Динамическое программирование

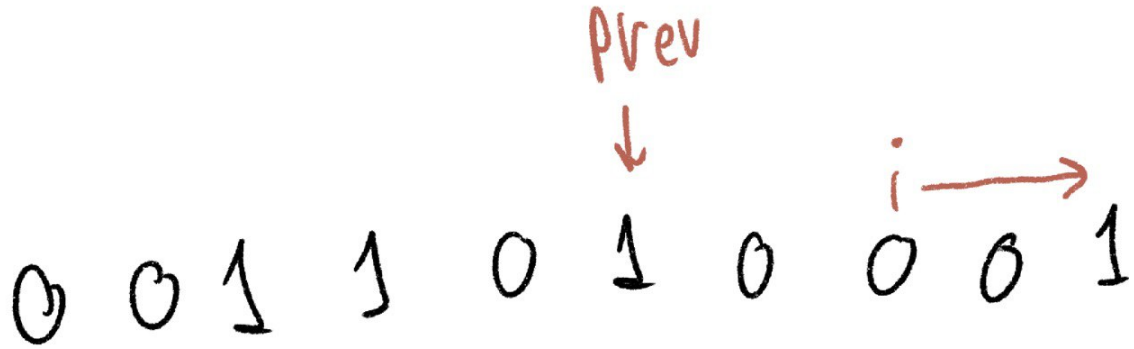
11/03/2023

Задача 0

Дан массив из нулей и единиц. Нужно для каждого нуля вывести ближайшую единицу слева и ближайшую единицу справа.

Вопрос: как решается, если не думать про динамику?

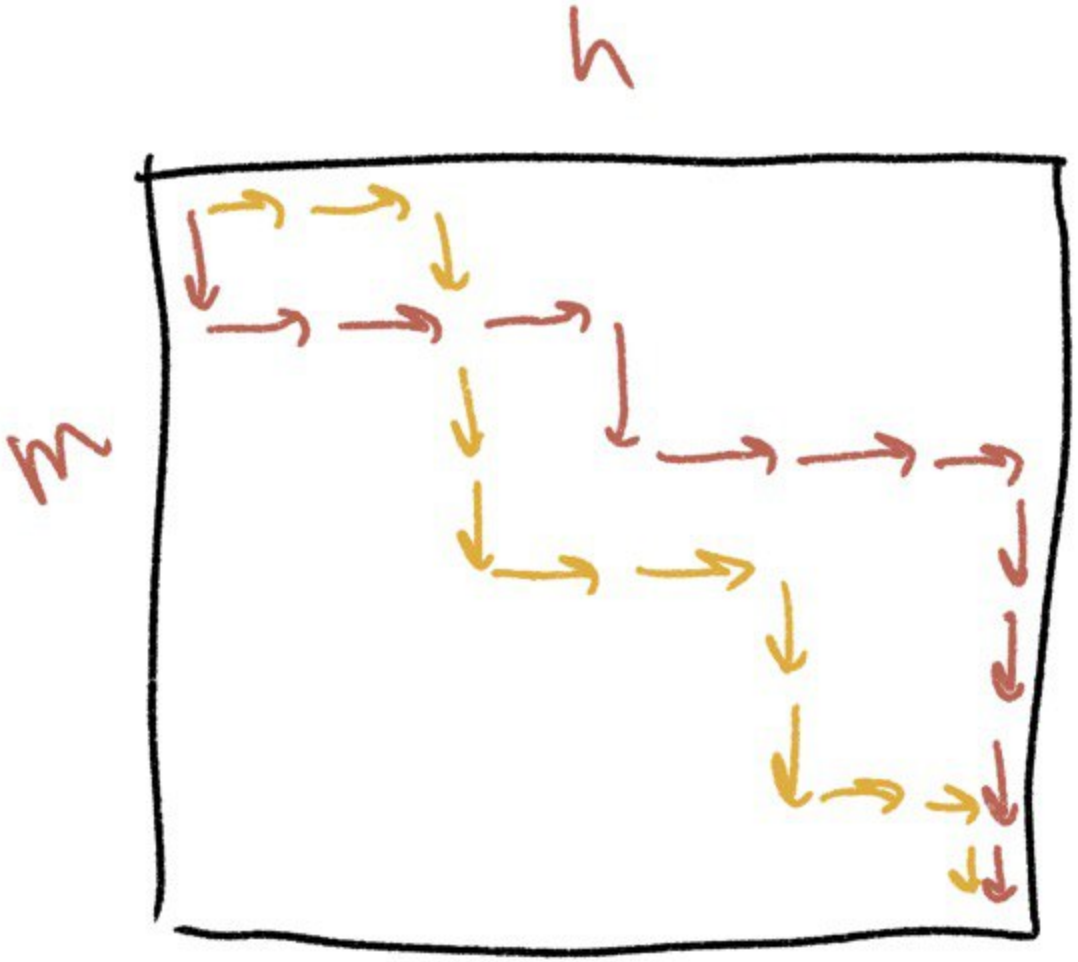
Ближайшая 1

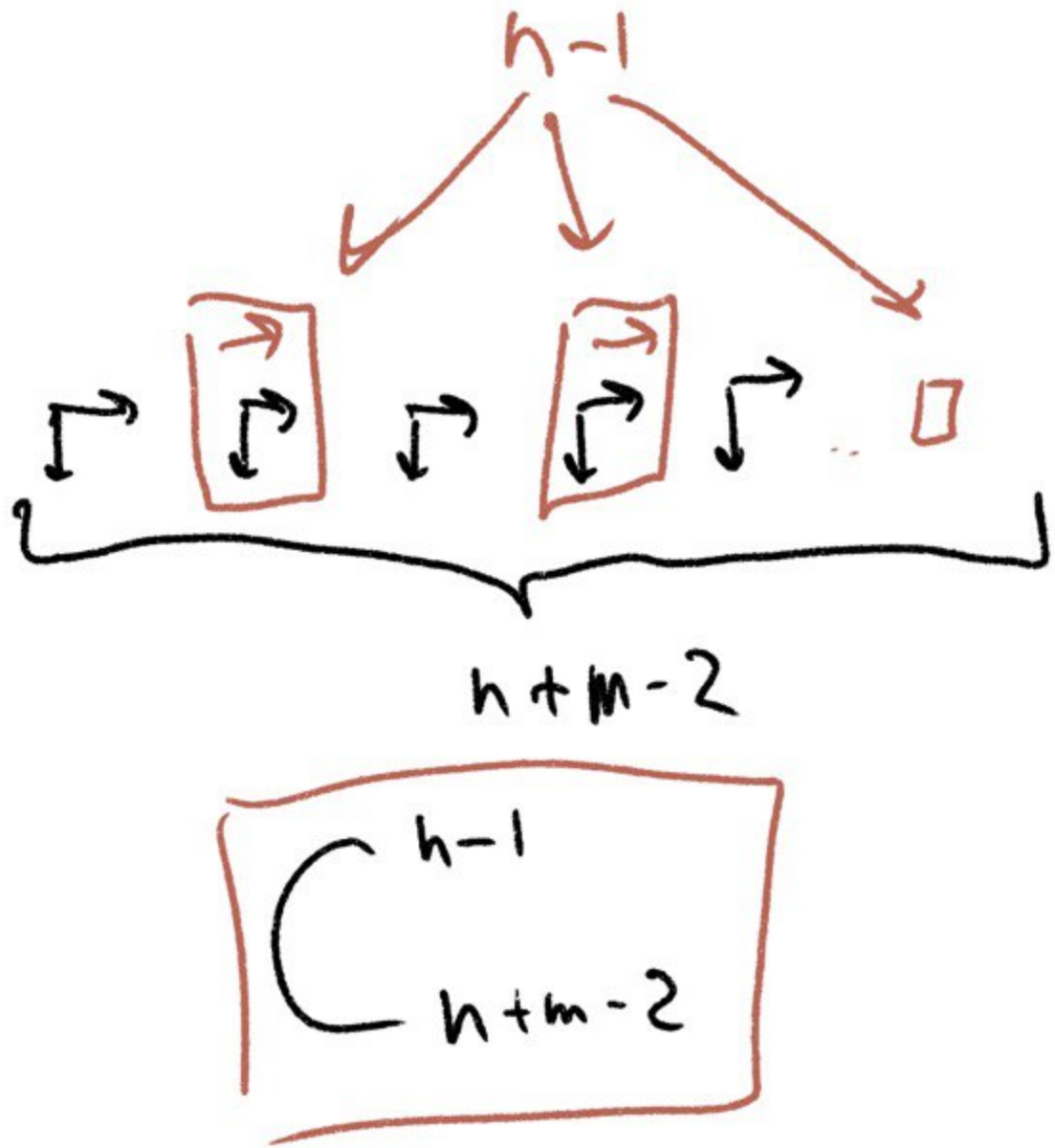


Задача 1

Дана таблица $n \times m$, некоторые клетки заблокированы. Нужно посчитать количество способов дойти от левой верхней клетки до правой нижней.

Вопрос: чему равен ответ, если нет заблокированных клеток?


h
m


h-1
h+m-2
h-1
h+m-2

Задача 2

Даны две строки, s и t, нужно понять, сколько минимально надо сделать удалений, добавлений или замен символов, чтобы из s получить t.

$$dist(\text{"kek"}, \text{"break"}) = 3$$

Это называется редакторским расстоянием

Пример неверного решения задачи 2

- Искать первую пару совпадающих символов

Контрпример: abaacd $\rightarrow$ bcdcd

Игрушечный пример

Посчитать число Фибоначчи. По определению, n-е число Фибоначчи называется f_n. (Позже мы значение с соответствующим индексом будем называть **состоянием**)

Мы имеем формулу **пересчета**:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Мы знаем какие-то значения заранее, это наша **база**:

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$

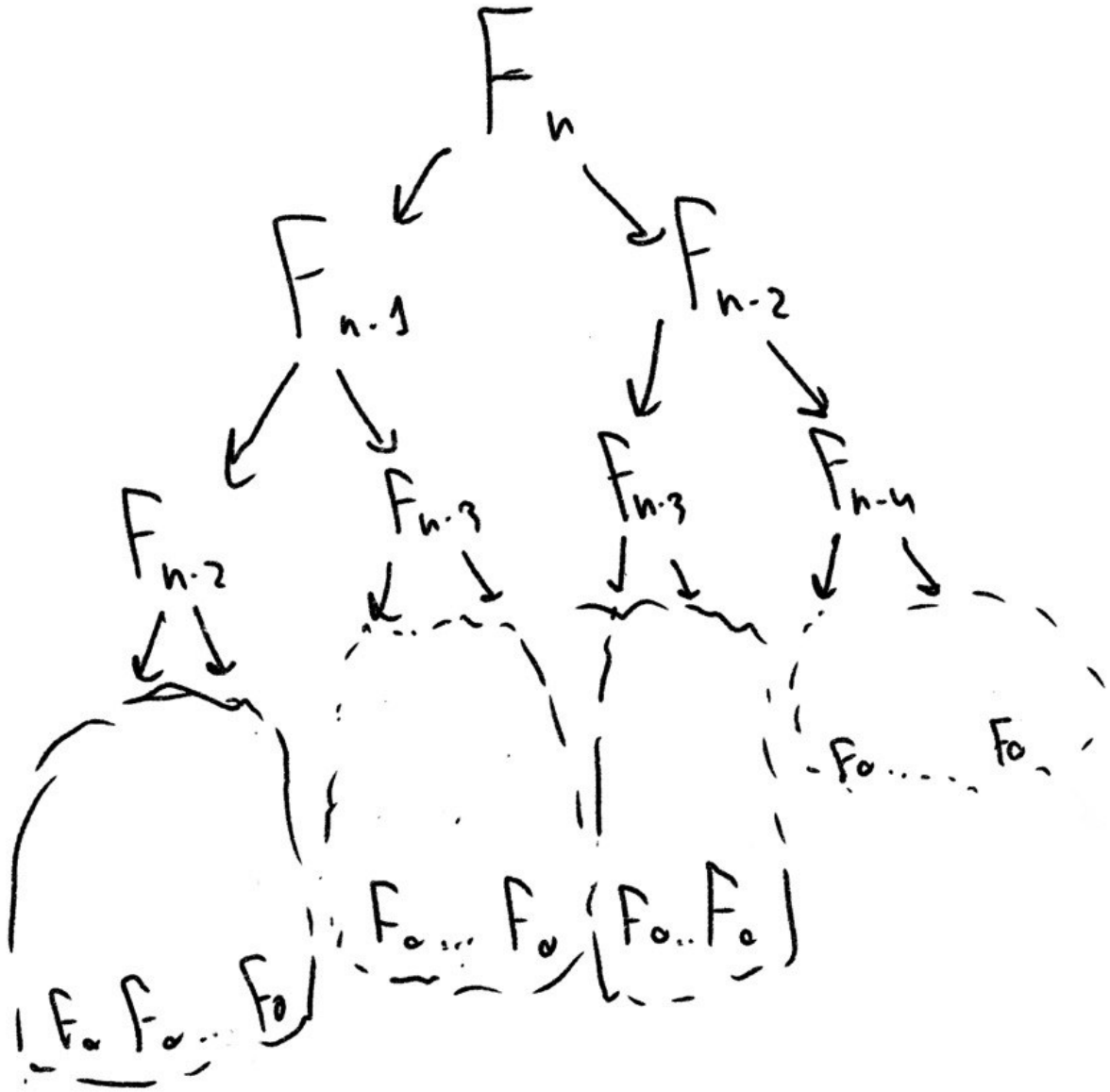
И мы знаем, что желаемое значение (**результат**) равно f_n.

Рекурсивные числа фибоначчи

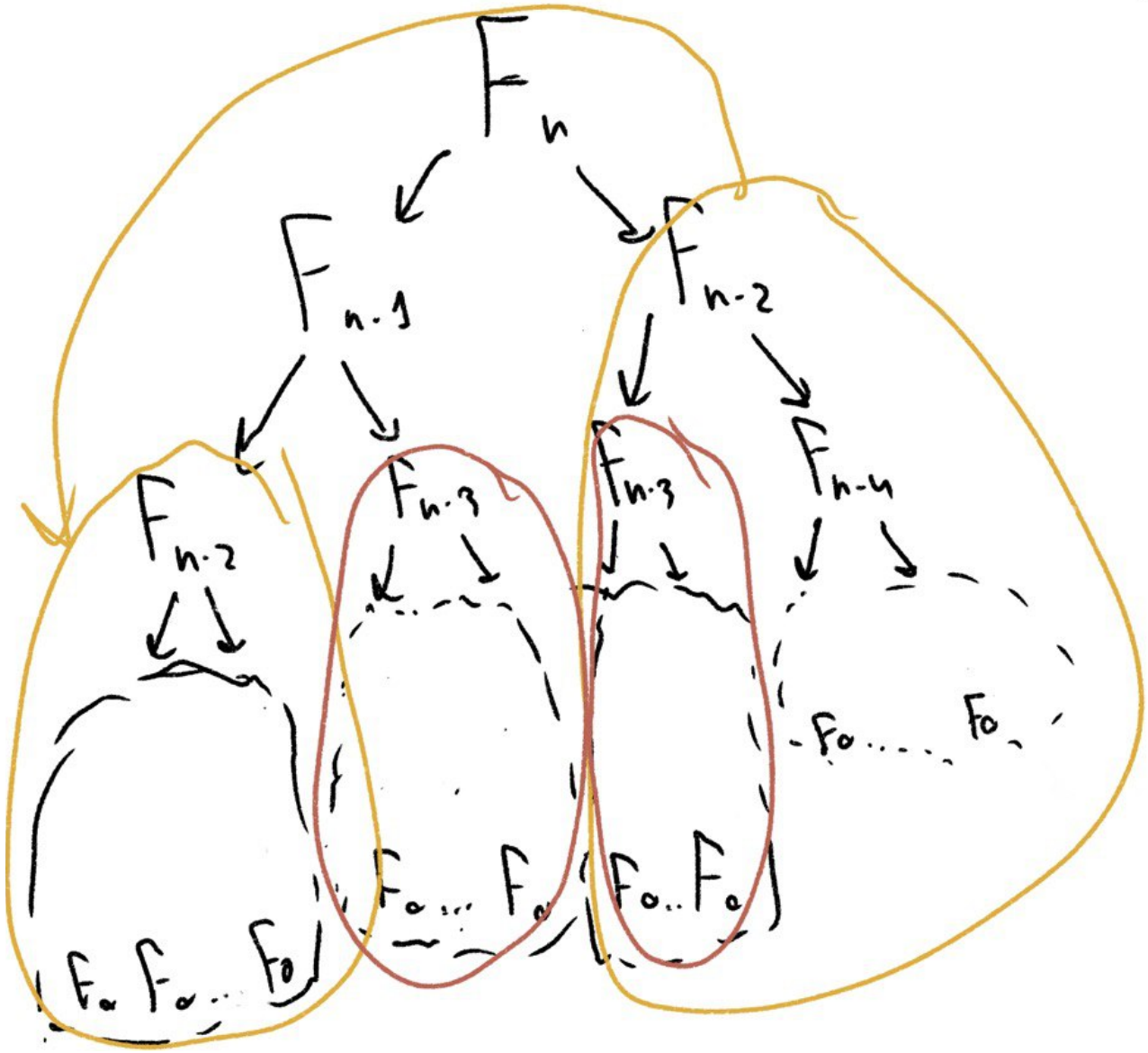
```
def f(n);
    if n <= 1:
        return n
    return f(n - 1) + f(n - 2)

print(f(20))
```

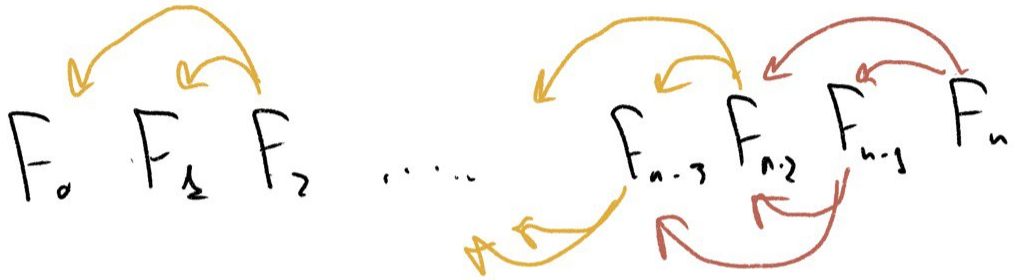
Порядок пересчета



Лишнее



Поменяем порядок пересчета



Апгрейд

```
f = [i for i in range(21)]
for i in range(2, 21):
    f[i] = f[i - 1] + f[i - 2]
print(f[20])
```

Когда написали, проверяем:

- базу
- значение
- пересчет
- порядок пересчета
- результат

Как решать задачу методом ДП?

- Пытаемся найти *изолированное* состояние системы
- Смотрим, как оно зависит от других состояний
- Мысленно представляем, куда направлены стрелки для пересчета, и на их основе определяем порядок пересчета
- Определяем базу и понимаем, где будет лежать результат
- (*опционально*) Думаем, какие состояния можно забыть и выкинуть, чтобы не тратить память

Блишайшая единица

dp_i - ближайшая единица слева от i

$$dp_i = \begin{cases} dp_{i-1}, & a_i = 0 \\ i, & a_i = 1 \end{cases}$$

$$dp_0 = \begin{cases} \emptyset, & a_0 = 0 \\ 0, & a_0 = 1 \end{cases}$$

Пересчет слева направо (и справа налево для зеркальной задачи)

Число путей в табличке

$dp_{i,j}$ - количество путей до клетки (i, j) от левого верхнего угла

База - $dp_{-1,*} = dp_{*,-1} = 0$, $dp_{0,0} = 1$. Результат в $dp_{n-1,m-1}$.

$$dp_{i,j} = \begin{cases} 0, & a_{i,j} = locked \\ dp_{i,j-1} + dp_{i-1,j}, & else \end{cases}$$

Вопрос: Зачем нам такая большая база?

Число путей в табличке: порядок обхода

Какая разница между этими порядками обхода?

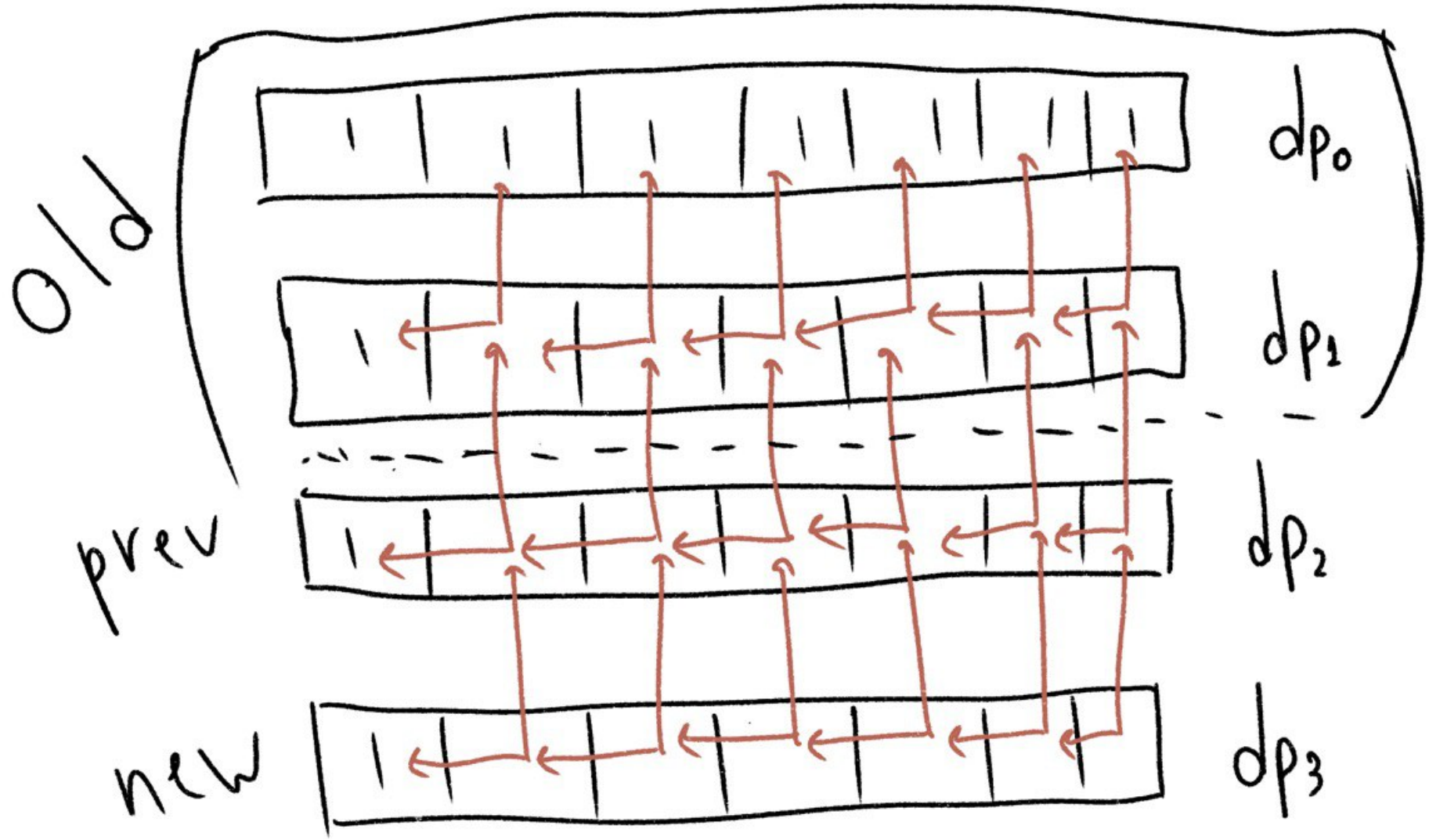
```
for i in range(1, n):
    for j in range(1, m):
        dp[i][j] = dp[i][j-1] + dp[i-1][j]
        if a[i][j] is None:
            dp[i][j] = 0
```

```
# swap for's
for j in range(1, m):
    for i in range(1, n):
        dp[i][j] = dp[i][j-1] + dp[i-1][j]
        if a[i][j] is None:
            dp[i][j] = 0
```

Число путей в табличке: жмем данные

На самом деле, мы можем забыть далекие слои

```
for i in range(1, n):
    if a[i][0] is None:
        dp_new[0] = 0
    for j in range(1, m):
        dp_new[j] = dp_new[j-1] + dp[j]
        if a[i][j] is None:
            dp_new[j] = 0
    # hack: no need to clear
    dp_new, dp = dp, dp_new
```


old
prev
new
dp_0
dp_1
dp_2
dp_3

Редакторское расстояние: плохой пример состояния

dp_i - сколько нужно сделать изменений, чтобы первые i символов у обеих строк совпали.

Одна из проблем - в зависимости от количества удалений, ответ может лежать как в dp_n, так и dp_0 (мы знаем про эту проблему даже без формул пересчета).

Редакторское расстояние: решение

$dp_{i,j}$ - сколько нужно сделать изменений, чтобы сделать равными подстроки $a[0:i]$ и $b[0:j]$, не трогая оставшиеся символы

У нас всегда есть три действия и одно бездействие:

1. изменить символ $a_i \to b_j$ (что эквивалентно обратной замене)
2. удалить символ a_i
3. удалить символ b_j
4. если $a_i = b_j$, то мы уже починили эти символы

Редакторское расстояние: формула пересчета

Получаем переходы:

$$dp_{i,j} = \min \begin{pmatrix} dp_{i-1,j-1} + 1 & \\ dp_{i,j-1} + 1 & \\ dp_{i-1,j} + 1 & \\ dp_{i-1,j-1} & if\ a_i = b_j \end{pmatrix}$$

Задача о рюкзаке

Дано n предметов - пар веса и стоимости (w_i, c_i). Вы хотите уложить все в рюкзак с суммарным весом не больше W, при этом максимизировав суммарную стоимость.

Задача о рюкзаке: неверный жадный алгоритм

1. Отсортировать предметы по убыванию весов
2. Брать самый дорогой элемент, который пока что влезает в рюкзак

Задача о рюкзаке: состояние

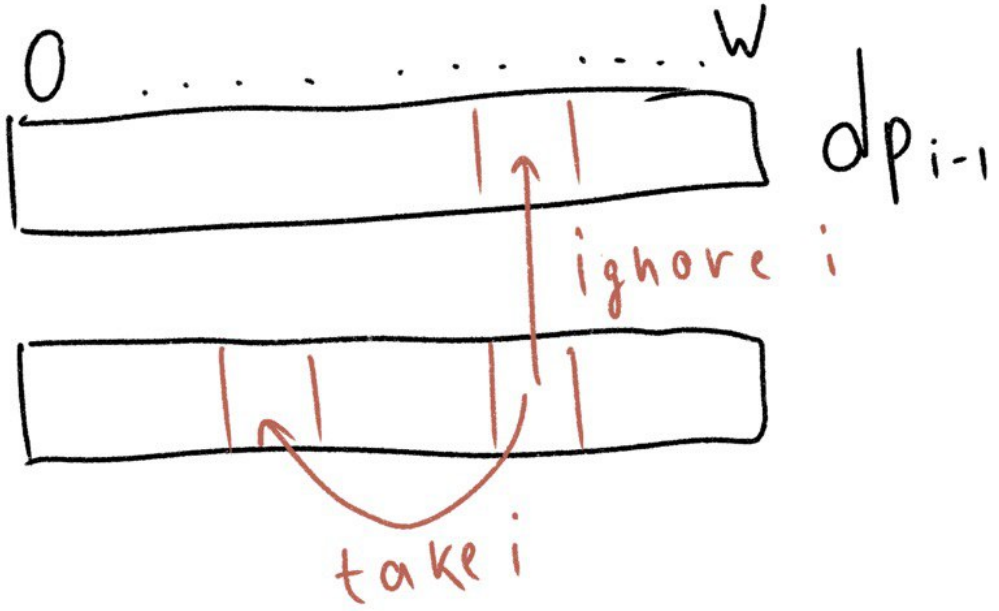
$dp_{i,w}$ - максимальная сумма набора, если мы рассмотрели первые i предметов и пока что набрали множество веса w.

$$dp_{i,w} = \max(dp_{i-1,w}, dp_{i-1,w-w_i} + c_i)$$

Можно хранить только два слоя в виде массивов dp_w, получить $O(W)$ памяти и $O(nW)$ времени.

Рюкзак: повтор предметов

Сравните паереходы на рисунке и в формуле пересчета. Они не соответствуют друг другу, какой из пересчетов разрешает взять предмет в рюкзак несколько раз?



Задача о рюкзаке: NP

Можно заметить, что если W большое, то данные в память не влезут. Оказывается, если ограничения на W нет, то дальше работают только переборы всех подмножеств за что-то типа $O(2^n n)$ или $O(2^{\frac{n}{2}} n)$ с разными оптимизациями.

Версия рюкзака вида "можно ли найти набор стоимости хотя бы T влезающий в рюкзак" является NP-полной задачей, потому что проверка решения работает за полиномиальное время, и потому что решение пока что существует только на "недетерминированной машине Тьюринга".

Вопрос, можно ли решить рюкзак в общем виде за полином, открыт, решение (или доказательство его отсутствия) стоит $1'000'000'000, а его практическая ценность еще выше ($P = NP$ problem).

Подпалиндромы

Найти количество подстрок-палиндромов.

> Задача с контеста!

Можно решать динамикой по подотрезкам.

$dp_{l,r}$ - является ли палиндромом подстрока $s[l:r]$.

Тогда для одного символа мы знаем базу $dp_{i,i} = 1$, $dp_{i,i-1} = 1$, и хотим просуммировать все $dp_{l,r}$.

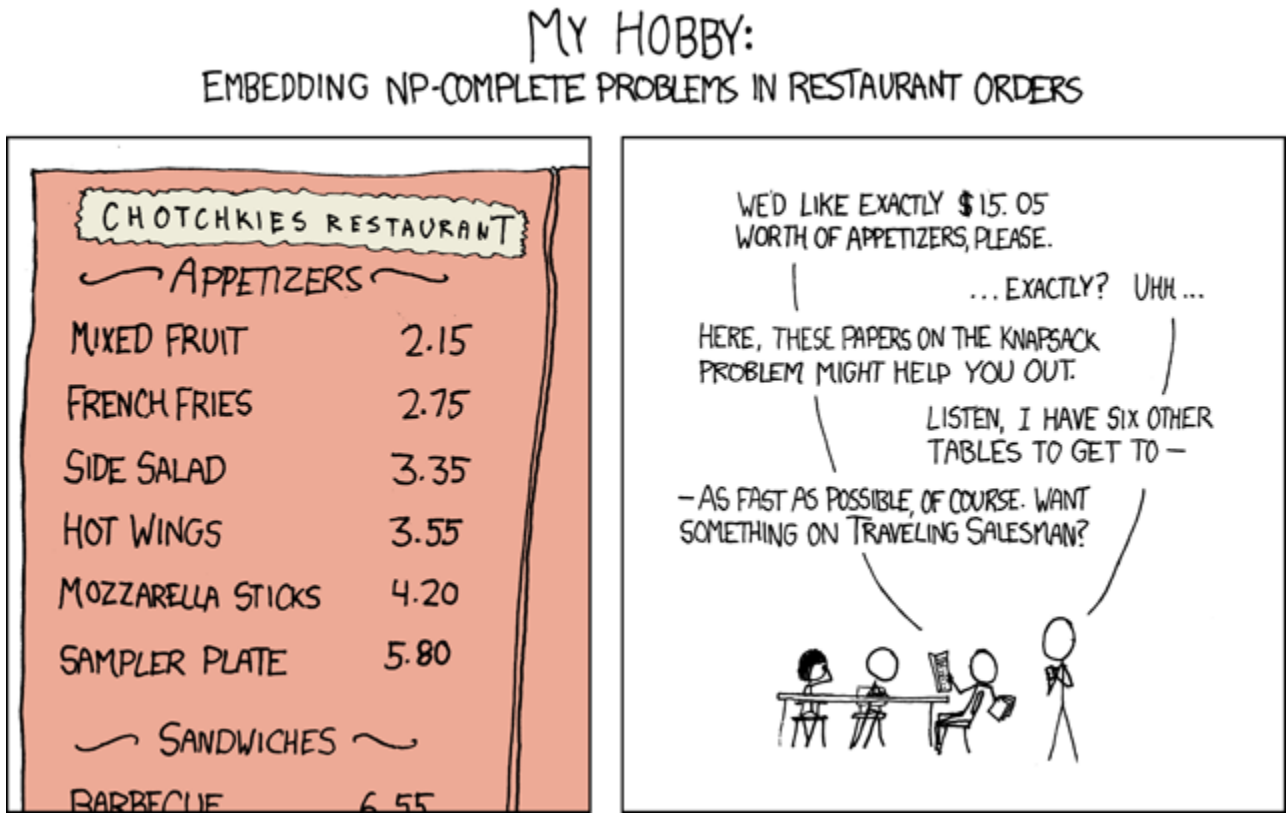
Подпалиндромы: переходы

$$dp_{l,r} = \begin{cases} dp_{l+1,r-1}, & s_l = s_r \\ 0, else \end{cases}$$

```
for r in range(n):
    for l in range(r, -1, -1):
        # ...
```

Почему такой порядок пересчета?

Мем


MY HOBBY:
EMBEDDING NP-COMPLETE PROBLEMS IN RESTAURANT ORDERS
CHOTCHKIES RESTAURANT
APPETIZERS
MIXED FRUIT 2.15
FRENCH FRIES 2.75
SIDE SALAD 3.35
HOT WINGS 3.55
MOZZARELLA STICKS 4.20
SAMPLER PLATE 5.80
SANDWICHES
BARBECUE 6.55
WE'D LIKE EXACTLY $15.05 WORTH OF APPETIZERS, PLEASE.
...EXACTLY? UHH...
HERE, THESE PAPERS ON THE KNAPSACK PROBLEM MIGHT HELP YOU OUT.
LISTEN, I HAVE SIX OTHER TABLES TO GET TO—
—AS FAST AS POSSIBLE, OF COURSE. WANT SOMETHING ON TRAVELING SALESMAN?

Идея для пет-проекта

С помощью редакторского расстояния (и базы слов, типа https://github.com/dwyl/english-words) можно сделать свой авто-корректор, который превращает слово в максимально похожее на себя из известных.

Для дальнейшего изучения

- Дп по подмаскам
- Дп по поддеревьям
- Дп на ациклических графах
- NP-полные задачи, TSP, SAT, итд
- И решать задачи!!!