3강 Span, linear independence

Linear combination

- Def: $v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$

v is called a linear combination of $u_1, u_2, \dots, u_n$

- v는 u1,u2...,un들의 linear combination으로 불린다.

Ex1) (3,5) = 3 (1,0) + 5 (0,1) 일때 (3,5)는 (1,0)과 (0,1)의 linear combination이고, 계수는 3과 5이다.

Ex2)

$2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$ is a linear combination of $x^3 - 2x^2 - 5x - 3$ and $3x^3 - 5x^2 - 4x - 6$?

- 이를 만족하려면 아래의 식에서 a와 b가 존재 해야한다.

$$2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$$
$$= a(x^3 - 2x^2 - 5x - 3) + b(3x^3 - 5x^2 - 4x - 6)$$

$$a + 3b = 2$$
$$-2a - 5b = -2$$
$$-5a - 4b = 12$$
$$-3a - 9b = -6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \\ -5 & -4 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(row) Echelon form}$$

- 풀이과정 :

pivot으로 정해 아래에 있는 행들을 0으로 만들어줌

(0으로 만드는 계수를 각 행에 곱하고 더함)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \\ -5 & -4 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

①

pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 11 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix}$$

다음 행으로 내려와 0이 아닌 수를 갖는 첫번째 column을 피벗으로 설정, 이후 계산과정은 ①과 동일

②

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore a=-4,\ b=2.$

$\Rightarrow$ Gaussian elimination.

Span

Def: $\emptyset \subsetneq S \subset V$

$\text{Span}(S) = \{\text{ All linear combinations of vectors in } S\ \}$

$\text{Span}(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}$

- Span(S) : S에 있는 vector들의 가능한 모든 linear combinations 들의 집합

Ex.

Span{(1,0,0), (0,1,0)} = xy-plane in R^3

- a (1,0,0) + b (0,1,0)의 집합은 (a,b,0)이라는 3차원 상에서 xy-평면이 된다.

span(S) is a subspace of V

- Span은 Vector space의 Subspace이다.

if $S=\emptyset$, span(S) = {0} is a subspace of V

if $S \neq \emptyset$, $x, y \in \text{span}(S)$, $u_1, u_2, \dots, u_n \in S$

$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$

$y = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n$

$x + y \in S, \quad c \cdot x \in S$ span(S)

span(S) is a subspace.

- S가 공집합 또는 공집합이 아닐 경우도 Subspace의 조건을 만족 (덧셈과 스칼라곱에 대해서 닫혀있어) Span(S)는 subspace이다.

- **Vector space V의 Subspace가 S를 포함하는 W라고 가정하면 W는 Span(S)도 반드시 포함해야한다.**