## 3강 Span, linear independence

#### Linear combination

• Def: 
$$v=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$$
  $v$  is called a linear combination of  $u_1,u_2,\ldots,u_n$ 

- v는 u1,u2...,un들의 linear combination으로 불린다.

Ex1) (3,5) = 3 (1,0) + 5 (0,1) 일때 (3,5)는 (1,0)과 (0,1)의 linear combination이고, 계수는 3과 5이다.

Ex2)

$$2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$$
 is a linear combination of  $x^3 - 2x^2 - 5x - 3$  and  $3x^3 - 5x^2 - 4x - 6$ ?

- 이를 만족하려면 아래의 식에서 a와 b가 존재 해야한다.

$$2x^{3} - 2x^{2} + 12x - 6$$

$$= a(x^{3} - 2x^{2} - 5x - 3) + b(3x^{3} - 5x^{2} - 4x - 6)$$

$$a + 3b = 2$$

$$-2a - 5b = -2$$

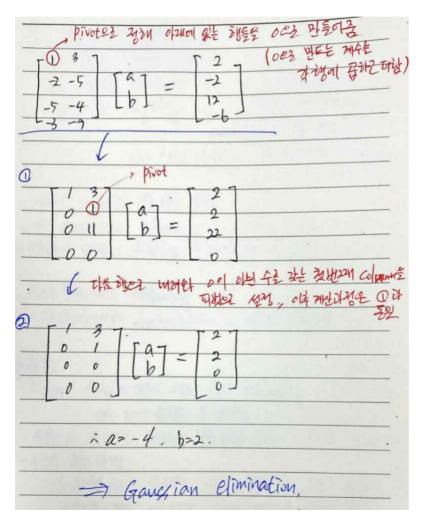
$$-5a - 4b = 12$$

$$-3a - 9b = -6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \\ -5 & -4 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(row) Echelon form}$$

### - 풀이과정 :



### Span

Def: 
$$\emptyset \subsetneq S \subset V$$
  
Span(S) = { All linear combinations of vectors in S }  
Span( $\emptyset$ )  $\stackrel{\text{def}}{=}$  {0}

- Span(S): S에 있는 vector들의 가능한 모든 linear combinations 들의 집합

Ex. Span{
$$(1,0,0)$$
,  $(0,1,0)$ } = xy-plane in  $R^3$ 

- a (1,0,0) + b (0,1,0)의 집합은 (a,b,0)이라는 3차원 상에서 xy-평면이 된다.

# span(S) is a subspace of V

- Span은 Vector space의 Subspace이다.

if 
$$S=\emptyset$$
 span(S) = {0} is a subspace of V  
if  $S \neq \emptyset$ ,  $x, y \in \text{span}(S)$ ,  $u_1, u_2, ..., u_n \in S$   

$$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

$$y = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n$$

$$x + y \in S$$
span(S) is a subspace. Show

- S가 공집합 또는 공집합이 아닐 경우도 Subspace의 조건을 만족 (덧셈과 스칼 라곱에 대해서 닫혀있어) Span(S)는 subspace이다. - Vector space V의 Subspace가 S를 포함하는 W라고 가정하면 W는 Span(S) 도 반드시 포함해야한다.