1. Field, vector space

(1) **Field**

- 조건

  ▪ 두 개의 연산 (더하기, 곱하기)를 가지고 있음

  ▪ 두 가지 연산에 대해서 닫혀 있어야 함 (두 가지 연산에 대해서 두 가지 연산을 수행한 후에도 field 안에 들어와야 한다.)

  ▪ 덧셈과 곱셈에 대해 교환법칙, 결합법칙 성립

  $a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a$ (commutative)
  $(a + b) + c = a + (b + c),\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associative)

  ▪ 덧셈과 곱셈에 대한 역원 존재, 분배법칙 성립

  $$a + (-a) = 0,\ b \cdot b^{-1} = 1$$
  $$-\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

  -> 위의 성질들을 만족하는 원소들의 집합을 Field라고 한다.

- **Example of Field**

  • R, Q, C
  • $\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$
  • $Z_2 = \{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

- R, Q, C (실수, 유리수 복소수)는 field 이고. 자연수와, 정수는 Field가 아니다.

(2) **Vector space(벡터 공간)**

- Vector space도 Field 이다.
- Vector space도 Field와 마찬가지로 Field의 조건들을 성립해야 한다.

• Def. Vector space V over F
= a set of vectors with two operation (+, ·)
$x, y \in V, \quad a, b \in F$
- Closed
- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $\exists\, 0 \in V \ s.t. \ x + 0 = x$
- $\forall x \in V \ s.t. \ 1 \cdot x = x$
- $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

- **Example of Vector space**
  - Vector space의 원소들은 아래와 같은 성질을 갖는다.

• Ex.1 $F^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in F\}$
F^n over F is a vector space
$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^n$
$v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in F^n$
$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in F^n$
$c \cdot v = (c \cdot b_1, c \cdot b_2, \ldots, c \cdot b_n) \in F^n$

  - Vector space를 각각 실수와 복소수로 가정할 때

- R^3 over R

$(3,-2,0) \in R^3$

- C^4 over C

$(3+ i, -2i, 4, 0) \in \cancel{R^3}$ C^4

-