5강 Dimension, linear transformation

Dimension

- basis 안에 들어있는 벡터들의 개수

• dim(V) = # of vectors in each basis

Ex. 7 $\quad V = \{0\} \quad$ dim(V)= 0

Ex. 8 $\quad V = F^4 \quad$ dim(V)= 4

Ex. 9 $\quad V = M_{2\times3}(F) \quad$ dim(V)= 6

Basis for V?

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 공집합의 dimension은 0이다.

Ex. 9.

$$V = P_n(F) \ni a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dim(V)= $n + 1$

- Pn(F)는 n차 이하의 다항식의 집합이고, 이는 x의 0승 까지 포함하여 dimension은 n+1차가 된다.

Pn(F)의 basis는 {1,x,...,x^n}이 된다.

Thm 1.11 Dimension of subspace

V: finite dimensional vector space

W: a subspace of V

$\dim(V) < \infty, \ W < V$

$\Rightarrow$ 1) $\dim(W) \leq \dim(V)$

2) $\dim(W) = \dim(V) \quad \Rightarrow V = W$

Ex. 17

$$W = \{(a_1, a_2, \ldots, a_5) | a_1 + a_3 + a_5 = 0, a_2 = a_4\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_1, a_2: pivot variables $\quad a_3, a_4, a_5$: free variables

- W는 5차원에서 2개의 제약조건 식이 있기 때문에 W는 3차원이 된다.

- 첫번째 column과 두번째 column이 pivot이 되고, 나머지는 free variables가 된다.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \\ \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dim (W) = 3

Linear transformation

- Def: V, W: vector space over F

$T: V \to W$ $\quad$ V: domain $\quad$ W: codomain

T is a linear transformation from V to W

if $\quad T(x+y) = T(x) + T(y)$

$\quad\quad T(cx) = cT(x)$ for all $x, y \in V, c \in F$

- F라는 필드를 같이 쓰는 vector space V와 W가 있을 때 V를 정의역, W를 공역이라고 가정하고, T가 linear transformation이 되려면 식을 만족해야한다.

- 두개의 식을 둘다 만족하면 superposiotion principle이 성립한다하고, 성립하면 linear transformation으로 부른다.

Properties of linear map

- $T(0) = 0$
- $T(cx + y) = cT(x) + T(y)$ for all $x, y \in V, c \in F$
- $T(x - y) = T(x) + T(y)$
- $T(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$

- linear system을 위해 만족해야하는 조건+