

# 関数体の紹介

## Riemann 予想と ABC 予想の類似

第 32 回日曜数学会 - 2025-02-16

グミ

## 自己紹介

一時期主食がグミだったので、グミと名乗っています。

(今はグミをあまり食べないため、汁なし担々麺と名乗るべき)

数学科の修士卒で、専攻は整数論でした。

今は数学とあまり関係ない仕事をしてしまっています。

## 日曜数学会への参加

- ・ 第 30 回：初参加、発表なし
- ・ 第 32 回（今回）：初発表

# 記号

$\mathbb{F}_q$ を位数が $q$ の有限体とする。

$\mathbb{F}_q$ 上の1変数多項式環 $\mathbb{F}_q[T]$ を、以降は単に $A$ と表記する。

## $A$ の元の具体例

$$T + 2 \in \mathbb{F}_3[T]$$

$$2T + 3 \in \mathbb{F}_7[T]$$

**有限体上の多項式環 $A$ は整数環 $\mathbb{Z}$ と似ていることが知られている。**

以降のスライドで、その類似点を紹介する。

# 有限体上の多項式環 $A$ と整数環 $\mathbb{Z}$ の類似点

$A$ には整数論のもとの似た定義・定理が多数ある。

たとえば……

- 単項 ideal 整域である。
- 剰余環は有限環である。
- 剰余環の乗法群は巡回群である。
- Euler の定理、Fermat の小定理が成り立つ。
- zeta 関数が定義できる。
- Wilson の定理が成り立つ。
- 平方 ( $n$  乗) 剰余の相互法則が成り立つ。
- 素数定理が成り立つ。
- Dirichlet の定理 が成り立つ。

詳細は [1] を参照。

## 関数体と代数体の類似

有限体上の多項式環 $A$ と整数環 $\mathbb{Z}$ に限らず、より一般に関数体と代数体の間に類似がある。→関数体類似

整数環 $\mathbb{Z}$	有限体上の多項式環 $A$
有理数体 $\mathbb{Q}$	有限体上の1変数有理関数体 $\mathbb{F}_q(T)$
代数体 ( $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体)	関数体 ( $\mathbb{F}_q(T)$ の有限次拡大体)

では、相違点は……？

## 相違点

相違点のうち特に興味深いこととして、整数の場合より証明が容易なケースがあるということが挙げられる。

例えば……

関数体バージョンの Riemann 予想は 1948 年に Weil によって既に証明されている。

**Theorem 1:** 関数体バージョンの Riemann 予想.

$K$  を大域関数体で、位数  $q$  の定数体を持つとする。

$\zeta_K(s)$  の零点の実部は  $\frac{1}{2}$  である。

Bombieri による、より初等的な証明が院生向けの教科書に載っている。  
[1]

## さらに……

関数体バージョンの Fermat の最終定理も証明済み。

**Theorem 2:** 関数体バージョンの Fermat の最終定理.

$K$ を関数体とし、その定数体 $F$ は完全であるとする。  $N$ を $F$ の標数 $p$ を割り切らない数とする。

次の場合は $X^N + Y^N = 1$ は定数以外の解を持たない。

- $K$ の種数 $g_K$ が0で、 $N \geq 3$ のとき。
- $g_K \geq 1$ で、 $N > 6g_K - 3$ のとき。

※  $x^n + y^n = z^n$ の両辺を $z^n$ で割れば、 $X^n + Y^n = 1$ の形になる。

誰が最初に証明したかはリサーチ不足……

## さらにさらに……

関数体バージョンの ABC 予想も証明済み。

**Theorem 3:** 関数体バージョンの ABC 予想 (定理) .

$K$  を関数体とし、その定数体  $F$  は完全であるとする。  $u, v \in K^*$  を  $u + v = 1$  を満たすものとする。 このとき、次が成り立つ。

$$\deg_s u = \deg_s v \leq 2g_K - 2 + \sum_{P \in \text{Supp}(A+B+C)} \deg_K P$$

ここで、 $A$  と  $B$  はそれぞれ  $u$  と  $v$  の  $K$  における zero divisor で、 $C$  はそれらの  $K$  における polar divisor である。

※ 元の ABC 予想は次のように書きなおせる。

$$u := \frac{A}{C}, v := \frac{B}{C}, \text{ht}\left(\frac{m}{n}\right) := \max(\log|m|, \log|n|)$$

$$\max(\text{ht}(u), \text{ht}(v)) \leq m_\varepsilon + (1 + \varepsilon) \sum_{p \mid ABC} \log p$$



## まとめ

- 関数体は代数体と似ている。
- 関数体バージョンの Riemann 予想、Fermat の最終定理、ABC 予想は証明済み。
- それらの証明は院生向けの教科書に載っている。[1]

関数体バージョンなら、比較的容易に理解できるかもしれない。

また、関数体を調べることで、これらの整数論の難問に対するヒントを得られるかもしれない。

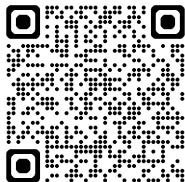


図 1: スライドへのリンク

## QR コードデカイ版

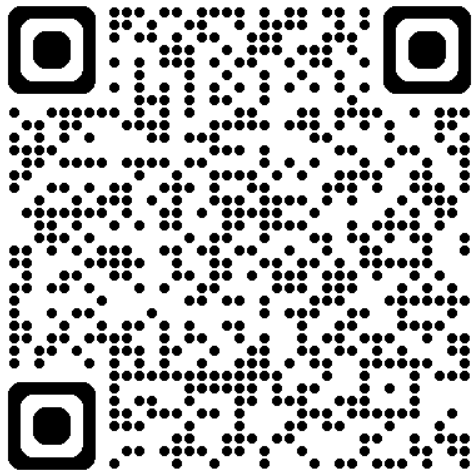


図 2: [https://www.docswell.com/s/GummyCandy1206/Z7R1D6-introduction\\_to\\_function\\_fields](https://www.docswell.com/s/GummyCandy1206/Z7R1D6-introduction_to_function_fields)

## (補記)

- 関数体では整数論の定理だけでなく、他にも Riemann-Roch の定理や、Riemann-Hurwitz の定理も同様に成り立つ。
- 関数体バージョンの ABC 定理の証明は Riemann-Hurwitz の定理を用いる。
- 関数体バージョンの Fermat の最終定理の証明は ABC 定理を用いる。
- 円分体に対応する円分関数体が定義できる。
- ideal 類群も同様に定義できる。
- 関数体バージョンの Kronecker-Weber の定理も成り立つ。

## (補記) 年表

西暦	出来事
1670	Fermat 予想が提示される
1859	Riemann 予想が提示される
1948	Weil が関数体バージョンの Riemann 予想を証明する
1985	ABC 予想が提示される
(不明)	関数体バージョンの ABC 予想、Fermat の最終定理が証明される
1995	Wiles が Fermat の最終定理を証明する
2020	望月氏の ABC 予想の証明論文が『RIMS』に掲載される

すべて関数体バージョンが先行して証明されている（と思う）。

※ 年表のソースは Wikipedia です。

## (補記) 一般の関数体

本スライドでは有限体上の 1 変数代数関数体を扱ったが、有限体・1 変数に限らず一般の体  $k$  上の  $n$  変数代数関数体も定義できる。

Wikipedia [2] によると、正規射影既約代数曲線の圏は 1 変数関数体の圏と反変同値であるらしい。

また  $k$  が  $\mathbb{C}$  の場合、 $\mathbb{C}$  上の 1 変数代数関数体の圏は閉 Riemann 面の圏と反変同値であるらしい。[3], [4]

## 全くの余談

$$11^{\ln 11} = 314.159789\dots$$

$100\pi$ に近い。なんで？

## 参考文献

- [1] M. Rosen, Number theory in function fields, vol. 210. Grad. Texts Math., vol. 210. New York, NY: Springer, 2002.
- [2] 「代数函数体」. [Online]. 入手先: <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0%E4%BD%93>
- [3] alg-d, 「Riemann 面と 1 変数代数関数体 【関数論】」. [Online]. 入手先: <https://www.youtube.com/watch?v=3SN91FhMxIA&t=92s>
- [4] 柳田伸太郎, 「代数学 IV/代数学概論 IV 講義ノート」. [Online]. 入手先: <https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/18W/20181220.pdf>