4강 linear independence, basis

linear dependence

Def: S is called linearly ~~in~~dependent if there exists a finite number of vectors $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in S s.t.

$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$ and

At least one of $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$

- linear combination이 0이고, 적어도 하나의 계수가 0이 아니면 n개의 vector들의 집합 S를 **linearly dependent** 라고 한다.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

S is linearly independent?

$$a\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a-3b-2c=0, -3a+7b+3c=0, 2a+4b+11c=0, -4a+6b-c=0,...

a=5, b=3, c =-2

- 집합 S의 vector의 linear combination이 0이 되도록 하는 0이 아닌 계수가 한 개라도 있으면 S는 linearly dependent 하다고 한다.

1) Ø is linearly independent

- 공집합은 lineary independent 하다.

2) {u} is linearly independent when u≠ 0

- 원소가 하나인 집합인데, 그 원소가 0이 아닌 vector이면 lineary independent

하다.

- 반대로 무조건 zero vector가 들어가기만 한다면 lineary dependent 하다.

linear independence

- 정의 : 어떠한 vector도 다른 vector들의 linear combination으로 표시할 수 없다

- The only representation of 0 is the trivial representation.

$$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n=0 \Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

- linear combination = 0 일때 모든 계수들이 0이면 lineary independent 이다.

Thm 1.6 $S_1 \subset S_2 \subset V$

S_1: linearly dependent $\Rightarrow$ S_2: linearly dependent

Set 이 커지면 dependent 해짐.

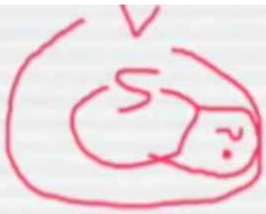
Ex. $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

- $u_1 = (2,-1,4), u_2 = (1,-1,3), u_3 = (1,1,-1),$
  $u_4 = (1,-2,-1)$
- $-2u_1 + 3u_1 + u_3 - 0u_4 = 0$
- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{span}(u_1, u_2, u_4)$

- 4개의 vector들을 linear combination해서 zero vector을 만들 수 있는데, 이는 4개의 vector들 중 쓸데없는 vector이 들어가있다는 의미이고, lineary dependent이다.

- 즉, 어떤 vector 하나가 다른 vector들의 linear combination으로 표현이 가능하다는 의미이고, vector들 중 하나를 제외시킬 수 있음

Thm 1.7



- Subset S: linearly independent

$u_1, u_2, \dots, u_n \in S$

$v \in V, v \notin S$ 일 때, $S \cup \{v\}$: linearly dependent

$\Leftrightarrow v \in \text{span}(S)$

- S는 linear independent이고, v와의 합집합은 lineary dependent 이면, v는 Span(S)에 속한다.

<증명>

Pf) =>) Suppose $a_0 v + a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0$.
$a_0 \neq 0$ (만약, a_0=0 이면, a_1=a_2= ⋯ = $a_n = 0$ by assumption)
v=$a_0^{-1}(-a_1 u_1 - \cdots - a_n u_n)$
= $-a_0^{-1} a_1 u_1 - \cdots - a_0^{-1} a_n u_n \in$ span(S)

- v를 S의 linear combination으로 풀어쓸 수 있기 때문에 span(s)에 속한다.

Basis and Dimension

- Def. A basis β for a vector space is a linear independent subset of V that generates(spans) V.

- Vector space에 basis가 있다면 이는 lineary independent 하면서, 동시에 generates 한다.

Ex. 1 span(ϕ)={0}
ϕ: linearly independent

- 공집합의 Span은 항상 0이기 때문에 공집합은 lineary independent이다.

- 공집합은 Zeor space에 basis가 된다. (Zero vector은 basis에 들어갈 수 없음)

Thm 1.8 $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$: a subset of V

- 베타는 V의 subset이고, 베타가 V의 basis가 된다는 의미는 V의 임의의 원소 v 가 베타의 linear combination으로 표현이 된다는 뜻이다.

- basis가 있으면 어떠한 vector도 basis의 linear combination으로 unique하게 나타낼 수 있다.

<증명>

Pf) =>)

β: a basis for V => span(β)=V

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

Suppose $v = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n$

$$0 = (a_1-b_1)u_1 + (a_2-b_2)u_2 + \cdots + (a_n-b_n)u_n$$

By independence,

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_n - b_n = 0$$

Thus, linear combination is unique.