Numerikus Módszerek I. C
2. zárthelyi

2021.05.03.

1. Az $f(x) = 2 + \frac{\log_3(x)}{2} - x = 0$ egyenlet $[1,3]$ intervallumbeli megoldásának közelítésére az
$$x_{k+1} = 2 + \frac{\log_3(x_k)}{2}$$
iterációt használjuk.
   (a) Bizonyítsuk az iterációs sorozat konvergenciáját az intervallumon!
   (b) Írjuk fel a hibabecslést!

(6+2 pont)

2. Tekintsük a következő nemlineáris egyenletet:
$$f(x) = \ln(x) + \sqrt{x} - 2 = 0$$
   (a) Igazoljuk, hogy az $[1,3]$ intervallum tartalmaz gyököt!
   (b) Írjuk fel az f függvényre a Newton-módszert!
   (c) Lássuk be, hogy a Newton-módszer monoton konvergenciatételének feltételei a megadott intervallumon teljesülnek! Hogyan kell megválasztanunk az x_0 kezdőpontot?

(2+2+4 pont)

3. Tekintsük az $f(x) = 32 \cdot \log_2(x+3) - x$ függvényt és a $-2, -1, 1, 5, 13$ alappontokat!
   (a) Írjuk fel az f-et a megadott alappontokon interpoláló polinom Newton-alakját (a polinomot nem kell algebrai alakra hozni)!

(b) Tegyük fel, hogy ugyanezt a függvényt másodfokú polinommal szeretnénk interpolálni a $[-2, 13]$ intervallumon. Hogyan kell megválasztanunk az alappontokat, ha azt szeretnénk, hogy az interpolációs polinom intervallumra vonatkozó hibabecslése optimális legyen? Becsüljük is a hibát!

(8+6 pont)

4. Írjuk fel az (x_i, y_i) pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes és parabola egyenletét!

x_i	-2	-1	0	1
y_i	0	-2	2	2

(4+6 pont)

5. Tekintsük a következő határozott integrált:

$$\int_0^2 x \cdot 2^x \, \mathrm{d}x$$

(a) Közelítsük az integrált érintő-, trapéz- és Simpson-formulával!

(b) Becsüljük a Trapéz-formula hibáját!
Segítség: a formulák egyszerűsítéséhez használjuk az $\ln 2 < 1$ becslést.

(c) Hányszorosan összetett Trapéz-formulát kell alkalmaznunk, ha azt szeretnénk, hogy a közelítés hibája 10^{-2} alá csökkenjen?

(3+3+4 pont)