Бинарный поиск

04/02/2023

Задача

- Есть массив из 0 и 1 вида 0000000111111111....
- Нужно найти место разделения 0 / 1

Модификации задачи

Если заменить 0 и 1 на значение `f(idx) -> bool`, то можно решать мощные задачи

Например:

```
def f(idx):
    return a[idx] >= K
```

поможет найти в массиве первый элемент, больше или равный K

```
def f(idx):
    return sum(a[0:idx]) >= K
```

поможет найти место, где **префиксная сумма** больше или равна K

**Функцию можно не писать явно*

Проверка

Какая из функций с прошлого слайда требует отсортированность массива?

Тривиальный подход

Идем слева направо по массиву, и ждем, когда найдем 1

```
for i in range(len(a)):
    if f(i):
        print(i)
        break
```

Тривиальный подход

Идем слева направо по массиву, и ждем, когда найдем 1

```
for i in range(len(a)):
    if f(i):
        print(i)
        break
```

Time Limit

Тривиальный подход: оптимизация

Идем слева направо и справа налево по массиву одновременно, и ждем, когда найдем замену 0 на 1

```
for i in range(len(a)):
    if f(i) or not f(len(a) - i - 1):
        print(i)
        break
```

Тривиальный подход: оптимизация

Идем слева направо и справа налево по массиву, и ждем, когда найдем замену 0 на 1

```
for i in range(len(a)):
    if f(i) or not f(len(a) - i - 1):
        print(i)
        break
```

Мы вроде бы и ускорили алгоритм, но это все еще **Time Limit**

Алгоритм: ключевая идея

Представьте себе, что вы ищете слово **Тинькофф** в словаре.
Вы открыли словарь на случайной странице и нашли там слово **Компьютер**.

$$"\text{К}" < "\text{Т}"$$

Значит, искать нужно точно во второй половине.

Если повторить много раз и делить примерно пополам, то мы быстро окажемся в ситуации, где разделение между 0 и 1 находится в очень маленьком промежутке.

https://youtu.be/DSffdCT5Cx4

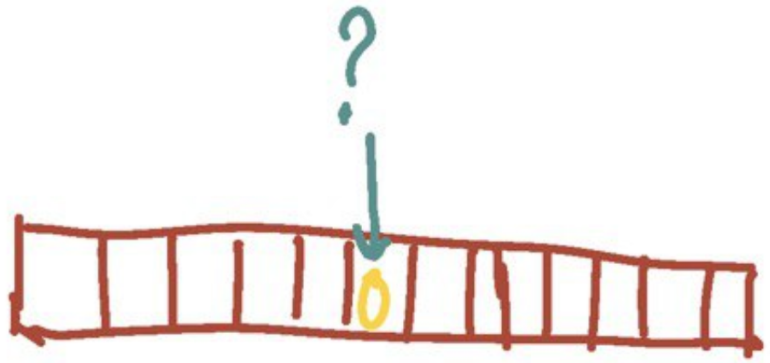
кстати, зацените cs50

Пример

Изначальный массив

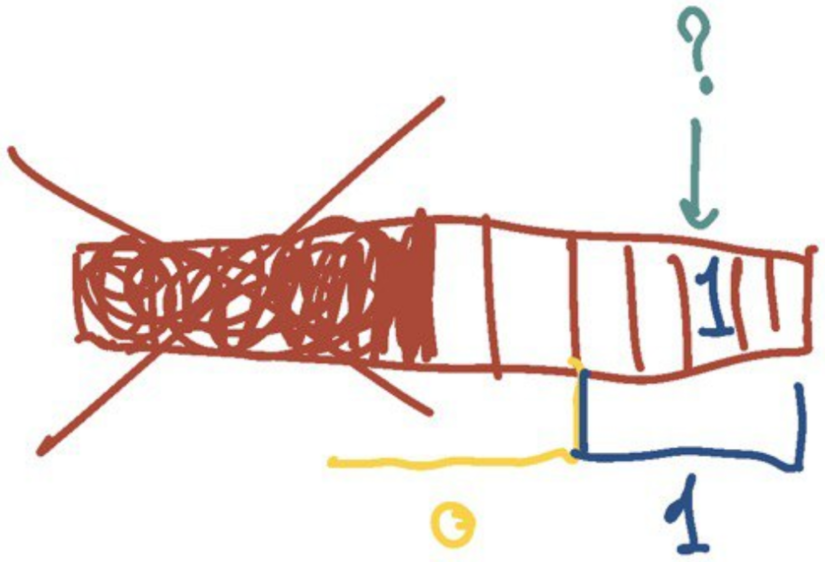
Пример

Смотрим на значение в точке



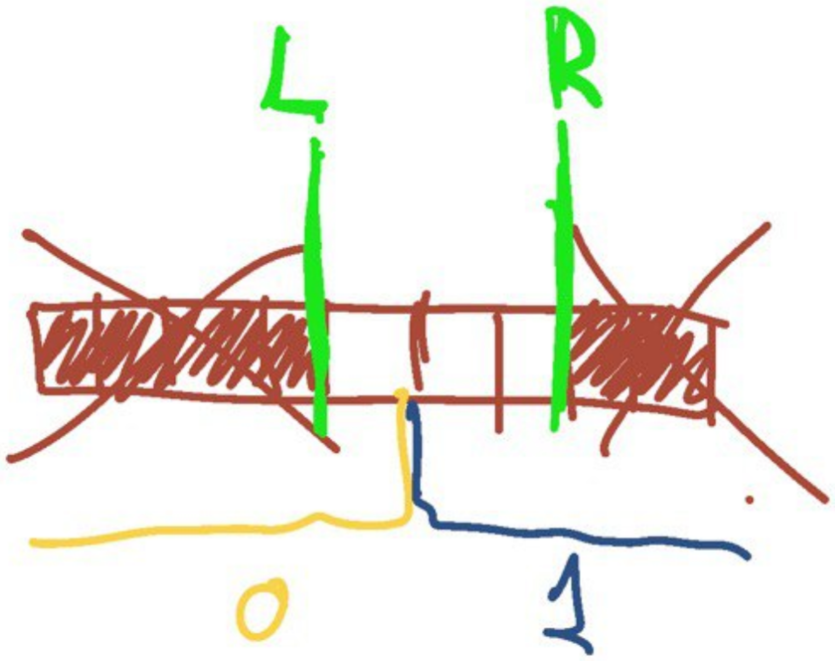
Пример

Отсекаем все, что нам больше не интересно, делаем следующий "запрос"



Пример

Получаем новую ограниченную область - ответ лежит между L и R



Псевдокод

```
l = -1
r = len(arr)
while l + 1 < r:
    m = (l + r) // 2
    if arr[m] == 0:
        l = m
    else:
        r = m

print(f'First "1" has index {r}')
```

Обе границы изначально вне массива, чтобы мы обрабатывали случай, когда массив содержит только 0 или только 1

Сравнение алгоритмов

Наверное, нам хочется сказать, что алгоритм бинарного поиска лучше тривиального подхода (*линейного поиска*).

Но что это значит? И в какой ситуации лучше?

Асимптотика

Если алгоритм имеет *асимптотическую сложность* $O(f(n))$, это значит, что его время работы имеет ограничение $T(n) \leq f(n) \cdot c$ при любых входных данных, *достаточно больших* n и **фиксированной** c.

Проверка

Какую асимптотику имеет тривиальный поиск?

1. $O(n)$
2. $O(2 \cdot n)$
3. $O(n^2)$

Проверка

Какую асимптотику имеет тривиальный поиск?

1. $O(n)$
2. $O(2 \cdot n)$
3. $O(n^2)$

Все вышеперечисленные подходят под определение асимптотической сложности

Обычно стараются давать *разумную* асимптотику. За этим есть немного теории, но идеальный вариант - это когда нет константы (ее можно спрятать в c) и функцию нельзя "уменьшить".

Бинарный поиск: асимптотика

Выпишем количество шагов алгоритма явно:

$$T(n) = 1 + T(\frac{n}{2})$$

Иначе говоря, мы на каждом шаге сужали пространство поиска в два раза. Если в конце мы дошли до размера 1, то за $T(n)$ шагов мы получили

$$\frac{n}{2^{T(n)}} \sim 1$$

Отсюда

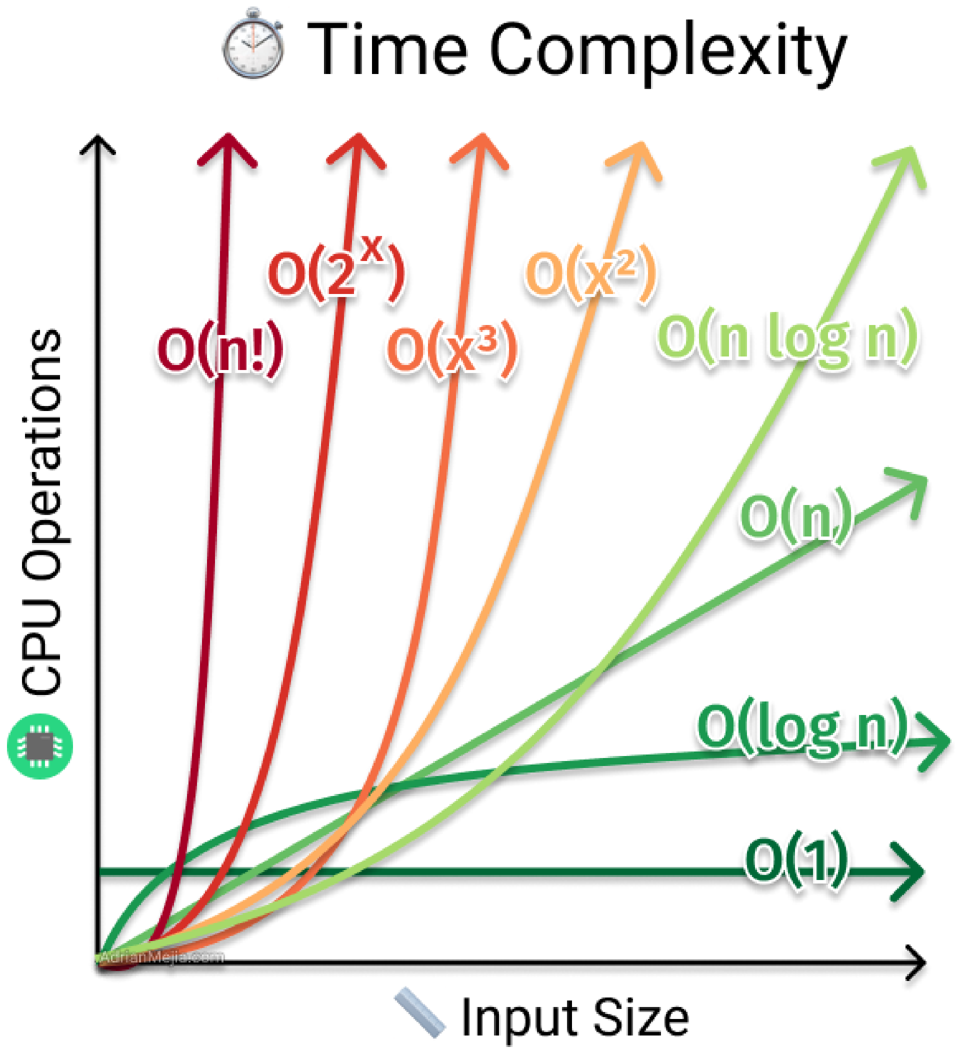
$$T(n) \sim \log_2(n)$$

Значит, бинпоиск работает за $O(\log n)$

Сравнение асимптотик

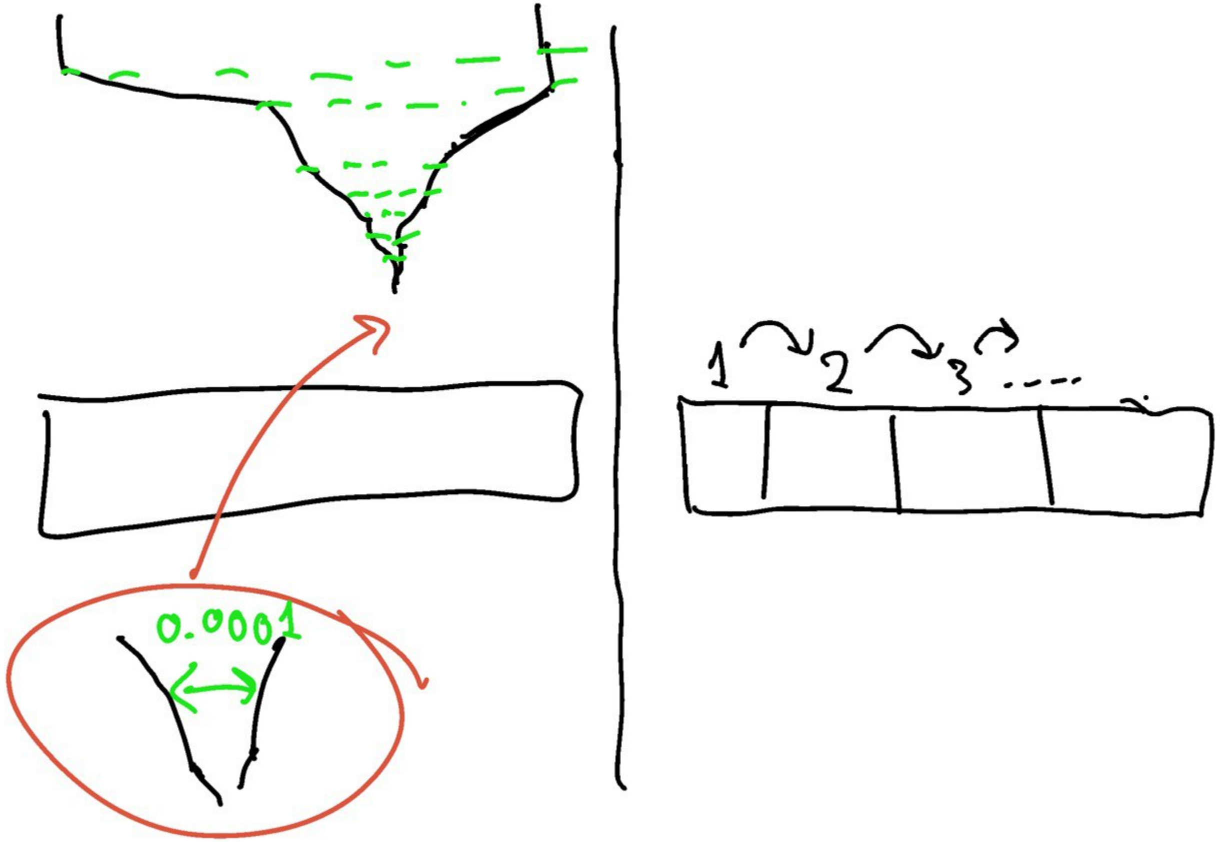
На глаз некоторые асимптотики отличить сложно, формально можно проверить $\frac{T(n)}{f(n)} \leq c$

Надо понимать, что это математический подход к анализу алгоритма, с инженерной точки зрения два алгоритма с разной асимптотикой имеют разную произволительность.



Асимптотика	Примерное ограничение
$O(1)$	10^{18} (обычно ограничено 64 битной арифметикой)
$O(\log n)$	10^{18} (обычно ограничено 64 битной арифметикой)
$O(\sqrt{n})$	10^{10}
$O(n)$	10^{6}
$O(n \log n)$	10^{5}
$O(n^2)$	2000
$O(2^n)$	17
$O(n!)$	7

Last thing



Мемы!


Pranay Pathole
@PPathole
2 hours ago
Alternative Big O notations:
O(1) = O(yeah)
O(log n) = O(nice)
O(nlogn) = O(k-ish)
O(n) = O(ok)
$O(n^2) = O(my)$
$O(2^n) = O(no)$
O(n^n) = O(fuck)
O(n!) = O(mg!)

tag yourself

😇(1)

-never changes
-v efficient
-kind of boring but you know you're supposed to like them

☺(N)

-straightforward
-tells it like it is
-increases when input increases
-does what it's supposed to

😎(N^2)

-peer pressurer
-brings everyone else into their mess
-takes each element and does something with each other element
-probably the source of mono

😱(2^N)

-doubles every time input is added
-kind of dramatic

🥴(log N)

-v efficient
-peaked in high school, then plateaued
-doesn't care about your input

rubyreilly.com

Therapist: O-notations aren't real, they can't hurt you

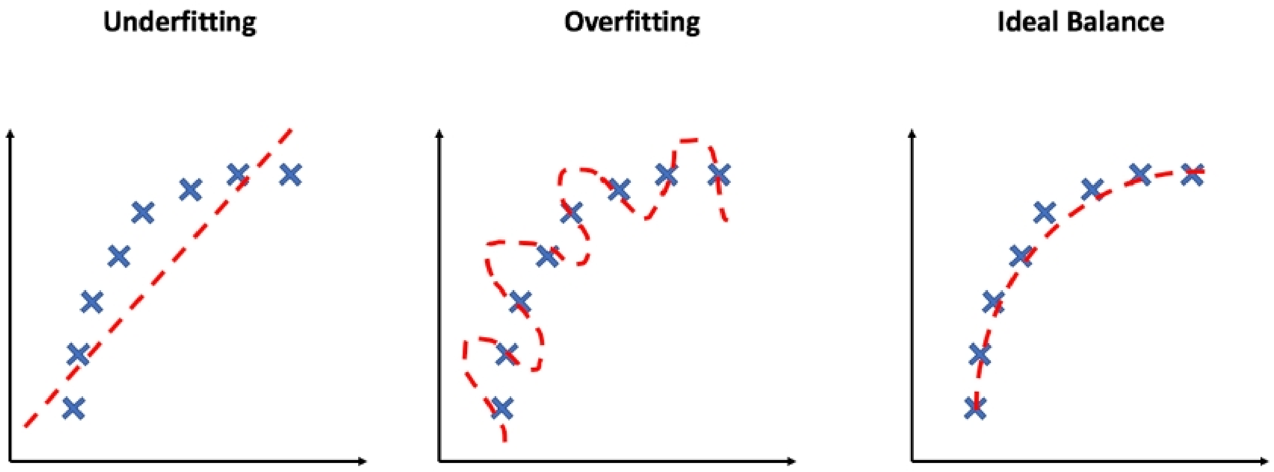
O-notations:

$$O(1) < O(\log N) < O(N) < O(N\log N) < O(N^2) < O(N^3) < O(2^N) < O(10^N) < O(N!)$$

Идея для пет-проекта

Программа/библиотека, которая делает вывод об асимптотике алгоритма на основе случайных тестовых данных и нескольких размерах выборок.

Если узнать средние замеры на $n = 10, n = 100, \ldots, n = 5000$, то по набору замеров можно сделать предположение - рост линейный, меньше линейного или больше линейного.



Дополнительные материалы

- Тернарный поиск
- Бинпоиск по производной выпуклой функции
- Математика :(
- Параллельные бинпоиски
- Формальное определение асипмтотической сложности, глава 1.2