関数体の紹介
Riemann 予想と ABC 予想の類似

グミ

自己紹介

一時期主食がグミだったので、グミと名乗っています。

（今はグミをあまり食べないため、汁なし担々麺と名乗るべき）

数学科の修士卒で、専攻は整数論でした。

今は数学とあまり関係ない仕事をしてしまっています。

記号

$\mathbb{F}_q$を位数がqの有限体とする。

$\mathbb{F}_q$上の 1 変数多項式環$\mathbb{F}_q[T]$を、以降は単にAと表記する。

Aの元の具体例

$$T+2 \in \mathbb{F}_3[T]$$

$$2T+3 \in \mathbb{F}_7[T]$$

有限体上の多項式環Aは整数環$\mathbb{Z}$と似ていることが知られている。

以降のスライドで、その類似点を紹介する。

有限体上の多項式環Aと整数環$\mathbb{Z}$の類似点

Aには整数論のもとの似た定義・定理が多数ある。

たとえば……

- 単項 ideal 整域である。
- 剰余環は有限環である。
- 剰余環の乗法群は巡回群である。
- Euler の定理、Fermat の小定理が成り立つ。
- zeta 関数が定義できる。
- Wilson の定理が成り立つ。
- 平方（n 乗）剰余の相互法則が成り立つ。
- 素数定理が成り立つ。
- Dirichlet の定理 が成り立つ。

詳細は [1] を参照。

関数体と代数体の類似

有限体上の多項式環Aと整数環$\mathbb{Z}$に限らず、より一般に関数体と代数体の間に類似がある。 →関数体類似

整数環$\mathbb{Z}$	有限体上の多項式環A
有理数体$\mathbb{Q}$	有限体上の 1 変数有理関数体$\mathbb{F}_q(T)$
代数体（$\mathbb{Q}$の有限次拡大体）	関数体（$\mathbb{F}_q(T)$の有限次拡大体）

では、相違点は……？

相違点

相違点のうち特に興味深いこととして、整数の場合より証明が容易なケースがあるということが挙げられる。

例えば……

関数体バージョンの Riemann 予想は 1948 年に Weil によって既に証明されている。

Theorem 1: 関数体バージョンの Riemann 予想.

Kを大域関数体で、位数qの定数体を持つとする。

$\zeta_K(s)$の零点の実部は$\frac{1}{2}$である。

Bombieri による、より初等的な証明が院生向けの教科書に載っている。[1]

さらに……

関数体バージョンの Fermat の最終定理も証明済み。

Theorem 2: 関数体バージョンの Fermat の最終定理.

Kを関数体とし、その定数体Fは完全であるとする。 NをFの標数pを割り切らない数とする。

次の場合は$X^N + Y^N = 1$は定数以外の解を持たない。

- Kの種数g_Kが0で、$N \geq 3$のとき。
- $g_K \geq 1$で、$N > 6g_K - 3$のとき。

※ $x^n + y^n = z^n$の両辺をz^nで割れば、$X^n + Y^n = 1$の形になる。

誰が最初に証明したかはリサーチ不足……

さらにさらに……

関数体バージョンの ABC 予想も証明済み。

Theorem 3: 関数体バージョンの ABC 予想（定理）.

Kを関数体とし、その定数体Fは完全であるとする。 $u, v \in K^*$を$u + v = 1$を満たすものとする。 このとき、次が成り立つ。

$$\deg_s u = \deg_s v \leq 2g_K - 2 + \sum_{P \in \operatorname{Supp}(A+B+C)} \deg_K P$$

ここで、AとBはそれぞれuとvのKにおける zero divisor で、CはそれらのKにおける polar divisor である。

※ 元の ABC 予想は次のように書きなおせる。

$$u := \frac{A}{C}, v := \frac{B}{C}, \mathrm{ht}\left(\frac{m}{n}\right) := \max(\log|m|, \log|n|)$$

$$\max(\mathrm{ht}(u), \mathrm{ht}(v)) \leq m_\varepsilon + (1 + \varepsilon) \sum_{p \mid ABC} \log p$$

まとめ

- 関数体は代数体と似ている。
- 関数体バージョンの Riemann 予想、Fermat の最終定理、ABC 予想は証明済み。
- それらの証明は院生向けの教科書に載っている。[1]

関数体バージョンなら、比較的容易に理解できるかもしれない。

また、関数体を調べることで、これらの整数論の難問に対するヒントを得られるかもしれない。

図 1: X へのリンク。本スライドはこちらに掲載します。

QR コードデカい版

（補記）

- 関数体では整数論の定理だけでなく、他にも Riemann-Roch の定理や、Riemann-Hurwitz の定理も同様に成り立つ。
- 関数体バージョンの ABC 定理の証明は Riemann-Huwitz の定理を用いる。
- 関数体バージョンの Fermat の最終定理の証明は ABC 定理を用いる。
- 円分体に対応する円分関数体が定義できる。
- ideal 類群も同様に定義できる。
- 関数体バージョンの Kronecker-Weber の定理も成り立つ。

（補記）年表

西暦	出来事
1670	Fermat 予想が提示される
1859	Riemann 予想が提示される
1948	Weil が関数体バージョンの Riemann 予想を証明する
1985	ABC 予想が提示される
(不明)	関数体バージョンの ABC 予想、Fermat の最終定理が証明される
1995	Wiles が Fermat の最終定理を証明する
2020	望月氏の ABC 予想の証明論文が『RIMS』に掲載される

すべて関数体バージョンが先行して証明されている（と思う)。

※ 年表のソースは Wikipedia です。

（補記）一般の関数体

本スライドでは有限体上の 1 変数代数関数体を扱ったが、有限体・1 変数に限らず一般の体k上のn変数代数関数体も定義できる。

Wikipedia [2] によると、正規射影既約代数曲線の圏は1変数函数体の圏と反変同値であるらしい。

またkが$\mathbb{C}$の場合、$\mathbb{C}$上の 1 変数代数関数体の圏は閉 Riemann 面の圏と反変同値であるらしい。 [3], [4]

全くの余談

$$11^{\ln 11} = 314.159789...$$

100πに近い。なんで？

参考文献

[1] M. Rosen, Number theory in function fields, vol. 210. Grad. Texts Math., vol. 210. New York, NY: Springer, 2002.

[2] 「代数函数体」. [Online]. 入手先: https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0%E4%BD%93

[3] alg-d, 「Riemann 面と 1 変数代数関数体【関数論】」. [Online]. 入手先: https://www.youtube.com/watch?v=3SN91FhMxIA&t=92s

[4] 柳田伸太郎, 「代数学 IV/代数学概論 IV 講義ノート」. [Online]. 入手先: https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/18W/20181220.pdf