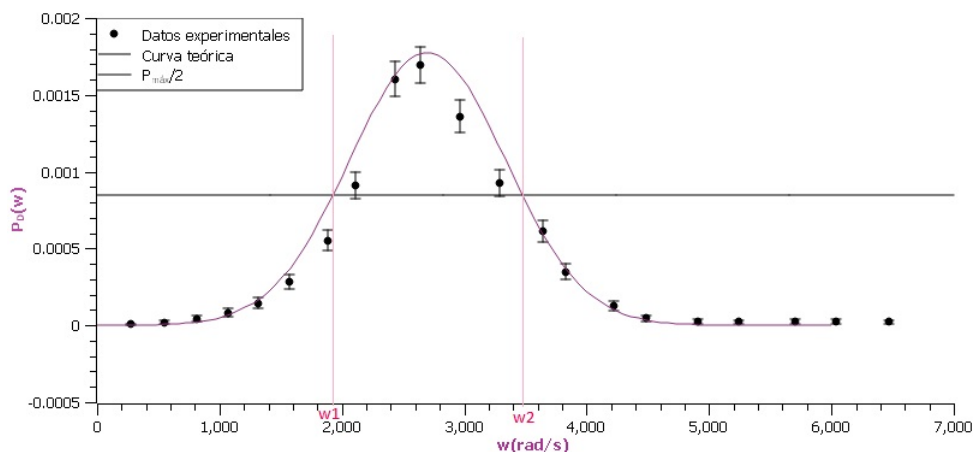


Figura 8: Obtención de medidas de  $\omega_1$  y  $\omega_2$

$$w_2 - w_1 = \Delta w = 1555 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad 11.1$$

$$Q_0^1 = (2,3 \pm 0,3) \quad 11.2$$

$$Q_0^2 = 1,8$$

Se observa que el segundo método para obtener el valor de  $Q_0$  es mas confiable debido a que solo depende de la frecuencia cuya incertidumbre es despreciable, aunque cabe destacar que el valor de  $\Delta w$  puede tener una incertidumbre asociada al error debido a la forma en la que se mide.



---

## 4. Conclusiones

Se logro profundizar en el uso del osciloscopio y el funcionamiento de los circuitos RLC. Se destaca la diferencia entre los valores obtenidos teóricamente y los brindados por los fabricantes de piezas de los obtenidos de manera práctica. La diferencia entre los valores obtenidos y la curva teórica en la Figura ??, aunque es pequeña y los valores se ajustan bastante bien, puede atribuirse a la fluctuación del voltaje de la fuente, que pudo observarse durante el experimento que no se mantuvo constante.

El valor de la inductancia obtenido es satisfactorio ya que es acorde al medido con el multímetro.

En cuanto a los valores obtenidos para el factor de calidad  $Q_0$ , comparando las incertidumbres asociadas en cada caso, se llegó a la conclusión de que el segundo método es más confiable aunque ambos valores son similares (es coherente).



## 5. Anexo

$V/div(mV)$	$f(Hz)$	$ V_R (V)$	$P_D(W)$	$\Phi_R(^{\circ})$
100	43	0.105	5.51e-06	90
100	88	0.2	2.0e-05	85
100	130	0.29	4.205e-05	80
100	170	0.405	8.201e-05	78
200	210	0.54	0.0001458	73
200	250	0.75	0.00028125	68
200	300	1.05	0.00055125	62
500	336	1.35	0.00091125	50
500	387	1.79	0.00160205	20
500	420	1.84	0.0016928	0
500	472	1.65	0.00136125	-23
500	523	1.36	0.0009248	-38.4
500	580	1.11	0.00061605	-49
500	610	1	0.00035	-54
500	672	0.85	0.000126125	-57
500	714	0.75	4.8125e-05	-61
500	782	0.69	2.5805e-05	-63
500	835	0.69	2.178e-05	-65
500	908	0.55	2.5125e-05	-68
500	961	0.52	2.352e-05	-69
500	1030	0.47	2.2245e-05	-70



---

## 6. Bibliografía

- Práctica 4 - Circuitos RLC en régimen permanente, EVA Fing. [Link](#).
- Circuito RLC, Wikipedia. [Link](#).

# Índice de comentarios

---

- 2.1      revisar las referencias de figuras y ecuaciones
- 3.1      RC
- 4.1      No es necesario hacer todas las deducciones de las ecuaciones, solo poner el resultado
- 4.2      Aquí aclarar que  $R$  es  $R_{total} = R + R_L$
- 8.1      Qué representa cada color?
- 9.1      escribir la expresión para la curva teórica en la introducción
- 10.1     Faltan incertidumbres y curva teórica
- 11.1     estos valores son a partir de la curva teórica o la experimental?
- 11.2     coinciden los valores?