

# 関数体の紹介

## Riemann 予想と ABC 予想の類似

第 32 回日曜数学会 - 2025-02-16

グミ

## 自己紹介

一時期主食がグミだったので、グミと名乗っています。

(今はグミをあまり食べないため、汁なし担々麺と名乗るべき)

数学科の修士卒で、専攻は整数論でした。

今は数学とあまり関係ない仕事をしてしまっています。

## 日曜数学会への参加

- 第 30 回：初参加、発表なし
- 第 32 回（今回）：初発表

# 記号

$\mathbb{F}_q$ を位数が $q$ の有限体とする。

$\mathbb{F}_q$ 上の1変数多項式環 $\mathbb{F}_q[T]$ を、以降は単に $A$ と表記する。

## $A$ の元の具体例

$$T + 2 \in \mathbb{F}_3[T]$$

$$2T + 3 \in \mathbb{F}_7[T]$$

## $A$ の特徴

$A$ は整数環 $\mathbb{Z}$ と似ていることが知られている。

以降のスライドで、その類似点を紹介する。

## 有限体上の多項式環 $A$ と整数環 $\mathbb{Z}$ の類似点

$A$ には整数論のもとの同様の方法で定義できる関数や同様の定理が多数ある。

たとえば……

- 単項 ideal 整域である。
- 剰余環は有限環である。
- 剰余環の乗法群は巡回群である。
- Euler の定理、Fermat の小定理が成り立つ。
- zeta 関数が定義できる。
- Wilson の定理が成り立つ。
- 平方 ( $n$  乗) 剰余の相互法則が成り立つ。
- 素数定理が成り立つ。
- Dirichlet の定理 が成り立つ。

詳細は [1] を参照。

## 関数体と代数体の類似

有限体上の多項式環 $A$ と整数環 $\mathbb{Z}$ に限らず、より一般に関数体と代数体の間に類似がある。→関数体類似

整数環 $\mathbb{Z}$	有限体上の多項式環 $A$
有理数体 $\mathbb{Q}$	有限体上の1変数有理関数体 $\mathbb{F}_q(T)$
代数体 ( $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体)	大域関数体 ( $\mathbb{F}_q(T)$ の有限次拡大体)

### 相違点は？

ここまで類似点を紹介したが、相違点は……？

## 相違点

相違点のうち特に興味深いこととして、整数の場合より証明が容易なケースがあるということが挙げられる。

例えば……

関数体バージョンの Riemann 予想は 1948 年に Weil によって既に証明されている。

**Theorem 1:** 関数体バージョンの Riemann 予想.

$K$  を大域関数体で、位数  $q$  の定数体を持つとする。

$\zeta_K(s)$  の零点の実部は  $\frac{1}{2}$  である。

また、Bombieri による、より初等的な証明が院生向けの教科書に載っている。[1]

## さらに……

関数体バージョンの Fermat の最終定理も証明済み。

**Theorem 2:** 関数体バージョンの Fermat の最終定理.

$K$ を関数体とし、その定数体 $F$ は完全であるとする。  $N$ を $F$ の標数 $p$ を割り切らない数とする。

次の場合は $X^N + Y^N = 1$ は定数以外の解を持たない。

- $K$ の種数 $g_K$ が0で、 $N \geq 3$ のとき。
- $g_K \geq 1$ で、 $N > 6g_K - 3$ のとき。

※  $x^n + y^n = z^n$ の両辺を $z^n$ で割れば、 $X^n + Y^n = 1$ の形になる。

誰が最初に証明したかはリサーチ不足……

## さらにさらに……

関数体バージョンの ABC 予想も証明済み。

**Theorem 3:** 関数体バージョンの ABC 予想 (定理) .

$K$  を関数体とし、その定数体  $F$  は完全であるとする。  $u, v \in K^*$  を  $u + v = 1$  を満たすものとする。 このとき、次が成り立つ。

$$\deg_s u = \deg_s v \leq 2g_K - 2 + \sum_{P \in \text{Supp}(A+B+C)} \deg_K P$$

ここで、 $A$  と  $B$  はそれぞれ  $u$  と  $v$  の  $K$  における zero divisor で、 $C$  はそれらの  $K$  における polar divisor である。

※ 元の ABC 予想は次のように書きなおせる。

$$u := \frac{A}{C}, v := \frac{B}{C}, \text{ht}\left(\frac{m}{n}\right) := \max(\log|m|, \log|n|)$$

$$\max(\text{ht}(u), \text{ht}(v)) \leq m_\varepsilon + (1 + \varepsilon) \sum_{p \mid ABC} \log p$$



## まとめ

- 関数体は代数体と似ている。
- 関数体の方が証明が簡単な場合がある（関数体バージョンの Riemann 予想、Fermat の最終定理、ABC 予想は証明済み）。
- それらの証明は院生向けの教科書に載っている。[1]

整数論に興味のある方は、関数体についても学んでみてはいかがでしょうか？

もしかしたら、関数体を調べることでこれらの整数論の難問に対するヒントを得られるかも……？



図 1: スライドへのリンク

## QR コードデカイ版

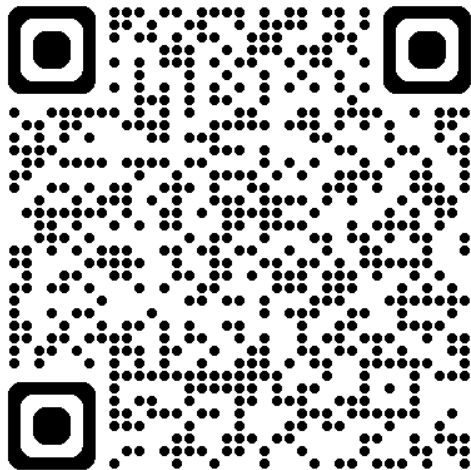


図 2: [https://www.docswell.com/s/GummyCandy1206/Z7R1D6-introduction\\_to\\_function\\_fields](https://www.docswell.com/s/GummyCandy1206/Z7R1D6-introduction_to_function_fields)

## (補記)

- 関数体では整数論の定理だけでなく、他にも Riemann-Roch の定理や、Riemann-Hurwitz の定理も同様に成り立つ。
- 関数体バージョンの ABC 定理の証明は Riemann-Hurwitz の定理を用いる。
- 関数体バージョンの Fermat の最終定理の証明は ABC 定理を用いる。
- 円分体に対応する円分関数体が定義できる。
- ideal 類群も同様に定義できる。
- 関数体バージョンの Kronecker-Weber の定理も成り立つ。

## (補記) 年表

西暦	出来事
1670	Fermat 予想が提示される
1859	Riemann 予想が提示される
1948	Weil が関数体バージョンの Riemann 予想を証明する
1985	ABC 予想が提示される
(不明)	関数体バージョンの ABC 予想、Fermat の最終定理が証明される
1995	Wiles が Fermat の最終定理を証明する
2020	望月氏の ABC 予想の証明論文が『RIMS』に掲載される

すべて関数体バージョンが先行して証明されている（と思う）。

※ 年表のソースは Wikipedia です。

## (補記) 一般の関数体

本スライドでは有限体上の1変数代数関数体を扱ったが、有限体・1変数に限らず一般の体 $k$ 上の $n$ 変数代数関数体も定義できる。

Wikipedia [2] によると、正規射影既約代数曲線の圏は1変数関数体の圏と反変同値であるらしい。

また $k$ が $\mathbb{C}$ の場合、 $\mathbb{C}$ 上の1変数代数関数体の圏は閉 Riemann 面の圏と反変同値であるらしい。[3], [4]

## 全くの余談

$$11^{\ln 11} = 314.159789\dots$$

$100\pi$ に近い。なんで？

## 参考文献

- [1] M. Rosen, Number theory in function fields, vol. 210. Grad. Texts Math., vol. 210. New York, NY: Springer, 2002.
- [2] 「代数函数体」. [Online]. 入手先: <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0%E4%BD%93>
- [3] alg-d, 「Riemann 面と 1 変数代数関数体 【関数論】」. [Online]. 入手先: <https://www.youtube.com/watch?v=3SN91FhMxIA&t=92s>
- [4] 柳田伸太郎, 「代数学 IV/代数学概論 IV 講義ノート」. [Online]. 入手先: <https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/18W/20181220.pdf>