1. Field, vector space

(1) **Field**

- 조건
  - 두 개의 연산 (더하기, 곱하기)를 가지고 있음
  - 두 가지 연산에 대해서 닫혀 있어야 함 (두 가지 연산에 대해서 두 가지 연산을 수행한 후에도 field 안에 들어와야 한다.)
  - 덧셈과 곱셈에 대해 교환법칙, 결합법칙 성립

    $a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a$ (commutative)
    $(a + b) + c = a + (b + c),\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associative)

  - 덧셈과 곱셈에 대한 역원 존재, 분배법칙 성립

    $a + (-a) = 0,\ b \cdot b^{-1} = 1$
    - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

  -> 위의 성질들을 만족하는 원소들의 집합을 Field라고 한다.

- **Example of Field**

  - R, Q, C
  - $\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$
  - $Z_2 = \{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

- R, Q, C (실수, 유리수 복소수)는 field 이고. 자연수와, 정수는 Field가 아니다.

(2) **Vector space(벡터 공간)**

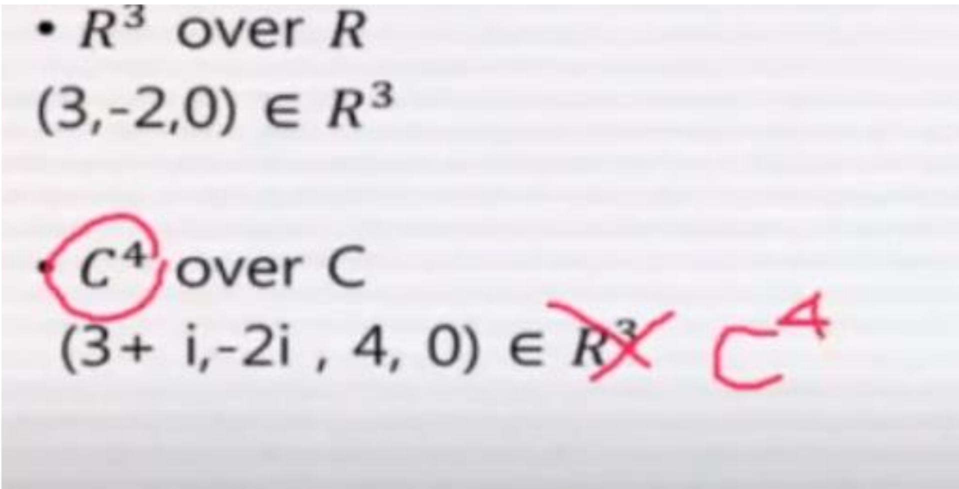
- Vector space도 Field 이다.
- Vector space도 Field와 마찬가지로 Field의 조건들을 성립해야 한다.

• Def. Vector space V over F
= a set of vectors with two operation (+, ·)
$x, y \in V, \quad a, b \in F$
- Closed
- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $\exists\, 0 \in V \; s.t. \; x + 0 = x$
- $\forall x \in V \; s.t. \; 1 \cdot x = x$
- $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

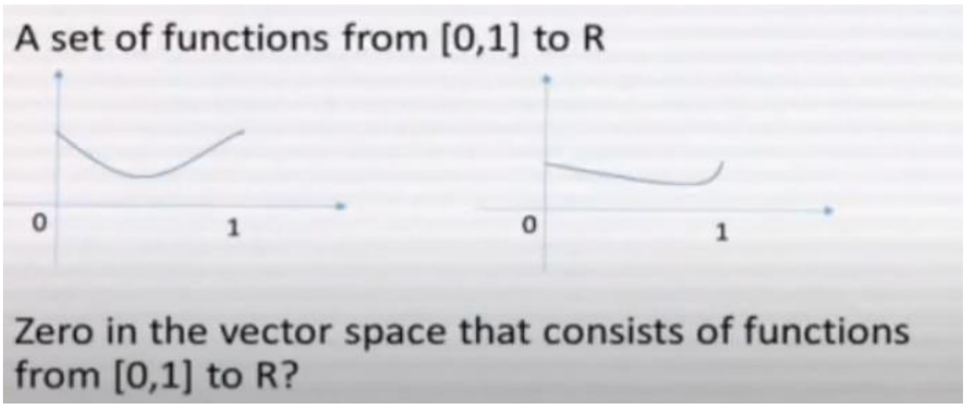
- **Example of Vector space**
  - Vector space의 원소들은 아래와 같은 성질을 갖는다.

• Ex.1 $F^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in F\}$
F^n over F is a vector space
$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^n$
$v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in F^n$
$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in F^n$
$c \cdot v = (c \cdot b_1, c \cdot b_2, \ldots, c \cdot b_n) \in F^n$

- Vector space를 각각 실수와 복소수로 가정할 때

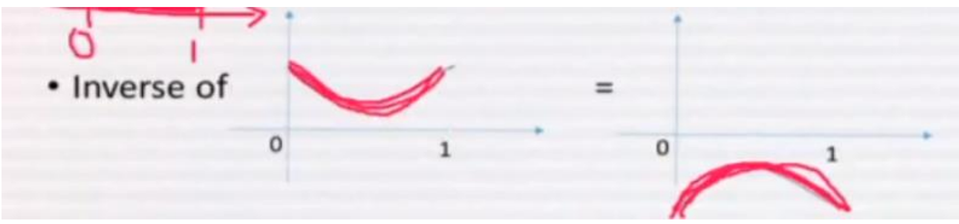


- [0,1]의 정의역과 실수 전체의 공역을 갖는 함수들의 집합은 Vector space가 될 수 있다.



→ Vector space는 Zero vector을 가져야 하기 때문에 Zero vector은 [0,1] 구간에서 0값을 갖는 함수가 될 것이다.

- X축에 대칭인 함수가 역원 함수가 된다. 서로 더하면 항등원이 된다.



- (a1,b1) + (b1,b2) = (a1 +b1, a2- b2)로 정의했을 때 뺄셈으로 인해 교환법칙을 성립하지 않게 되어 Vector space가 아니게 된다.

$$S = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in R\}$$
$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 - b_2)$$
$$c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$$

S is a vector space?

Commutative, Associative?

- **Vector space가 만족해야하는 법칙**

1. Cancellation Law (Vector space에서는 덧셈에 대해서 Cancellation 할 수 있다.)

$\forall x, y \in V,$

$x + z = y + z \quad => \quad x = y$

증명) $$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z)$$
$$x + (z + (-z)) = y + (z + (-z))$$
$$x + 0 = y + 0$$
$$x = y$$

2. Identity 0 is unique (Zero vector는 vector space 안에서 유일하다.)

- Identity 0 is unique

Pf) Suppose we have two zeroes 0 and 0'
$$x + 0 = x = x + 0'$$

By cancellation,
$$0 = 0'$$

3. Inverse is unique (vector space 안에서 역원은 유일하다.)

Pf) Suppose we have two inverses of x, which are a and b.

$$x + a = 0$$
$$x + b = 0$$
$$x + a = x + b$$

By cancellation,

$$a = b$$