Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О.В. КАЗАНСКАЯ, С.Г. ЮН,
О.К. АЛЬСОВА

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ПРАКТИКУМ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2012

УДК 519.85(075.8)
К 142

Рецензент
Ю.А. Котов, канд. физ.-мат. техн. наук, доцент

Работа подготовлена на кафедре вычислительной техники
для студентов АВТФ (направление 230100 – Информатика
и вычислительная техника), ФМА, ФЭН
(направление 080200 – Менеджмент)

Казанская О.В.
К 142 Модели и методы оптимизации. Практикум : учеб. пособие / О.В. Казанская, С.Г. Юн, О.К. Альсова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. – 204 с.

ISBN 978-5-7782-1983-0

Работа посвящена проблемам линейного и целочисленного программирования, векторной оптимизации. Материал ориентирован на получение студентами практических навыков.

Адресовано студентам, изучающим дисциплины «Математические методы оптимизации и теория принятия решения», «Математические методы исследования экономики и математическое программирование» и «Экономико-математические методы и модели в экономике».

УДК 519.85(075.8)

ISBN 978-5-7782-1983-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список используемых сокращений 6
Введение 7
Глава 1. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 11
1.1. Математическая постановка задач математического программирования, линейного программирования 11
1.2. Схема построения оптимизационных моделей 15
1.3. Задачи к практикуму 17
1.4. Примеры оптимизационных моделей для обсуждения 26
1.4.1. Задачи линейного программирования 27
1.4.2. Задачи целочисленного линейного программирования 36
1.4.3. Задачи нелинейной оптимизации 43
1.4.4. Задачи векторной оптимизации 59
1.4.5. Обобщенные и отраслевые модели производственного планирования 62
Контрольные вопросы 74
Глава 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 75
2.1. Основные понятия линейного программирования 75
2.2. Графический метод решения ЗЛП 81
2.2.1. Геометрическая интерпретация ЗЛП 81
2.2.2. Графический метод 84
2.3. Вычислительная схема симплекс-метода для решения задач ЛП 86

2.3.1. Особенности симплекс-метода..86
2.3.2. Вычислительная схема симплекс-метода 88
Контрольные вопросы 101
Глава 3. ТИПОВЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ 103
3.1. Постановка и модели типовых задач оптимизации........................103
3.1.1. Задача о диете (пищевом рационе) 103
3.1.2. Задача о рюкзаке..104
3.1.3. Транспортная задача 105
3.1.4. Задача о назначении..108
3.1.5. Задача о коммивояжере 110
3.1.6. Задача о раскрое материалов 112
3.2. Задачи для самостоятельного изучения..113
3.3. Решение транспортной задачи..115
3.3.1. Определение опорного плана транспортной задачи.................115
3.3.2. Метод северо-западного угла для нахождения опорного плана ТЗ 116
3.3.3. Метод минимального элемента для нахождения опорного плана ТЗ 118
3.3.4. Нахождение оптимального решения транспортной задачи – метод потенциалов 119
3.4. Решение задачи о коммивояжере...126
Контрольные вопросы 135
Глава 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ..137
4.1. Математическая постановка задач целочисленного линейного программирования..137
4.2. Графический метод решения задач ЦЛП..138
4.3. Метод ветвей и границ для решения задач ЦЛП 139
Контрольные вопросы 146

Глава 5. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ ... 147
5.1. Постановка задачи векторной оптимизации ... 147
5.2. Основные определения теории векторной оптимизации. Принцип Парето ... 149
5.3. Нормализация критериев ... 153
5.4. Решение многокритериальных задач методом ограничений. Компромиссное решение ... 156
5.5. Решение многокритериальных задач методом уступок ... 160
5.6. Метод свертки для решения многокритериальной задачи ... 162
Контрольные вопросы ... 164
Глава 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЕ В MS EXCEL ... 165
6.1. Настройка MS Excel 2007 ... 165
6.2. Подготовка листа с исходными данными ... 166
6.3. Установка данных для пакета «Поиск решения» ... 167
6.4. Получение результатов решения ... 169
6.5. Решение в MS Excel задач ЦЛП ... 170
6.6. Пример решения транспортной задачи ... 171
6.7. Исследование устойчивости решения задачи ЛП ... 173
Контрольные вопросы ... 182
Глава 7. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ, ДИСКРЕТНОЙ И ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ» ... 183
7.1. Содержание задания в зависимости от категории ... 183
7.2. 100 вариантов заданий ... 185
Библиографический список ... 189
Приложение. ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ЛП ДЛЯ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ... 190

Список используемых сокращений

ЗЛП –	задача линейного программирования
ЛП –	линейное программирование
ЛПР –	лицо, принимающее решение
МП –	математическое программирование
ОДР –	область допустимых решений
ТЗ –	транспортная задача
ЦЛП –	целочисленное линейное программирование
ЦФ –	целевая функция

Введение

Дисциплины, в которых изучаются модели и методы оптимизации («Методы оптимизации и теория принятия решений», «Исследование операций», «Математические модели исследования экономики и математическое программирование» и др.), включены во многие образовательные программы высшего профессионального образования. Как правило, это программы по направлениям инженерного образования и по направлениям, связанным с управлением (менеджментом) и экономикой.

Современное управление требует принятия решений, имеющих не только большое стоимостное выражение, но и различные социальные и техногенные последствия. Поэтому оно должно быть обеспечено разнообразным инструментарием, позволяющим выбрать из имеющихся вариантов если не наилучшее (оптимальное) решение, то, во всяком случае, предпочтительное с точки зрения лица, принимающего решение. Необходимость изучения методов оптимизации и теории принятия решений в инженерных направлениях и специальностях обусловлена, как минимум, двумя факторами. Во-первых, большинство инженеров рано или поздно становятся руководителями (линейными, среднего или высшего звена) и, следовательно, вынуждены принимать управленческие решения, а во-вторых, сама инженерная деятельность предполагает принятие многочисленных технических и технологических решений (при проектировании более совершенной конструкции двигателя, выборе оптимальной последовательности обработки потоков задач, рационального режима функционирования энергостанций и др.). Оптимизационные задачи и задачи принятия решений моделируются и решаются в самых различных областях техники.

Логика современных инновационных программ инженерного образования, включающих в себя блок курсов, связанных с эффективным управлением (стратегический и операционный производственный менеджмент, управление проектами, инновационный менеджмент и др.) и сопровождаемых технологиями проблемного и проектного обучения, предполагает, что обучающиеся должны владеть навыками математического обоснования принятия решений. К ним относятся навыки математического моделирования оптимизационных задач, выбора адекватного математического обеспечения (метода, алгоритма, программной системы) с необходимым обоснованием, анализа полученных результатов и их интерпретации в терминах предметной области.

Современная теория математического обоснования принятия решений во многом строится на теории оптимизации и не может быть изложена достаточно стройно без знания основ математического программирования и исследования операций.

Будущие инженеры и управленцы в большинстве своем в терминологии современного компьютеризированного мира являются в основном пользователями (!), а не разработчиками богатого инструментария оптимизации. Исходя из этого посыла авторы пособия считают, что основной целью изучения соответствующих курсов помимо получения знаний о базовых видах оптимизационных задач, признаках их классификации, о методах и об алгоритмах их решения является приобретение навыков использования комплексной методики решения конкретных задач исследования операций и теории принятия решений, начиная с постановки задачи выбора оптимального и принятия наиболее рационального решения в терминах исследования операций, математического программирования и теории принятия решений и заканчивая умением анализировать полученные результаты и интерпретировать их в терминах исходной задачи и ее постановки. Такая комплексная методика предполагает наличие навыков:

- адекватного построения, понимания и классификации математических оптимизационных моделей, подбора типовых моделей исследования операций и математического программирования;
- выбора (и обоснования выбора) метода (модели, алгоритма, программной системы) решения задач оптимизации;
- сопоставления результатов решения задачи, полученных разными методами, использования графической и содержательной их интерпретации, реализации самоконтроля в ходе выполнения работы.

Многолетний опыт авторов настоящего пособия в преподавании теории и практики оптимизации показал, что самое простое для большинства студентов, изучающих эти дисциплины, – освоение алгоритмов оптимизации, зачастую без понимания сути исходной задачи и необходимости применения именно данного алгоритма и, следовательно, без возможности интерпретации полученных результатов. Самое сложное – комплексное исследование задачи начиная с ее постановки и построения модели. Моделирование оптимизационных задач, несмотря на видимую простоту, опирается на ряд законов, понимание которых приходит после некоторого тренинга. Поэтому в данном пособии большое внимание уделяется именно построению оптимизационных моделей в различных учебных формах (построение моделей по заданным постановкам, анализ примеров моделей разного типа для различных задач, классификация оптимизационных моделей, рассмотрение вычислительных особенностей решения задач, представленных теми или иными моделями).

Учебное пособие охватывает вводные разделы в теорию оптимизации – традиционно это линейное и целочисленное линейное программирование. Кроме того, авторы включили раздел по многокритериальной оптимизации, рассматриваемой на примерах с линейными целевыми функциями и функциями ограничений. Этот раздел зачастую выносят за пределы курсов по оптимизации, предпочитая давать его в рамках теории принятия решений. Но, во-первых, далеко не во всех образовательных программах учебные планы содержат дисциплину по теории принятия решений, во-вторых, изучение этого раздела сразу после линейного программирования обеспечивает преемственность и достаточное простое его восприятие.

Пособие содержит основные теоретические сведения по рассматриваемым разделам, но в большей степени ориентировано на получение практических навыков. В учебной литературе чаще излагается теория оптимизации, нежели методика решения оптимизационных задач на разных его этапах. Материал, представленный в данном пособии, активно используется в НГТУ в течение нескольких лет и обеспечивает учебный процесс по дисциплине «Математические методы оптимизации» для студентов, обучающихся по направлению бакалаврской подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Математические методы исследования экономики и математическое программирование» по направлению бакалаврской подготовки «Экономика».

Представленные материалы позволяют обеспечить проведение практических занятий, включая такую форму работы, как доклад по той или иной оптимизационной задаче с последующим обсуждением в группе, а также выдачу и подготовку текущих домашних, в том числе индивидуальных заданий, и семестровых индивидуальных, расчетно-графических работ, предполагающих решение некоторых задач в программной системе Microsoft Office Excel.

Настоящее издание – второе исправленное и дополненное издание 2007 года «Модели и методы линейной и векторной оптимизации». Авторы признательны доценту НГТУ, кандидату технических наук Сергею Васильевичу Ренину за внесенные замечания и поправки при подготовке первого издания.

Г Л А В А 1

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Математическая постановка задач математического программирования, линейного программирования

Термин «задача оптимизации» в литературе, посвященной исследованию операций, математическому программированию, методам оптимизации, зачастую толкуется неоднозначно. Иногда под этим термином понимают некоторое вербальное описание *оптимизационной ситуации*, в которой необходимо выбрать некоторое решение из имеющихся (допустимых) таким образом, чтобы достичь наилучшего значения заданного *критерия оптимальности*. При этом в качестве критерия оптимальности выступает некоторая характеристика эффективности, позволяющая соизмерять различные решения друг с другом (доход, прибыль, издержки, коэффициент полезного действия, быстродействие, вес конструкции и т. д.).

Чаще понятие «задача оптимизации» используется для обозначения ***оптимизационной модели***. Как правило, в этом случае речь идет о ***модели математического программирования***.

Математическая постановка (*модель*) *задачи математического программирования* (МП) выглядит следующим образом:

необходимо определить значения вектора переменных $x = (x_1, x_2,\ldots$ $\ldots, x_n)$, которые удовлетворяют ограничениям, заданным с помощью функций вида $g_i\,(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, и доставляют максимум или минимум целевой функции $f\,(x_1, x_2,\ldots, x_n)$.

Другими словами, необходимо определить значения вектора переменных $x = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$, для которых:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n) \to \max\ (\min),$$

$$g_i(x_1, x_2,\dots, x_n) \le b_i \qquad \text{для всех } i = 1,\dots, m.$$

Искомое решение задачи МП (план, вектор управления) – это всегда вектор x из пространства E^n (E^n – n-мерное векторное пространство), в геометрической интерпретации – это *точка* векторного n-мерного пространства.

Допустимым решением (планом) x' задачи МП называется такое решение, которое удовлетворяет ее ограничениям $g_i(x'_1, x'_2,\dots, x'_n) \le b_i$ для всех $i = 1,\dots, m$.

Совокупность допустимых решений задачи называют ***областью допустимых решений*** (**ОДР**) задачи МП, эту область, как правило, обозначают символом D.

Оптимальным решением (иногда просто ***решением***) называется такое допустимое решение $\boldsymbol{x^*}$, при котором целевая функция достигает своего оптимального (в нашем случае – максимального) значения, т. е. решение $\boldsymbol{x^*}$ удовлетворяет условию

$$\max_x f(x) = f(x^*).$$

Величина $f(x^*)$называется ***оптимальным значением целевой функции*** и обозначается $\boldsymbol{f^*}$.

Окончательным решением задачи является пара $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{f}^*)$, состоящая из оптимального решения и оптимального значения целевой функции.

Математическим программированием принято называть науку о моделях математического программирования, свойствах их решений и методах отыскания оптимальных решений.

Если в задаче МП хотя бы одна из функций, задающих ограничения $g_i(x_1, x_2,\dots, x_n)$, или целевая функция $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ нелинейны, то такая задача МП называется ***задачей нелинейного программирования***.

Пример. Найти значения вектора переменных $x = (x_1, x_2)$, для которых $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$ при ограничении $g_i(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 2$. Достаточно легко показать, что ответ этой задачи: оптимальное решение $\boldsymbol{x^*} = (1,1)$, а оптимальное значение $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^*}) = \boldsymbol{f^*} = 2$.

Если задача МП содержит только линейные функции, то ее называют ***задачей линейного программирования***.

В общем виде задача линейного программирования (ЗЛП) может быть сформулирована как задача нахождения вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$

такого, что линейная целевая функция $z(x)$ достигает своего максимального или минимального значения, при этом вектор $x = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ должен удовлетворять системе линейных неравенств. Следовательно, ***математическая постановка задачи ЛП*** (модель ЛП) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min); \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Модель задачи линейного программирования (ЛП) может быть записана и в другом (эквивалентном!) виде:

$$\begin{cases} z(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max(\min); \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1, m}; \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Линейные неравенства в модели ЛП вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

называют ***функциональными ограничениями***. Необходимо заметить, что в частных случаях некоторые из функциональных ограничений могут быть равенствами, т. е. уравнениями. Без ограничения общности рассматриваемой модели будем предполагать, что левая часть ограничения меньше или равна правой. (Нетрудно видеть, что ограничения типа $\ge$ легко свести к описанным ограничениям типа $\le$, умножив на (-1) обе части неравенств типа $\ge$.)

Ограничения неотрицательности переменных, а именно: $x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$, в силу особой структуры обычно выделяют отдельно (часто их называют ***тривиальными ограничениями***). Дополнительно следует заметить, что в математическом смысле задача поиска максимума функции эквивалентна задаче поиска минимума. Действительно:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \;\Rightarrow\; z' = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \to \min .$$

Например, точка максимума функции $f(x) = x^2$ очевидно равна точке минимума функции $f'(x) = -x^2$ (при формировании окончательного ответа задачи необходимо учесть, что $-z^* = z(x^*) = z'(x^*) = -z'^*$.

Модель задачи ЛП (1.1)–(1.2) можно представить и в матричной форме:

$$\begin{aligned} & z = c^{\mathrm{T}} x = (c, x) = \to \max, \\ & x \in D = \left\{ x \in E^n \,\middle|\, Ax \leq b, x \geq 0 \right\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где c, x – векторы-столбцы из пространства E^n; b – вектор-столбец из m-мерного пространства E^m; A – матрица коэффициентов условий $\{a_{ij}\}$ размерности $m \times n$. То есть

$$c = \begin{Bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{Bmatrix},\; x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix},\; b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{Bmatrix},\; A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}.$$

Задачу линейного программирования, записанную в форме (1.1)–(1.3), называют ***общей задачей линейного программирования***[*].

Процесс решения задачи ЛП заключается в отыскании решений ЗЛП или получении вывода о том, что задача ЛП по тем или иным причинам не имеет решений.

---

[*] Смысл понятия «общая задача ЛП» состоит в том, что многочисленные частные случаи моделей ЛП в общем виде можно представить как одну модель, которая и называется ***общей задачей ЛП***.

Следует отметить, что оптимальное значение целевой функции $z^* = z(x^*)$ является лишь характеристикой оптимального решения x^*. Зная оптимальное решение x^*, всегда можно рассчитать оптимальное значение $z^* = z(x^*)$, но, зная лишь оптимальное значение функции z^*, как правило, невозможно найти оптимальное решение x^*. Действительно, если известен способ, как достичь максимальной прибыли, можно рассчитать значение прибыли, но если известна только потенциально достижимая прибыль, способ ее достижения отнюдь не очевиден. ***Поэтому в задаче ЛП необходимо найти именно оптимальное решение*** $\boldsymbol{x^*}$, а максимальное (или минимальное) значение целевой функции z^* является лишь характеристикой этого решения.

1.2. Схема построения оптимизационных моделей

Практически невозможно разработать четкий алгоритм процедуры построения оптимизационных моделей. Тем не менее на начальной стадии изучения основ моделирования оптимизационных задач полезно ознакомиться с некоторыми принципами построения оптимизационных моделей, которые и изложены в данном разделе.

Прежде чем построить математическую модель оптимизационной задачи в форме (1.1)–(1.2), нужно четко разобраться с ситуацией, представленной в исходной задаче. Для этого необходимо ответить на несколько вопросов.

1. Что в задаче является искомыми величинами? Как лучше обозначить эти величины? Являются ли эти величины управляемыми?

2. Какова цель решения? Что в задаче служит критерием эффективности (оптимальности) решения (например, прибыль, себестоимость, время и т. д.)? В каком направлении должно изменяться значение этого критерия (увеличиваться или уменьшаться) для достижения наилучших результатов?

3. Какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные характеристики задачи (например, количество ресурса, затраченного при производстве, не может превышать его запас на складе; количество выпускаемой продукции не может быть больше емкости склада, где она будет храниться; план выпускаемой продукции вряд ли должен превышать рыночный спрос на эту продукцию и т. д.).

Только после ответа на все эти вопросы можно приступать к построению математической модели.

В общем виде ***схема построения оптимизационной модели*** состоит из следующих этапов.

Этап 1. **Выбор и обозначение переменных задачи**. Несмотря на кажущуюся простоту этого вопроса, ответ на него далеко не всегда очевиден. Зачастую этапу построения модели предшествует долгое согласование со специалистом в соответствующей предметной области по поводу представления в терминах математического программирования исходной задачи, которая, естественно, изначально сформулирована в терминах предметной области.

При формировании вектора искомых переменных необходимо помнить, что речь идет о переменных величинах, которые можно изменять целенаправленным образом, т. е. об ***управляемых переменных***. Можно, конечно, поставить задачу определения спроса на рынке на предлагаемый товар с целью оптимизации прибыли этой фирмы. Но попытка управлять спросом на рынке вряд ли будет успешной. Более реальная задача – прогнозирование спроса, но эта задача уже не является задачей математического программирования, т. е. задачей планирования, скорее это задача прикладного статистического анализа, т. е. описания.

Искомые величины являются ***переменными задачи***, которые, как правило, обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде $x = (x_1, x_2,..., x_n)$. При этом переменные могут иметь и более чем один индекс, например x_{ij} или x_{ikl}.

Этап 2. **Представление целевой функции задачи**. Цель решения записывается в виде целевой функции (ЦФ), обозначаемой в задачах ЛП, как правило, $z(x)$. ЦФ $z(x)$ представляет собой математическое выражение критерия оптимальности и по сути отображает зависимость значения критерия оптимальности от переменных задачи.

Этап 3. **Представление ограничений задачи**. Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т. е. ограничений. Левые и правые части ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех характеристик задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

В процессе построения оптимизационной модели рекомендуется указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и функций всех ограничений, что позволяет предотвратить возможные ошибки в построении модели.

1.3. Задачи к практикуму

Построение оптимизационных моделей является, с одной стороны, очень важным и сложным, а с другой – практически не поддающимся алгоритмизации процессом. Поэтому более полезным представляется освоение премудростей построения оптимизационных моделей на конкретных примерах.

Задача 1.1. Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента *A* и *B*. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы ингредиентов *A* и *B* на производство 1 т соответствующих красок (табл. 1.1). Изучение рынка сбыта показало, что спрос на краску второго вида никогда не превышает 2 т/сут. Оптовые цены 1 т красок: 3 тыс. р. за 1 т краски первого вида и 2 тыс. р. за 1 т краски второго вида.

Задание. Составьте математическую (оптимизационную) модель задачи, в которой определяется, какое количество краски каждого вида надо произвести в условиях ограниченного количества ингредиентов *A* и *B*, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 1.1

Исходные данные к задаче о производстве красок

Ингредиенты	Расход ингредиентов, $т_{ингр}$ / $т_{крас}$		Запас, т инг / сут
	Краска первого вида	Краска второго вида	
A	1	2	6
B	2	1	8

Построение модели. Модель задачи строим, используя описанную в разделе 1.2 схему.

1. *Переменные задачи*. В задаче требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, ее переменными, являются суточные объемы производства каждого вида красок. Введем обозначения:

x_1 – суточный объем производства краски первого вида [$т_{крас}$ /сут];

x_2 – суточный объем производства краски второго вида [$т_{крас}$ /сут].

Это же можно записать иначе: x_i – суточный объем производства краски i-го вида, где $i = \overline{1,2}$.

2. *Целевая функция*. В условии задачи сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. То есть критерием оптимальности служит характеристика суточного дохода, которая должна стремиться к максимуму. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи красок обоих видов, необходимо знать объемы производства красок, т. е. x_1 и x_2 тонн краски в сутки, а также оптовые цены на краски первого и второго видов – согласно условию соответственно 3 и 2 тыс. р. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства краски первого вида равен $3x_1$ тыс. р./сут, а от продажи краски второго вида – $2x_2$ тыс. р./сут. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы дохода от продажи красок первого и второго видов (при предположении независимости объемов сбыта каждой из красок друг от друга):

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max .$$

Проверим используемые в ЦФ единицы измерения:

$$\left[\frac{\text{тыс. р.}}{\text{т}} \frac{\text{т}}{\text{сут}} = \frac{\text{тыс. р.}}{\text{сут}} \right].$$

Действительно, общий доход измеряется в тысячах рублей, полученных за сутки.

3. *Ограничения*. Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество ингредиента A, а также и B, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать соответствующего суточного запаса этих ингредиентов на складе;
- объем производства краски второго вида не должен превышать 2 т / сут, что следует из результатов изучения рынков сбыта;
- объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на три группы, обусловленные:

- расходом ингредиентов;
- рыночным спросом на краску;
- неотрицательностью объемов производства.

Ограничения расхода любого из ингредиентов имеют следующую содержательную форму записи:

Расход конкретного ингредиента на производство обоих видов краски	$\le$	*Максимально возможный запас данного ингредиента*

Запишем эти ограничения в математической форме.

Расход ингредиента A в сутки при производстве двух видов красок составит $1x_1 + 2x_2$ при том, что величина суточного запаса ингредиента на складе 6 т (см. табл. 1.1). Таким образом, ограничение расхода ингредиента A имеет вид

$$1x_1 + 2x_2 \le 6 .$$

Примечание. Рекомендуется проверять единицы измерения левой и правой частей каждого из ограничений, поскольку несовпадение свидетельствует о принципиальной ошибке при составлении ограничений.

Представленное выше ограничение можно проверить так:

$$\left[\frac{\text{т}_{\text{ингр}} A}{\text{т}_{\text{крас}}} \frac{\text{т}_{\text{крас}}}{\text{сут}} \le \frac{\text{т}_{\text{ингр}}\ A}{\text{сут}}\right].$$

Аналогично формируется математическая запись ограничения расхода B:

$$2x_1 + x_2 \le 8 \text{; проверка: } \left[\frac{\text{т}_{\text{ингр}} B}{\text{т}_{\text{крас}}} \frac{\text{т}_{\text{крас}}}{\text{сут}} \le \frac{\text{т}_{\text{ингр}}\ B}{\text{сут}}\right].$$

Ограничение суточного объема производства краски первого вида имеет содержательную форму:

Спрос на краску первого вида	$\le$	2 *т/сут*.

Таким образом, в модели ограничение выглядит так:

$$x_1 \le 2 \text{; проверка: } \left[\frac{\text{т}_{\text{крас}}}{\text{сут}} \le \frac{\text{т}_{\text{крас}}}{\text{сут}}\right].$$

Неотрицательность объемов производства задается как $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Таким образом, математическая модель этой задачи имеет вид

$$\begin{cases} z = 3x_1 + 2x_2 \to \max; \\ x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \\ x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Эта задача относится к классу задач ЛП, потому что целевая функция и функции ограничений линейны по отношению к переменным задачи.

Введем понятие ***размерности задачи*** ЛП, которая характеризует вычислительную сложность модели. Размерность определяется как выражение (**m** × **n**), где **m** – количество функциональных ограничений задачи (т. е. тривиальные ограничения не учитываются), а **n** – количество переменных. Нетрудно видеть, что по сути дела это есть размерность матрицы коэффициентов условий задачи в представлении (1.3).

В нашем примере размерность задачи (3 × 2).

Задача 1.2. Выполнить план по производству 32 изделий $И_1$ и 4 изделий $И_2$ взялись бригады $Б_1$ и $Б_2$. Производительность бригады $Б_1$ по производству изделий $И_1$ и $И_2$ составляет соответственно 4 и 2 изд./ч, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ч. Производительность бригады $Б_2$ – соответственно 1 и 3 изд./ч, а ее фонд рабочего времени 4 ч. Связанные с производством единицы изделия затраты для бригады $Б_1$ равны соответственно 9 и 20 р., для бригады $Б_2$ – 15 и 30 р.

Задание. Составьте математическую модель задачи, позволяющую найти оптимальный объем выпуска изделий, обеспечивающий минимальные затраты на выполнение заказа.

Построение модели.

1. *Переменные задачи*. Искомыми величинами в задаче являются объемы выпуска изделий. Изделия $И_1$ будут выпускать две бригады – $Б_1$ и $Б_2$. Поэтому необходимо различать количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_1$, и количество изделий $И_2$, произведенных бригадой $Б_2$. Аналогично объемы выпуска изделий $И_2$ бригадой $Б_1$ и бригадой $Б_2$ также являются различными величинами. Вследствие этого в

данной задаче четыре переменные. Для удобства восприятия будем использовать двухиндексную форму записи: x_{ij} – количество изделий j-го вида ($j=\overline{1,2}$), изготавливаемых бригадой i ($i=\overline{1,2}$). Наглядно переменные можно представить в виде табл. 1.2.

Таблица 1.2

Переменные задачи 1.2

Бригада (i)	Изделие (j)	
	И$_1$	И$_2$
Б$_1$	x_{11}	x_{12}
Б$_2$	x_{21}	x_{22}

2. *Целевая функция*. Цель решения задачи – выполнение плана с минимальными затратами, т. е. критерием эффективности решения служит показатель затрат на выполнение всего заказа. Поэтому ЦФ должна быть представлена формулой расчета этих затрат. Затраты каждой бригады на производство одного изделия И$_1$ и одного изделия И$_2$ известны из условия. Таким образом, ЦФ имеет вид

$$z = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min \text{; проверка: } \left[\frac{\text{р.}}{\text{шт.}} \times \text{шт.} = \text{р.}\right].$$

3. *Ограничения*. Возможные объемы производства изделий бригадами ограничиваются следующими условиями:

- общее количество изделий И$_1$, выпущенное обеими бригадами, должно быть не менее 32 шт., а общее количество изделий И$_2$ – 4 шт.;
- отпущенное на работу над данным заказом время для бригады Б$_1$ составляет 9,5 ч, а для бригады Б$_2$ – 4 ч;
- объемы производства изделий не могут быть отрицательными величинами.

Для удобства составления ограничений запишем исходные данные в виде табл. 1.3.

Таблица 1.3

Исходные данные задачи

Бригада	Производительность бригад, шт./ч		Фонд рабочего времени, ч
	И$_1$	И$_2$	
Б$_1$	4	2	9,5
Б$_2$	1	3	4
Заказ, шт.	32	4	

Ограничения по заказу изделий имеют следующий вид:

$$\begin{matrix} x_{11} + x_{21} \ge 32; \\ x_{12} + x_{22} \ge 4. \end{matrix} \quad \text{проверка: [шт.]} \ge \text{[шт.]}.$$

Ограничения по фондам времени связаны с тем, что в условии задачи в явном виде не задано время, которое тратят бригады на выпуск одного изделия $И_1$ или $И_2$, т. е. не задана трудоемкость производства. Но имеется информация о производительности каждой бригады, т. е. о количестве производимых изделий в 1 ч. Трудоемкость Тр и производительность Пр являются обратными величинами, т. е. Тр = 1/Пр.

Поэтому, используя табл. 1.3, получаем следующую информацию:

- 1/4 ч тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $И_1$;
- 1/2 ч тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $И_2$;
- 1 ч тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $И_1$;
- 1/3 ч тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $И_2$.

Запишем ограничения по фондам времени в математическом виде:

$$\begin{matrix} \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \le 9,5, \\ \dfrac{x_{21}}{1} + \dfrac{x_{22}}{3} \le 4, \end{matrix} \quad \text{проверка: } \left[\frac{\text{ч}}{\text{шт.}} \times \text{шт.} \le \text{ч} \right].$$

Неотрицательность объемов производства задается формулой

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,2}, \; j = \overline{1,2}.$$

Таким образом, математическая модель этой задачи имеет вид

$$\begin{cases} z = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min; \\ x_{11} + x_{21} \ge 32; \\ x_{12} + x_{22} \ge 4; \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \le 9,5; \\ \dfrac{x_{21}}{1} + \dfrac{x_{22}}{3} \le 4; \\ x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,2}, \; j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что это задача ЛП, размерность задачи (4×4).

Задача 1.3. **О рекламе**. Компании необходимо спланировать бюджет рекламной кампании своей продукции, которая будет проводиться посредством телевидения, радио, газет и афиш. Известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 4, 6, 3 доллара в расчете на 1 доллар затрат на рекламу. Распределение рекламного бюджета подчиняется условиям:

- полный бюджет рекламной кампании не более 0,5 млн долларов;
- расходы на телевидение не более 50 % от всех затрат на рекламу;
- расходы на афиши не менее 10 % от всех затрат на рекламу;
- расходы на радио не менее 30 % затрат от телевидения.

Необходимо распределить средства по различным видам рекламы с максимумом прибыли.

Задание. Запишите оптимизационную модель задачи.

Задача 1.4. Энергетический концерн считает, что потребность в нефтепродуктах в северном регионе определяется следующими показателями [7]:

- суммарная потребность в нефтепродуктах за год A;
- среднемесячная потребность в нефтепродуктах за зиму B.

Для хранения нефтепродуктов могут быть построены хранилища двух видов, для каждого из которых известны те же характеристики в расчете на одно хранилище: a_i, b_i, $i=\overline{1,2}$. Известны капитальные затраты на строительство одного хранилища каждого типа k_i и суммарный объем капиталовложений, выделенный на строительство в регионе, К.

Необходимо определить оптимальный план строительства, обеспечивающий удовлетворение потребности в нефтепродуктах при минимуме совокупных эксплуатационных затрат на содержание хранилищ, если известны c_i – эксплуатационные расходы на обслуживание одного хранилища i-го типа.

Задание. Постройте оптимизационную модель задачи.

Задача 1.5. Фирма выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологические операции. На рис. 1.1 показаны технологическая схема производства и трудоемкость изготовления каждого вида изделий по операциям.

Фонд рабочего времени ограничен для первой операции 430 мин, для второй – 460, для третьей – 420 мин. Изучение рынка сбыта показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 р. соответственно [2].

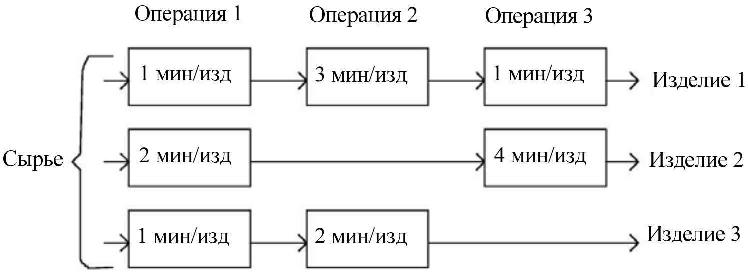


Рис. 1.1. Технологическая схема производства

Задание. Постройте математическую модель, позволяющую найти наиболее прибыльный суточный объем производства каждого вида продукции в условиях заданных ограничений фонда рабочего времени.

Задача 1.6. В районе лесного массива действуют лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2 м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2 м^3 еловых и 7 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления листов фанеры по 100 м^2 требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход от 1 м^3 пиломатериалов составляет 160 р., а от 100 м^2 фанеры – 600 р.

При построении модели следует учитывать, что пиломатериалы могут быть реализованы только в виде неделимого комплекта размером 2 м^3, а фанера – в виде неделимых листов по 100 м^2.

Задание. Постройте математическую модель для нахождения плана производства, максимизирующего доход. Определите, является ли данная задача задачей ЛП. Оцените ее размерность.

Задача 1.7. Для обслуживания двух авиалиний (Новосибирск–Москва и Новосибирск–Владивосток) авиакомпания использует три типа самолетов. Число самолетов каждого типа, которое авиакомпания имеет в наличии, обозначим величиной a_i, где $i = \overline{1, 3}$. Компания считает, что количество пассажиров, которые отправятся по каждой k-й авиалинии, составит b_k, $k = \overline{1, 2}$. Известны данные о количестве пассажиров, помещающихся в одном самолете i-го типа – величины p_i, а также эксплуатационные расходы на содержание одного самолета каждого типа на каждой авиалинии – величины c_{ik} [7].

Задание. Постройте оптимизационную модель, позволяющую определить план использования самолетов на авиалиниях, которому соответствуют минимальные суммарные эксплуатационные издержки.

Задача 1.8. Посевная площадь фермерского хозяйства состоит из трех участков, на которых можно посеять четыре культуры. В табл. 1.4 приведены исходные данные задачи [7].

Таблица 1.4

Исходные данные задачи о фермерском хозяйстве

Участок	Посевная площадь, га	Кукуруза		Горох		Картофель		Рожь	
		Урожайность, ц/га	Себестоимость, р./ц	Урожайность, ц/га	Себестоимость, р./ц	Урожайность, ц/га	Себестоимость, р./ц	Урожайность, ц/га	Себестоимость, р./ц
A	300	100	10	60	20	80	25	35	40
B	500	80	15	48	25	64	15	28	40
C	400	120	18	72	20	96	10	42	20
План урожая, т		3000		1800		2400		700	

Задание. Постройте оптимизационную модель, позволяющую распределить посевы культур по участкам при минимальной себестоимости урожая. *Запишите модель в двух вариантах*:

1) с использованием приведенных в табл. 1.4 численных значений показателей;

2) с использованием самостоятельно введенных условных обозначений в общем виде.

Задача 1.9. **О комплектах**. Мебельная фабрика выпускает четыре типа изделий. При изготовлении используется два типа досок. Фабрика располагает 1000 м досок первого типа и 1500 м досок второго типа. Общие трудозатраты ограничены 800 чел./ч. Известны нормативы затрат каждого вида ресурсов на 1 единицу изделий ($i = \overline{1,4}$ – индекс вида изделия, $j = \overline{1,2}$ – индекс вида досок):

t_i – затраты трудовых ресурсов на производство одного изделия i-го вида; m_{ij} – затраты досок j-го вида на производство одного изделия i-го вида.

Также известны данные по прибыли:

p_i – прибыль от производства одного изделия i-го вида;

P – план по прибыли.

Продукция реализуется комплектами, при этом k_i – коэффициент ассортиментности, который указывает, сколько изделий i-го вида входит в комплект (например, в один комплект входит шкаф – 1 ед., кровать – 2 ед., комод – 1 ед., тумбочка – 2 ед.).

Задание. Постройте оптимизационную модель, позволяющую определить оптимальный ассортимент выпуска изделий, при котором число комплектов мебели, выпускаемых фабрикой, максимально.

1.4. Примеры оптимизационных моделей для обсуждения

Как уже говорилось выше, эффективное использование методов оптимизации предполагает умение строить адекватные оптимизационные модели. Немаловажно также умение адекватно читать такого рода модели, понимать способ формализации условий и критерия оптимальности исходной задачи в виде соответствующих функций ограничений и целевой функции.

С этой целью целесообразно обсуждение на практических занятиях примеров различных оптимизационных задач и их моделей. Такое обсуждение может проходить в виде студенческого доклада, по итогам которого группа выясняет у докладчика особо сложные вопросы. В заключение преподаватель обсуждает со студентами особенности модели и возможные методы решения задач.

В данном разделе приведены примеры разнообразных оптимизационных задач и моделей их решения. Задачи разнообразны не только по исходной постановке, но и по классам соответствующих моделей, способам формализации условий задачи, возможным преобразованиям модели с целью сведения ее к более изученным.

При рассмотрении задач рекомендуется акцентировать внимание на определении класса полученной модели, оценке ее размерности, методах решения, а также упрощениях и допущениях модели по отношению к реальной ситуации.

К каждой задаче прилагаются вопросы, обсуждение ответов на которые позволяют уточнить некоторые особенности соответствующих моделей.

Предполагается, что обсуждение оптимизационных задач и их моделей не только позволяет познакомить студентов со способами формализации оптимизационных ситуаций, но и дает возможность студенту научиться строить алгоритм «понимания моделей», т. е. грамотно и адекватно формулировать вопросы по оптимизационной модели.

Нижеприведенные задачи классифицированы по классам оптимизации (линейной, нелинейной, векторной). При этом надо помнить, что, например, задача оптимизации, содержащая нелинейные ограничения, с помощью определенных представлений или преобразований может быть описана моделью линейного программирования, а для задачи оптимизации, не являющейся целочисленной по своей постановке, можно использовать модель булевского или целочисленного программирования.

1.4.1. Задачи линейного программирования

Задача 1.10. **Планирование производства нефтепродуктов**. В процессе переработки сырой нефти производится определенное количество бензиновых полупродуктов, которые затем последовательно смешиваются с целью получения других видов топлива для двигателей внутреннего сгорания – обычного топлива и топлива высшего качества [9, т. 1]. Для каждого полупродукта известны значение показателя его эффективности, максимальный выход и фиксированная цена единицы объема полупродукта. Для каждого вида топлива установлены минимальное значение показателя эффективности и продажная цена, а также известны удельные затраты на смешивание топлива. Минимальный уровень производства обоих видов топлива определяется договорными обязательствами. Остальное произведенное топливо и неиспользованные полупродукты могут быть реализованы посредством свободной продажи по известным ценам. Требуется составить оптимальный план производства топлива в течение заданного периода времени.

На схеме, представленной на рис. 1.2, показано, что исследуемая система включает ряд бензиновых полупродуктов, технологическую операцию смешивания и два вида жидкого моторного топлива.

Критерием оптимальности функционирования системы в данном случае является чистая прибыль, реализуемая в течение планового периода. Чистая прибыль вычисляется как разность дохода от продажи топлива и полупродуктов за вычетом затрат на смешивание и производство полупродуктов. С каждым из полупродуктов ассоциированы три переменные. Одна из переменных выражает количество полупродукта, направляемого на производство обычного топлива, вторая – количество полупродукта, направляемого на производство топлива высшего качества, и третья – количество полупродукта, поступающего в свободную продажу.

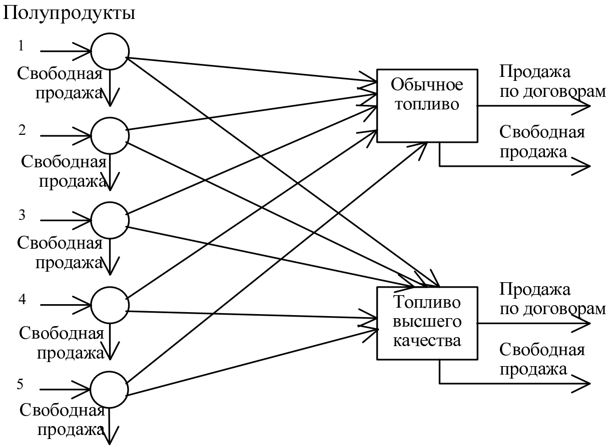


Рис. 1.2. Схема к задаче планирования нефтеперерабатывающего производства

Итак, для каждого полупродукта с номером i (i = 1, 2, …, 5) введем *переменные*:

x_i – количество полупродукта, используемого для производства топлива обычного качества;

y_i – количество полупродукта, используемого для производства топлива высшего качества;

z_i – количество полупродукта, направляемого в свободную продажу.

С каждым видом топлива в свою очередь ассоциируются две переменные, одна из которых представляет количество топлива, продаваемого по договорам, а другая – количество топлива, поступающего в свободную продажу.

Для каждого вида топлива с номером j ($j = \overline{1,2}$) также вводим переменные:

u_j – количество топлива, продаваемого по договорам;

v_j – количество топлива, поступающего в свободную продажу.

Ограничения. В модель следует включить соотношения для каждого полупродукта и каждого вида топлива, ограничения, связанные с технологической операцией смешивания и позволяющие учесть заданные уровни эффективности двух видов топлива, а также ограничения, вытекающие из наличия договорных обязательств.

Соотношение для полупродукта с номером i записывается в виде неравенства

$$x_i + y_i + z_i \le \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 5,$$

где α_i – выход полупродукта i за плановый период.

Балансовые соотношения для конечной продукции имеют следующий вид:

$$\sum_i^5 x_i = u_1 + v_1, \quad \sum_i^5 y_i = u_2 + v_2.$$

Технологические ограничения, связанные с операцией смешивания, записываются в виде

$$\sum_i^5 \beta_i x_i \ge \gamma_1(u_1 + v_1), \quad \sum_i^5 \beta_i y_i \ge \gamma_2(u_2 + v_2),$$

где β_i – значение показателя эффективности для полупродукта i; γ_j – минимальное значение показателя эффективности топлива вида j.

Ограничение, обусловленное договорными обязательствами, для топлива вида j задается неравенством

$$u_j \ge \delta_j, \quad j = 1, 2,$$

где δ_j – минимальный объем производства топлива j, предусмотренный договорами.

Критерий оптимальности функционирования системы – максимальная чистая прибыль, т. е. целевая функция задачи:

$$z(x) = \sum c_j^{(1)} u_j + \sum c_j^{(2)} v_j + \sum c_i^{(3)} z_i -$$
$$-\sum_i c_i^{(4)} (x_i + y_i + z_i) - \sum_i c_i^{(5)} (x_i + y_i),$$

где $c_j^{(1)}$ – продажная цена единицы конечной продукции вида j в соответствии с договорами;

$c_j^{(2)}$ – рыночная цена единицы конечной продукции вида j;

$c_i^{(3)}$ – рыночная цена единицы полупродукта i;

$c_i^{(4)}$ – затраты на производство единицы полупродукта i;

$c_i^{(5)}$ – технологические затраты на смешивание в расчете на единицу полупродукта i.

Кроме того, все переменные должны принимать неотрицательные значения; в противном случае решение задачи может и не иметь «физической» интерпретации.

Задания и вопросы для обсуждения

1. *Оцените размерность модели.*
2. *Сколько параметров в задаче?*
3. *Предложите метод решения полученной математической задачи, обоснуйте свой выбор.*

Задача 1.11. Модель планирования производства с постоянным фондом рабочей силы. Предположим, предприятие имеет постоянный фонд рабочей силы, т. е. не предполагается, что оно увольняет и заново набирает свой персонал [6, т. 2]. Следовательно, объем производства всех видов продукции может увеличиваться только за счет использования сверхурочного (более высокооплачиваемого) времени. В задаче известны следующие *параметры*:

v_{it} – затраты на производство одной единицы продукции i-го типа в течение t-го интервала времени;

c_{it} – затраты на хранение одной единицы продукции i-го типа в течение t-го интервала времени;

r_t – стоимость одного человеко-часа трудозатрат штатного сотрудника в течение t-го интервала времени;

o_t – стоимость одного человеко-часа сверхурочной работы в течение t-го интервала времени;

d_{it} – спрос на продукцию i-го типа в течение t-го интервала времени;

k_i – количество человеко-часов, необходимых для производства единицы продукции i-го типа;

$staff_t$ – располагаемое предприятием количество человеко-часов трудозатрат штатных сотрудников в течение t-го интервала времени;

$overstaff_t$ – максимально возможное на данном предприятии количество человеко-часов сверхурочного времени в течение t-го интервала времени;

I_{i0} – уровень запасов продукции i-го типа на начало всего планового периода;

T – общий период планирования;

N – общее число наименований типов продукции.

В качестве *переменных модели* используем:

X_{it} – число единиц продукции i-го типа, производимой в течение t-го интервала времени;

I_{it} – число единиц продукции i-го типа, откладываемое в запас на конец t-го промежутка времени;

W_t – количество человеко-часов работы постоянных сотрудников в течение t-го интервала времени, которое надо иметь на предприятии для выполнения производственного плана;

O_t – количество человеко-часов сверхурочной работы в течение t-го интервала времени, которое придется использовать на предприятии для выполнения производственного плана.

Тогда задачу планирования производства можно сформулировать как определение объемов производства и величин запасов всех видов продукции в каждый промежуток времени (неделя, декада, месяц,…), а также определение количества человеко-часов постоянных сотрудников и объемов сверхурочного времени, необходимых в каждый интервал времени. Искомому решению должна соответствовать минимальная совокупная сумма затрат на производство продукции, хранение запасов, а также затрат, связанных с оплатой труда постоянных сотрудников, включая и сверхурочную работу. Модель данной задачи можно представить как

$$\min z = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(v_{it}X_{it} + c_{it}I_{it}) + \sum_{t=1}^{T}(r_tW_t + o_tO_t) \qquad (1.4)$$

при *ограничениях*:

$$X_{it} + I_{i,t-1} = I_{i,t} + d_{it}, \quad i = 1,...,N; \quad t = 1,...,T\ ; \qquad (1.4а)$$

$$\sum_{i=1}^{N} k_i X_{it} = W_t + O_t = 0, \quad t = 1,...,T\ ; \qquad (1.4б)$$

$$0 \le W_t \le staff_t, \quad t = 1,...,T; \qquad (1.4в)$$

$$0 \le O_t \le \mathrm{o}verstaff_i, \quad t = 1,...,T; \qquad (1.4г)$$

$$X_{it}, I_{it} \ge 0, \quad i = 1,...,N; \quad t = 1,...,T. \qquad (1.4д)$$

Ограничение (1.4а) представляет собой уравнение баланса по количеству произведенной продукции и уровню запасов при условии детерминированного спроса на каждый тип продукции в каждый интервал времени. При этом левая часть данного балансового уравнения показывает так называемый вход, т. е.

input = Имеющийся запас + Произведенная продукция

а правая часть – выпуск, т. е.

outprit = Поставки в соответствии со спросом +
+ Запас, откладываемый на склад.

Ограничение-равенство (1.4б) определяет допустимое количество трудовых ресурсов, которые могут быть использованы для выпуска продукции i-го типа в каждый заданный интервал времени, причем это – единственное ограничение на резервы производства.

Ограничения (1.4в) и (1.4г) по существу устанавливают нижний и верхний пределы человеко-часов трудозатрат штатных сотрудников и сверхурочных работ для каждого заданного интервала времени.

Примечание. В некоторых разновидностях данной модели неопределенность спроса в планируемые промежутки времени учитывается с помощью введения для каждого заданного интервала времени минимального уровня резервного запаса, т. е. задаются ограничения вида $I_{it} \geq ss_{it}$, где ss_{it} – резервный (буферный) запас продукции i-го типа в течение времени t. Следует заметить, что ограничения (1.4а) и (1.4д) регламентируют отсутствие задолженности по выполнению заказов в течение t-го интервала времени, т. е. величина запаса не может быть отрицательной. Это условие учитывается в тех случаях, когда полное исчерпание запасов по всем видам продукции нежелательно и, следовательно, в модель должны быть введены соответствующие ограничения на уровень запасов.

Если уровень запасов в конце периода планирования никак не ограничен, то решение, получаемое с помощью модели, всегда обеспечивает $I_{iT} = 0$ для всех значений i.

Дополнительные ограничения должны быть введены и в тех случаях, когда потребности в складировании продукции не могут превышать некоторой величины. Например, ограничение

$$\sum_{i=1}^{N} I_{it} \leq (s_{\text{c}})_t, \quad t = 1,\ldots,T,$$

означает, что суммарный объем запасов всей продукции в каждый заданный интервал времени не может быть большим, чем общая емкость склада $(s_c)_t$.

В тех случаях, когда необходимо закрепить изготовление продукции за различными производственными единицами ограниченной мощности, управляющие переменные выбирают таким образом, чтобы получить соответствующие решения. Например, величина X_{ict} может означать число единиц продукции i-го типа, производимой производственной единицей c в течение t-го интервала времени. Результат подобной замены (или преобразования) управляющих переменных необходимо программировать непосредственно в рамках общей модели.

Следует иметь в виду, что даже в случае очень простой модификации рассматриваемой модели могут возникнуть существенные трудности, связанные с процессом вычисления.

Вопросы для обсуждения

1. *Какие ограничения в модели являются балансовыми? Ограничения какого типа (равенства? неравенства?) используются для моделирования балансовых соотношений? Почему?*

2. *Предусмотрены ли в модели какие-либо ограничения или приемы, которые обусловливают невозможность получения решения, при котором не полностью используется рабочее время штатных сотрудников и при этом приходится прибегать к сверхурочным работам?*

3. *Какие возможны модификации рассматриваемой модели? Какими соображениями, вызванными особенностями моделируемого производственного процесса, определяется необходимость дополнительных условий?*

Задача 1.12. Модель планирования производства с переменным фондом рабочей силы. Рассматривается случай, когда «поглощение» колебания спроса оказывается возможным за счет изменения фонда рабочей силы. Другими словами, если спрос неравномерен, приходится в каждый период времени существенно менять производственные планы по производству продукции, а следовательно, изменять число сотрудников, непосредственно занятых в процессе производства [6, т. 2]. В данной модели предусматривается, что подобное изменение осуществляется в течение периода планирования путем приема и увольнения сотрудников и связанные с приемом и увольнением затраты должны быть учтены в целевой функции. Кроме того, необходимо учитывать издержки, связанные с невыполнением заказов, поскольку в модели допускается учет недостатка имеющейся продукции в какой-либо промежуток времени.

Все параметры модели описаны в предыдущей задаче.

Переменные модели:

X_{it} – число единиц продукции i-го вида, производимой в течение t-го интервала времени;

W_t – количество человеко-часов работы штатных сотрудников в течение t-го интервала времени;

O_t – количество человеко-часов планируемой сверхурочной работы в течение t-го интервала времени;

H_t – количество человеко-часов, введенных в штат организации в течение t-го интервала времени;

F_t – количество сокращаемых человеко-часов в течение t-го интервала времени (предполагаемое увольнение штатных сотрудников);

I_{it}^{+} – число единиц продукции i-го типа, которую необходимо иметь в задаче к концу t-го интервала времени (запас продукции);

I_{it}^{-} – число единиц продукции i-го вида, которой не хватает для удовлетворения спроса потребителей в конце t-го интервала времени (задолженность по поставкам продукции).

Перечисленные переменные модели и обозначения, используемые для модели планирования производства с постоянным фондом рабочей силы, позволяют определить следующие разновидности затрат на трудовые ресурсы в течение промежутка времени t:

r_tW_t – содержание штатных сотрудников;

o_tO_t – оплата сверхурочной работы;

h_tH_t – прием на работу;

f_tF_t – увольнение.

Сюда входят также затраты, связанные с производством, хранением и поставкой продукции вида i:

$v_{it}X_{it}$ – переменные затраты на производство;

$c_{it}I_{it}^{+}$ – затраты на хранение запасов;

$b_{it}I_{it}^{-}$ – затраты, обусловленные задержкой выполнения заказов потребителей (штрафы и др.).

Модель задачи планирования в этом случае выглядит следующим образом:

$$z = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(v_{it}X_{it} + c_{it}I_{it}^{+} + b_{it}I_{it}^{-}) +$$

$$+\sum_{t=1}^{T}(r_t W_t + o_t O_t + h_t H_t + f_t F_t) \to \min \tag{1.5}$$

при *ограничениях*:

$$X_{it} + I_{i,t-1}^{+} - I_{i,t-1}^{-} = I_{it}^{+} - I_{it}^{-} + d_{it}, \quad i = 1,...,N; \quad t = 1,...,T; \tag{1.5а}$$

$$\sum_{i=1}^{N} k_i X_{it} - W_t - O_t \le 0, \quad t = 1,...,T; \tag{1.5б}$$

$$W_t - W_{t-1} - H_t + F_t = 0, \quad t = 1,...,T; \tag{1.5в}$$

$$-pW_t + O_t \le 0, \quad t = 1,...,T; \tag{1.5г}$$

$$X_{it}, I_{it}^{+}, I_{it}^{-} \ge 0, \quad i = 1,...,N; \quad t = 1,...,T;$$

$$W_t, O_t, P_t, H_t, F_t \ge 0, \quad t = 1,...,T.$$

Ограничение (1.5а) представляет собой уравнение баланса по количеству произведенной продукции и уровню запасов. В рассматриваемой модели величина запаса I_t к концу t-го интервала времени может иметь положительное ($I_{it}^{+} > 0$ означает, что к концу t-го интервала времени остается часть запаса) или отрицательное ($I_{it}^{-} > 0$ означает, что к концу t-го интервала происходит накопление невыполненных заказов) значение. Переменные I_{it}^{+} и I_{it}^{-} не должны одновременно принимать положительные значения.

Ограничения (1.5б) отражают тот факт, что объем производства ограничен лимитированным фондом трудовых ресурсов.

Ограничения-равенства (1.5в) определяют изменение фонда рабочей силы (за счет увольнения или набора) в течение времени t, т. е. $W_t - W_{t-1} = H_t - F_t$. Аналогично предыдущему случаю величины H_t, F_t никогда не будут одновременно принимать положительные значения в течение заданного интервала времени.

Ограничение (1.5г) устанавливает верхний предел объема сверхурочных работ в течение времени t как функцию фонда рабочего времени штатных сотрудников, т. е. $O_t \le pW_t$, где p – допустимая часть фонда рабочего времени штатных сотрудников для выполнения сверхурочных работ.

Вопросы для обсуждения

1. *Какова необходимость введения в балансовое ограничение одновременно двух переменных I_{it}^{+} и I_{it}^{-}, учитывающих непостоянный размер запасов продукции на начало периода t?*

2. *Можно ли в результате решения задачи, представленной данной моделью, разработать план, предписывающий увольнять и набирать персонал в течение одного и того же интервала времени? Почему величины H_t, F_t никогда не будут одновременно принимать положительные значения в течение заданного интервала времени?*

1.4.2. Задачи целочисленного линейного программирования

Приведенные ниже задачи, как правило, не являются целочисленными по своей постановке, т. е. в постановке этих задач нет требования целочисленности значений искомых переменных. Тем не менее результирующие модели, как правило, являются моделями булевского программирования, которые с помощью соответствующего преобразования можно представить в виде моделей целочисленного или частично целочисленного линейного программирования*. Используемые в этих моделях булевы или целочисленные переменные, как правило, являются искусственными, введенными в модель для целей формализации некоторых плохо формализуемых условий (например, для учета постоянных издержек в целевой функции). При рассмотрении приведенных ниже задач рекомендуется обратить особое внимание на моделирование такого рода условий, а также на то, в какой степени усложняется получаемая в результате этих построений модель.

Задача 1.13. **Задача с фиксированными доплатами**. Рассмотрим задачу планирования производства N видов продукции при условии, что производство j-го вида продукции связано с постоянными затратами в размере K_j [9, т. 2]. Величина постоянных затрат K_j не зависит от объема производства этого вида продукции (это может быть аренда

---

* Модели целочисленного и булевского программирования более подробно рассматриваются в главе 4 данного пособия.

помещения или оплата труда персонала, не связанного непосредственно с выпуском продукции, например бухгалтера, и др.). Кроме постоянных затрат учитываются переменные затраты на производство, пропорциональные объему выпуска продукции (заработная плата непосредственного изготовителя, расход материалов, энергии и др.).

Обозначим затраты на выпуск единицы продукции j-го вида величиной c_j. Допустим, что имеется M видов ресурсов и при производстве единицы продукции вида j ($j = 1, 2, \ldots, N$) расходуется a_{ij} единиц ресурса i-го вида. Предполагается также, что продукция j-го вида будет реализована в объеме d_j единиц и по цене p_j долларов. Запас ресурсов i-го вида ограничен величиной b_i ($i = 1, 2,\ldots, M$). Требуется определить производственный план выпуска продукции, обеспечивающий получение максимальной прибыли. Обозначим объем выпуска j-го вида продукции переменной x_j , очевидно, что $x_j \geq 0$.

Зависимость производственных затрат от объема выпускаемой продукции есть сумма постоянных и переменных затрат, описываемая нелинейной функцией вида

$$C(x_j) = \begin{cases} K_j + c_j x_j, & \text{если } x_j > 0, \\ 0, & \text{если } x_j = 0. \end{cases}$$

Действительно, если продукция не выпускается совсем, т. е. $x_j = 0$, то предприятие не несет никаких затрат: ни постоянных, ни переменных, если же продукция производится ($x_j > 0$), то необходимо учесть и постоянные издержки, не зависящие от объемов продукции K_j, и переменные, т. е. $c_j x_j$.

Если использовать булевы переменные, можно сформулировать эту задачу в виде задачи булевского программирования, а затем с помощью стандартного преобразования свести ее к задаче ЦЛП.

Пусть булева переменная δ_j соответствует принятию решения о производстве j-го вида продукции. Другими словами:

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й вид продукции производится}, \\ 0 - \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Тогда общие затраты на производство j-го вида продукции составляют $K_j\delta_j + c_j x_j$, где $\delta_j = 1$, если $x_j > 0$ и $\delta_j = 0$ при $x_j = 0$. Следовательно, целевая функция, отображающая прибыль предприятия, имеет вид

$Z=\sum_{j=1}^{N} p_j x_j - \sum_{j=1}^{N}(K_j\delta_j + c_j x_j) \to \max$. Ограничения по каждому виду ресурсов можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i=1,2,...,M .$$

Ограничения, предусматривающие производство продукции в объеме, не превышающем объем спроса, имеют вид $x_j \le d_j\delta_j$, $j=1,2,...,N$. Очевидно, что данное ограничение предусматривает положительность объема выпуска продукции ($x_j > 0$) только при $\delta_j = 1$; в этом случае производство j-го вида продукции ограничено объемом спроса d_j, а в целевой функции учитываются не только переменные издержки, но и постоянные – K_j.

Вопросы для обсуждения

1. *С помощью какого преобразования задачу булевского программирования можно свести к задаче ЦЛП?*

2. *Какие ограничения модели обусловливают невозможность получения решения, при котором объем продукции положителен* ($x_j > 0$), *а соответствующие постоянные издержки равны нулю* (*т. е. переменная* $\delta_j = 0$) *?*

3. *Как вы поясните тезис о том, что целевая функция исходной* (*непреобразованной*) *модели является нелинейной?*

Задача 1.14. **Задача о твердых отходах**. Одной из актуальных задач в процессе принятия решений в сфере сбора и удаления твердых отходов является задача размещения фабрик по уничтожению отходов. Для моделирования такого рода задач могут быть использованы модели частично целочисленного программирования. В частности, известна следующая модель [6, т. 2].

Найти

$$\min \sum_i \sum_j (T_{ij} + D_j) X_{ij} + \sum_j F_j Y_j$$

при *ограничениях*:

$\sum_j X_{ij} = a_i$ для каждого i-го источника мусора;

$b_j Y_j - \sum_i X_{ij} \geq 0$ для каждого j-го пункта, где строится мусоросжигательное сооружение.

Переменные модели:

Y_j – булевы переменные, равные 0 или 1. $Y_j = 1$, если мусоросжигательное сооружение строится в j-м пункте, 0 – в противном случае;

X_{ij} – количество отходов, которое должно быть перевезено из i-го источника мусора в j-й пункт.

Параметры модели:

F_j – постоянные затраты на строительство предприятия по переработке мусора в j-м пункте;

D_j – затраты на ликвидацию 1 т отходов на мусоросжигательной станции в j-м пункте;

T_{ij} – затраты на перевозку 1 т отходов из i-го источника мусора до j-го пункта, где может быть построена мусоросжигательная станция;

a_i – количество отходов, образующееся в i-м источнике мусора;

b_j – производственная мощность мусоросжигательной станции, которую можно расположить в j-м пункте.

Первая группа ограничений соответствует требованию, согласно которому отходы, накапливаемые в каждой из зон, должны быть собраны и вывезены полностью. Вторая группа ограничений отражает условие, в соответствии с которым поток отходов не должен превышать мощности предприятия по его переработке.

Вопросы для обсуждения

1. *Полностью или частично целочисленной будет модель, полученная после преобразований?*
2. *Как в модели учитывается ограниченная мощность перерабатывающих предприятий?*
3. *Как в модели учитывается условие, при котором не должна быть запланирована перевозка мусора в пункты, где не предусмотрено строительство мусоросжигательной станции?*
4. *Обязателен ли знак равенства в ограничениях* $\sum_j X_{ij} = a_i$*?*

Задача 1.15. Задача оптимального размещения углеобогатительных фабрик. В Соединенных Штатах Америки для каждого штата установлены строгие нормы по выбросу серы. Поэтому при решении задачи о возможности строительства централизованных фабрик, на которых уголь с произвольным содержанием серы перерабатывается в смесь, должны учитываться природоохранные нормативы. Была разработана модель [9, т. 2], позволяющая ответить на следующие вопросы.

1. Сколько нужно построить углеобогатительных фабрик?

2. В каких районах их нужно строить?

3. Каких потребителей должна обслуживать каждая фабрика и в каких районах добывать уголь?

4. Каковы оптимальные соотношения различных углей, предназначенных для переработки, при которых результирующая смесь удовлетворяет нормам по охране окружающей среды?

В однопериодной (статической) модели использовались следующие индексы: i, j, k – номера соответственно шахт, обогатительных фабрик и потребителей.

Переменные модели:

v_{ij} – вес угля (в тоннах), который планируется отправлять из шахты i на обогатительную фабрику в районе j;

u_{jk} – вес угля, отправленного с обогатительной фабрики в районе j потребителю k;

w_{ij} – булева переменная; при $w_{ij} = 1$ считаем, что уголь отправляется из шахты i в район j, при $w_{ij} = 0$ перевозки нет;

x_{jk} – булева переменная; при $x_{jk} = 1$ считаем, что уголь отправляется из района j потребителю k, при $x_{jk} = 0$ перевозки нет;

y_j – булева переменная; при $y_j = 1$ считаем, что для строительства фабрики используется район j, значение $y_j = 0$ означает, что строительство в данном районе не предусмотрено.

Целевая функция. Требуется минимизировать все суммарные затраты, которые слагаются из следующих компонентов:

- стоимость добычи различных видов угля в шахтах;
- стоимость переработки, включающая капитальные, т. е. *постоянные затраты* на строительство обогатительной фабрики и *переменные затраты*, пропорциональные объему перерабатываемого угля;
- транспортные затраты, которые зависят от места добычи, назначения и количества груза. Транспортные издержки также включают *постоянные издержки*, не зависящие от количества перевозимого угля, и *переменную часть*, пропорциональную объему перевозимого угля.

Таким образом, целевая функция в задаче имеет вид

$$F(v,u,w,x,y) = \sum_i D_i\left(\sum_j v_{ij}\right) + \sum_j C_j y_j + \sum_j B_j\left(\sum_i v_{ij}\right) +$$

$$+\sum_i\sum_j\left(S_{ij}w_{ij}+T_{ij}v_{ij}\right)+\sum_i\sum_k\left(F_{jk}x_{jk}+G_{jk}u_{jk}\right)\to\min,$$

где D_i – стоимость добычи 1 т угля на шахте i;

S_{ij} – постоянные расходы на перевозку угля из шахты i на обогатительную фабрику в районе j;

T_{ij} – стоимость перевозки 1 т угля из шахты i на фабрику в районе j;

C_j – капитальные затраты на строительство фабрики в районе j;

B_j – переменные затраты на переработку 1 т угля на фабрике в районе j;

F_{jk} – постоянные расходы на перевозку угля с фабрики в районе j потребителю k;

G_{jk} – стоимость перевозки 1 т угля с фабрики в районе j потребителю k.

Ограничения модели

1. Вес вывозимого с шахты угля не может превысить мощности этой шахты по добыче угля. То есть $\sum_j v_{ij}\le M_i$ для всех i, где M_i – заданная мощность шахты i.

2. Объем поставок потребителю должен удовлетворять его потребности, т. е. $\sum_j u_{jk}\ge N_k$ для всех k. Здесь N_k – объем потребления угля k-го потребителя.

3. Объем вывозимого с фабрики угля не может превышать мощности этой фабрики: $\sum_k u_{jk}\le P_j y_j$ для всех j, где P_j – мощность фабрики j. Очевидно, $y_j = 1$ означает, что j-я фабрика работает.

4. Общий объем вывозимого обогащенного угля с фабрики не больше (с поправочным коэффициентом) объема угля, доставляемого с шахт на эту фабрику, т. е. $E\sum_i v_{ij}\le\sum_k u_{jk}$ для всех j, где E – показатель эффективности процесса переработки.

5. При построении ограничений, гарантирующих удовлетворение специальных требований потребителей по содержанию серы в обогащенном угле, предполагалось, что выпускаемая смесь углей, прошедших переработку, описывается линейной комбинацией объемов различных углей. Если принять за H_i содержание серы (в весовых

процентах) в угле из шахты i, то отношение $\frac{\sum_i H_i v_{ij}}{\sum_i v_{ij}}$ выражает количество серы в 1 т обогащенного угля на фабрике в районе j. Если фабрика в районе j обеспечивает потребителя k (т. е. если $x_{jk} = 1$), то для всех k вводится условие:

$$\frac{\sum_i H_i v_{ij}}{\sum_i v_{ij}} \le L_k ,$$

где L_k – максимально допустимая для потребителя k норма содержания серы в угле. Это условие в модели представляется в виде

$$\sum_i H_i v_{ij} - L_k \sum_i v_{ij} \le M(1 - x_{jk}) \text{ для всех } j \text{ и } k,$$

где M – очень большое положительное число.

Такое ограничение обусловливает получение решения, при котором фабрики производят смесь углей, удовлетворяющую требованиям потребителей. Нетрудно видеть, что при $x_{jk} = 1$ неравенство сводится к виду $\frac{\sum_i H_i v_{ij}}{\sum_i v_{ij}} \le L_k$, т. е. количество серы в обогащенном на фабрике в районе j угле не превысит требуемой потребителем k нормы содержания серы в угле. Если же потребитель k ничего не получает с фабрики j ($x_{jk} = 0$), то ограничение становится избыточным.

6. Ограничения, обусловливающие взаимосвязь переменных, а также v_{ij} и w_{ij} (M – большое положительное число):

$$u_{jk} - Mx_{jk} \le 0 \text{ для всех } j \text{ и } k,$$

$$v_{ij} - Mw_{ij} \le 0 \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

7. Тривиальные ограничения w_{ij}, x_{jk}, y_j – булевы переменные, v_{ij}, u_{jk} – неотрицательные переменные.

Вопросы для обсуждения

1. *Почему модель является статической? Приведите пример динамической модели (например, из разобранных выше).*

2. *Можно ли считать результирующую модель задачей частично целочисленного программирования?*

3. *Как в модели учитываются постоянные и переменные издержки?*

4. *В каких ситуациях в задаче возникают избыточные ограничения?*

1.4.3. Задачи нелинейной оптимизации

Приведенные в этом разделе задачи содержат условия, которые представляются нелинейными зависимостями. При построении соответствующих моделей иногда удается избежать включения в модель нелинейных функций и в результате получить модель линейного программирования. Иногда результирующая модель все-таки нелинейная, т. е. из класса моделей нелинейного программирования, но вследствие единичности нелинейных условий удается свести решение полученной задачи к необходимости решения последовательности задач линейного программирования. В некоторых задачах полученная модель существенно нелинейна, ее рассматривают как задачу нелинейного программирования и для решения используют методы решения нелинейного программирования.

При рассмотрении приведенных в этом разделе задач рекомендуется обратить внимание на то, как учитываются нелинейные условия исходной задачи: при построении модели, при возможном ее преобразовании или на стадии решения.

Задача 1.16. **Задача о смешивании**. Для получения конечного продукта при перегонке нефти и приготовлении угольных смесей часто возникает необходимость смешивания нескольких видов сырья на промежуточных стадиях процесса. Обычно это обусловлено ограниченностью емкостей для хранения компонентов, а также необходимостью совместной транспортировки исходных продуктов [9, т. 1]. На рис. 1.3 представлена упрощенная схема процесса смешивания двух фракций.

В этой системе сначала смешиваются два потока сырья: V_1 с содержанием серы 3 % и V_2 с содержанием серы 1 %. Полученная смесь соединяется в двух различных пропорциях с третьим потоком сырья F, имеющим 2 % серы; при этом образуются два вида конечной смеси.

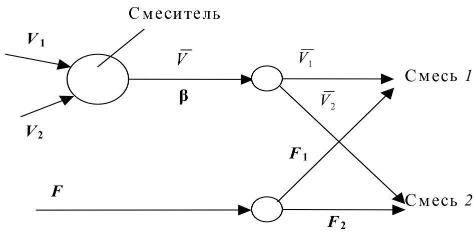


Рис. 1.3. Схема процесса смешивания

Первая смесь должна производиться в количестве не более 100 баррелей в час, причем содержание серы не должно превосходить 2,5 %; для второй смеси аналогичные показатели равны 200 баррелям в час и 1,5 %. Стоимость сырья для потоков 1, 2, 3 равна 6, 16 и 10 долларов за 1 баррель соответственно. Продажная цена смесей составляет 9 и 10 долларов за 1 баррель соответственно. Требуется определить размеры потоков, при которых суммарный доход максимален.

Переменные модели

P_i – выход смеси i-го вида (в баррелях в час);

V_1, V_2 – величины потоков сырья первого и второго видов;

F_i – величина потока сырья третьего вида, используемого в смеси i-го вида;

$\bar{V}_i$ – величина потока промежуточной смеси, используемой в i-й смеси;

β – доля серы в промежуточной смеси.

Условия баланса для потоков:

$$V_1 + V_2 = \bar{V}_1 + \bar{V}_2;$$

$$F_1 + \bar{V}_1 = P_1;$$

$$F_2 + \bar{V}_2 = P_2.$$

Условие баланса по содержанию серы:

$$0,03V_1 + 0,01V_2 = \beta(\bar{V}_1 + \bar{V}_2).$$

Часть условий по содержанию серы может быть задана неравенствами:

$$0,02F_1 + \beta\bar{V}_1 \le 0,025P_1;$$

$$0,02F_2+\beta\overline{V}_2\le 0,015P_2.$$

Кроме того, имеются ограничения на объемы выходных смесей:

$$P_1\le 100,\ P_2\le 200.$$

Содержание серы в промежуточной смеси определяется содержанием серы в ее компонентах, поэтому

$$0,01\le\beta\le 0,03.$$

Целевая функция в данном случае линейная:

$$9P_1+10P_2-6V_1-16V_2-10(F_1+F_2).$$

Задача оптимизации имеет вид:

$$f(P_1,P_2,V_1,V_2,F)=9P_1+10P_2-6V_1-16V_2-10(F_1+F_2)\to\max;$$

$$h_1(V_1,V_2)=V_1+V_2-\overline{V}_1-\overline{V}_2=0;$$

$$h_2(V_1,V_2,\beta)=0,03V_1+0,01V_2-\beta(\overline{V}_1+\overline{V}_2)=0;$$

$$h_3(F_1,\overline{V}_1,P_1)=F_1+\overline{V}_1-P_1=0;$$

$$h_4(F_2,\overline{V}_2,P_2)=F_2+\overline{V}_2-P_2=0;$$

$$g_1(P_1,F_1,\beta,\overline{V})=0,025P_1-0,02F_1-\beta\overline{V}_1\ge 0;$$

$$g_2(P_2,F_2,\beta,\overline{V}_2)=0,015P_2-0,02F_2-\beta\overline{V}_2\ge 0;$$

$$g_3(P_1)=P_1\le 100,\ g_4(P_2)=P_2\le 200,\ 0,01\le\beta\le 0,03.$$

Единственными нелинейными выражениями в задаче являются члены вида $\beta\overline{V}_1$ и $\beta\overline{V}_2$ в ограничениях, задаваемых функциями h_2, g_1 и g_2 (так как все величины в этих выражениях – переменные), в остальном полученная модель линейна. Поэтому для дальнейшего решения самое простое здесь – линеаризация модели с последующим использованием метода линейного программирования. С этой целью задается некоторое значение β из заданного диапазона, в результате задача становится линейной. Полученное решение задачи ЛП можно использовать для корректировки значения β, а затем процесс решения задачи продолжать до получения удовлетворительного приближения.

Задания и вопросы для обсуждения

1. *Какие ограничения в модели являются балансовыми? Ограничения какого типа (равенства, неравенства) используются для моделирования балансовых соотношений? Почему?*

2. *В модели, изложенной в* [9] *и представленной здесь, даны не все необходимые балансовые соотношения. Допишите недостающее ограничение.*

3. *Решите задачу в пакете Excel. Прокомментируйте полученный ответ.*

Задача 1.17. Планирование работы гидроэнергетического комплекса. На рис. 1.4 представлен гидроэнергетический комплекс, состоящий из двух водохранилищ и двух гидроэлектростанций, каждая из которых использует свое водохранилище [9, т. 1]. Период планирования работы комплекса разбит на два периода. При наполнении одного из водохранилищ избыток поступающей воды удаляется через водосброс, который также можно использовать для сброса воды в целях защиты от наводнений. Вода, проходящая через водосброс, не влияет на производство электроэнергии.

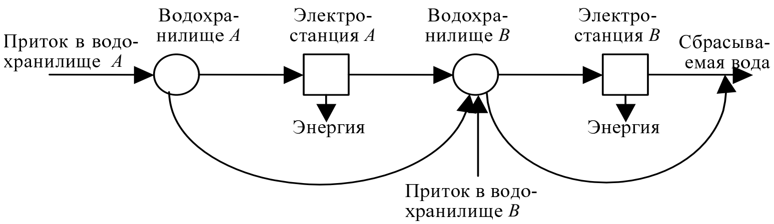


Рис. 1.4. Гидроэнергосистема из двух водохранилищ и двух электростанций

Предполагается, что 1 килоакр-фут (каф) воды на электростанции A преобразуется в 400 МВт · ч электроэнергии. Для станции B аналогичный показатель равен 200 МВт · ч. В течение одного периода станция A может произвести 60 000 МВт·ч, станция B – 35 000 МВт · ч электроэнергии. Цена 1 МВт · ч электроэнергии равна 20 долларам при условии, что общий объем ее реализации не превосходит 50 000 МВт · ч. Каждый мегаватт-час сверх 50 000 МВт · ч имеет цену 14 долларов. Необходимые дополнительные данные о притоке воды в водохранилища приведены в табл. 1.5 (единица измерения 1 каф).

Необходимо построить оптимизационную модель для определения оптимального режима функционирования системы, при котором общий доход от продажи электроэнергии максимален.

Таблица 1.5

Исходные данные для оптимизационной задачи 1.17

Показатель	Хранилище	
	A	*B*
Полезный объем	2000	1500
Прогнозируемый приток воды период 1 период 2	 200 130	 40 15
Минимально допустимый объем воды	1200	800
Объем воды в начале периода 1	1900	850

Целесообразно сначала построить модель функционирования системы в течение первого периода, а затем перейти ко второму периоду.

Переменные модели:

$PH1$ – количество электроэнергии, МВт · ч, продаваемой по цене 20 долларов за 1 МВт · ч;

$PL1$ – количество электроэнергии, МВт · ч, продаваемой по цене 14 долларов за 1 МВт · ч;

объем воды, каф:

- $XA1$ – направляемой на станцию A;
- $XB1$ – направляемой на станцию B;
- $SA1$ – сбрасываемой из хранилища A;
- $SB1$ – сбрасываемой из хранилища B;
- $EA1$ – в хранилище A в конце периода 1;
- $EB1$ – в хранилище B в конце периода 1.

Ограничения модели. Общее количество энергии, производимой в течение периода 1, равно $400XA1 + 200XB1$, а общее количество энергии для продажи составляет $PH1+PL1$. Следовательно, условие баланса производимой электроэнергии записывается следующим образом:

$$400XA1 + 200XB1 = PH1 + PL1.$$

Поскольку количество энергии, продаваемой по более высокой цене, не должно превышать 50 000 МВт · ч, то вводим неравенство $PH1 \leq 50\ 000$. Мощность станции A, выраженная в единицах объема воды (каф), составляет 60 000/400 = 150, поэтому $XA1 \le 150$. Аналогично $XB1 \le 175$.

Условие *водного баланса* для хранилища A можно записать в следующем виде:

Вода, направляемая на станцию А, +
+ Сбрасываемая вода + Конечный объем воды в хранилище А =
= Начальный объем воды в хранилище А +
+ Прогнозируемый приток воды.

Таким образом, $XA1 + SA1 + EA1 = 1900 + 200 = 2100$.

Поскольку емкость хранилища A равна 2000 каф, а минимально допустимый объем воды в хранилище составляет 1200 каф, вводятся ограничения: $EA1 \le 2000$, $EA1 \ge 1200$.

Аналогично для хранилища B получаем

$$XB1 + SB1 + EB1 = 850 + 40 + XA1 + SA1,\ 800 \le EB1 \le 1500.$$

Теперь легко построить модель для периода 2, введя соответствующие переменные: $PH2$, $PL2$, $XA2$, $XB2$, $SA2$, $SB2$, $EA2$, $EB2$.

Ограничения, связанные с производством электроэнергии в течение периода 2, имеют следующий вид:

$$400XA2 + 200XB2 = PH2 + PL2;\ PH2 \le 50\,000;$$

$$XA2 \le 150;\ XB2 \le 175.$$

Условия водного баланса можно записать в виде

$$XA2 + SA2 + EA2 = EA1 + 130;\ 1200 \le EA2 \le 2000;$$

$$XB2 + SB2 + EB2 = EB1 + 15 + XA2 + SA2;\ 800 \le EB2 \le 1500.$$

Кроме приведенных выше ограничений вводятся условия неотрицательности переменных.

Целевая функция. Критерий оптимальности в данной задаче – суммарный доход от продажи электроэнергии – моделируется нелинейной целевой функцией. Действительно, если бы цена 1 МВт · ч была постоянной и не изменялась в зависимости от объемов производимой электроэнергии, то целевая функция была бы линейной вида px, где p – цена электроэнергии, а x – объем продаваемой электроэнергии. Причина нелинейности целевой функции в рассматриваемом примере состоит в том, что здесь учитывается очевидный факт: цена электроэнергии зависит от *совокупного объема* ее производства. На графике зависимости общего дохода от объема продаваемой энергии (рис. 1.5) хорошо виден нелинейный (вернее, кусочно-линейный) характер этой зависимости. Действительно, общий объем дохода, получаемый от электроэнергии, продаваемой в рамках заключенных договоров по цене 20 долларов за 1 МВт · ч, конечно, выше общего дохода, получаемого от той же электроэнергии, но продаваемой сверх заключенных договоров по цене 14 долларов за 1 МВт · ч. Поэтому функция, моделирующая данную зависимость, является кусочно-линейной (т. е. нелинейной) и имеет разный вид линейности в диапазонах изменения объема продаваемой электроэнергии (0, 50 000) и (50 000, ∞).

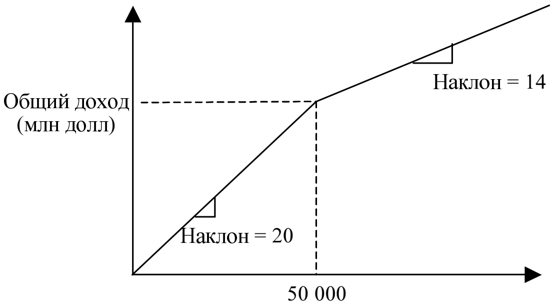


Рис. 1.5. График зависимости суммарного дохода (млн долларов) от объема продаваемой электроэнергии (МВт · ч)

Для упрощения дальнейшего решения задачи было бы предпочтительней использовать аппарат линейного программирования для формализации поставленной задачи. Это достигается искусственным преобразованием, в результате которого получаются линейная целевая функция и линейная модель в целом. Для этого общее количество продаваемой электроэнергии представляется в виде двух частей, одна из которых продается по цене 20 долларов за 1 МВт · ч, а другая – по 14 долларов за 1 МВт · ч. Введя соответствующие две переменные, а именно $PH1$ и $PH2$, а для второго периода – $PL1$ и $PL2$, удается представить целевую функцию как линейную.

Целевая функция, выражающая общий доход от продажи электроэнергии, задается следующей формулой:

$$Z = 20(PH1 + PH2) + 14(PL1 + PL2) \rightarrow \max.$$

Таким образом, на этом примере показано, как в некоторых случаях путем несложных преобразований удается с помощью меделей ЛП решать оптимизационные задачи, содержащие нелинейные зависимости.

Вопросы для обсуждения

1. *Сколько балансовых ограничений в оптимизационной модели? Поясните их смысл.*

2. *Как записать целевую функцию, если для представления общего объема электроэнергии (в каждом периоде времени) используется всего одна переменная? Почему такой способ менее предпочтителен по сравнению с рассмотренным выше?*

3. *Какова размерность задачи?*

4. *Предусмотрено ли в модели условие, запрещающее получение ответа, при котором планируется дорогую электроэнергию по* 20 *долларов производить в незначительном объеме (меньше* 50 000 *МВт · ч) и при этом дополнительно производить дешевую электроэнергию по* 14 *долларов? (Понятно, что такой ответ противоречил бы здравому смыслу.)*

Задача 1.18. Управление запасами. Многие фирмы создают запасы производимых товаров для удовлетворения будущего спроса. Основным вопросом при этом зачастую становится определение того, как часто и в каком объеме создавать эти запасы. Слишком частые пополнения запасов приводят к нерациональным потерям времени и средств, связанных с их непрерывным пополнением. С другой стороны, очевидно, что пополнение запасов через длительные промежутки времени приводит к образованию слишком больших запасов и значительно повышает стоимость их хранения. Определение оптимального объема запасов в этих условиях представляет собой классическую задачу *теории управления запасами*.

Авторы [9, т. 1] рассматривают простейшую модель задачи управления запасами (модель Уилсона) и показывают метод ее решения.

В рамках рассматриваемой задачи *спрос* предполагается постоянным и равным λ единиц товара за интервал поставки. Чересчур частое пополнение запасов нецелесообразно, так как *стоимость выполнения одного заказа* (обозначим величиной K, доллары) постоянная и не зависит от его размера. *Стоимость единицы товара* обозначим как c, долларов). Хранение излишних запасов также нецелесообразно, с учетом положительной *стоимости хранения единицы товара*, которая составляет h долларов в каждый период времени. Чтобы упростить задачу, предположим, что спрос удовлетворяется немедленно (т. е. возможность задолженности по выполнению заказа не предполагается), а пополнение запаса осуществляется сразу же, как только запасы иссякают.

На рис. 1.6 показана динамика изменения объема запасов с течением времени с учетом сделанных допущений. В точке A объем запасов равен величине B; затем объем запасов начинает уменьшаться со скоростью λ единиц товара в единицу времени и достигает нулевого значения в точке C. В это время поступает новая партия товара, и объем запаса восстанавливается.

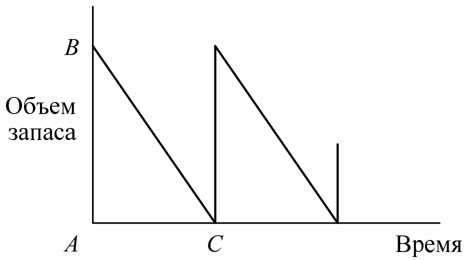


Рис. 1.6. Циклы управления запасами во времени

Треугольник ABC представляет один цикл управления запасами, который повторяется во времени. Задача заключается в том, чтобы определить оптимальный размер заказа B и продолжительность интервала времени между заказами $C–A$. Обозначим соответствующие неизвестные нам величины как переменные Q и T.

Поскольку T есть величина промежутка времени, в течение которого при скорости λ истощается запас Q, имеем $T = Q/\lambda$. Таким образом, задача сводится к нахождению оптимального значения Q. Заметим, что когда Q мало, переменная T также имеет малое значение. При этом частота заказов велика, что обусловливает большие затраты на выполнение заказов и относительно малые издержки хранения запасов. С другой стороны, наличие большого объема запасов (Q велико) приводит к увеличению затрат на хранение запасов и одновременно к снижению издержек, связанных с выполнением заказов на товары.

Представленная задача управления запасами состоит в определении оптимальной величины запаса Q (за один интервал времени), которой соответствует минимум суммы совокупных годовых затрат.

Получим аналитическое выражение для функции полных годовых затрат (затраты/цикл × количество циклов/год):

$$\textit{Количество циклов (заказов) / год} = 1/T = \lambda/Q,$$

$$\textit{Затраты за один цикл} = \textit{Затраты на выполнение заказов} +$$

$$+ \textit{Затраты на хранение запасов} =$$

$$= (K + cQ) + [(Q/2)hT] = K + cQ + \frac{hQ^2}{2\lambda}.$$

Примечание. Затраты на хранение запасов в течение цикла можно приблизительно оценить как постоянную величину в течение интервала времени T в размере $Q/2$ единиц товара.

Таким образом, целевая функция, отражающая совокупные затраты:

$$f(Q) = \frac{\lambda K}{Q} + \lambda c + \frac{hQ}{2} \to \min.$$

Полученная оптимизационная модель решается аналитически известными методами математического анализа:

$$f'(Q) = \frac{-\lambda K}{Q^2} + \frac{h}{2}.$$

Решив уравнение $f'(Q) = 0$, получим $Q^* = \sqrt{2\lambda K / h} > 0$.

Так как $f''(Q) = \dfrac{2\lambda K}{Q^3} > 0$ при всех $Q > 0$, очевидно, что $f(Q)$ – выпуклая функция. Следовательно, положительное значение Q^*, при котором $f'(Q^*) = 0$, минимизирует $f(Q)$.

Таким образом, оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{2\lambda K / h}$.

Легко рассчитать, что в этом случае:

$$T^* \text{ (интервал времени между заказами) } = \sqrt{2K / h\lambda}.$$

Величина Q^* известна в теории управления запасами как *наиболее экономичный размер заказа*.

Вопросы для обсуждения

1. *Как в модели учитывается стоимость хранения товара за один цикл?*

2. *Какие упрощения реальной задачи управления запасами, принятые при построении данной модели, вы можете перечислить?*

3. *Какова размерность рассмотренной модели?*

4. *На каких теоретических положениях математического анализа основан метод решения сформулированной математической задачи?*

Задача 1.19. Проектирование прямоугольной конструкции. Требуется спроектировать прямоугольную конструкцию в форме параллелепипеда с открытой передней стенкой [9, т. 1]. Конструкция должна иметь объем 16 000 футов^3, но периметр ее основания не должен превышать 220 футов. Глубина не должна быть больше 60 футов, а ширина – 80 футов. Кроме того, ширина не должна превышать утроенной глубины, а высота – 2/3 ширины. Стоимость гофрированного материала, из которого изготовляются крыша и три стенки конструкции, составляет 30 долларов за 1 фут^2. Требуется определить размеры наиболее дешевой конструкции.

Введем переменные (в футах):

x_1 – глубина;

x_2 – ширина;

x_3 – высота.

Совокупная стоимость материала будет включать (в долларах):

- стоимость крыши $30x_1x_2$;
- стоимость задней стенки $30x_2x_3$;
- стоимость боковых стенок $2(30x_1x_3)$.

Таким образом, целевая функция имеет вид

$$f(x) = 30x_1x_2 + 30x_2x_3 + 60x_1x_3 \to \min.$$

Условие задает ограничение объема конструкции в виде равенства

$$x_1x_2x_3 = 16\ 000 \text{ футов}^3.$$

Условия на линейные размеры задают ограничения в виде неравенств:

$$2(x_1 + x_2) \le 220 \text{ футов},$$

$$x_2 \le 3x_1,$$

$$x_3 \le \tfrac{2}{3}\, x_2.$$

Границы изменения переменных (в футах):

$$0 \le x_1 \le 60,$$

$$0 \le x_2 \le 80.$$

В стандартной форме записи задача будет иметь вид

$$f(x) = 30x_1x_2 + 30x_2x_3 + 60x_1x_3 \to \min$$

при *ограничениях*

$$h_1(x) = x_1x_2x_3 - 16\,000 = 0,$$

$$g_1(x) = 110 - x_1 - x_2 \ge 0,$$

$$g_2(x) = 3x_1 - x_2 \ge 0,$$

$$g_3(x) = \tfrac{2}{3}\, x_2 - x_3 \ge 0,$$

$$0 \le x_1 \le 60,$$

$$0 \le x_2 \le 80,$$

$$0 \le x_3.$$

Вопросы для обсуждения

1. *Какой метод вы бы рекомендовали для решения поставленной математической задачи?*
2. *Как оценить размерность полученной модели?*
3. *Приведите варианты модели, в которой учитывается различная стоимость материалов, идущих на разные элементы конструкции.*

Задача 1.20. О выборе портфеля ценных бумаг. Определение оптимального портфеля ценных бумаг представляет собой одну из важнейших задач финансового менеджмента. С этими задачами сталкиваются различные инвестиционные фирмы (банки, паевые фонды, страховые компании) [9, т. 2]. Под *портфелем ценных бумаг*, как правило, понимают размеры вложений в различные виды ценных бумаг: валюта, акции, облигации, банковские депозитные сертификаты и др.

Предположим, что наличный капитал C в следующем инвестиционном периоде можно вложить в ценные бумаги N видов. Требуется определить соответствующие доли вложений. Пусть x_j, $j = 1, 2\ldots, N$, – величина капитала, вкладываемого в ценные бумаги j-го вида (доллары). Тогда на переменные x_j накладываются следующие ограничения:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N \le C,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Предположим, что имеются статистические данные по каждому виду вложений за последние T лет, отражающие колебания цен и выплаты дивидендов на протяжении этого периода. При помощи этих данных можно оценить доход от вложений для каждого вида ценных бумаг.

Можно рассчитать $r_j(t)$ – общий доход в году t на 1 доллар вложений в ценные бумаги вида j :

$$r_j(t) = \frac{p_j(t+1) - p_j(t) + d_j(t)}{p_j(t)},$$

где $p_j(t)$ – цена бумаг j-го типа на начало года t, разность $p_j(t+1) - p_j(t)$ показывает изменение стоимости ценной бумаги за год t, а $d_j(t)$ есть суммарные дивиденды, полученные в t-м году.

Очевидно, что значения $r_j(t)$ непостоянны и за предыдущие T лет сильно колебались от года к году. Они могли иметь любой знак или быть нулевыми. Поэтому для оценки целесообразности дальнейших вложений в ценные бумаги j-го вида следует вычислить *средний*, или *ожидаемый* (в смысле математического ожидания), *доход* от ценных бумаг вида j на вложенный доллар:

$$\mu_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_j(t), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Общую величину предполагаемого дохода можно оценить следующим образом:

$$E = \sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j = \mu^T x,$$

где $\mu^T = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$, $x^T = (x_1, \ldots, x_N)$.

Модель I. Для описанной задачи можно построить достаточно простую оптимизационную модель:

$$Z = \sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j \;\to\; \max$$

при *ограничениях*

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \le C, \quad x_j \ge 0 .$$

Здесь максимизируется общий ожидаемый доход (оценка математического ожидания дохода) при ограничениях на общий объем инвестиций.

Дополнительные ограничения модели обусловлены необходимостью учета политики фирмы в отношении различного рода ценных бумаг. Так, большинство инвестиционных фирм ограничивает размеры вложений в обычные акции, поскольку доход от последних подвержен значительным колебаниям. Такое ограничение можно записать следующим образом:

$$\sum_{j \in J_1} x_j \le b_1 ,$$

где множество J_1 содержит индексы различных видов обычных акций, а через b_1 обозначены максимальные допустимые вложения в обычные акции.

Также нужно учитывать, что правления многих инвестиционных фирм считают необходимым держать определенную часть капитала в виде наличных денег или в иной эквивалентной форме для удовлетворения возможных срочных требований вкладчиков (т. е. в виде высоколиквидных ценных бумаг). Это ограничение записывается следующим образом:

$$\sum_{j \in J_2} x_j \ge b_2 ,$$

где индексы из множества J_2 соответствуют ценным бумагам, эквивалентным наличным средствам (например, валюта, вклады до востребования и др.); при этом b_2 представляет собой минимальную величину необходимых наличных средств. Могут рассматриваться и другие ограничения подобного рода.

Главный недостаток этой весьма простой модели линейного программирования состоит в том, что в ней не учитывается риск, связанный с инвестициями. Рассчитанный на основе такой модели портфель ценных бумаг может обещать высокий средний ожидаемый доход, но при этом риск, связанный с инвестициями, также будет велик и истинный доход может оказаться значительно ниже ожидаемого!

Модель II. В этой модели учитывается фактор риска, связанный с каждым видом ценных бумаг. Курс некоторых ценных бумаг, например «спекулятивных акций», имеет тенденцию к сильным колебаниям, что увеличивает фактор риска, связанный с ними, но средний ожидаемый доход от них высок в силу их способности к сильному повышению. С другой стороны, «безопасные» инвестиции, такие как текущие счета, банковские депозитные сертификаты, могут давать меньший доход. В качестве меры *инвестиционного риска* можно рассматривать величину отклонения дохода от его среднего значения в течение последних T лет. Обозначим через σ_{jj}^2 инвестиционный риск для ценных бумаг вида j, который рассчитывается как оценка дисперсии по формуле

$$\sigma_{jj}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[r_j(t) - \mu_j\right]^2 .$$

Кроме того, курс некоторой группы ценных бумаг может зависеть от состояния той или иной отрасли экономики; спад в этой отрасли способен повлечь за собой падение цен на все ценные бумаги данной группы. Примерами ценных бумаг, курсы которых подвержены совместным колебаниям, служат акции нефтяных и автомобильных фирм и предприятий коммунальных услуг. Для уменьшения подобного риска необходимо распределять инвестиции по различным группам ценных бумаг. При таком распределении используется оценка соотношения уровней дохода для каждой пары видов ценных бумаг. Это соотношение выражается величиной оценки *ковариации* σ_{ij}^2, которая вычисляется на основе статистических данных за прошедшие годы:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[r_i(t) - \mu_i][r_j(t) - \mu_j] .$$

Заметим, что при $i = j$ эта величина представляет собой дисперсию j-го вида бумаг. Таким образом, в качестве меры *обобщенного инвестиционного риска* можно принять величину

$$V = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}^2 x_i x_j ,$$

в матричном виде эту величину можно представить как

$$V = x^T Qx,$$

где $Q_{(N \times N)} = \left\{ \sigma_{ij}^2 \right\}$ представляет собой матрицу оценок ковариаций для N видов ценных бумаг.

Если владелец ценных бумаг при определении портфеля заинтересован в получении заданного среднего ожидаемого дохода при минимальном риске, то соответствующая оптимизационная задача будет выглядеть следующим образом:

$$Z = x^T Qx \;\to\; \min,$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \le C, \quad x_j \ge 0, \quad \mu^T x \ge R,$$

где R представляет собой минимальный ожидаемый доход при выборе портфеля. В модель могут быть введены дополнительные, подобные рассмотренным выше, ограничения, связанные с политикой фирмы. В этой модели минимизации риска ограничения линейные, а целевая функция квадратичная.

Вопросы для обсуждения

1. *В табл.* 1.6 *приведены данные по доходу* (*на единицу вложений*) *нескольких ценных бумаг за* 7 *лет. Постройте графики соответствующих временны́х рядов. Как вы оцените доходность и инвестиционный риск данных бумаг?*

Таблица 1.6

Статистические данные о доходе от ценных бумаг

Вид ценной бумаги	Год						
	1	2	3	4	5	6	7
A	4	3	3,5	4,5	5	3	5,5
B	3	7	7	2	0	5	9
C	3	5	4,5	4	5	5,5	5
D	9	–1	–2	8	10	0	2

2. *Поясните необходимость использования матрицы ковариаций для моделирования инвестиционного риска. Приведите пример ценных*

бумаг, чья доходность находится в положительной или отрицательной статистической зависимости друг от друга.

3. *Какие серьезные допущения, помимо упомянутых, «заложены» в представленных моделях?*

1.4.4. Задачи векторной оптимизации

Приведенная ниже задача является многокритериальной по своей постановке, но на стадии построения модели она сводится к однокритериальной. Рекомендуется обратить внимание на способ сведения задачи к однокритериальной модели и оценить, каким образом используемая субъективная информация (как она «заложена» в модель?) может повлиять на результат решения задачи.

Задача 1.21. Задача о туризме. Первая попытка использовать модели принятия решений для организации досуга была предпринята в 1972 году и представляла собой комплексное исследование в области планирования туризма в развивающейся стране [6, т. 2]. В рамках этого исследования была создана модель, результаты которой стали основой для разработки Турцией соответствующей стратегии капиталовложений в сферу туризма.

Задача была сформулирована следующим образом: найти

$$\max \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K_i} d_{ij} X_{ij}$$

при *ограничениях*

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K_i} c_{ij} X_{ij} \le b;$$

$$X_{iL} - X_{iM} \ge 0 \text{ для } i = 1,\ldots,N \text{ и } (L,M) \in P_i,$$

$$X_{ij} = \{0,1\} \text{ для } i = 1,\ldots,N \text{ и } j = 1,\ldots K_i.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

N – число туристических районов, на которые подразделяется страна (для Турции это 65);

K_i – число проектов для реализации в i-м туристическом районе в течение планируемого периода;

P_i – индексное множество относительной значимости проектов, предложенных для реализации в i-м туристическом районе, т. е. множество пар индексов проектов, в которых проект, стоящий на первом месте в паре, должен быть выполнен *не позже* второго;

X_{ij} – переменная, принимающая значение 1, если j-й проект выбран для реализации в i-м туристическом районе, 0 – в противном случае;

d_{ij} – оценка выгод, получаемых при условии, что j-й проект реализован в i-м районе;

c_{ij} – ориентировочная стоимость (по завершении) j-го проекта, предложенного для реализации в i-м районе;

b – ассигнования, выделенные на развитие сектора туризма в течение планируемого периода.

Величина d_{ij} должна отражать относительную значимость возможных проектов и удовлетворять *свойству аддитивности* для всех проектов отдельного плана распределения, что позволяет определить выгоды от реализации общего плана. На первый взгляд может показаться, что в качестве оценки выгоды используют приведенную чистую прибыль, получаемую от реализованного проекта. Однако при более внимательном рассмотрении такая оценка оказывается неприемлемой. Это связано с тем, что, во-первых, существует большое число проектов, значимых в общенациональном масштабе, а во-вторых, существуют такие проекты, как сооружения дорог, музеев и т. п. Подобные проекты не дают выгоды в денежном выражении, но требуют немалых затрат.

Выбранная оценка выгоды представляла собой усредненное значение величин прибыли от различных возможных проектов. При рассмотрении совокупного воздействия развития туризма на страну через получаемую валюту применялась смешанная оценка, в качестве которой используется предельная (как бы дополнительная) полезность, которая отражает вклад данного проекта в «усиление» совокупного показателя привлекательности данного региона для туристов. Пусть $A_i^{(M)}$ – *вектор значений показателей*, являющихся критериями успешности / привлекательности проектов (по каждому из 17 критериев, как в примере с Турцией, в i-м туристическом районе) после завершения проекта M, включая все проекты, непосредственно ему предшествовавшие. Тогда предельный вклад проекта M по каждому критерию выражается *вектором «воздействия»* $T_i^{(M)}$, который определяется следующим образом:

$$T_i^{(M)} = A_i^{(M)} - A_i^{(L)},$$

где $T_i^{(M)} = A_i^{(M)} - A_i^{(L)}$, $T_i^{(M)}, A_i^{(M)}, A_i^{(L)} \in E^R$, а R – число показателей-критериев, по которым оценивается успешность/привекательность проектов, (как было сказано выше, в Турции использовалась модель, в которой R принимается равным 17).

Символ L в данной формуле обозначает индексы проектов, непосредственно предшествовавших проекту M. Поясним сказанное на примере. Проект строительства гостиницы в определенном районе может рассматриваться только в том случае, если имеется решение о постройке дороги к месту, где будет располагаться гостиница. Следовательно, проект строительства дороги непосредственно предшествует проекту строительства гостиницы. Задача состоит в том, чтобы, прежде чем предпринимать реальные шаги, обеспечить надлежащий уровень планирования района и таким образом гарантировать каждому туристическому району надлежащую инфраструктуру.

Если через W обозначить *вектор весовых множителей* (или относительной значимости показателей привлекательности), то выгоды от реализации j-го проекта в i-м туристическом районе определяются следующим образом:

$$d_{ij} = WT_i^{(j)}, \quad i = 1,...,N;\ j = 1,...,K_i .$$

По данным [6, т. 2], численное решение полученной задачи осуществлялось с помощью методов линейного программирования.

Вопросы для обсуждения

1. *Является ли поставленная задача многокритериальной?*
2. *Какой метод использован для сведения задачи к однокритериальной?*
3. *Насколько пригоден в данном случае метод линейного программирования?*
4. *Как в модели учтены условия, согласно которым ряд проектов должен быть выполнен до осуществления других проектов (нецелесообразно строить в районе концертный зал, если к этой площадке не подведены дороги)?*
5. *Поясните, как используется свойство аддитивности при оценке степени значимости запланированных проектов?*
6. *Запишите формулу вычисления выгоды от реализации j-го проекта в i-м туристическом районе, т. е. величины d_{ij}, не используя векторную запись.*

1.4.5. Обобщенные и отраслевые модели производственного планирования

Задача 1.22. Распределение производственной программы (размещение заказов или загрузка взаимозаменяемых групп оборудования) [10]. В этой задаче требуется составить такой план размещения заказов (загрузки оборудования), при котором задание было бы выполнено, а показатель эффективности достигал экстремального значения. При этом заказы распределяются между предприятиями (цехами, станками, исполнителями) с различными производственными и технологическими характеристиками, но взаимозаменяемыми в смысле выполнения заказов.

Введем необходимые обозначения. Пусть на m ($i = \overline{1,m}$) однородных группах оборудования нужно изготовить n ($j = \overline{1,n}$) видов продукции. План выпуска каждого вида на определенный период задан набором $x_j, j = \overline{1,n}$. Мощность каждого вида оборудования ограничена и равна b_i. Известна матрица (иногда ее называют технологической) $A = \|a_{ij}\|$, где a_{ij} – число единиц продукции *j*, выпускаемой в единицу времени на *i*-м оборудовании. Пусть c_{ij} – затраты, связанные с выпуском единицы *j*-й продукции на *i*-м оборудовании; x_{ij} – неизвестная величина – объем выпуска *j*-й продукции на *i*-м оборудовании. Целевая функция отражает критерий минимизации расходов на реализацию всех заказов. Очевидно, что оптимизационная модель задачи имеет следующий вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при *ограничениях*

- на ресурсы оборудования $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \; i = \overline{1,m}$,
- на выпуск продукции $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_j, \; j = \overline{1,n}$, (1.6)
- очевидно также, что $x_{ij} \ge 0$.

Выше представленную модель зачастую называют распределительной. Если по некоторым видам продукции допускается превышение плана, то ограничение (1.6) примет вид

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq x_j, \quad j = \overline{1, n_1};$$

по продукции, заказы на которую принимаются по кооперации для более полной загрузки оборудования, ограничение можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq x_j, \quad j = \overline{n_1 + 1, n_2};$$

для продукции, выпуск которой должен соответствовать плану, ограничения таковы:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_j, j = \overline{n_2 + 1, n}.$$

В качестве целевой функции можно принять:

а) максимум прибыли

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_j - c_{ij}) x_{ij} \to \max,$$

где a_j – отпускная цена единицы j-й продукции;

б) минимум затрат станочного времени

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \to \min;$$

в) выполнение задания в минимальные сроки

$$Z = \max_{i=\overline{1,m}} \{t_i\} \to \min,$$

где $t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$, $i = \overline{1, m}$.

Вопросы для обсуждения

1. *Запишите полностью модели с целевыми функциями а – в.*
2. *Какова размерность задачи для различных вариантов, представленной модели?*

Задача 1.23. Задача загрузки невзаимозаменяемых групп оборудования [10]. Пусть имеется m ($i = \overline{1,m}$) групп оборудования, на котором нужно выпускать n ($j = \overline{1,n}$) видов продукции. Предполагается, что группы оборудования различны. В пределах данной технологии одна и та же продукция производится только на определенном оборудовании, и его можно заменить лишь при замене технологического способа производства.

Пусть k ($k = \overline{1,K}$) – номер технологического способа (технологии). Обозначим через a_{ij}^{k} норму затрат времени на обработку единицы j-й продукции на i-м оборудовании по k-й технологии. Пусть b_i – общий полезный фонд времени работы i-й группы оборудования. (Очевидно, что «оборудование» – здесь понятие условное, под которым можно подразумевать производственные площади, материалы, полуфабрикаты, рабочую силу и т. д.) Неизвестные величины задачи – объемы продукции j-го вида, вырабатываемой по k-й технологии, обозначим как x_{ik}; а за x_j примем имеющийся план по изготовлению продукции j-го вида; c_{jk} – затраты, связанные с изготовлением единицы j-й продукции по k-й технологии. Следует минимизировать совокупные затраты на производство продукции.

Математическая модель задачи:

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} c_{jk} x_{ik} \to \min$$

при *ограничениях*

- на фонд времени работы каждой группы оборудования

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} a_{ij}^{k} x_{jk} \le b_i, \ \ i = \overline{1,m};$$

- на выпуск продукции $\sum_{k=1}^{K} x_{jk} \ge x_j, \ \ j = \overline{1,n};$
- условие неотрицательности $x_{jk} \ge 0.$

Вопросы для обсуждения

1. *Приведите пример оптимизационной задачи с указанием конкретных технологий, описываемых данной моделью.*

2. *Оцените размерность модели, записанной в общем виде и для приведенного конкретного примера.*

3. *Что значит взаимозаменяемые и невзаимозаменямые виды оборудования? Приведите примеры.*

Задача 1.24. Задача распределения производственной программы по календарным периодам. Рассмотрим простейшую постановку такой задачи [10]. Известна годовая производственная программа v_{jt}, $j = \overline{1,n}$, $t = \overline{1,T}$, т. е. потребность на j-ю продукцию в t-м интервале времени. Пусть b_{it} – фонды ресурса i-го вида в t-м интервале; a_{ij} – норма расхода i-го ресурса на выпуск единицы j-й продукции. Неизвестные величины x_{jt} – объемы выпуска j-й продукции в t-м интервале. Определяют (например, экспертным путем) приоритет (значимость) для каждого вида продукции – P_j. Обычно наиболее важным видам приписывается приоритет 1 и т. д.

Целевая функция задачи отображает критерий максимума выпуска продукции с учетом ее приоритетности:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{P_j} x_{jt} \to \max$$

при *ограничениях*

- на ресурсы в каждом t-м интервале времени

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jt} \le b_{it}, \ i = \overline{1,m}, \ t = \overline{1,T};$$

- на объемы выпуска продукции

$$\sum_{\tau=1}^{t} x_{j\tau} \ge \sum_{\tau=1}^{t} v_{j\tau}, \ j = \overline{1,n}, \ t = \overline{1,T};$$

- условие неотрицательности переменных задачи

$$x_{jt} \ge 0, \ j = \overline{1,n}, \ t = \overline{1,T}.$$

Вопросы для обсуждения

1. *Как будет выглядеть ограничение на ресурсы, если предположить, что норма расхода i-го ресурса на выпуск единицы j-й продукции a_{ij} не является постоянной величиной, а линейно зависит от объема выпускаемой продукции в данный интервал времени? К каким существенным изменениям в модели приведет учет данного условия? Увеличится ли при этом размерность задачи? Количество параметров задачи?*

2. *Дополните модель необходимыми ограничениями, учитывающими следующее условие: первые три вида продукции в первом интервале времени либо производятся в объемах, не меньших чем L_j, либо не производятся совсем.*

Задача 1.25. Задача размещения магазинов единой розничной торговой сети [8]. Необходимо разместить магазины так, чтобы общие затраты на строительство, эксплуатацию, транспортировку товаров со складов и разнообразные потери были наименьшими. Спрос на различные товары зависит от места расположения магазина.

Введем обозначения:

i – номер склада, где $i = 1,\ldots, n$, n – число всех складов;

r – вид товара, где $r = 1,\ldots, R$, R – число всех видов товара;

j – номер магазина, где $j = 1,\ldots, m$, m – общее число магазинов;

q – номер варианта развития магазина;

Q_j – число возможных вариантов развития j-го магазина;

N_{ir} – количество r-го вида товара на i-м складе;

M_{jr}^q – предполагаемый объем реализуемой товара r-го вида в j-м магазине согласно q-му варианту развития;

P_j^q – приведенные затраты j-го магазина согласно q-му варианту;

W_r – предполагаемый объем товара r-го вида, потребляемого во всей торговой сети;

C_{ij}^r – стоимость перевозки единицы товара r-го вида от i-го склада к j-му магазину;

C_j^q – возможные потери (недополученная прибыль, издержки на хранение и др.) в j-м магазине в случае принятия q-го варианта развития;

x_j^q – искомая величина, равная 1, если в j-м магазине следует выбрать q-й вариант развития, и равная 0 – в противном случае;

x_{ij}^r – объем перевозки r-го товара с i-го склада в j-й магазин.

В этой модели размещения розничной торговой сети требуется найти такие

$$\boldsymbol{x_j^q} \text{ и } \boldsymbol{x_{ij}^r} \geq 0 \ (i=1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, m; \ \ q = 1, 2,\ldots, Q; \ r = 1, 2,\ldots, R \ ),$$

при которых достигается минимум совокупных затрат и потерь

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{Q_j}\left(P_j^q + C_j^q\right)x_j^q + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{R} C_{ij}^r x_{ij}^r \to \min.$$

При этом должны быть учтены условия:

- вывоз товаров из склада должен быть в пределах возможного:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^r \leq N_{ir} \ \ (i=1, 2, \ldots, n; \quad r=1, 2,\ldots, R);$$

- поставляемые товары должны соответствовать мощностям магазинов:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^r \sum_{q=1}^{Q} M_{jr}^q x_j^q \ \ (j=1, 2\ldots, m; \quad r=1, 2,\ldots, R).$$

Объем поставляемой продукции должен соответствовать потреблению:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^r W_r \ \ (r = 1, 2,\ldots, R).$$

Для каждого магазина должен быть выбран только один вариант развития торговой точки:

$$\sum_{q=1}^{Q_j} x_j^q = 1 \ \ (j = 1, 2,\ldots, m).$$

Вопросы для обсуждения

1. *К какому классу оптимизационных задач можно отнести построенную модель? Какие методы ее решения вы могли бы предложить?*

2. *Задайте конкретное количество магазинов, складов, товаров, вариантов развития и оцените размерность полученной модели.*

3. *Оценка каких параметров модели, на ваш взгляд, может представлять наибольшую сложность?*

4. *Какие допущения, сделанные в данной задаче, могут существенно повлиять на окончательное решение?*

Задача 1.26. Задача комплексного регулирования парка вагонов [8]. При составлении плана перевозок железнодорожным транспортом оптимальное распределение груженых и порожних вагонов может определяться на основе критерия минимума общего пробега груженых и порожних вагонов или минимума издержек по пробегу вагонов.

Введем обозначения:

i, j – индексы районов транспортной сети, где $i, j = 1, \ldots , n$; n – число районов транспортной сети;

r – вид перевозимого груза (считается, что порожний вагон перевозит груз нулевого веса); R – число видов перевозимых грузов;

l – индекс вида вагонов; L – число видов вагонов;

Q_{ijr} – план (объем) перевозки r-го вида груза из района i в район j;

a_{lr} – норма загрузки l-го вида вагона r-м видом груза;

N_l – число вагонов l-го вида, n_{il} – предельное число вагонов l-го вида, которое можно использовать в i-м районе;

n_{il} – расстояние между центрами i-го и j-го районов;

t_{ijr} – время передвижения r-го вида груза из i-го района в j-й;

T – длина периода, в течение которого производятся перевозки;

x_{ijrl} – искомое число вагонов l-го вида, предназначенных для перевозки r-го вида груза из района i в район j.

Рассмотрим модель комплексного регулирования парка вагонов, составляющую в нахождении таких $x_{ijrl} \geq 0$ $(i = 1, 2,\ldots, n;\ r = 1,\ldots R;$ $l = 1, 2, \ldots, L)$, при которых достигается минимум общего пробега груженых и порожних вагонов.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{R}\sum_{l=1}^{L} R_{ij} x_{ijrl} \to \min .$$

Ограничения:

- по объему перевозимых грузов

$$\sum_{l=1}^{L} a_{lr} x_{ijrl} = Q_{ijr} \ (i, j = 1, 2, ..., n; \quad r = 1, 2, ..., R);$$

- по времени перевозки

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ijr} x_{ijrl} \le TN_l \, (i = 1, 2 ..., L);$$

- по количеству используемых вагонов

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{n} x_{jirl} - \sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{n} x_{ijrl} \le n_{il} \ (i = 1, 2, ..., n; \quad l = 1, 2, ..., L).$$

В последнем неравенстве первая сумма означает число вагонов l-го вида, прибывших в i-й район, а вторая сумма – число вагонов l-го вида, убывших из i-го района.

Вопросы для обсуждения

1. *К какому классу оптимизационных задач можно отнести построенную модель? Какие методы ее решения вы могли бы предложить?*
2. *Оцените количество переменных в модели.*
3. *Какие допущения, сделанные в данной задаче, могут существенно повлиять на окончательное решение?*

Задача 1.27. Одноэтапная статическая модель «развития и размещения» [10]. Пусть в i-м пункте могут быть построены или модернизированы предприятия по разным проектам, каждому из которых соответствует производственная мощность предприятия в объеме ρ_{ik} и с удельными затратами производства α_{ik}, $i = \overline{1, I}$, $i = \overline{1, K_l}$. Пусть b – общая потребность района в продукции. Необходимо выбрать проекты для реализации, при которых суммарные затраты производства будут минимальными.

Обозначим через δ_{ik} булевы переменные, принимающие значение, равное единице, если в i-м пункте будет принят k-й вариант, и нулю – в противном случае.

Модель выглядит следующим образом:

$$Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K_i} \alpha_{ik} \rho_{ik} \delta_{ik} \to \min$$

при условиях:

- потребность экономического района в продукции должна быть удовлетворена полностью:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K_i} \rho_{ik} \delta_{ik} \geq b ;$$

- для пунктов с номерами i^*, где обязательно наличие одного предприятия:

$$\sum_{k=1}^{K_i^*} \delta_{i^* k} = 1 ;$$

- для пунктов t^{**}, где сохранение действующих или строительство новых предприятий не обязательно:

$$\sum_{k=1}^{K_i^{**}} \delta_{i^* k} \leq 1 ;$$

- условие булевости: $\delta_{ik} \in \{0,1\}$.

Данную модель можно видоизменить *с учетом размещения пунктов потребления.*

Обозначим через a_i максимально допустимую мощность i-го предприятия; b_j – объем потребления продукции в j-м пункте; c_{ij} – удельные затраты на перевозку.

Введем дополнительные переменные: x_{ij} – объем перевозки однородного продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, $j = \overline{1, J}$.

Целевая функция отражает критерий минимизации затрат, связанных с производством и транспортировкой продукции.

Модель развития и размещения производства:

$$Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K_i} \alpha_{ik} \rho_{ik} \delta_{ik} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

с *ограничениями*, которые учитывают ряд условий:

- потребности потребителей должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \ge b_j, \ \ j = \overline{1, J}\ ;$$

- возможности поставщиков ограничены:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \le a_i, \ \ i = \overline{1, I}\ .$$

Если учесть дискретный характер заданных производственных мощностей, то может оказаться, что невозможно подобрать мощности так, чтобы потребность удовлетворялась при их полной загрузке. Здесь нельзя использовать балансовые ограничения, предусматривающие выполнение равенства, поэтому используется неравенство

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \le \sum_{k=1}^{K_i} \rho_{ik} \delta_{ik}, \ \ i = \overline{1, I}\ .$$

Предусматривается, что в районе могут быть не выбраны проекты развития:

$$\sum_{k=1}^{K_i} \delta_{ik} \le 1, \ \ \delta_{ik} \in \{0, 1\}, \ \ i = \overline{1, I}, \ \ k = \overline{1, K_i}\ .$$

Условие неотрицательности: $x_{ij} \ge 0, \ \ i = \overline{1, I}, \ \ j = \overline{1, J}$.

Вопросы для обсуждения

1. *К какому классу оптимизационных задач можно отнести построенную модель? Какие методы ее решения вы могли бы предложить?*

2. *Обозначьте единицы измерения переменных и параметров задачи, оцените их количество.*

3. *Почему второй вариант модели можно назвать моделью размещения?*

Задача 1.28. Двухэтапная динамическая статическая модель «развития и размещения» [10]. Пусть в каждом из I выбранных пунктов $\left(i=\overline{1,I}\right)$ либо существует, либо может быть построено предприятие с возможным набором $K_i\left(k=\overline{1,K_i}\right)$ вариантов развития и функционирования. Обозначим через α_{ikr}^t затраты на единицу производства r-го $\left(r=\overline{1,R}\right)$ продукта при реализации k-го $\left(k=\overline{1,K_i}\right)$ варианта на i-м $\left(i=\overline{1,I}\right)$ предприятии; ρ_{tikr} – объем производства r-го продукта на i-м предприятии при выборе k-го варианта в t-м $\left(t=\overline{1,T}\right)$ году. Имеется $J\left(j=\overline{1,J}\right)$ пунктов потребления с потребностями b_{jr}^t. Для работы предприятий-поставщиков требуется $\Phi\left(\varphi=\overline{1,\Phi}\right)$ видов сырья или полуфабрикатов, расположенных в $\Psi\left(\psi=\overline{1,\Psi}\right)$ сырьевых зонах. Пусть c_{ijr}^t и $c_{i\psi\varphi}^t$ – удельные затраты транспортировки r-го продукта и φ-го сырья в t-м году соответственно по коммуникациям (i, j) и (ψ, i).

Неизвестные величины задачи:

• булевы переменные δ_{ikr}^t, характеризующие использование i-м поставщиком в t-м году k-го варианта функционирования, причем

$$\delta_{ikr}^t=\begin{cases}1, \text{ если в } t\text{-м году } i\text{-й поставщик работает по } k\text{-му варианту;}\\ 0-\text{в противном случае;}\end{cases}$$

• интенсивности поставок, т. е. U_{ijr}^t и $V_{\psi i\varphi}^t$ – объемы перевозок соответствующего вида продукта r и сырья φ в t-м году по возможным коммуникациям (i, j) и (ψ, i).

Целевая функция отражает критерий минимизации затрат, связанных с возможными вариантами производства и транспортировки.

Модель выглядит следующим образом:

$$\min: Z = \sum_{ikrt} \alpha^t_{ikr} \rho^t_{ikr} \delta^t_{ikr} + \sum_{ijrt} c^t_{ijr} U^t_{ijr} + \sum_{\psi i \varphi t} c^t_{\psi i \varphi} V^t_{\psi i \varphi},$$

с *ограничениями*:

- на нужды пунктов потребления, которые должны удовлетворяться полностью:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{\tau=1}^{t} U^{\tau}_{ijr} \geq \sum_{\tau=1}^{t} b^{\tau}_{jr};$$

- на возможности поставщиков, определяемые вариантами развития и размещения:

$$\sum_{k=1}^{K^i} \sum_{\tau=1}^{t} \rho^{\tau}_{ikr} \delta^{\tau}_{ikr} \geq \sum_{j=1}^{J} \sum_{\tau=1}^{t} U^{\tau}_{ijr};$$

- сырьевые возможности в каждой ψ-й зоне ограничены величиной $D^t_{\psi\varphi}$, отсюда $\sum_i V^t_{\psi i \varphi} \leq D^t_{\psi\varphi}$;

- условие выбора единственного варианта развития для множества пунктов с номерами t^*:

$$\sum_{k=1}^{K_{i^*}} \delta_{i^* k} = 1$$

и для пунктов i^{**}, где сохранение или строительство предприятий не обязательно:

$$\sum_{k=1}^{K_i^{**}} \delta_{i^{**} k} \leq 1;$$

- тривиальные ограничения:

$$\delta_{ik} \in \{0,1\}, U^t_{ijr} \geq 0, V^t_{\psi i \varphi} \geq 0.$$

Вопросы для обсуждения

1. *Ограничения в модели выписаны некорректно, из приведенной записи не ясно, сколько и каких неравенств должно быть в модели. Внесите в модель необходимые корректировки.*

2. *В чем вы видите вычислительные трудности решения данной задачи?*

3. *Как вы будете интерпретировать полученный ответ в терминах исходной задачи?*

Контрольные вопросы

1. Запишите модель математического программирования, приведите примеры конкретных моделей математического программирования.

2. Какова математическая модель общей задачи ЛП? Приведите примеры конкретных моделей линейного программирования.

3. Какие ограничения оптимизационной модели называются тривиальными?

4. Перечислите основные этапы при построении оптимизационной модели. Какие сложности могут возникнуть при выполнении этих этапов?

5. Зачем рекомендуется проверять единицы измерений при построении оптимизационной модели?

6. Что характеризует размерность задачи ЛП? Как она определяется?

ГЛАВА 2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Основные понятия линейного программирования

Задачу ЛП (1.2) можно представить также в виде так называемой *канонической формы задачи ЛП*:

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \\ \sum_{j=1}^{n} \sum a_{ij} x_j + y_i = b_i, \ i = 1,\dots,m; & (a) \\ x_j \geq 0, \quad y_i \geq 0. & (b) \end{cases} \quad (2.1)$$

Каноническая форма задачи ЛП предполагает, что все функциональные ограничения вида (1.1) представляются в виде равенств. Переход от ограничений типа неравенств к ограничениям типа равенств осуществляется с помощью искусственных переменных y_i, на которые, чтобы сохранить смысл ограничений, накладываются условия неотрицательности.

Если задача ЛП представлена в матричном виде (1.3), то ее каноническую форму можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} Z = c^T x \to \max; \\ Ax + Ey = b; \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где E – единичная матрица размерности $m \times m$; A – матрица коэффициентов условий задачи размерности $m \times n$, т. е. $A = \{a_{ij}\}$, где $i = 1, \dots, m$,

$j = 1, ..., n$. При этом y – m-мерный вектор. Иначе каноническую форму задачи ЛП можно записать в виде

$$\begin{cases} Z = c^T x \to \max; \\ *)\ \ x_1 A_1 + ... + x_1 A_n + y_1 e_1 + ... + y_m e_m = b; \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $e_i (i = 1,..., m)$ – единичный вектор m-мерного векторного пространства, т. е. $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - i$; $e_i \in E^m$; A_j – j-й вектор-столбец ($j = 1, ..., n$) матрицы условий A, причем очевидно, что $A_j \in E^m$.

Решение $(x, y)'$ называется ***опорным*** (***базисным***) ***решением*** задачи (2.1)–(2.3), если система векторов $\{A_j, e_i\}$, входящих в выражение *) в представлении (2.3) с положительными компонентами x'_j, y'_i, линейно независима.

Совокупность линейно независимых векторов-столбцов матрицы компонентов условий A_j и единичных векторов e_i, соответствующих положительным компонентам x'_j и y'_i опорного решения $(x, y)'$, называется ***базисом опорного решения***, который можно обозначить как Б$\{ (x, y)' \}$.

Из теории линейного программирования известно, что опорные решения задачи ЛП соответствуют крайним точкам выпуклого многогранника, являющегося множеством допустимых решений задачи ЛП, и наоборот.

Пример 2.1. Рассмотрим некоторые опорные решения в следующей задаче:

$$Z = x_1 + x_2 \to \max; \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 2;$$

$$x_3 \le 1; \quad x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0.$$

Очевидно, что $n = 3$, т. е. $x \in E^3$, причем $m = 2$.

Геометрически ограничения задачи примера 2.1 можно представить на графике в трехмерном пространстве (рис. 2.1). Очевидно, что, например, M^0, M^1, M^2, M^3 являются крайними точками выпуклого многогранника (множества допустимых решений рассматриваемой задачи), представляющего собой в данном примере усеченную сверху прямоугольную пирамиду, а точка M^4 крайней не является.

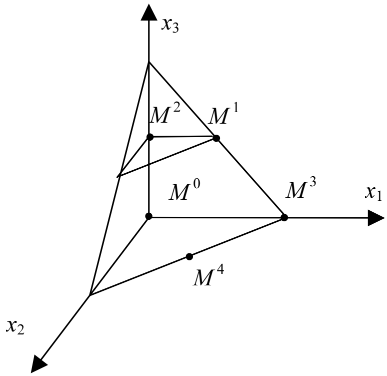


Рис. 2.1. Геометрическое представление условий задачи (пример 2.1)

Покажем, что в данной задаче решения, соответствующие крайним точкам M^1 и M^2, являются опорными, тогда как решение, соответствующее точке M^4, опорным не является.

В канонической форме рассматриваемая задача выглядит следующим образом:

$Z = x_1 + x_2 \to \max$;

$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 2$, $i = 1$ (номер ограничения);

$x_3 + y_2 = 1$, $\quad i = 2$;

$x_1 \ge 0$, $\quad i = 3$;

$x_2 \ge 0$, $\quad i = 4$;

$x_3 \ge 0$, $\quad i = 5$;

$y_1 \geq 0\,, \qquad\qquad i = 6;$

$y_2 \geq 0\,, \qquad\qquad i = 7;$

$\left((x, y)' \in E^{3+2}\right).$

Матрицу условий задачи ЛП в канонической форме можно представить как

$$[A, E] = A' = \begin{array}{c} \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & e_1 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Рассмотрим точку $M_x^1 \in E^n = E^3$, $M^1 = (1, 0, 1)^T$. Соответствующее ей решение в канонической форме есть $M_{xy}^1 = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \sim A_1 \\ \\ \sim A_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$. При этом легко показать, что векторы-столбцы матрицы условий, которым соответствуют положительные компоненты x_j' и y_i', т. е. столбцы $A_1 = (1, 0)^T$, $A_3 = (1, 1)^T$, являются линейно независимыми.

2. Рассмотрим точку $M_x^2 \in E^n = E^3$, $M^2 = (0, 0, 1)^T$. В канонической форме задачи эта точка представима как $M_{xy}^2 = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \sim A_3 \\ \sim e_1 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$. Легко показать, что векторы-столбцы $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ линейно независимы.

3. Рассмотрим точку $M_x^4 \in E^n = E^3$, $M^4 = (1,1,0)^T$. В канонической форме задачи эта точка представляется как $M_{xy}^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim A_1 \\ \sim A_2 \\ \\ \\ \sim e_2 \end{matrix}$. Векторы-столбцы $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, соответствующие положительным компонентам решения, очевидно линейно зависимы.

Можно получить *частное опорное решение задачи линейного программирования* (2.1)–(2.3), положив $x_j^0 = 0\,(j = 1,...,n)$. Из условий (2.3*) получаем

$$0 \cdot A_1 + ... + 0 \cdot A_n + y_1 \cdot e_1 + ... + y_m \cdot e_m = b \quad (j = 1,...,n).$$

Отсюда можно выразить переменные y_i^0. Получаем $y_i^0 = b_i$. Таким образом, получаем некоторое *начальное опорное решение* вида $(x, y)^0 = (\underbrace{0,...,0}_{n \text{ раз}}, b_1,...,b_m)$.

В примере 2.1 такой точкой является точка пересечения координат, в терминах канонической формы это точка $M^0 = (0,0,0,2,1)^T$, причем очевидно, что векторы-столбцы e_1 и e_2, соответствующие положительным компонентам опорного решения, линейно независимы.

Опорное решение $(x, y)'$ задачи ЛП (1.2) (или (2.1)) называется ***невырожденным***, если оно содержит ровно m положительных компонентов. Если решение $(x, y)'$ содержит менее m положительных компонентов, оно называется ***вырожденным***.

Примечание. Если решение $(x_i, y_i)'$ содержит более m положительных компонентов, оно не является опорным.

Геометрически невырожденность решения задачи ЛП (2.1) означает, что в этой крайней точке (вершине) многогранника пересекается ровно $n + m$ граничных гиперплоскостей. Если опорное решение вырожденное, то в соответствующей вершине пересекаются более чем $n + m$ гиперплоскостей.

Пример 2.2

$Z = \ldots$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 2$;

$x_3 \le 2$;

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$, ($x \in E^3$).

В канонической форме

$Z = \ldots$

$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 2$, $i = 1$;

$x_3 + y_2 = 2$, $i = 2$;

$x_1 \ge 0$, $i = 3$;

$x_2 \ge 0$, $i = 4$;

$x_3 \ge 0$, $i = 5$;

$y_1 \ge 0$, $i = 6$;

$y_2 \ge 0$, $i = 7$;

$(x, y) \in E^5$.

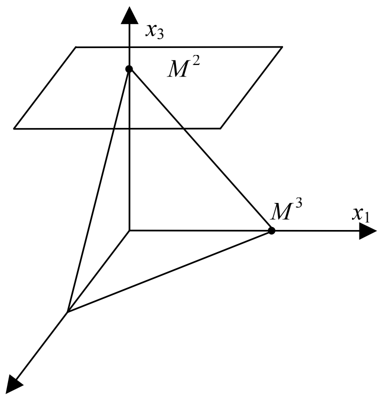


Рис. 2.2. Геометрическое представление вырожденного опорного решения задачи (пример 2.2)

Каждая крайняя точка выпуклого многогранника – допустимого множества получается пересечением пяти гиперплоскостей (из семи заданных в задаче) в пятимерном векторном пространстве.

Рассмотрим точки M^3 и M^2 и соответствующие им опорные решения (рис. 2.2). В каноническом представлении задачи примера 1.2 точка M^3 имеет следующие координаты $M_{xy}^3 = (2,0,0,0,2)^T$ и представляет собой пересечение гиперплоскостей с номерами 1, 2, 4, 5, 6 (число гиперплоскостей равно 5).

Точка $M_{xy}^2 = (0,0,2,0,0)^T$ является пересечением шести гиперплоскостей с номерами 1, 2, 3, 4, 6, 7. Очевидно, что соответствующее ей опорное решение является *вырожденным* (число гиперплоскостей больше 5, а число положительных компонентов равно 1, что меньше $m = 2$).

2.2. Графический метод решения ЗЛП

2.2.1. Геометрическая интерпретация ЗЛП

Дадим геометрическую интерпретацию задачи ЛП на примере задачи ЛП с двумя переменными. Множество решений каждого из неравенств задачи ЛП (2.1) (или (1.1)–(1.3)) на координатной плоскости представляется некоторой полуплоскостью, а множество решений всей системы неравенств представляется пересечением соответствующих плоскостей. Очевидно, что множество точек пересечения данных полуплоскостей и есть область допустимых решений (ОДР) задачи линейного программирования (2.1). Из теории ЛП известно, что *ОДР задачи ЛП всегда есть выпуклое множество*, которое обладает следующим свойством: если какие-либо две точки A и B принадлежат этому множеству, то и все точки отрезка, соединяющего точки A и B, также принадлежат этому множеству. Таким образом, ОДР задачи ЛП с двумя переменными графически представляется выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной об-

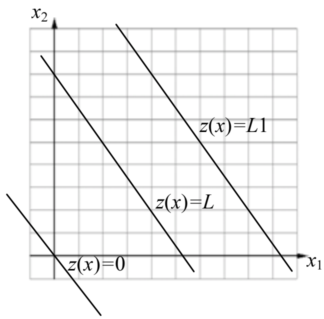


Рис. 2.3. Линии уровня целевой функции

ластью, отрезком, лучом, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи (2.1) ОДР становится пустым множеством.

Целевая функция $z(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ при фиксированном значении $z(x) = L$ определяет на плоскости прямую линию $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Изменяя значения L, мы получим семейство параллельных прямых, называемых ***линиями уровня*** целевой функции.

Прямые параллельны, потому что изменение значения L влечет изменение лишь длин отрезков, отсекаемых линией уровня на осях, а угловой коэффициент прямой $\operatorname{tg}\alpha = -c_1/c_2$ останется постоянным (рис. 2.3). Поэтому для решения будет достаточно построить одну из линий уровня, произвольно выбрав значение L.

Как известно, линии уровня характеризуются тем, что во всех точках одной линии уровня значения функции $z(x)$ равны между собой. Вспомним, что ***градиентом*** некоторой функции $f(x)$ называется вектор частных производных этой функции $\nabla f(x)$, где

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T.$$

Градиент указывает направление наиболее быстрого возрастания функции и в случае линейной функции ориентирован перпендикулярно линиям уровня, т. е. для линейной функции двух переменных линия уровня представляет собой прямую, перпендикулярную вектору $\nabla f(x)$, который служит градиентом данной функции.

Следовательно, если линия уровня целевой функции определяется уравнением $z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, то вектор-градиент целевой функции имеет вид

$$\nabla z(x) = \nabla(c_1x_1 + c_2x_2) = (c_1, c_2)^T. \tag{2.4}$$

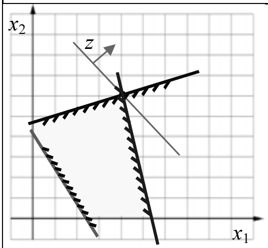
Этот вектор указывает *направление возрастания* функции

Таким образом, ***геометрически отыскание оптимального решения задачи ЛП*** (2.1) ***– это нахождение такой точки ОДР данной задачи***, ***через которую проходит линия уровня ЦФ z(x), соответствующая наибольшему*** (***наименьшему***) ***значению целевой функции z(x)***. Оптимальное решение всегда находится в крайней точке многогранника ОДР или на ребре этого многогранника (если задача ЛП имеет множество решений), все точки которого также являются оптимальными.

При поиске оптимального решения задачи ЛП возможны исходы, описанные в табл. 2.1.

Таблица 2.1

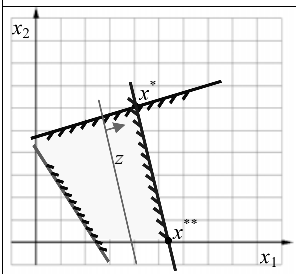
Возможные исходы решения задач ЛП

<table>
<tr><th>Ситуация</th></tr>
<tr><td>


а

1. *Существует единственное решение задачи.* В этом случае вычисляются координаты оптимальной точки x_1 и x_2, значение целевой функции в этой точке.

Ответ записывается в следующей форме:

$$x^* = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}, z(x^*) = z^* = \ldots$$
</td></tr>
<tr><td>


б

2. *Существует бесконечное множество решений.* Такая ситуация возникает, когда прямая ЦФ z параллельна ребру многоугольника, образующего ОДР. Все точки, лежащие на этом ребре, имеют одинаковое значение ЦФ. В этом случае вычисляются координаты концов отрезка x^* и x^{**}, а также значение ЦФ в этих точках (они должны быть равны).

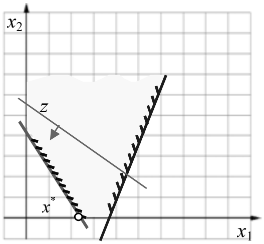
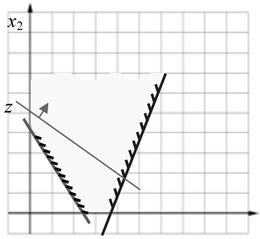
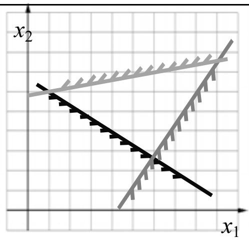
Ответ записывается в виде выпуклой линейной комбинации концов отрезка, на котором лежит множество решений:

$$x^* = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}, x^{**} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}, z(x^*) = \ldots, z(x^{**}) = \ldots, y = \lambda x^* + (1-\lambda)x^{**}, \ \lambda \in [0,1].$$

Можно рассчитать координаты вектора y для какого-то конкретного λ из интервала [0,1] и убедиться, что значение целевой функции для данной точки также равно $z(x^*)$ и $z(x^{**})$
</td></tr>
<tr><td>
3. *Неограниченность ЦФ на ОДР*. Если ОДР не ограничена в направлении оптимизации целевой функции, то задача ЛП не имеет решений (см. рис. *г*).

Ответ: задача ЛП не имеет решений вследствие неограниченности ЦФ на ОДР.

Примечание. Неограниченность ОДР в общем случае не означает отсутствия решений. Если бы в приведенном примере направление целевой функции было противоположное, то задача имела бы единственное решение (см. рис. *в*)
</td></tr>
</table>

Ситуация	
 *в*	 *г*
4. *Несовместность ограничений*. Если ограничения задачи несовместны, т. е. ОДР – это пустое множество ($D = \varnothing$), то задача не имеет допустимых, а следовательно, и оптимальных решений. Ответ: задача ЛП не имеет решений вследствие несовместности ограничений, $D = \varnothing$	 *д*

2.2.2. Графический метод

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач ЛП с двумя переменными. Он основан на геометрической интерпретации ЗЛП.

Этапы решения графическим методом.

1. Построение ОДР.

2. Построение радиуса-вектора $\mathbf{N}$ (градиента целевой функции) и линии уровня целевой функции.

3. Мысленный параллельный перенос прямой целевой функции по направлению вектора $\mathbf{N}$ в случае, если задача решается на max (против направления в случае, если задача решается на min) до самой дальней точки ОДР. Найденная таким образом крайняя точка ОДР и будет являться решением задачи.

Пример. Пусть дана задача максимизации линейной целевой функции при заданных *ограничениях*:

$$\begin{cases} z = x_1 + 3x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \begin{vmatrix} \\ L1 \\ L2 \\ L3 \\ \\ \end{vmatrix}$$

Так как количество переменных в неравенствах, задающих область допустимых планов задачи, равно двум, то ее можно изобразить на координатной плоскости (рис. 2.4).

Согласно приведенной выше последовательности решения графическим методом в первую очередь определяется ОДР. Строятся прямые $L1$, $L2$, $L3$, заданные соответствующими ограничениями-неравенствами. На рис. 2.4 показано, что каждое неравенство определяет некоторую полуплоскость. Соответствующие области для каждого ограничения отмечены штрихами. Пересечение D данных полуплоскостей (т. е. множество точек, которые одновременно принадлежат каждой их них) является ОДР задачи.

Строится радиус-вектор $\mathbf{N}$ из точки начала координат в точку (1, 3). Координаты точки определяются по формуле (2.4) – это коэффициенты целевой функции, т.е координаты вектора-градиента целевой функции. Линия уровня ЦФ строится перпендикулярно радиусу-вектору $\mathbf{N}$. На рис. 2.4 она проведена через начало координат.

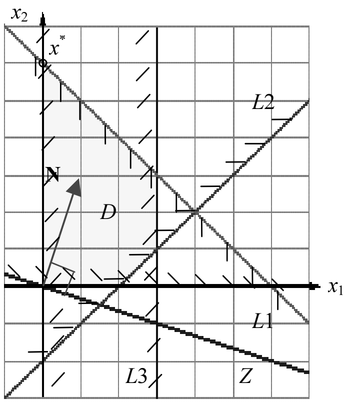


Рис. 2.4. Решение графическим методом

Мысленный параллельный перенос прямой ЦФ z по направлению радиуса-вектора $\mathbf{N}$ (задача решается на max) до самой дальней точки ОДР дает точку x^*. Найденная крайняя точка ОДР является решением задачи. Очевидно, что здесь наблюдается ситуация 1 (табл. 2.1), т. е. задача ЛП имеет единственное решение.

Вычислим координаты этой точки, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases}$$

Получаем значения $x_1^* = 0$, $x_2^* = 6$. Вычисляем значение ЦФ в этой точке: $z(x^*) = 0 + 3 \cdot 6 = 18$.

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $z(x^*) = 18$.

2.3. Вычислительная схема симплекс-метода для решения задач ЛП

2.3.1. Особенности симплекс-метода

Симплекс-метод известен с 1947 года, когда появилась первая публикация Дж. Данцига, посвященная этому методу. В советской литературе 1960–1980-х годов этот метод был известен также как метод последовательного улучшения плана.

За прошедшие с тех пор годы было предложено не только много разновидностей симплекс-метода, учитывающих особенности различных подклассов задачи ЛП (блочные задачи, задачи со слабо заполненной матрицей условий $A = \{a_{i,\,j}\}$), но и несколько принципиально иных методов решения задачи ЛП. Некоторые из предложенных методов в теоретическом плане, например с точки зрения характеристики сложности алгоритма, превосходят симплекс-метод. Известно, что симплекс-метод обладает экспоненциальной сложностью, т. е. имеет экспоненциальную оценку трудоемкости в зависимости от размерности задачи на всем классе задач ЛП, тогда как, например, метод Хачияна (советского математика) и метод Крамаркара (американского исследователя) характеризуются полиномиальной сложностью. И тем не менее, по утверждению многих специалистов в теории линейного программирования, симплекс-метод и после десятилетий всесторонней апробации с точки зрения алгоритмической реализации и универсальности применимости на классе задач ЛП остается наиболее предпочтительным, а потому наиболее распространенным при решении задач ЛП.

Основная идея симплекс-метода достаточно просто иллюстрируется геометрически. Как уже говорилось выше, допустимое множество задачи ЛП в форме (2.1) (или (1.1)–(1.3)) представляет собой выпуклый многогранник (в случае если множество не ограничено – выпуклое многогранное множество) с конечным числом вершин этого многогранника, т. е. его крайних точек. В том случае, если задача ЛП имеет единственное решение, то оно находится в одной из этих вершин. Симплекс-метод состоит в таком направленном переборе вершин, при котором значение целевой функции улучшается (не ухудшается) при переходе от вершины к вершине. Каждая вершина многогранника является пересечением плоскостей (в n-мерном случае – гиперплоскостей), каждая из которых задается уравнением, определенным соответствующим ограничением исходной задачи ЛП. Другими словами, каждая вершина определяется как решение системы уравнений, выбираемой специальным образом из системы ограничений, определяющих множество допустимых решений задачи (2.1). Таким образом, *симплекс-метод*, по сути дела, *представляет собой вычислительную процедуру последовательного решения систем линейных уравнений*. Поэтому этот метод содержит в себе правила формирования систем уравнений (в терминах разобранной ниже схемы – правила выбора разрешающего элемента) и схему решения систем линейных уравнений (в терминах приведенной ниже схемы – *жордановы исключения*).

Так как *число вершин в многограннике* (на множестве допустимых решений) *конечно* и можно показать, что при решении задачи ЛП симплекс-методом значение целевой функции от вершины к вершине улучшается (не ухудшается), то *алгоритм симплекс-метода является конечным*. Это означает, что теоретически (без учета вычислительных погрешностей машинной реализации алгоритма) ***метод сходится за конечное число итераций***. Причем считается, что число итераций зависит в основном от числа ограничений m, а не от числа переменных n.

В грубом приближении число итераций лежит в пределах от 1,5 до 2 m.

2.3.2. Вычислительная схема симплекс-метода

В задачи данного пособия не входит рассмотрение теоретического обоснования симплекс-метода, но предполагается, что изучение вычислительной схемы должно способствовать более глубокому пониманию вычислений, реализуемых с помощью программного обеспечения (например, в программной системе Excel), и, следовательно, формированию навыков решения задач ЛП с использованием вычислительной техники. Ниже рассмотрена вычислительная схема, включенная в ряд известных учебников по математическому программированию и исследованию операций [3, 5].

При этом сначала рассматривается аппарат жордановых исключений, с помощью которых осуществляется переход от одного опорного решения к другому, т. е. от одной крайней точки выпуклого многогранника (допустимого множества ЗЛП) к другой. После описания жордановых исключений приведены правила выбора разрешающего элемента для определения опорного решения (крайней точки), к которому необходимо перейти из тех или иных соображений.

Обыкновенные жордановы исключения. **Основные понятия**. Пусть рассматривается система

$$y_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

из m линейных форм с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эта система может быть представлена в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{r|ccccc|} & x_1 & \ldots & x_s & \ldots & x_n \\ \hline y_1 = & a_{11} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \ldots & & \\ y_r = & a_{r1} & \ldots & \boxed{\boldsymbol{a_{rs}}} & \ldots & a_{rn} \\ \ldots & & & \ldots & & \\ y_m = & a_{m1} & \ldots & a_{ms} & \ldots & a_{mn} \\ \hline \end{array} \tag{2.6}$$

Такое табличное представление системы (2.5) позволяет в дальнейшем различные действия над системой производить схематизированно, т. е. осуществлять пересчет коэффициентов таблицы a_{ij} по определенному алгоритму, а именно с помощью аппарата жордановых* исключений.

---

* Жордановы исключения названы по имени известного французского математика К. Жордана (1838–1922), внесшего существенный вклад в развитие алгебры, теории функций и топологии.

Пусть, например, возникла необходимость выразить независимую переменную x_s из уравнения

$$y_r = a_{r1} \cdot x_1 + a_{r2} \cdot x_2 + \ldots a_{rs} \cdot x_s + \ldots + a_{rn} \cdot x_n, \tag{2.7}$$

где y_r является переменной, которая зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и подставить полученное выражение во все остальные уравнения системы (2.5). Эту операцию можно выполнить по определенной схеме, которая достаточно просто алгоритмизируется.

Итак, будем называть ***шагом обыкновенного жорданова исключения***, произведенным над таблицей (2.6) с разрешающим элементом $a_{rs} \neq 0$ с r-й разрешающей строкой и s-м разрешающим столбцом, схематизированную операцию перемены ролями между зависимой переменной y_r и независимой x_s, т. е. операцию решения уравнения (2.7) относительно x_s, подстановки полученного выражения во все остальные уравнения системы (2.5) и записи полученной системы в виде новой таблицы, аналогичной (2.6).

Новая таблица будет иметь вид

$$\begin{array}{r|ccccc|l} & x_1 & \ldots & y_r & \ldots & x_n & \\ \hline y_1 = & b_{11} & \ldots & a_{1s} & \ldots & b_{1n} & \\ \ldots & & & \ldots & & & \\ x_{\mathrm{s}} = & -a_{r1} & \ldots & \boxed{1} & \ldots & -a_{rn} & : a_{rs}, \\ \ldots & & & \ldots & & & \\ y_m = & b_m & \ldots & a_{ms} & \ldots & a_{mn} & \\ \hline \end{array} \tag{2.8}$$

где
$$b_{ij} = a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}, \; (i \neq r, j \neq s). \tag{2.9}$$

Причем, как видно из (2.8), все элементы таблицы делятся на разрешающий элемент a_{rs}.

Новая таблица (2.8) получена из таблицы (2.6) по следующей схеме.

Схема 1

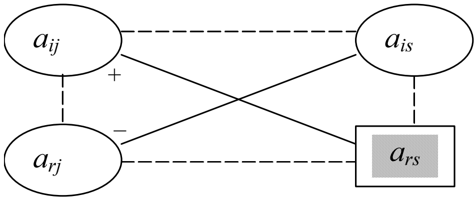
1. Разрешающий элемент заменяется единицей и делится на разрешающий элемент.

2. Остальные элементы разрешающего (s-го) столбца делятся на разрешающий элемент.

3. Остальные элементы разрешающей (s-й) строки меняют свой знак на противоположный и делятся на разрешающий элемент.

4. Все остальные элементы таблицы вычисляются по формуле (2.9) и делятся на разрешающий элемент a_{rs}; формула (2.9) иногда называет-

ся ***правилом прямоугольника***, так как схема вычисления элемента b_{ij} соответствует вычислению разности произведений элементов, стоящих по основной и побочной диагоналям прямоугольника, образованного в таблице вида (2.6) всеми элементами, вошедшими в формулу (2.9).



Пример 2.3. В системе

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2, \\ y_2 = -x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_3 = 2x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

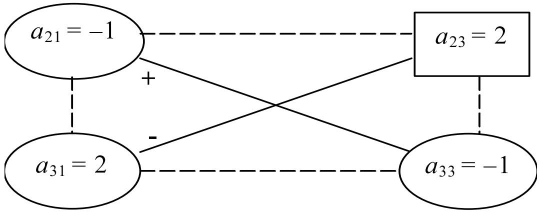
необходимо поменять ролями переменные x_3 и y_2, т. е. сделать зависимую переменную y_2 независимой, а независимую переменную x_3 – зависимой. Запишем исходную систему в виде жордановой таблицы:

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	1	–2	0
$y_2 =$	–1	1	2
$y_3 =$	2	–1	–1

Выполнив один шаг обыкновенных жордановых исключений, т. е. заменив переменную x_3 на y_2 по схеме 1, получим следующую таблицу:

	x_1	x_2	y_2
$y_1 =$	1	–2	0
$x_3 =$	0,5	–0,5	0,5
$y_3 =$	1,5	–0,5	–0,5

Рассмотрим подробнее вычисление последней таблицы (2.6), например коэффициента b_{31}. Так как разрешающим является элемент $a_{23} = 2$, то $b_{31} = (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) : a_{23} = (2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) : 2 = 3/2 = 1{,}5$, т. е. реализуется схема:



Модифицированные жордановы исключения. В некоторых конкретных задачах, например в вычислительной схеме симплекс-метода, бывает удобно независимые переменные представлять в таблице со знаком «минус». В этих случаях имеет смысл вместо обыкновенных использовать так называемые ***модифицированные жордановы исключения***.

Перепишем систему (2.5) в виде эквивалентной ей системы

$$y_i = -a_{i1}(-x_1) - a_{i2}(-x_2) - \ldots - a_{in}(-x_n), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Составим по полученной системе таблицу, учитывая минус при переменных x_j в верху таблицы:

	$-x_1$	…	$-x_s$	…	$-x_n$
$y_1 =$	a_{11}	…	a_{1s}	…	a_{1n}
…			…		
$y_r =$	a_{r1}	…	α_{rs}	…	a_{rn}
…			…		
$y_m =$	a_{m1}	…	a_{ms}	…	a_{mn}

Здесь $\alpha_{ij} = -a_{ij}$.

Один шаг модифицированного жорданова исключения с разрешающим элементом α_{rs} означает переход к новой таблице:

	$-x_1$	…	$-y_r$	…	$-x_n$	
$y_1 =$	b_{11}	…	$-\alpha_{1s}$	…	b_{1n}	
…			…			
$x_s =$	α_{r1}	…	**1**	…	α_{rn}	$: \boldsymbol{\alpha_{rs}}$
…			…			
$y_m =$	b_{m1}	…	$-\alpha_{ms}$	…	b_{mn}	

Эта таблица формируется по **схеме 2**, которая очень напоминает схему 1 обыкновенных жордановых исключений, в ней меняются только пп. 2 и 3, а именно:

2. Остальные (кроме разрешающего) элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.

3. Остальные элементы разрешающего столбца меняют свой знак на противоположный и делятся на разрешающий элемент.

Пример 2.4. Систему

$$y_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3,$$

$$y_2 = -x_1 + 4x_2 - 2x_3,$$

$$y_3 = 5x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

запишем в виде следующей таблицы:

	$-x_1$	$-x_2$	$\boldsymbol{-x_3}$
$y_1 =$	–2	1	–3
$\boldsymbol{y_2} =$	1	–4	2
$y_3 =$	–5	–2	4

Произведем один шаг модифицированного жорданова исключения с разрешающими второй строкой и третьим столбцом. Получим

	$-x_1$	$-x_2$	$\boldsymbol{-y_2}$
$y_1 =$	–0,5	– 5	1,5
$\boldsymbol{x_3} =$	0,5	–2	0,5
$y_3 =$	–7	6	–2

Это означает, что мы получили новую систему в виде

$$y_1 = 0{,}5x_1 + 5x_2 - 1{,}5\boldsymbol{y_2},$$

$$\boldsymbol{x_3} = -0{,}5x_1 + 2x_2 - 0{,}5\boldsymbol{y_2},$$

$$y_3 = 7x_1 - 6x_2 + 2\boldsymbol{y_2}.$$

Табличное представление задачи ЛП. Рассмотрим еще раз каноническую форму ЗЛП, введенную в п. 2.1 данного пособия:

$$\begin{cases} Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i = b_i, \ i = 1, \ldots, m; \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n; \\ y_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.10}$$

Очевидно, в задаче (2.10) систему функциональных ограничений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (2.11)$$

можно переписать в виде, удобном для построения симплекс-таблицы:

$$y_i = -a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n + b_j = a_{i1}(-x_1) - \ldots - a_{in}(-x_n) + b_j,\ i = 1,\ldots, m.$$

Теперь представим задачу ЛП (2.10) в виде так называемой ***симплекс-таблицы***, которая по сути является жордановой таблицей для задачи ЛП:

$$\begin{array}{r|ccccc|c|} & -x_1 & \ldots & -x_s & \ldots & -x_n & 1 \\ \hline y_1 = & a_{11} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1\,n} & b_1 \\ \hline \ldots & & & \ldots & & & \\ \hline y_r = & a_{r1} & \ldots & \boldsymbol{a_{rs}} & \ldots & a_{rn} & b_{\mathrm{r}} \\ \hline \ldots & & & \ldots & & & \\ \hline y_m = & a_{m1} & \ldots & a_{ms} & \ldots & a_{mn} & b_m \\ \hline Z = & -c_1 & & -c_2 & & -c_3 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (2.12)$$

Примечание 1. Как видно из таблицы вида (2.12), при записи исходной задачи ЛП (1.2) в симплекс-таблицу коэффициенты функциональных ограничений (2.10) не меняют своих знаков. Но это верно лишь для ограничений неравенств типа $\le$. Если в задаче есть ограничения типа $\ge$, их предварительно нужно привести к принятому виду, а именно к ограничениям типа $\le$.

Коэффициенты целевой функции (при решении задачи на max) при записи в симплекс-таблицу меняют свой знак на противоположный. Если в исходной задаче отыскивается минимум целевой функции, то необходимо перейти к задаче с новой целевой функцией $Z' = -Z =$ $= \sum_j c_j x_j \to \max$. В этом случае при записи в симплекс-таблицу коэффициенты целевой функции не меняют своих знаков.

Примечание 2. Каждая таблица вида (2.12) (а также любые другие таблицы, полученные из нее с помощью жордановых исключений) определяет некоторый $(n + m)$-мерный вектор $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, который является точкой P_0 пересечения $n + m$ гиперплоскостей, соответствующих ограничениям задачи (2.5) в $(n + m)$-мерном векторном пространстве. Координаты этой точки определяются следующим образом: все независимые переменные в верху таблицы полагаются равными 0, тогда зависимые переменные, стоящие слева от таблицы, будут равны соответствующим свободным членам b_i. Так, для таблицы вида (2.11) такая точка обозначается $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m$. Решение, соответствующее этой таблице, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}, \mathbf{b_1},\ldots,\mathbf{b_m})$. В том случае если знать значения фиктивных переменных y_i не важно, можно ограничиться определением координат только n-мерного вектора $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n})$. Очевидно, что для таблицы вида (2.12) $\mathbf{x} = (\mathbf{0}, \mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})$.

Пример 2.5

$Z = -5x_1 - x_2 \to \min;$

$2x_1 + x_2 \geq 2;$

$x_1 + x_2 \leq 4;$

$x_2 \geq 1;$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2.$

Приведем исходную задачу к виду (1.2), т. е. с максимизируемой целевой функцией и ограничениями-неравевенствами типа <=:

$Z' = Z = 5x_1 + x_2 \to \max;$

$-2x_1 - x_2 \leq -2;$

$x_1 + x_2 \leq 4;$

$-x_2 \leq -1;$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2.$

Перепишем условия полученной задачи в симплекс-таблицу (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Итерация 1	**$-x_1$**	**$-x_2$**	**1**
y_1 =	–2	–1	–2
y_2 =	1	1	4
y_3 =	0	–1	–1
Z' =	–5	–1	0

Эта таблица определяет вершину $(x, y)^0 = (0; 0; -2; +4; -1)$ или $x^0 =$ $= (0; 0)$. Такое решение, очевидно, не будет допустимым для исходной задачи, так как для него не выполняется первое ограничение.

Этот факт хорошо иллюстрируется геометрическим представлением данной задачи на рис. 2.5.

Симплекс-метод для решения задачи ЛП состоит из двух основных этапов. *Первый этап* предназначен для отыскания опорного допустимого решения (или установления факта несовместности ограничений, т. е. того факта, что задача не имеет ни одного допустимого решения). *Второй этап* состоит из последовательного перехода от полученной на первом этапе точки к другой точке, для которой целевая функция имеет большее значение, до получения точки, соответствующей оптимальному решению, или установления факта неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений.

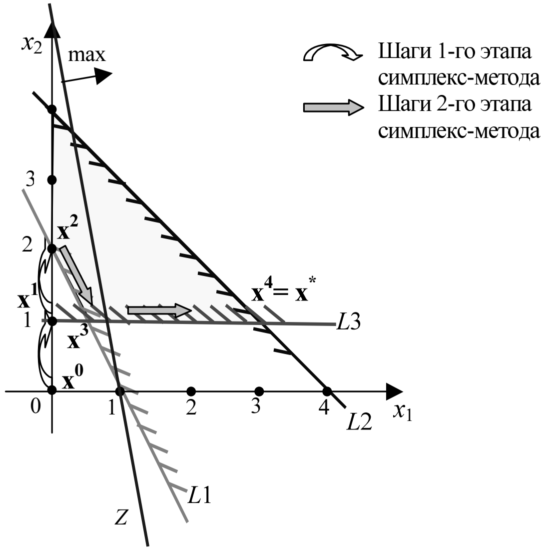


Рис. 2.5. Геометрическая иллюстрация
решения задачи ЛП (пример 2.5)

Рассмотрим *первый этап симплекс-метода*.

Пусть в таблице вида (2.12) все свободные члены неотрицательны, т. е. $b_1 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0$. В этом случае таблица вида (2.12) позволяет сразу получить одно из допустимых опорных решений задачи (2.4), поэтому можно считать, что первый этап выполнен.

Теперь предположим, что в таблице вида (2.12) есть хотя бы один отрицательный свободный член, например $b_{i0} < 0$. В этом случае точка (x, y), определяемая данной симплекс-таблицей, соответствует недопустимому решению, так как $y_{i0} = b_{i0} < 0$.

Симплекс-метод для отыскания допустимого опорного решения означает специальное правило перехода от данной точки $P_0 = (x, y)$ к такой соседней, которую отделяет от выпуклого многогранника D (являющегося множеством допустимых решений исходной задачи) меньшее (во всяком случае, не большее) число гиперплоскостей, т. е. для которой в соответствующей таблице содержится меньшее (не большее) число отрицательных свободных членов.

Для перехода от вершины $P_0 = (x, y)$ к указанной соседней производим шаг жорданова исключения, выбирая разрешающий элемент согласно правилу 1. После конечного числа шагов либо установим несовместность системы ограничений, либо перейдем к таблице, не содержащей отрицательных свободных членов, т. е. получим допустимое опорное решение задачи, приравняв нулю все независимые переменные, оказавшиеся в верху таблицы.

Правило 1 выбора разрешающего элемента

1. Выбираем строку с *отрицательным* свободным членом, например $b_i < 0$ (обычно берут строку с наибольшим по абсолютной величине отрицательным свободным членом). Если среди коэффициентов этой строки нет отрицательных, то система ограничений задачи несовместна и, следовательно, задача не имеет решения.

2. Если же среди коэффициентов рассматриваемой строки есть отрицательные, то берем какой-нибудь из них, например, из строки с номером i^0 , т. е. $a_{i0s} < 0$, а столбец, содержащий этот коэффициент, т. е. s-й столбец, выбираем в качестве *разрешающего*.

3. Выбор разрешающей строки производится следующим образом. Вычисляются все *неотрицательные* отношения $\dfrac{b_i}{a_{is}} \geq 0$ свободных членов к соответствующим отличным от нуля коэффициентам разрешающего столбца (так называемые ***симплекс-отношения***). Среди этих отношений находится *наименьшее*, которое достигается, например, при $i = r$. Тогда r-ю строку берем в качестве *разрешающей*, а элемент a_{rs} – в качестве *разрешающего элемента*.

Примечание 3. В случае ***вырождения***, когда $\min\left\{\dfrac{b_i}{a_{is}} \geq 0\right\} = \dfrac{b_r}{a_{rs}} = 0$, элемент a_{rs} выбираем в качестве разрешающего лишь в том случае, если $a_{rs} > 0$.

Пример 2.5 (продолжение)

Рассмотрим симплекс-таблицу (табл. 2.3), соответствующую итерации 1 примера 2.5 (табл. 2.3).

Так как $y_1 = -2 < 0$ и $y_3 = -1 < 0$, то точка $(x, y)^0 = (0; 0; -2; +4; -1)$, определяемая табл. 2.3, соответствует недопустимому решению. Поэтому необходимо произвести переход к другой точке с помощью модифицированного жорданова исключения. Разрешающий элемент выбираем по правилу 1, а именно: в первой строке (так как $b_1 = -2$ по абсолютной величине больше $b_3 = -1$) отыскиваем любой отрицательный коэффициент, например $a_{12} = -1$, поэтому 2-й столбец объявляем разрешающим. Теперь рассчитаем неотрицательные симплексные отношения: $b_1 : a_{12} = (-2) : (-1) = 2 > 0$, $b_2 : a_{22} = 4 : 1 = 4 > 0$, $b_3 : a_{32} = (-1) : (-1) =$ $= 1 > 0$. Минимальное из них соответствует 3-й строке, а следовательно, 3-я строка объявляется разрешающей. При этом элемент a_{32} будет разрешающим элементом.

Таблица 2.3

Итерация 1	**$-x_1$**	**$-x_2$**	**1**	Пометки	Расчет симплексных отношений
$y_1 =$	–2	– 1	– 2	Наибольшее нарушение	$\frac{-2}{-1} = 2$
$y_2 =$	1	1	4		$\frac{4}{1} = 4$
$y_3 =$	0	– 1 **Разре-шающий элемент**	–1	← Разре-шающая строка	$\frac{-1}{-1} = 1$
Z′ =	–5	–1	0		
		↑ Разре-шающий столбец			

Переходим ко 2-й итерации (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Итерация 2	**$-x_1$**	**$-y_3$**	**1**	Пометки	Расчет симплексных отношений
$y_1 =$	–2	–1 **Разре-шающий элемент**	–1	Наибольшее нарушение ← Разре-шающая строка	$\frac{-1}{-1} = 1$
$y_2 =$	1	1	3		$\frac{3}{1} = 3$
$x_2 =$	0	–1	1		$\frac{1}{-1} = -1 < 0$
Z′ =	–5	–1	1		
		↑ Разре-шающий столбец			

Эта таблица (табл. 2.4) определяет точку $(x, y)^1 = (0; 1; -1; 3; 0)$ (или точку $x^1 = (0; 1)$), соответствующую решению, которое также является недопустимым, так как $y_1 = -1 < 0$. Поэтому переходим к следующей точке, т. е. к следующей таблице (табл. 2.5). Разрешающий элемент $a_{12} = -1$.

Эта таблица (табл. 2.5) определяет точку $(x, y)^2 = (0; 2; 0; 2; 1)$ (или точку $x^2 = (0; 2)$). Полученная точка соответствует допустимому решению, так как в соответствующей таблице все свободные члены b_i положительны.

Таблица 2.5

Итерация 3	$-x_1$	$-y_1$	**1**
$y_3 =$	2	–1	1
$y_2 =$	–1	1	2
$x_2 =$	2	–1	2
$Z' =$	–3	–1	2

Симплекс-метод для отыскания оптимального решения ЗЛП. Пусть в результате выполнения первого этапа симплекс-метода получена следующая таблица:

	x_1	…	x_k	y_{s+1}	…	y_m		
$y_1 =$	α_{11}	…	α_{1k}	$\alpha_{1,\,s+1}$	…	α_{1n}	β_1	
…			…					
$y_s =$	α_{s1}	…	α_{sk}	$\alpha_{s,\,s+1}$	…	α_{sn}	β_s	(2.13)
x_{k+1}	$\alpha_{k+1,\,1}$		$\alpha_{k+1,\,k}$	$\alpha_{k+1,\,s+1}$		$\alpha_{k+1,\,n}$	β_{k+1}	
…			…					
$x_n =$	α_{m1}	…	α_{mk}	$\alpha_{m,\,s+1}$	…	α_{mn}	β_m	
$Z =$	q_1		q_k	q_{s+1}		q_n	Q	

После нескольких шагов жордановых исключений на верх таблицы перешло $(m - s)$ зависимых переменных y_i, а слева от таблицы появилось $(n - k)$ переменных x_j; очевидно, что $m - s = n - k$. Так как первый этап симплекс-метода выполнен, в таблице вида (2.13) все коэффициенты β_i неотрицательны.

Пусть в таблице вида (2.13) все коэффициенты q_i также неотрицательны. Тогда исходная задача ЛП решена, причем $\max Z = Q$. Оптимальным решением при этом является опорное допустимое решение, определяемое данной таблицей, а именно: $x_1 = \ldots = x_k = 0 = y_{s+1} = \ldots = y_m$;

$$y_1 = \beta_1,\ \ldots,\ y_s = \beta_s,\ x_{k+1} = \beta_{k+1},\ \ldots,\ x_n = \beta_m.$$

Пусть среди коэффициентов Z-строки есть отрицательные, например $q_s < 0$. В этом случае нельзя утверждать, что опорное решение, определяемое таблицей вида (2.13), оптимально. Симплекс-метод для отыскания оптимального решения означает специальное правило перехода от полученной точки P_k (вершины выпуклого многогранника D) к другой соседней вершине этого многогранника, в которой значение Z не меньше Q. Этот процесс продолжается, пока не будет найдена вершина, в которой значение Z максимально, т. е. для которой все коэффициенты Z-строки будут неотрицательны или пока не будет установлено, что функция Z не ограничена сверху.

Чтобы осуществить такой переход от данной вершины к соседней, делаем один шаг модифицированного жорданова исключения.

Правило 2 выбора разрешающего элемента

1. В качестве *разрешающего* выбираем столбец, содержащий отрицательный элемент Z-строки, например столбец s, так как $q_s < 0$. Обычно *разрешающим* выбирают столбец, содержащий наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент Z-строки.

2. Если в этом (s-м) столбце нет положительных коэффициентов, то целевая функция Z не ограничена сверху на множестве допустимых решений, т. е. *исходная задача не имеет решений*.

3. Если s-й столбец содержит положительные коэффициенты, то отыскивается разрешающая строка в соответствии с пунктом 3 правила 1, т. е. по минимальному из неотрицательных симплексных отношений.

Пример 2.5 (продолжение)

Рассмотрим таблицу (табл. 2.6), соответствующую итерации 3 (табл. 2.5). Так как все свободные члены в этой таблице неотрицательны, то, как уже говорилось, определяемое ею решение $x^2 = (0; 2)$ допустимо, но, так как коэффициенты Z-строки отрицательны ($q_1 = -3 < 0$ и $q_2 = -1 < 0$), это решение не является оптимальным.

Переходим к следующей вершине, предварительно выбрав разрешающий элемент. Разрешающий столбец здесь – первый, так как q_1 по модулю больше q_2. Разрешающая строка тоже первая, так как ей соответствует минимальное симплексное отношение, равное 0,5. Разрешающий элемент $a_{11} = 2$. Построим новую таблицу (табл. 2.7).

Таблица 2.6

Итерация 3	$-x_1$	$-y_1$	**1**	Пометки	Расчет симплексных отношений
$y_3 =$	2 Разре-шающий элемент	–1	1	← Разре-шающая строка	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
$y_2 =$	–1	1	2		$\frac{2}{-1} < 0$
$x_2 =$	2	–1	2		$\frac{2}{2} = 1$
$Z' =$	–3	–1	2		
	↑ Разре-шающий столбец				

Таблица 2.7

Итерация 4	$-y_3$	$-y_1$	**1**	Пометки	Расчет сим-плексных отношений
$x_1 =$	0,5	–0,5	0,5		$\frac{0{,}5}{-0{,}5} < 0$
$y_2 =$	0,5	0,5 Разрешающий элемент	2,5	← Разре-шающая строка	$\frac{2{,}5}{0{,}5}$ 5
$x_2 =$	–1	0	1		$\frac{1}{0}$ $+\infty$
$Z' =$	1,5	–2,5	3,5		
		↑ Разрешающий столбец			

Этой таблице, полученной на 4-й итерации, соответствует допустимое опорное решение $x^3 = (0{,}5;\ 1)$. Но и это решение не оптимально, так как $q_2 = -2{,}5 < 0$. Соответственно 2-й столбец выбираем *разрешающим*. *Разрешающая* строка – 3-я, так как ей соответствует единственное неотрицательное симплексное отношение. Следовательно, *разрешающий элемент* $a_{22} = 0{,}5$. Переходим к следующей таблице (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Итерация 5	$-y_3$	$-y_2$	**1**
$x_1 =$	1	1	3
$y_1 =$	1	2	5
$x_2 =$	1	0	1
$Z' =$	4	5	16

Решение, определяемое табл. 2.8: $(x, y)^4 = (3;\ 1;\ 5;\ 0;\ 0)$ или $x^4 = (3;\ 1)$. Это опорное решение допустимо и оптимально, так как $q_j > 0$, $j = 1,2$. Таким образом, $x^4 = x^*$, т. е. оптимально. Значение целевой функции для этого решения, т. е. $Z'(x^4)$, в табл. 2.8 определяется величиной Q. Следовательно, $N(x^*) = 16$, а $Z(x^*) = -Z'(x^*) = -16$. Убедиться в правильности полученного значения можно, подставив координаты оптимальной точки в выражение для целевой функции, т. е. $Z(x^*) = -5x_1^* - x_2^* = (-5)\cdot 3 - 1\cdot 1 = -16$.

Ответ исходной задачи примера 2.1: $\mathbf{x}^* = (\mathbf{3}; \mathbf{1})$, $\mathbf{Z}(\mathbf{x}^*) = -\mathbf{16}$.

Проанализируем полученный результат. Из табл. 2.8 видно, что $y_1^* = 5,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = 0$. Это означает, что второе и третье неравенства исходной задачи для оптимального решения выполняются как тождества, т. е. точка x^* лежит на пересечении гиперплоскостей, соответствующих второму и третьему неравенствам.

Все полученные в результате расчетов промежуточные опорные решения рекомендуется показать на графике, отображающем условия и ход решения данной задачи, как это сделано на графике, представленном на рис. 2.5.

Контрольные вопросы

1. Какое решение называется опорным (базисным)?
2. Какое опорное решение называется невырожденным, вырожденным? Как можно пояснить эти понятия в геометрическом представлении?
3. Какими способами можно построить гиперплоскость целевой функции?

4. Какие основные виды вариантов ответов могут возникнуть при решении задачи ЛП?

5. В чем суть основных этапов симплекс-метода?

6. Является ли симплекс-метод итерационным? Как строится начальное решение?

7. Является ли симплекс-метод конечным? Как вы можете пояснить свой ответ? Как приближенно можно оценить число необходимых итераций при решении задачи симплекс-методом?

8. Как в результирующей симплекс-таблице можно прочитать оптимальное решение задачи ЛП и оптимальное значение целевой функции?

9. Решите приведенные четыре задачи ЛП графическим методом.

1	$Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \geq 5$ $x_1 + 2x_2 \leq 2$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_j \geq 0$
2	$Z = -5x_1 + 3x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \geq 5$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_j \geq 0$
3	$Z = 5x_1 + 10x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \leq 5$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_j \geq 0$
4	$Z = -5x_1 - 5x_2 \to \min$	$2x_1 + 4x_2 \leq 5$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_j \geq 0$

10. Задачи из задания 9 решите симплекс-методом. Приведите геометрическую иллюстрацию хода решения задачи.

ГЛАВА 3

ТИПОВЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

В теории оптимизации широко известны так называемые ***типовые задачи оптимизации***, возможно, правильнее было бы их назвать ***типовыми моделями оптимизации***. Действительно, вряд ли можно говорить о том, что поиск оптимального плана перевозок является типовым, но вот транспортную задачу как оптимизационную модель можно в каком-то смысле рассматривать как типовую, имея в виду, что модели реальных аналогичных оптимизационных задач основываются на модели транспортной задачи. Изучение набора типовых оптимизационных задач дает возможность овладеть стандартными приемами построения оптимизационных моделей для широкого класса задач оптимизации.

3.1. Постановка и модели типовых задач оптимизации

3.1.1. Задача о диете (пищевом рационе)

Постановка задачи. Имеется n видов продуктов питания. Известна стоимость единицы каждого продукта c_i. Из этих продуктов необходимо составить пищевой рацион, который должен содержать m видов полезных элементов (белки, жиры, углеводы и т. п.), причем количество каждого элемента в рационе должно быть не менее B_j. Для каждой единицы i-го продукта известно содержание j-го вида элемента b_{ij}. Требуется так составить пищевой рацион, чтобы обеспечить заданные условия при минимальной стоимости рациона.

Модель. Обозначим переменные задачи – количество продуктов i-го вида как x_i. Тогда модель задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min; \\ \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i \ge B_j,\ j = \overline{1,m}; \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Эта задача ЛП с размерностью $m \times n$ решается методами ЛП, например симплекс-методом.

3.1.2. Задача о рюкзаке

Постановка задачи. Имеется N видов предметов, которые турист хочет взять с собою в поход. Известны вес каждого предмета i-го вида – b_i и его эффективность для туриста – e_i. Составить список предметов, помещаемых в рюкзак, учитывая, что предельный вес рюкзака не может быть более заданной величины B. Необходимо, чтобы суммарный эффект от набора предметов был максимальным.

Эту задачу можно рассмотреть в двух вариантах.

1. Турист решает вопрос: сколько взять предметов каждого вида.
2. Турист по поводу каждого предмета решает, брать его или нет.

Модель 1. Пусть x_i – количество предметов каждого вида. Тогда

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^{N} e_i x_i \to \max; \\ \sum_{i=1}^{N} b_i x_i \le B; \\ x_i \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

Это задача ЦЛП[*] с размерностью $1 \times N$. Решается методами ЦЛП: метод ветвей и границ для ЦЛП, метод Гомори.

Модель 2. Пусть переменные x_i означают количество предметов i-го вида, очевидно, что они могут принимать только два значения: 0 или 1.

Модель задачи для второго варианта

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^{N} e_i x_i \to \max; \\ \sum_{i=1}^{N} b_i x_i \le B; \\ x_i \in \{0,1\},\ i = \overline{1,N}. \end{cases}$$

---

[*] Задачи ЦЛП и задачи булевского программирования более подробно рассматриваются в главе 4.

Это задача булевского программирования размерности $1 \times N$. Один из возможных способов решения подобного рода задач – сведение их к задаче целочисленного линейного программирования (ЦЛП) в связи с тем, что такие задачи решаются широко распространенными методами решения, например, методом ветвей и границ для задачи ЦЛП. Сведение булевых переменных к целочисленному виду осуществляется путем замены ограничений вида $x_i \in \{0,1\}$ на систему ограничений:

$$\begin{cases} x_i \le 1, \ i = \overline{1,N}; \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,N}; \\ x_i - \text{целые}. \end{cases}.$$

Очевидно, что в результате получается модель ЦЛП, при этом размерность задачи существенно возрастает и становится $(N + 1) \times N$.

3.1.3. Транспортная задача

Специфика оптимизационной модели транспортной задачи (ТЗ) позволяет наряду с универсальными методами решения задач ЛП применять специализированные методы, позволяющие существенно сократить вычисления.

Постановка задачи. Имеется m пунктов производства (складов) некоторого одного продукта, задан a_i – объем производства в i-м пункте производства, $i = \overline{1,m}$. Есть n пунктов потребления этого продукта, задан b_j – объем потребления (поданные заявки на поставку продукта) в j-м пункте потребления, $j = \overline{1,n}$.

Пункты производства связаны с пунктами потребления сетью дорог с определенными тарифами на перевозки. Стоимость перевозки одной единицы продукта (груза) из i-го пункта производства в j-й пункт потребления равна c_{ij}. Необходимо найти оптимальный план перевозок продукции, при котором суммарные транспортные издержки минимальны, продукция полностью вывозится из пунктов производства и полностью удовлетворяются потребности пунктов потребления.

Модель. В качестве переменных принимаем объемы перевозок из каждого пункта производства в каждый пункт потребления, т. е. $x_{ij}, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$, или, иначе, объемы перевозок представляем в виде матрицы: $X = \{x_{ij}\}, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$. Тогда модель выглядит так:

$$
\begin{cases}
z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}; \quad (a) \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n}; \quad (b) \\
x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}.
\end{cases}
$$

Ограничения группы (a) задают условие: из каждого i-го пункта производства должен быть вывезен весь продукт. Например (рис. 3.1), из первого пункта производства с объемом производства a_1 продукт может быть перевезен в любой пункт потребления. Объемы перевозок неизвестны и составляют:

x_{11} – количество единиц продукции, перевезенных из первого пункта производства в первый пункт потребления;

x_{12} – количество единиц продукции, перевезенных из первого пункта производства во второй пункт потребления;

x_{1n} – количество единиц продукции, перевезенных из первого пункта производства в n-й пункт потребления.

Сумма всех перевезенных единиц продукции должна быть равна a_1. Получаем ограничение:

$$x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1 .$$

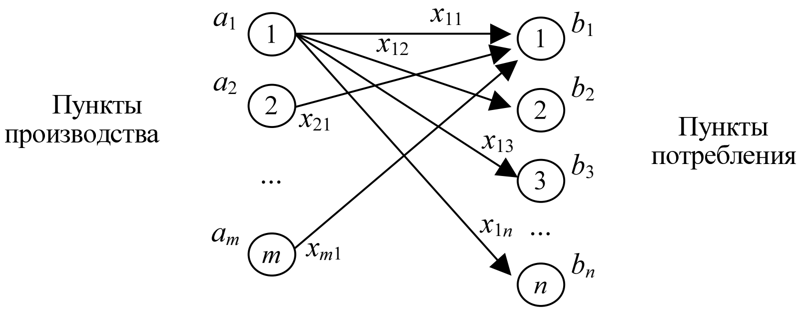


Рис. 3.1. Иллюстрация к модели транспортной задачи

Ограничения группы (b) задают условие: в каждый j-й пункт потребления должен быть завезен весь необходимый продукт.

Размерность задачи: $(m+n)\times mn$. Транспортная задача – частный случай задачи линейного программирования, в которой все ограничения представлены равенствами. В отличие от общего случая решения задачи ЛП оптимальное решение транспортной задачи всегда существует, если множество допустимых решений не пустое.

Открытая и закрытая транспортные задачи. Различают два типа ТЗ. Транспортная задача называется ***закрытой***, если выполняется *условие баланса*: суммарный объем производства равен суммарному объему потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{3.1}$$

В том случае, если условие баланса не выполняется, то говорят об ***открытой ТЗ.*** Известно, что для существования допустимого решения транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы задача была закрытой. Поэтому любая открытая транспортная задача должна быть предварительно сведена к задаче закрытого типа. При этом возможны две ситуации.

Первый случай. Суммарный объем производства меньше суммарного объема потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{3.2}$$

В этом случае для того, чтобы выполнялось условие баланса, вводится фиктивный пункт производства с номером $m + 1$ и объемом производства:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \,, \tag{3.3}$$

при этом полагают $c_{m+1,j} = 0 \quad \forall j = 1,\ldots,n.$

Второй случай. Суммарный объем производства больше суммарного объема потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{3.4}$$

Для сведения ТЗ к закрытому типу вводят фиктивный пункт потребления с номером $n + 1$ и объемом потребления:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{3.5}$$

при этом полагают $c_{i,n+1} = 0 \quad \forall i = 1,...,m$.

Методы решения. ТЗ является задачей линейного программирования, следовательно, она может быть решена симплекс-методом [4]. Но более эффективны для ее решения методы, разработанные специально для данной задачи, например: обобщенный венгерский метод [4]; метод потенциалов для нахождения оптимального плана [3]. Метод северо-западного угла и метод минимального элемента используются для нахождения допустимого опорного решения ТЗ, предполагают, что в дальнейшем на основе полученного решения методом потенциалов будет отыскиваться собственно оптимальное решение.

3.1.4. Задача о назначении

Постановка задачи. Имеется p исполнителей и q работ. Известна эффективность применения каждого исполнителя на каждой работе: c_{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$. Необходимо расставить исполнителей по работам так, чтобы суммарный эффект от всей работы был максимальным. При этом каждый исполнитель может выполнять только одну работу и каждая работа может выполняться только одним исполнителем (рис. 3.2).

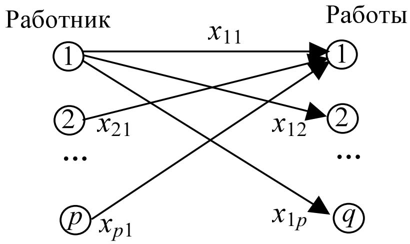


Рис. 3.2. Иллюстрация к модели задачи о назначении

Модель. Введем обозначения: x_{ij} – факт исполнения i-м работником j-й работы. Тогда

$$x_{ij} = \begin{cases} 1\text{, если } i\text{-й работник назначается на } j\text{-ю работу;} \\ 0\text{, если } i\text{-й работник не назначается на } j\text{-ю работу.} \end{cases}$$

Запишем

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} c_{ij} x_{ij} \to \max; \\ \sum_{i=1}^{p} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1,q}; \\ \sum_{j=1}^{q} x_{ij} = 1, \ i = \overline{1,p}; \\ x_{ij} = \{1,0\}, \ i = \overline{1,p}, \ j = \overline{1,q}. \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием существования решения этой задачи при такой модели является равенство $p = q$.

Это задача булевского программирования размерностью $(p + q) \times (p \cdot q)$.

Если предполагается решение данной задачи методами ЦЛП, полученную модель можно свести к задаче ЦЛП с помощью вышеописанного преобразования. Для этого, как и в задаче о рюкзаке, вводим дополнительные ограничения:

$$\begin{cases} x_{ij} \le 1, \ i = \overline{1,p}, \ \ j = \overline{1,q}; \\ x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1,p}, \ \ j = \overline{1,q}; \\ x_{ij} - \text{целые.} \end{cases}$$

Методы решения

1. Для данной задачи специально разработан *венгерский метод*.

2. Используются методы решения транспортной задачи (в этом случае задача, например о назначении метода потенциалов, рассматривается как частный случай ТЗ). При этом в случае, если количество работ и исполнителей не равно, т. е. модель представляет собой задачу открытого типа, то, как и в ТЗ, вводится необходимое количество фиктивных исполнителей или работ.

3. При сведении задачи к задаче ЦЛП ее можно решать методами ЦЛП, например методом ветвей и границ для ЦЛП (см. главу 4).

3.1.5. Задача о коммивояжере

Задача о коммивояжере – одна из знаменитых задач теории комбинаторики. Она была поставлена в 1934 году. В своей области (оптимизации дискретных задач) эта задача служит своеобразным полигоном, на котором испытываются все новые методы решения.

Постановка задачи. Коммивояжер должен объехать n городов. Известны затраты (стоимостные, временны́е) на переезд между i-м и j-м городами, заданные в виде матрицы $C = \{c_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Коммивояжер, выехав из исходного города, должен объехать все города, посетив каждый из них только один раз, и вернуться в начало маршрута. Требуется определить, в каком порядке следует объезжать города, чтобы суммарные затраты на переезд были минимальными.

Если затраты на переезд между каждой парой городов не зависят от направления движения, то задача называется симметричной, в противном случае – несимметричной.

К задаче коммивояжера сводится ряд практических задач. Она решается во многих областях с замкнутыми и при этом жестко связанными по времени системами, в многооперационных обрабатывающих комплексах, где определяется оптимальный порядок обработки различных изделий на одном и том же оборудовании, в том числе в конвейерном производстве (в этом случае величины c_{ij} означают затраты времени или стоимостные затраты на переналадку конвейера при переходе от выполнения операции i к операции j), в судовых и железнодорожных погрузочных системах, в случае перевозок грузов по замкнутому маршруту, при расчетах авиационных линий.

Модель. В качестве переменных выбираются элементы матрицы переездов

$$X = \{x_{ij}\},\ \ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n}\,.$$

Пусть $x_{ij} \in \{0,1\}$, при этом полагаем, что $x_{ij} = 1$, если переезд из i-го города в j-й включается в маршрут, и $x_{ij} = 0$ – в противном случае.

Ограничения группы (a) задают условие: в каждый город коммивояжер въезжает только один раз; ограничения группы (b) задают условие: из каждого города коммивояжер выезжает только один раз.

$$\begin{cases} z = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ j = \overline{1,n}; \text{ при } \ i = j \ \ x_{ij} = 0; \quad (a) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ i = \overline{1,n}; \text{ при } \ i = j \ \ x_{ij} = 0; \quad (b) \\ x_{ij} = \{0,1\}. \end{cases}$$

При решении задачи также необходимо учесть дополнительное условие, не допускающее появления неполных замкнутых циклов (рис. 3.3).

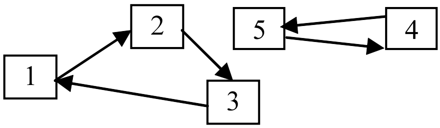


Рис. 3.3. Пример неполных замкнутых циклов

Для предотвращения таких противоречащих здравому смыслу решений в модель вводятся дополнительные ограничения. Например, для задачи с пятью городами в модель должны быть добавлены следующие группы ограничений:

$$\begin{cases} x_{12} + x_{21} \le 1; \\ x_{13} + x_{31} \le 1; \\ \ldots \\ x_{45} + x_{54} \le 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} x_{12} + x_{23} + x_{31} \le 2; \\ x_{23} + x_{34} + x_{42} \le 2; \\ \ldots \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{41} \le 3; \\ x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{52} \le 3; \\ \ldots \end{cases} \tag{3.8}$$

Условия блока (3.6) не допускают появления неполных замкнутых циклов между парами городов. Условия блока (3.7) не допускают появления неполных замкнутых циклов между тремя городами. Аналогичный блок условий (3.8) вводится для всех четверок городов.

В [4] приведен еще один вид математической записи комплекса ограничений, описывающих это дополнительное условие.

Методы решения. Полученная модель относится к классу задач булевского программирования. Для ее решения предлагается огромное количество различных алгоритмов. Перечислим некоторые специализированные методы.

1. Метод ветвей и границ для задачи о коммивояжере является эвристическим в том смысле, что не использует модельного представления задачи, а различные ограничения задачи, такие как, например, условие связанности полного цикла, учитываются непосредственно в алгоритме метода.

2. Модифицированный венгерский метод – модификация алгоритма предназначена для исключения решений в виде неполных замкнутых циклов.

3. Использование методов решения задач ЦЛП (после соответствующего преобразования модели), во-первых, требует полного модельного описания задачи, включая моделирование условия связанности полного цикла, а во-вторых, крайне неэффективно.

3.1.6. Задача о раскрое материалов

Постановка задачи. На раскрой поступает s различных материалов, требуется изготовить n различных видов изделий, причем эти изделия выпускаются комплектами. Известно, что в комплект входит b_k изделий k-го вида. Каждая единица j-го материала может быть раскроена p различными способами так, что при использовании i-го способа получается a_{ij}^k единиц изделий k-го вида. Запас материала j-го вида составляет c_j единиц. Найти план раскроя, обеспечивающий максимальное число комплектов при заданных ограничениях на запасы материалов.

Модель. Обозначим переменные задачи: x_{ij} – число заготовок j-го материала, раскроенных i-м способом:

$$\begin{cases} z = \min\limits_{k} \left\{ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij}^{k} x_{ij}}{b_k} \right\} \to \max, \;\; k = \overline{1,n}; \\ \sum\limits_{i=1}^{p} x_{ij} \le c_j, \;\; j = \overline{1,s}; \\ x_{ij} \ge 0 \text{ (целые).} \end{cases}$$

Размерность задачи $s \times ps$.

Полученная модель относится к классу задач нелинейного программирования вследствие нелинейности построенной целевой функции. Но ее можно привести к линейному виду. Введем еще одну переменную y – количество комплектов. Тогда получим модель

$$\begin{cases} z = y \to \max; \\ \sum\limits_{i=1}^{p} x_{ij} \le c_j, \; j = \overline{1,s}; \\ \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij}^{k} x_{ij} \ge y \cdot b_k, \;\; k = \overline{1,n}; \\ x_{ij}, \, y \ge 0 \text{ (целые).} \end{cases}$$

Полученная модель относится к классу ЛП (ЦЛП). Размерность задачи $(s + n) \times (ps + 1)$.

Методы решения. В зависимости от необходимости наложения условия целочисленности на переменные задачи используются либо методы ЛП, либо методы ЦЛП (метод Гомори, метод ветвей и границ для ЦЛП).

3.2. Задачи для самостоятельного изучения

Задача 3.1. Служба снабжения завода получила от поставщиков 500 стальных прутков длиной 5 м. Их необходимо разрезать на детали A и B длиной соответственно 2 и 1,5 м, из которых затем составляются комплекты.

В каждый комплект входят три детали *A* и две детали *B*. Характеристики возможных вариантов раскроя прутков представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Характеристики возможных вариантов раскроя прутков

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./пруток		Отходы, м/пруток
	A	*B*	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектность, шт./компл.	3	2	

Задание. Постройте математическую модель задачи, позволяющую найти план раскроя прутков, максимизирующий количество комплектов.

Задача 3.2. Для пошива одного изделия из ткани требуется выкроить шесть деталей. На швейной фабрике были разработаны два варианта раскроя ткани. В табл. 3.2 приведены характеристики вариантов раскроя 10 м ткани и комплектность, т. е. количество деталей определенного вида, необходимых для пошива одного изделия. Ежемесячный запас ткани для пошива изделий данного типа составляет 405 м. В ближайший месяц планируется изготовить 90 изделий [2].

Задание. Постройте математическую модель задачи, позволяющую в ближайший месяц выполнить план по пошиву с минимальным количеством отходов.

Таблица 3.2

Характеристики вариантов раскроя отрезов ткани по 10 м

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез						Отходы, м /отрез
	1	2	3	4	5	6	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектность, шт./изделие	1	2	2	2	2	2	

Задача 3.3. Для изготовления заготовок трех размеров 0,6 м, 1,5 м, 2,5 м, количество которых должно быть в соотношении 2:1:3, на распил поступают доски длиной 4 м [7].

Задание. Построить модель, позволяющую определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов.

3.3. Решение транспортной задачи

3.3.1. Определение опорного плана транспортной задачи

Решение транспортной задачи, как и всякой задачи ЛП, начинается с нахождения допустимого опорного решения (опорного плана). Рассмотрим два метода нахождения опорного плана транспортной задачи: *северо-западного угла* и *минимального элемента*.

Введем основные определения и обозначения.

Условие транспортной задачи задают в виде транспортной таблицы (табл. 3.3).

Таблица 3.3

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Решение транспортной задачи задают в виде матрицы (плана перевозок)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

или в виде таблицы плана перевозок (табл. 3.4).

Элементы матрицы плана перевозок (ячейки, клетки таблицы) называют базисными, если они отличаются от нуля; нулевые клетки таблицы называют свободными.

Таблица 3.4

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

План перевозок – допустимый, если он удовлетворяет балансовым условиям (3.1): все заявки удовлетворены, все запасы исчерпаны.

Допустимый план – опорный, если в нем отличны от нуля не более чем $r = m + n - 1$ базисных перевозок x_{ij}, а остальные перевозки равны нулю. Если отличных от нуля перевозок менее чем $r = m + n - 1$, то такой план называют *вырожденным опорным планом*.

Оптимальный план перевозок – план с наименьшей стоимостью из всех допустимых планов перевозок.

3.3.2. Метод северо-западного угла для нахождения опорного плана ТЗ

Шаг 0. Условие транспортной задачи задают в виде транспортной таблицы (см. табл. 3.3).

Шаг 1. Проверяют выполнение условия баланса (3.1). Если условие баланса не выполняется, т. е. задача открытая, то ее сводят к закрытому типу.

Шаг 2. Формируют таблицу плана перевозок (см. табл. 3.4), в которой заполнены только объемы производства и объемы потребления. Далее начинают заполнять таблицу перевозок с левого верхнего (северо-западного) угла. При заполнении двигаются по строке вправо и по столбцу вниз.

Процесс продолжают до тех пор, пока не исчерпаются предложения и полностью не удовлетворится спрос.

Пример 3.1. Определить опорный план по методу северо-западного угла для транспортной задачи, заданной в табл. 3.5.

На первом шаге проверяют выполнение балансовых условий. Суммарный объем производства составляет: 200 + 40 + 110 = 350 усл. ед.; суммарный объем потребления равен: 120 + 50 + 190 + 110 = 470. Следовательно, ТЗ – открытая. Для ее сведения к закрытому типу необходимо ввести четвертый пункт производства с объемом производства, равным a_4 = 470 – 350 = 120 усл. ед. Так как пункт производства фиктивен, то стоимости перевозок продукции из этого пункта в пункты потребления нулевые (табл. 3.6).

Таблица 3.5

	120	50	110	190
200	7	8	3	2
40	4	5	9	8
110	9	2	1	6

Таблица 3.6

	120	50	110	190
200	7	8	3	2
40	4	5	9	8
110	9	2	1	6
120	0	0	0	0

На втором шаге создают пустую таблицу плана перевозок и начинают ее заполнение (табл. 3.7).

В первую клетку помещают: $x_{11} = \min(200,120) = 120$. Заявки первого потребителя полностью удовлетворены, остальные клетки 1-го столбца заполняют нулями. Остаток продукции в первом пункте составляет 200 – 120 = 80 усл. ед. груза. Далее двигаются по 1-й строке вправо и заполняют клетку (1, 2): $x_{12} = \min(200-120,50) = 50$. Заявки второго потребителя полностью удовлетворены, оставшиеся клетки 2-го столбца заполняют нулями. Остаток продукции в первом пункте равен 80 – 50 = 30 усл. ед. груза.

Двигаются по 1-й строке вправо и заполняют клетку (1, 3) $x_{13} = \min(80-50,110) = 30$. Предложения первого поставщика исчерпаны, клетка (1, 4) заполняется нулем. Далее заполняют таблицу плана перевозок по аналогии.

Полученный план перевозок (табл. 3.8) – допустимый, так как для него выполняются условия баланса, и опорный, так как число базисных клеток равно 7 и $r = m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$.

Таблица 3.7

	120	50	110	190
200	120	50	30	0
40	0	0		
110	0	0		
120	0	0		

Таблица 3.8

	120	50	110	190
200	120	50	30	0
40	0	0	40	0
110	0	0	40	70
120	0	0	0	120

Стоимость плана перевозок составляет:

$$z = 120 \cdot 7 + 50 \cdot 8 + 30 \cdot 3 + 40 \cdot 9 + 40 \cdot 1 + 70 \cdot 6 + 120 \cdot 0 = 2150 .$$

Метод северо-западного угла – наиболее простой метод нахождения опорного плана, при его построении не учитываются стоимости перевозок. План перевозок, полученный по этому методу, обычно бывает достаточно далек от оптимального.

3.3.3. Метод минимального элемента для нахождения опорного плана ТЗ

Метод минимального элемента при нахождении опорного решения учитывает стоимости перевозок. Сначала осуществляются перевозки (заполняются клетки табл. 3.3) с минимальными стоимостями транспортировки единицы продукции от производителя к потребителю.

Шаг 0. Условие транспортной задачи задают в виде табл. 3.3.

Шаг 1. Проверяют выполнение условия баланса. Если условие баланса не выполняется, т. е. задача открытая, то ее сводят к закрытому типу.

Шаг 2. Создают таблицу плана перевозок (см. табл. 3.4), в которой заполнены только объемы производства и объемы потребления. Выбирают клетку таблицы, которой соответствует минимальная стоимость перевозки единицы продукции от производителя к потребителю. В выбранную клетку аналогично методу северо-западного угла помещают максимально возможное число единиц продукции, разрешенное ограничениями на запасы и заявки. После этого, если предложение производителя исчерпано, остальные клетки соответствующей строки заполняют нулями; если спрос удовлетворен, остальные клетки соответствующего столбца заполняют нулями.

Процесс продолжается до тех пор, пока не заполнены все клетки таблицы перевозок.

Пример 3.2. Определить опорное решение по методу минимального элемента для транспортной задачи, заданной в табл. 3.5.

На первом шаге проверяют выполнение балансовых условий, сводят задачу к закрытому типу и переходят к табл. 3.6

На втором шаге создают пустую таблицу плана перевозок и начинают ее заполнение (табл. 3.9).

Таблица 3.9

	120	50	110	190
200	0	10	0	190
40	0	40	0	0
110	0	0	110	0
120	120	0	0	0

Минимальная стоимость перевозки единицы продукции соответствует клеткам (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4): c41 = c42 = c43 = c44 = 0. Начать заполнение таблицы перевозок можно с любой из этих клеток. Пусть $x_{41} = \min(120,120) = 120$. Остальные клетки 4-й строки и 1-го столбца заполняются нулями.

Из оставшихся клеток минимальная стоимость перевозки соответствует клетке (3, 3), поэтому: $x_{33} = \min(110,110) = 110$. Запасы третьего поставщика полностью исчерпаны, потребности третьего потребителя полностью удовлетворены, поэтому оставшиеся клетки 3-й строки и 3-го столбца заполняются нулями.

Далее заполняется клетка (1, 4), как имеющая наименьшую стоимость перевозок единицы продукции: $x_{14} = \min(200,190) = 190$. Оставшиеся клетки 4-го столбца заполняются нулями. Затем заносится в клетку (1, 2): $x_{12} = 10$; в клетку (2, 2): $x_{22} = 40$.

В результате получен допустимый план перевозок, все балансовые условия выполнены (табл. 3.9). План перевозок также опорный и вырожденный, так как число базисных клеток равно 5 и меньше $r = 7$.

Стоимость плана перевозок составляет:

$$z = 10 \cdot 8 + 190 \cdot 2 + 40 \cdot 5 + 110 \cdot 1 + 120 \cdot 0 = 770,$$

что значительно ниже стоимости плана, полученного методом северо-западного угла.

Примечание. Стоимость плана, полученного методом северо-западного угла, не всегда выше стоимости плана, полученного методом минимального элемента.

3.3.4. Нахождение оптимального решения транспортной задачи – метод потенциалов

Идея метода потенциалов, его экономическая интерпретация. Пусть каждый из пунктов производства продукции $i = \overline{1,m}$ вносит за вывоз (не важно куда) единицы груза какую-то сумму u_i, $i = \overline{1,m}$; в свою очередь, каждый из пунктов потребления $j = \overline{1,n}$ также вносит за привоз (все равно откуда) единицы груза сумму v_j, $j = \overline{1,n}$; предположим, что эти платежи передаются некоторому третьему лицу («перевозчику»).

Допустим, что интересы пунктов i и j не противоречат друг другу, т. е. пункты действуют как единая экономическая система. Перевозка единицы груза из i-го в j-й пункт объективно стоит c_{ij}, а за эту перевозку стороны вместе платят «перевозчику» сумму

$$u_i + v_j = \tilde{c}_{ij} \ \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})\,. \qquad (3.9)$$

Величина $\tilde{c}_{ij}$ называется «псевдостоимостью» перевозки единицы груза из i-го пункта производства в j-й пункт потребления.

Платежи u_i и v_j не обязательно должны быть положительными: не исключено, что «перевозчик» сам платит тому или другому пункту какую-то премию за перевозку.

Оптимальным будет такой план перевозок, при котором пункты i и j не переплачивают «перевозчику» ничего сверх объективной стоимости перевозок c_{ij}, т. е. такой план, любое отступление от которого невыгодно для пунктов производства и потребления, так как заставляет их платить за перевозку больше, чем если бы они возили грузы сами.

В [3] доказано, что признаком оптимальности плана $\{x_{ij}\}$ является выполнение двух условий:

1) для всех базисных клеток

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij}\,, \qquad (3.10)$$

2) для всех свободных (небазисных) клеток

$$\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}\,. \qquad (3.11)$$

План, обладающий такими свойствами, называется потенциальным, а соответствующие ему платежи (u_i, v_j) – *потенциалами пунктов* $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

Процедура построения потенциального (оптимального плана) состоит в следующем.

В качестве первого приближения к оптимальному берется любой опорный план. Для этого плана потенциалы (u_i, v_j), соответствующие базисным клеткам, подчиняются условию: сумма потенциалов (псевдостоимость) равна стоимости перевозки единицы груза (3.10). Уравнений всего $m + n - 1$, а число неизвестных равно $m + n$. Следовательно, потенциал одного пункта можно задать произвольно (например, равным нулю). После этого, исходя из (m + n – 1) уравнений, можно найти остальные потенциалы, а по ним вычислить псевдостоимости (3.9) для каждой свободной клетки. Если оказалось, что все эти псевдостоимости не превосходят стоимостей (3.11), то план оптимален. Если нет, то план может быть улучшен переносом перевозок по циклу.

Циклом в транспортной таблице называют несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 90°. В каждой строке и в каждом столбце транспортной таблицы не может быть более двух клеток (вершин) цикла.

Знаком «+» отмечаются те вершины цикла, в которых перевозки увеличиваются, а знаком «–» – те вершины, в которых они уменьшаются. Перенести какое-то количество единиц груза по циклу – значит увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла, на это количество единиц, а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах, уменьшить на то же количество. Очевидно, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется. При любом циклическом переносе, оставляющем перевозки неотрицательными, допустимый план остается допустимым. Стоимость же этого плана может меняться – увеличиваться или уменьшаться.

Цена цикла – увеличение стоимости перевозок при перемещении одной единицы груза по циклу. Цена цикла равна алгебраической сумме стоимостей, стоящих в вершинах цикла. Стоимости, стоящие в положительных вершинах, берутся со знаком «+», а в отрицательных – со знаком «–».

Пример 3.3. В табл. 3.10 приведена транспортная таблица, в которой отмечен цикл. Пусть требуется загрузить клетку (4, 1). Максимальное число единиц, которое может быть перенесено, равно 40, так как это минимальное количество единиц груза в отрицательных вершинах.

Цена цикла

$$c_{41} - c_{11} + c_{13} - c_{33} + c_{34} - c_{44} = 0 - 7 + 3 - 1 + 6 - 0 = 1 .$$

После циклического переноса транспортная таблица преобразована в табл. 3.11. Стоимость плана увеличится на 40 ед. и составит: z = 2150 + + 40 = 2190. Очевидно, что выполненный циклический перенос удаляет от оптимального решения и перенос по циклу имеет смысл только при отрицательной цене цикла.

Можно доказать, что для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует цикл (и притом единственный), одна из вершин которого лежит в свободной клетке, а все остальные – в базисных клетках. Метод потенциалов основан на выделении циклов с отрицательной ценой и переносе единиц груза по этим циклам для достижения оптимального плана перевозок.

Таблица 3.10

	120	50	110	190
200	120^7_-	50^8	30^3_+	0^2
40	0^4	0^5	40^9	0^8
110	0^9	0^2	40^1_-	70^6_+
120	0^0_+	0^0	0^0	120^0_-

Таблица 3.11

	120	50	110	190
200	80^7	50^8	70^3	0^2
40	0^4	0^5	40^9	0^8
110	0^9	0^2	0^1	110^6
120	40^0	0^0	0^0	80^0

Если количество базисных клеток в транспортной таблице меньше $r = m + n - 1$ (т. е. текущее опорное решение является вырожденным), то необходимо перейти от него к невырожденному опорному плану. Для этого часть свободных клеток объявляют условно занятыми («базисными нулями») и работают с ними как с базисными клетками.

Пример 3.4. Построим цикл для загрузки клетки (3, 1) в транспортной таблице (табл. 3.12).

Так как в отрицательных вершинах минимальное количество единиц груза равно нулю, то по циклу переносится нуль единиц груза. В результате такого фиктивного переноса стоимость плана не меняется, изменяется только занятая базисная клетка (табл. 3.13). В табл. 3.12 и 3.13 в условно занятых свободных клетках нули имеют нижний индекс «б».

Фиктивный перенос по циклу может применяться при решении транспортной задачи методом потенциалов.

Таблица 3.12

	120	50	110	190
200	0^7	10^8_-	$0^3_{\text{б}+}$	190^2
40	$0^4_{\text{б}-}$	40^5_+	0^9	0^8
110	0^9_+	0^2	110^1_-	0^6
120	120^0	0^0	0^0	0^0

Таблица 3.13

	120	50	110	190
200	0^7	10^8	$0^3_{\text{б}}$	190^2
40	0^4	40^5	0^9	0^8
110	$0^9_{\text{б}}$	0^2	110^1	0^6
120	120^0	0^0	0^0	0^0

Приведем алгоритм метода потенциалов.

Шаг 0. Берут любой невырожденный опорный план перевозок, в котором отмечены (m + n – 1) базисных клеток (остальные клетки – свободные).

Шаг 1. Для этого плана вычисляют потенциалы (u_i, v_j) исходя из условия: в любой базисной клетке псевдостоимости равны стоимостям

$$u_i + v_j = c_{ij}\,. \tag{3.12}$$

Один из платежей назначают произвольно, например, равным нулю.

Шаг 2. Рассчитывают псевдостоимости для всех свободных клеток:

$$\tilde{c}_{ij} = u_i + v_j\,. \tag{3.13}$$

Шаг 3. Проверяют условие: для всех свободных клеток псевдостоимость не превышает стоимости перевозок груза. Если условие выполняется, то план оптимален, иначе – переходят к шагу 4.

Шаг 4. Улучшают план путем переброски перевозок по циклу, соответствующему любой свободной клетке с отрицательной ценой (для которой псевдостоимость больше стоимости). Если таких клеток несколько, то выбирают клетку с максимальной по модулю ценой цикла.

Шаг 5. Проверяют «невырожденность» нового опорного плана. Если план вырожден, то его сводят к невырожденному, объявляя часть свободных клеток условно занятыми, и переходят к шагу 1.

Шаги 1–5 алгоритма итерационно повторяются, пока не будет найден оптимальный план.

Пример 3.5. Решим транспортную задачу, заданную в табл. 3.5.

В примере 3.2 был найден вырожденный опорный план по методу минимального элемента (см. табл. 3.9) для этой транспортной задачи. Найдем оптимальный план методом потенциалов.

Для сведения плана к невырожденному в табл. 3.9 условно занимают две свободные клетки и объявляют их базисными (табл. 3.14). Клетки необходимо выбрать так, чтобы вокруг оставшихся свободных клеток можно было строить циклы. Например, нельзя одновременно объявить базисными клетки (1, 1) и (2, 1). Также свободным клеткам, которые условно занимаются, должна соответствовать как можно меньшая стоимость перевозки единицы груза.

На первом шаге вычисляют потенциалы производителей и потребителей (u_i, v_j), для чего составляется система уравнений:

$$
\begin{aligned}
&u_1 + v_2 = 8; \qquad && u_3 + v_3 = 1;\\
&u_1 + v_4 = 2; && u_4 + v_1 = 0;\\
&u_2 + v_2 = 5; && u_4 + v_3 = 0.\\
&u_3 + v_2 = 2;
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Один из потенциалов задается произвольно, например: $u_1 = 0$.

Далее вычисляются потенциалы производителей и потребителей из системы уравнений (3.14). Результаты вычислений представлены в табл. 3.15.

На втором шаге рассчитывают псевдостоимости для всех свободных клеток. В табл. 3.15 вычисленные псевдостоимости указаны в клетках в левом верхнем углу.

На третьем шаге проверяют выполнение условий оптимальности. Для двух клеток (1, 3) и (4, 2) псевдостоимость выше стоимости, поэтому план не оптимален.

Таблица 3.14

	120	50	110	190
200	0^{7}	10^{8}	0^{3}	190^{2}
40	0^{4}	40^{5}	0^{9}	0^{8}
110	0^{9}	$0^{2}_{б}$	110^{1}	0^{6}
120	120^{0}	0^{0}	$0^{0}_{б}$	0^{0}

Таблица 3.15

	120	50	110	190	u_i
200	${}^{7}0^{7}$	10^{8}	${}^{7}0^{3}$	190^{2}	0
40	${}^{4}0^{4}$	40^{5}	${}^{4}0^{9}$	${}^{-1}0^{8}$	–3
110	${}^{1}0^{9}$	$0^{2}_{б}$	110^{1}	${}^{-4}0^{6}$	–6
120	120^{0}	${}^{1}0^{0}$	$0^{0}_{б}$	${}^{-5}0^{0}$	–7
v_j	7	8	7	2	

На четвертом шаге для улучшения плана перевозок загружается переносом по циклу клетка (1, 3) как имеющая максимальную по модулю цену цикла. Цена цикла равна –4. По циклу может быть перенесено максимум 10 ед. груза (табл. 3.16). Следовательно, циклический перенос приведет к уменьшению стоимости плана перевозок на 40 усл. ед.

В табл. 3.17 приведена транспортная таблица после циклического переноса. Стоимость плана составила: $z = 770 - 40 = 730$.

На пятом шаге проверяют «невырожденность» нового опорного плана. В табл. 3.17 число базисных клеток равно 7. Следовательно, план невырожденный опорный и можно переходить ко второй итерации, к шагу 1.

Таблица 3.16

	120	50	110	190	u_i
200	${}^{7}0^{7}$	10^{8}_{-}	${}^{7}0^{3}_{+}$	190^{2}	0
40	${}^{4}0^{4}$	40^{5}	${}^{4}0^{9}$	${}^{-1}0^{8}$	–3
110	${}^{1}0^{9}$	$0^{2}_{б+}$	110^{1}_{-}	${}^{-4}0^{6}$	–6
120	120^{0}	${}^{1}0^{0}$	$0^{0}_{б}$	${}^{-5}0^{0}$	–7
v_j	7	8	7	2	

Таблица 3.17

	120	50	110	190
200	0^{7}	0^{8}	10^{3}	190^{2}
40	0^{4}	40^{5}	0^{9}	0^{8}
110	0^{9}	10^{2}	100^{1}	0^{6}
120	120^{0}	0^{0}	$0^{0}_{б}$	0^{0}

В табл. 3.18 приведены потенциалы производителей и потребителей, псевдостоимости для нового опорного плана. В клетке (4, 2) псевдостоимость превышает стоимость, следовательно, план не оптимален и необходимо загрузить клетку (4, 2) путем циклического переноса.

Выполняется фиктивный перенос по циклу 0 ед. груза. В результате меняется условно занятая клетка (вместо клетки (4, 3) занимается клетка (4, 2)). Стоимость плана при этом не меняется. Полученная транспортная таблица приведена в табл. 3.19.

Таблица 3.18

	120	50	110	190	u_i
200	${}^{3}0^{7}$	${}^{4}0^{8}$	10^{3}	190^{2}	0
40	${}^{4}0^{4}$	40^{5}	${}^{4}0^{9}$	${}^{3}0^{8}$	1
110	${}^{1}0^{9}$	10^{2}_{-}	100^{1}_{+}	${}^{0}0^{6}$	–2
120	120^{0}	0^{0}_{+}	$0^{0}_{б-}$	${}^{-1}0^{0}$	–3
v_j	3	4	3	2	

Таблица 3.19

	120	50	110	190
200	0^{7}	0^{8}	10^{3}	190^{2}
40	0^{4}	40^{5}	0^{9}	0^{8}
110	0^{9}	10^{2}	100^{1}	0^{6}
120	120^{0}	$0^{0}_{б}$	0^{0}	0^{0}

В табл. 3.20 приведена транспортная таблица, соответствующая третьей итерации. В клетке (2, 1) псевдостоимость превышает стоимость, поэтому клетка (2, 1) загружается с помощью переноса груза по циклу.

По циклу переносится 40 ед. груза. Итоговая транспортная таблица приведена в табл. 3.21. Цена цикла равна –1, поэтому стоимость плана уменьшится на 40 ед. и составит: $z = 730 - 40 = 690$.

Далее вычисляются потенциалы поставщиков, потребителей и псевдостоимости для свободных клеток. Так как для всех свободных клеток псевдостоимости не превышают стоимостей (табл. 3.21), полученный план перевозок оптимален, ему соответствует минимальная стоимость перевозки всех грузов.

Таблица 3.20

	120	50	110	190	u_i
200	${}^{4}0^{7}$	${}^{4}0^{8}$	10^{3}	190^{2}	0
40	${}^{5}0^{4}_{+}$	40^{5}_{-}	${}^{4}0^{9}$	${}^{3}0^{8}$	1
110	${}^{2}0^{9}$	10^{2}	100^{1}	${}^{0}0^{6}$	–2
120	120^{0}_{-}	$0^{0}_{\text{б}+}$	${}^{-1}0^{0}$	${}^{-2}0^{0}$	–4
v_j	4	4	3	2	

Таблица 3.21

	120	50	110	190	u_i
200	${}^{4}0^{7}$	${}^{4}0^{8}$	10^{3}	190^{2}	0
40	40^{4}	${}^{4}0^{5}$	${}^{3}0^{9}$	${}^{2}0^{8}$	0
110	${}^{2}0^{9}$	10^{2}	100^{1}	${}^{0}0^{6}$	–2
120	80^{0}	40^{0}	${}^{-1}0^{0}$	${}^{-2}0^{0}$	–4
v_j	4	4	3	2	

Оптимальный план перевозок транспортной задачи в матричном виде

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 190 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 100 & 0 \\ 80 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимость оптимального плана:

$$z = C \times X = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 190 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 100 & 0 \\ 80 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 690\,.$$

3.4. Решение задачи о коммивояжере

Метод ветвей и границ («поиск с возвратом», «backtracking») для решения задачи о коммивояжере – один из наиболее эффективных и быстрых методов решения этой задачи был разработан Литтлом, Мерти, Суини, Кэрелом [1] в 1963 году. Представляет собой итеративную схему неявного (улучшенного) перебора, который состоит в отбрасывании заведомо неоптимальных решений и является одной из самых эффективных процедур в группе методов ветвей и границ.

Идея метода. Пусть $S(0)$ – множество всех допустимых замкнутых маршрутов (циклов) задачи о коммивояжере с n городами и матрицей затрат $C=\{c_{ij}\}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$. Множество $S(0)$ состоит из $(n-1)!$ допустимых решений. Метод Литтла основан на разбиении множества $S(0)$ на два непересекающихся подмножества и на вычислении оценок каждого из них. Далее подмножество с минимальной оценкой (стоимостью) разбивается на два подмножества и вычисляются их оценки. На каждом шаге выбирается подмножество с наименьшей из всех полученных на этом шаге оценок и производится его разбиение на два подмножества. В конце концов получаем подмножество, содержащее один цикл (замкнутый маршрут, удовлетворяющий наложенным ограничениям), стоимость которого минимальна.

Алгоритм метода. Метод состоит из этапов предварительного и общего, который повторяется необходимое число раз.

Предварительный этап предназначен для приведения матрицы затрат $\{c_{ij}\}$ и вычисления нижней оценки стоимости маршрута – r.

Для приведения матрицы затрат по каждой строке вычисляются наименьшие элементы (константы приведения):

$$\alpha_i=\min_j\{c_{ij}\},\ i=\overline{1,n}. \tag{3.15}$$

Затем переходят к новой матрице с элементами

$$c'_{ij}=c_{ij}-\alpha_i. \tag{3.16}$$

Потом вычисляют наименьшие элементы по каждому столбцу (константы приведения):

$$\beta_j=\min_i\{c_{ij}\},\ j=\overline{1,n}, \tag{3.17}$$

и переходят к новой матрице с элементами

$$c^0_{ij}=c'_{ij}-\beta_j. \tag{3.18}$$

В результате получаем матрицу $\{c^0_{ij}\}$, в каждой строке и в каждом столбце которой есть хотя бы один нулевой элемент.

Вычисление *нижней оценки стоимости маршрута* (сумма констант приведения) осуществляется по формуле

$$r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \ . \tag{3.19}$$

Полученная оценка говорит о том, что затраты на оптимальный маршрут не могут быть меньше величины r.

Общий этап включает следующие шаги.

1. Вычисление *штрафа «за неиспользование»* p_{hk} для каждого нулевого элемента приведенной матрицы $\{c_{ij}^0\}$. (Другими словами, определяется величина минимальных затрат, которые коммивояжер должен будет понести, если он откажется от переезда из i-го пункта в j-й.)

Если ребро (h, k) не включается в маршрут, то в него входит некоторый элемент строки h и столбца k. Следовательно, во всяком случае стоимость «неиспользования» (h, k) не меньше суммы минимальных элементов строки h и столбца k, исключая сам элемент c_{hk}^0. Отсюда

$$p_{hk} = \min_{j \neq k} \{c_{hj}^0\} + \min_{i \neq h} \{c_{ik}^0\} \ . \tag{3.20}$$

2. Выбор нулевого элемента, которому соответствует максимальный штраф. Если таких элементов несколько, то выбирается любой из них. Разбиение множества всех допустимых маршрутов $S(0)$ на два подмножества: подмножество маршрутов, содержащих ребро (h, k) – $S(h,k)$; подмножество маршрутов, не содержащих ребра (h, k) – $S(\overline{h,k})$.

Примечание. Максимальный штраф означает, что исключение из решения переезда, соответствующего нулевому элементу, приведет к максимальному увеличению стоимости оптимального маршрута.

3. Вычисление оценок затрат по всем маршрутам, входящим в каждое подмножество.

3.1. Обозначим как $\theta(\overline{h,k})$ минимальную оценку стоимости маршрутов, вошедших в множество $S(\overline{h,k})$, т. е. не содержащих ребра (h, k). Для $S(\overline{h,k})$ оценка затрат

$$\theta(\overline{h,k}) = r + p_{hk} \ . \tag{3.21}$$

3.2. При вычислении оценки затрат для $S(h,k)$ учитывают, что если ребро (h, k) входит в маршрут, то ребро (k, h) не может входить в маршрут, поэтому принимаем $c_{kh}^0 = \infty$; если в маршрут включено ребро (h, k), то ни одно другое ребро, начинающееся в пункте h или заканчивающееся в пункте k, не может входить в маршрут, поэтому строка h и столбец k вычеркиваются. Полученная матрица приводится по аналогии с предварительным этапом алгоритма. Пусть сумма приводящих констант матрицы r_{hk}. Тогда оценка затрат

$$\theta(h,k) = r + r_{hk}. \tag{3.22}$$

4. Из множеств $S(h,k)$ и $S(\overline{h,k})$ для дальнейшего ветвления выбирается множество, имеющее меньшую оценку. При выборе $S(h,k)$ нужно вернуться к шагу 1, используя на этом шаге приведенную матрицу (см. пункт 3.2). При выборе $S(\overline{h,k})$ нужно вернуться к исходной матрице $\left\{c_{ij}^0\right\}$ до преобразований, выполненных в пункте 3.2, принять $c_{hk}^0 = \infty$ и привести полученную в результате матрицу, после чего перейти к шагу 1, используя на нем эту приведенную матрицу. Если несколько множеств имеют равную минимальную оценку, то дальнейшее ветвление производится для всех множеств с минимальной оценкой. Таким образом, метод ветвей и границ позволяет находить все оптимальные решения.

Алгоритм продолжается до тех пор, пока в подмножестве маршрутов с наименьшей оценкой не останется всего один маршрут. В расчетах это соответствует ситуации, когда исследуемая матрица имеет размерность 1×1.

Пример 3.6. Рассмотрим пример решения задачи о коммивояжере методом ветвей и границ. В табл. 3.22 приведена матрица затрат C размерностью 5×5. Элементы матрицы C, стоящие на главной диагонали, равны $c_{ii} = \infty$, так как переезд из i-го города в i-й невозможен.

На предварительном этапе выполняют приведение матрицы затрат, для чего вычисляют константы приведения α_i по строкам (табл. 3.23).

Затем переходят к новой матрице затрат с элементами c'_{ij}, которые получены в результате вычитания из всех элементов исходной матрицы c_{ij} констант приведения α_i (табл. 3.24). Далее вычисляются константы приведения β_j по столбцам (табл. 3.24).

Таблица 3.22

	1	2	3	4	5
1	∞	14	9	16	7
2	20	∞	9	19	14
3	18	15	∞	12	12
4	23	10	13	∞	17
5	7	6	6	6	∞

Таблица 3.23

	1	2	3	4	5	α_i
1	∞	14	9	16	7	7
2	20	∞	9	19	14	9
3	18	15	∞	12	12	12
4	23	10	13	∞	17	10
5	7	6	6	6	∞	6

Выполняют переход к новой матрице затрат с элементами c_{ij}^0, полученными путем вычитания из элементов матрицы c'_{ij} (табл. 3.24) констант приведения β_j. Результирующая матрица затрат C^0 приведена (табл. 3.25), т. е. в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один нулевой элемент. Нижняя оценка стоимости маршрута, равная сумме констант приведения по строкам и столбцам, составляет $r = 45$. Оценка множества всех допустимых маршрутов $S(0)$ также равна $\theta(0) = r = 45$. Следует обратить внимание на то, что из нулевых элементов матрицы затрат $\left\{c_{ij}^0\right\}$ невозможно составить полный замкнутый цикл, следовательно, оптимальный маршрут будет иметь большую стоимость по сравнению с полученной оценкой: $r = 45$.

Таблица 3.24

	1	2	3	4	5
1	∞	7	2	9	0
2	11	∞	0	10	5
3	6	3	∞	0	0
4	13	0	3	∞	7
5	1	0	0	0	∞
β_j	1	0	0	0	0 0

Таблица 3.25

	1	2	3	4	5
1	∞	7	2	9	0^2
2	10	∞	0^5	10	5
3	5	3	∞	0^0	0^0
4	12	0^3	3	∞	7
5	0^5	0^0	0^0	0^0	∞

На первом шаге общего этапа вычисляют штраф «за неиспользование» p_{hk} для каждого нулевого элемента приведенной матрицы $\left\{c_{ij}^0\right\}$

(табл. 3.25). Штраф «за неиспользование» p_{hk} равен сумме минимальных элементов по строке и столбцу, на пересечении которых находится нулевой элемент. Все штрафы указаны непосредственно в соответствующих клетках табл. 3.25.

На втором шаге выбирается нулевой элемент, которому соответствует максимальный штраф (например, элемент (5, 1)), и множество всех допустимых маршрутов $S(0)$ разбивается на два подмножества: $S(5,1)$ – подмножество, содержащее ребро (5,1); $S(\overline{5,1})$ – подмножество, не содержащее ребра (5, 1). Процесс решения наглядно иллюстрирует дерево решения (рис. 3.4).

На третьем шаге вычисляют оценки затрат по всем маршрутам, входящим в каждое подмножество. Для $S(\overline{5,1})$ оценка затрат: $\theta(\overline{5,1}) =$ $= r + p_{51} = 45 + 5 = 50$.

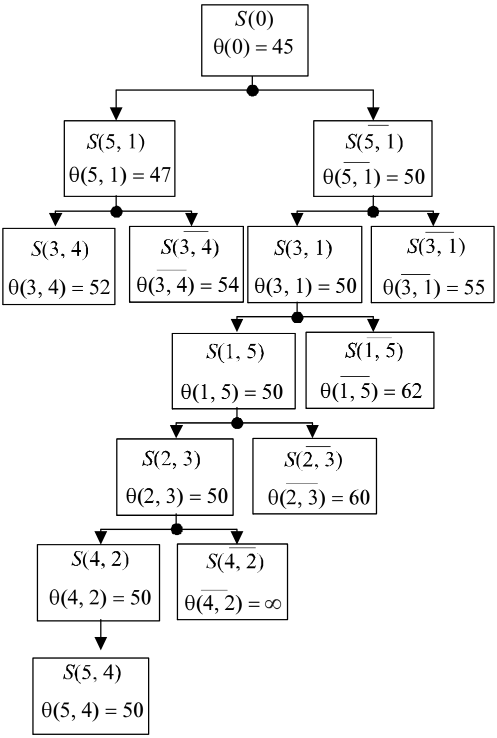


Рис. 3.4. Дерево решения для задачи о коммивояжере

Для вычисления оценки затрат для $S(5,1)$ принимают $c_{15}^{0}=\infty$ и вычеркивают строку 5 и столбец 1, т. е. полагают, что $c_{5j}^{0}=\infty$ при $j=\overline{2,5}$; $c_{i1}^{0}=\infty$, $i=\overline{1,4}$ (табл. 3.26). Полученную таким образом матрицу (табл. 3.27) приводят и переходят к новой матрице (табл. 3.28). Затем вычисляют сумму констант приведения: $r_{51}=2$ и оценку затрат подмножества $S(5,1)$: $\theta(5,1)=r+r_{51}=45+2=47$.

Таблица 3.26

	1	2	3	4	5
1	∞	7	2	9	∞
2	10	∞	0^{5}	10	5
3	5	3	∞	0^{0}	0^{0}
4	12	0^{3}	3	∞	7
5	0^{5}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	∞

Таблица 3.27

	2	3	4	5	α_i
1	7	2	9	∞	2
2	∞	0	10	5	0
3	3	∞	0	0	0
4	0	3	∞	7	0

На четвертом шаге из множеств $S(5,1)$ и $S(\overline{5,1})$ для дальнейшего ветвления выбирается множество $S(5,1)$, имеющее меньшую оценку.

Далее итерационно выполняются шаги 1–4 общего этапа.

В табл. 3.29 приведены штрафы «за неиспользование» нулевых элементов. Максимальный штраф соответствует элементу (3, 4), поэтому множество $S(5,1)$ разбивается на два подмножества: $S(3,4)$ и $S(\overline{3,4})$ (рис. 3.4). Для $S(\overline{3,4})$ оценка затрат: $\theta(\overline{3,4})=47+p_{34}=47+7$ $=54$. Для вычисления оценки затрат для $S(3,4)$ принимают $c_{43}^{0}=\infty$, вычеркивают строку 3 и столбец 4.

Таблица 3.28

	2	3	4	5
1	5	0	7	∞
2	∞	0	10	5
3	3	∞	0	0
4	0	3	∞	7

Таблица 3.29

	2	3	4	5
1	5	0^{5}	7	∞
2	∞	0^{5}	10	5
3	3	∞	0^{7}	0^{5}
4	0^{6}	∞	∞	7

Таблица 3.30

	2	3	5
1	5	0	∞
2	∞	0	5
4	0	∞	7
β_j	0	0	5

Полученную матрицу (табл. 3.30) приводят, затем вычисляют сумму констант приведения: $r_{34} = 5$ и оценку затрат подмножества $S(3,4)$: $\theta(3,4) = 47 + 5 = 52$.

Из множеств $S(3,4)$, $S(\overline{3,4})$, $S(\overline{5,1})$ для дальнейшего разбиения выбирают множество $S(\overline{5,1})$, так как его оценка минимальна на этом этапе решения задачи и составляет $\theta(\overline{5,1}) = 50$. Следовательно, необходимо согласно алгоритму вернуться к матрице табл. 3.25, принять $c_{51}^{0} = \infty$ и привести полученную в результате матрицу (табл. 3.31).

После чего переходят к шагу 1 алгоритма и вычисляют штрафы «за неиспользование» нулевых элементов приведенной матрицы (табл. 3.32).

Для дальнейшего ветвления выбирается элемент (3, 1). Оценка затрат множества $S(\overline{3,1})$ составляет: $\theta(\overline{3,1}) = 55$. Для вычисления оценки затрат для $S(3,1)$ принимают $c_{13}^{0} = \infty$, вычеркивают строку 3 и столбец 1 (табл. 3.33). Полученная матрица уже приведена. Оценка затрат множества $S(3,1)$ равна $\theta(3,1) = 50$. Для дальнейшего разбиения выбирается множество $S(3,1)$.

Таблица 3.31

	1	2	3	4	5
1	∞	7	2	9	0
2	10	∞	0	10	5
3	5	3	∞	0	0
4	12	0	3	∞	7
5	∞	0	0	0	∞
β_j	5	0	0	0	0	0

Таблица 3.32

	1	2	3	4	5
1	∞	7	2	9	0^{2}
2	5	∞	0^{5}	10	5
3	0^{5}	3	∞	0^{0}	0^{0}
4	7	0^{3}	3	∞	7
5	∞	0^{0}	0^{0}	0^{0}	∞

На следующей итерации ветвление выполняется относительно элемента (1, 5) (табл. 3.34, рис. 3.4). Оценка затрат множества $S(\overline{1,5})$ составляет: $\theta(\overline{1,5}) = 50 + p_{15} = 62$. Для вычисления оценки затрат для $S(1,5)$ вычеркивают строку 1 и столбец 5. Полученная матрица уже приведена. Оценка затрат множества $S(1,5)$ равна $\theta(1,5) = 50$.

Таблица 3.33

	1	2	3	4	5
1	∞	7	∞	9	0
2	10	∞	0	10	5
3	5	3	∞	0	0
4	12	0	3	∞	7
5	∞	0	0	0	∞

Таблица 3.34

	2	3	4	5
1	7	∞	9	0^{12}
2	∞	0^5	10	5
4	0^3	3	∞	7
5	0^0	0^0	0^9	∞

Далее выполняется разбиение множества $S(1, 5)$ на два подмножества: $S(2, 3)$ и $S(\overline{2, 3})$ (табл. 3.35, рис. 3.4).

На последней итерации множество $S(2, 3)$ разбивается на два подмножества: $S(4, 2)$ и $S(\overline{4, 2})$ (табл. 3.36, рис. 3.4).

Таблица 3.35

	2	3	4
2	∞	0^{10}	10
4	0^3	3	∞
5	0^0	0^0	0^{10}

Таблица 3.36

	2	4
4	0^{∞}	∞
5	0^0	0^{∞}

Результат решения в терминах модели задачи коммивояжера может быть представлен в виде матрицы переездов и оптимального значения целевой функции:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ Z(X^*) = 50 .$$

В терминах исходной задачи ответ представляется в виде маршрута $1 \to 5 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1$ и стоимости маршрута, которая в данном примере равна 50.

Контрольные вопросы

1. В чем специфика модели транспортной задачи как задачи линейного программирования? Какие методы применяются для решения транспортной задачи?

2. Что понимается под открытой и закрытой транспортными задачами? Как выполняется сведение открытой транспортной задачи к закрытому типу? В чем заключается условие баланса?

3. Для чего используются методы северо-западного угла и минимального элемента? В чем их суть? Сравните эти методы по эффективности (чем измеряется эффективность?)

4. Объясните шаги алгоритма метода потенциалов для решения транспортной задачи на произвольном примере.

5. Как вы понимаете следующие понятия:

- *допустимый план*, *опорный план*, *вырожденный опорный план*, *оптимальный план* (для транспортной задачи)$
- *потенциал*, *псевдостоимость*, *цикл, перенос по циклу*, *цена цикла* (терминология метода потенциалов).

6. Дайте экономическую интерпретацию метода потенциалов.

7. Решите транспортные задачи методом потенциалов.

Задача 1

	18	37	10	20	70
15	7	3	13	1	11
20	12	16	9	12	0
40	1	6	11	13	7
60	5	7	16	12	6

Ответ: $z(X^*) = 535$.

Задача 2

	18	37	10	20	50
35	7	3	13	1	11
20	2	6	9	12	0
40	1	6	11	13	7
60	5	7	6	12	6

Ответ: $z(X^*) = 455$.

8. Почему транспортную задачу не эффективно решать симплекс-методом?

9. Чем отличается модель задачи о коммивояжере от модели задачи о назначении? Можно ли решить задачу о коммивояжере методом потенциалов? Почему?

10. Объясните шаги алгоритма метода ветвей и границ для задачи о коммивояжере на произвольном примере.

11. Дайте толкование понятий: *подмножество маршрутов*, *нижняя оценка стоимости маршрута*, *константа приведения*, *приведенная матрица затрат*, *штраф «за неиспользование»*, *оптимальный маршрут*.

12. Решите задачи о коммивояжере методом ветвей и границ.

Задача 1

	1	2	3	4	5
1	∞	6	4	8	7
2	6	∞	7	11	7
3	4	7	∞	4	3
4	8	11	4	∞	5
5	7	7	3	5	∞

Ответ: $z(X^*) = 26$.

Задача 2

	1	2	3	4	5
1	∞	13	9	16	7
2	19	∞	9	18	14
3	17	15	∞	12	12
4	21	10	13	∞	17
5	5	5	5	5	∞

Ответ: $z(X^*) = 48$.

11. Почему метод ветвей и границ для решения задачи о коммивояжере называют «эффективным методом перебора»? Методом возврата?

12. В каком случае при решении задачи о коммивояжере методом ветвей и границ выполняется возврат на предыдущий шаг решения, возврат по дереву?

13. Почему не эффективно решать задачу о коммивояжере методом ветвей и границ для задачи ЦЛП?

14. Приведите два варианта постановки задачи о рюкзаке и соответствующие модели.

15. Как вы обоснуете то, что задачу о назначении можно решать методом потенциалов?

16. Можно ли решать задачу о назначении методом ветвей и границ для задачи коммивояжера?

17. Как учитывается условие комплектности в задаче о раскрое?

Г Л А В А 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Математическая постановка задач целочисленного линейного программирования

Задачу целочисленного линейного программирования как частный случай задачи математического программирования можно сформулировать в следующем виде: необходимо найти вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с целочисленными координатами, удовлетворяющий заданной системе линейных неравенств, при котором функция линейного вида $z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$ достигает максимального или минимального значения. То есть математическая постановка задачи ЦЛП или ***модель ЦЛП*** представляется в виде

$$\begin{cases} z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,n}; \\ x_j - \text{целые}, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{4.1}$$

При этом координаты вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ являются неизвестными (переменными) задачи.

Таким образом, главное отличие задач ЦЛП от задач ЛП (1.2) в том, что *область допустимых решений задачи ЦЛП является дискретным множеством*. В связи с этим можно выделить следующие основные свойства множества допустимых решений D задач ЦЛП – *несвязность и невыпуклость*.

4.2. Графический метод решения задач ЦЛП

Решение задач ЦЛП графическим методом во многом схоже с графическим решением задач ЛП, рассмотренным в главе 2. Отличие в том, что допустимое решение данной задачи может располагаться только в точках с целочисленными координатами и мысленный параллельный перенос прямой ЦФ в направлении оптимума производится до самой дальней целочисленной точки.

Этапы решения графическим методом

1. Построение ОДР без учета условия целочисленности (как области допустимых решений задачи ЛП).
2. Выделение в построенной области «узлов целочисленной решетки», т. е. точек с целочисленными координатами.
3. Построение радиуса-вектора $\mathbf{N}$ (градиента целевой функции) и линии уровня ЦФ.
4. Мысленный параллельный перенос прямой ЦФ по направлению (в том случае, если задача решается на max) или против направления (в том случае, если задача решается на min) вектора $\mathbf{N}$ до самой дальней целочисленной точки, принадлежащей ОДР. Найденная таким образом точка и будет решением задачи.

Пример. Пусть дана задача максимизации линейной целевой функции при заданных ограничениях:

$$\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 \to \max & \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 & L1 \\ 4x_1 - x_2 \le 10 & L2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \text{целые} & \end{cases}$$

Согласно приведенной выше последовательности решения графическим методом в первую очередь строится ОДР задачи без учета условия, т. е. область, ограниченная прямыми, заданными соответствующими ограничениями-неравенствами $L1$ и $L2$ и ограничениями на неотрицательность переменных x_1 и x_2 (рис. 4.1).

В построенной области выделяются точки, лежащие в узлах целочисленной решетки.

На рис. 4.1 показан радиус-вектор $\mathbf{N}$ из точки начала координат в точку (3, 1). Координаты точки определяются как коэффициенты целевой функции (см. раздел 2.2). Линия уровня ЦФ строится перпендикулярно радиусу-вектору $\mathbf{N}$. На рис. 4.1 она проведена через начало координат.

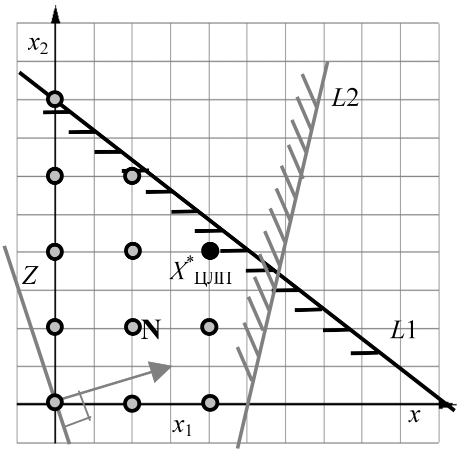


Рис. 4.1. Иллюстрация решения задачи ЦЛП графическим методом

Мысленный параллельный перенос прямой ЦФ z по направлению радиуса-вектора $\mathbf{N}$ (задача решается на max) до самой дальней целочисленной точки ОДР дает точку $x^*_{ЦЛП}$. Найденная точка с координатами (2, 2) является решением задачи.

Ответ: $x^*_{ЦЛП} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $z(x^*_{ЦЛП}) = 8.$

4.3. Метод ветвей и границ для решения задач ЦЛП

Одним из универсальных методов решения задач ЦЛП является метод ветвей и границ, он представляет собой эффективную процедуру перебора целочисленных допустимых решений.

Если задача ЦЛП записана в виде (4.1), то шаги решения методом ветвей и границ следующие.

1. Задача ЦЛП решается как задача ЛП, т. е. ограничения целочисленности переменных не учитываются. Полученное решение $x^*_{ЛП}$ и

значение ЦФ $z(x^*_{ЛП}) = z_{max}$ заносится в вершину 0 дерева решений (см. рис. 4.3). Полученное z_{max} – это верхняя граница оптимального значения задачи ЦЛП.

2. Выбирается переменная, имеющая нецелое значение, по которой будет производиться ветвление. В случае, если решение имеет несколько дробных переменных, необходимо применять правило выбора переменной. Одно из обычно применяемых правил – это выбор переменной, имеющей наибольшую дробную часть. Другой способ выбора – по переменной, имеющей максимальное значение коэффициента c_j в ЦФ. Можно применять любое из правил, однако в ходе решения рекомендуется придерживаться одного из них.

3. Пусть x_S – выбранная переменная с дробным значением, тогда текущая вершина ветвится на две новые вершины, каждая из которых соответствует двум задачам:

- первая задача (ЛП1) образуется путем добавления в предыдущую модель нового ограничения вида $x_S \le [x_S]$;
- вторая задача (ЛП2) – ограничения $x_S \ge [x_S] + 1$.

Здесь $[a]$ – это *целая часть числа a*, т. е. наибольшее целое, не превышающее *a*. Например, [27,6] = 27, [–0,8] = –1.

4. Решаются две вновь полученные задачи ЛП1 и ЛП2. Если получено допустимое (целочисленное) решение, то значение целевой функции в этой точке запоминается (или в дальнейшем обновляется) как $z_н$ (так называемая *нижняя граница*). Это очень важная для дальнейших расчетов характеристика, она показывает в текущих расчетах значение, которого может достигнуть целевая функция при поиске максимального целочисленного решения.

5. Выбирается вершина для ветвления. Для этого вершины в дереве проверяются на «прозондированность». *Вершина считается прозондированной*, если решение задачи ЛП для соответствующей вершины привело к какому-либо из следующих результатов:

- *получено целочисленное решение*;
- *задача ЛП не имеет решений*;
- *значение ЦФ меньше текущей нижней границы* $z_н$ (что означает, что множество целочисленных решений, которые мы можем получить, если будем и дальше исследовать эту ветвь дерева решений, заведомо будут хуже того, которое имеет значение целевой функции, равное $z_н$, т. е. искать в этом направлении оптимальное решение бессмысленно).

Определив непрозондированные вершины, выбираем любую из них для ветвления. Обычно, если их несколько, то выбирают вершину с максимальным значением $z(x)$ (при решении задачи на max).

6. Шаги 2–5 повторяются до тех пор, пока все вершины в дереве не будут прозондированы. В качестве *оптимального целочисленного решения* принимается то решение задачи ЛП из всех полученных, которое является целочисленным и которому соответствует максимальное значение целевой функции.

Рассмотрим решение задачи ЦЛП методом ветвей и границ на примере, приведенном в разделе 4.2:

$$\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 \to \max; \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20; \\ 4x_1 - x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, \text{целые}. \end{cases}$$

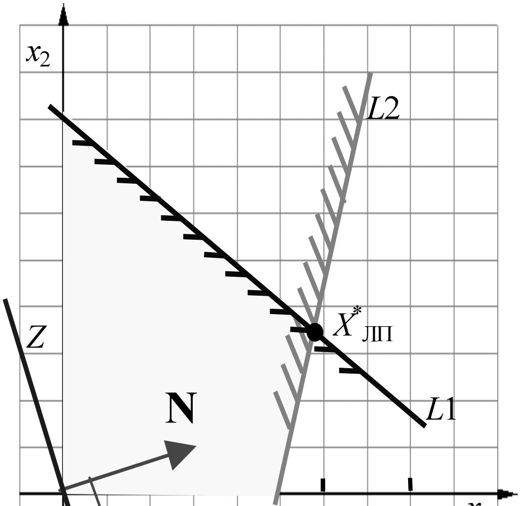


Рис. 4.2. Решение задачи ЛП0

Согласно описанному порядку решения в первую очередь решается исходная задача ЛП без ограничений на целочисленность (рис. 4.2):

$$(\text{ЛП0})\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 \to \max \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 & L1 \\ 4x_1 - x_2 \le 10 & L2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ответ: $X^*_{\text{ЛП0}} = \left(2\frac{11}{12}, 1\frac{2}{3}\right)$, $z(X^*_{\text{ЛП0}}) = 10\frac{5}{12}$.

Ход решения отражен на дереве решений, приведенном на рис. 4.3. Полученное решение задачи ЛП0 занесено в вершину 0.

Согласно второму шагу выбираем переменную для ветвления. Будем использовать правило выбора координаты по максимальному коэффициенту в целевой функции. У первой переменной коэффициент 3, а у второй – 1. Поэтому для ветвления выбираем переменную x_1, которая в оптимальном плане равна $2\frac{11}{12}$.

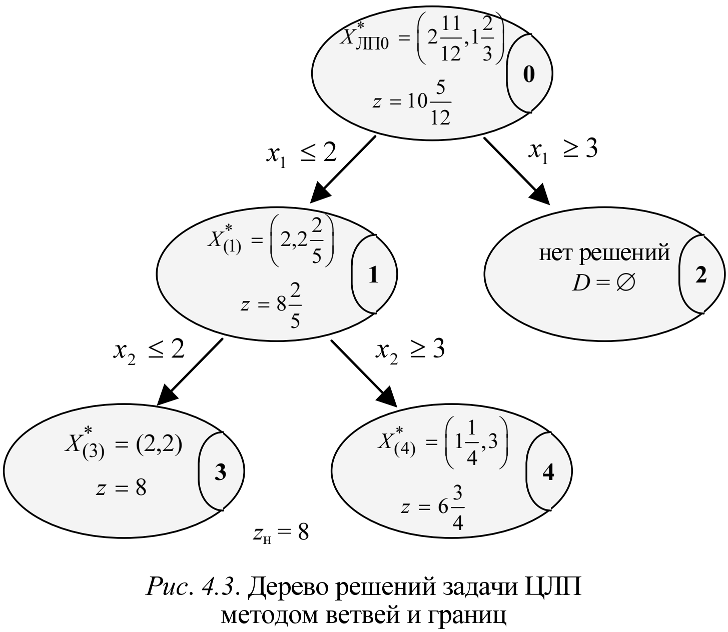


Рис. 4.3. Дерево решений задачи ЦЛП методом ветвей и границ

Согласно третьему шагу формируем задачу ЛП1, добавив к задаче ЛП0 ограничение $x_1 \le 2$:

$$(\text{ЛП1})\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 \to \max \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 & L1 \\ 4x_1 - x_2 \le 10 & L2 \\ x_1 \le 2 & L3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение задачи ЛП1 графическим методом проиллюстрировано на рис. 4.4.

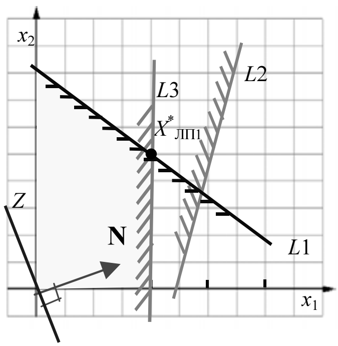


Рис. 4.4. Решение задачи ЛП1

Ответ к задаче ЛП1: $X^*_{\text{ЛП1}} = \left(2,\ 2\frac{2}{5}\right)$, $z(X^*_{\text{ЛП1}}) = 8\frac{2}{5}$.

Согласно третьему шагу формируем задачу ЛП2, добавив к задаче ЛП0 ограничение $x_1 \ge 3$:

$$(\text{ЛП2})\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 \to \max \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 & L1 \\ 4x_1 - x_2 \le 10 & L2 \\ x_1 \ge 3 & L3 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение задачи ЛП2 графическим методом проиллюстрировано на рис. 4.5.

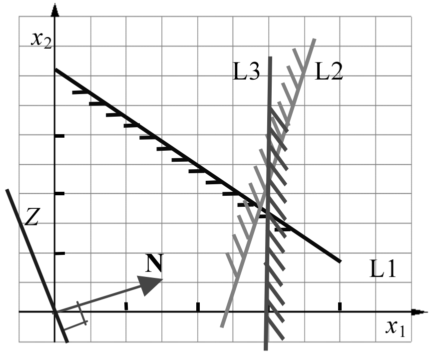


Рис. 4.5. Решение задачи ЛП2

Ответ к задаче ЛП2: нет решений вследствие несовместности ограничений.

Вершина 2 (см. рис. 4.3), соответствующая задаче ЛП2, прозондирована, т. е. далее не решается, так как эта задача не имеет решений, а вершина 1 не прозондирована и должна быть подвергнута дальнейшему ветвлению.

Решение задачи ЛП1 имеет только одну нецелую переменную x_2, поэтому ветвление производится по второй переменной. Формируем задачи ЛП3 и ЛП4.

Задача ЛП3 имеет следующий вид:

$$
(\text{ЛП3})\begin{cases}
z = 3x_1 + x_2 \to \max & \\
4x_1 + 5x_2 \le 20 & L1 \\
4x_1 - x_2 \le 10 & L2 \\
x_1 \le 2 & L3 \\
x_2 \le 2 & L4 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 &
\end{cases}
$$

Решение задачи ЛП3 графическим методом проиллюстрировано на рис. 4.6.

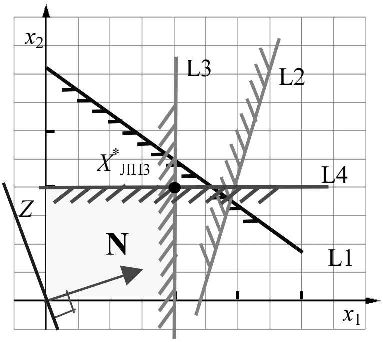


Рис. 4.6. Решение задачи ЛП3

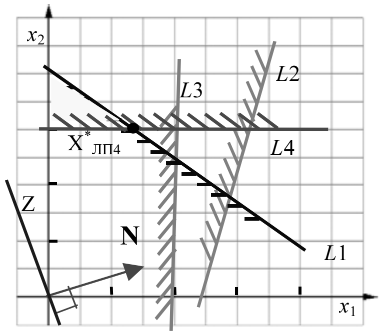


Рис. 4.7. Решение задачи ЛП4

Ответ к задаче ЛП3: $X^*_{ЛП3} = (2, 2), z(X^*_{ЛП3}) = 8$.

Вершина 3 прозондирована, так как получено целочисленное решение. Запоминаем значением ЦФ в данной вершине как значение нижней границы, т. е. $z_н = 8$ (см. рис. 4.3).

Задача ЛП34 имеет следующий вид:

$$(ЛП4)\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 \to \max & \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 & L1 \\ 4x_1 - x_2 \le 10 & L2 \\ x_1 \le 2 & L3 \\ x_2 \ge 3 & L4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

Решение задачи ЛП4 графическим методом проиллюстрировано на рис. 4.7.

Ответ к задаче ЛП4: $X^*_{ЛП4} = \left(1\frac{1}{4}, 3\right), z(X^*_{ЛП4}) = 6\frac{3}{4}$.

Вершину 4 (см. рис. 4.3) тоже можно считать прозондированной, так как значение ЦФ $z(X^*_{ЛП4}) = 6\frac{3}{4}$ меньше, чем значение нижней границы $z_н = 8$.

Таким образом, все вершины в дереве решений (см. рис. 4.3) прозондированы, следовательно, решение методом ветвей и границ закончено.

Полученное при решении всех задач ЛП (ЛП1–ЛП4) единственное целочисленное решение, соответствующее вершине 3 на рис. 4.3, является окончательным решением задачи.

Ответ к исходной задаче: $X^*_{\text{ЦЛП}} = (2,2),\ z(X^*_{\text{ЦЛП}}) = 8$.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие области допустимых решений задач ЛП от области допустимых решений задач целочисленного линейного программирования?
2. Какой метод эффективнее для задач ЦЛП: ветвей и границ или простого перебора? Почему?
3. Какие вершины называются «прозондированными» в методе ветвей и границ для задач ЦЛП?
4. Какие существуют принципы выбора координат вектора для продолжения ветвления в дереве решения при решении методом ветвей и границ?
5. Какие существуют принципы выбора вершины для продолжения ветвления в дереве решения при решении методом ветвей и границ?
6. Почему методы ветвей и границ иногда называют методами возврата? В каком случае эффективность метода ветвей и границ для ЦЛП становится практически равной эффективности метода простого перебора?

ГЛАВА 5

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

5.1. Постановка задачи векторной оптимизации

Все рассмотренные в предыдущих разделах оптимизационные задачи имели всего один критерий оптимальности, а описывающие их модели были ***однокритериальными***. Теория моделирования однокритериальных задач оптимизации и их решения представляет собой предмет рассмотрения математического программирования и достаточно глубоко проработана.

В реальных задачах выбора наиболее предпочтительного решения, как правило, имеется несколько критериев оптимальности. Можно привести много примеров, когда требуется выбрать решение, руководствуясь одновременно сразу несколькими критериями. Наиболее распространенная задача, которую мы решаем очень часто (не облекая ее в термины оптимизации), – это поиск с целью покупки продуктов или товаров, с одной стороны, как можно более качественных, а с другой стороны, наиболее дешевых.

Задачи выбора некоторого решения из множества допустимых решений с учетом нескольких критериев оптимальности называют ***многокритериальной задачей оптимизации***.

Многокритериальные задачи широко распространены в техническом проектировании, например задача проектирования компьютера с максимальным быстродействием, максимальным объемом оперативной памяти и минимальным весом или задача проектирования электрического двигателя с максимальной мощностью, максимальным коэффициентом полезного действия, минимальным весом и минимальными затратами электротехнической стали (естественно, при ограничениях на необходимые параметры проектируемых устройств). Также широко распространены реальные многокритериальные управленческие задачи. Лозунг экономики СССР 1980-х годов «Максимум качества при минимуме затрат», несмотря на его одиозность, выражал сущность большинства проблем управления.

Под *многокритериальной задачей* зачастую понимают не собственно вербальное описание задачи, а *ее модель*. Таким образом, «*многокритериальная задача – математическая модель принятия оптимального решения по нескольким критериям*. Эти критерии могут отражать оценки различных качеств объекта или процесса, по поводу которых принимается решение»*.

Формально многокритериальная задача как модель задается в виде

$$\begin{cases} F(x) \to \max, \\ x \in D. \end{cases} \tag{5.1}$$

Здесь $D \subset E^n$ – множество допустимых решений; $F(x)$ – векторная функция векторного аргумента $\boldsymbol{x}$, которую можно представить как $F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}$, где $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ – скалярные функции векторного аргумента $\boldsymbol{x}$, каждая из которых является математическим выражением одного критерия оптимальности. Так как в данной модели используется векторная целевая функция, ее зачастую называют *задачей векторной оптимизации*. Очевидно, что задача (5.1) не принадлежит классу задач математического программирования, так как модели этого класса задач содержат всегда только одну скалярную целевую функцию векторного аргумента.

Иначе задачу (5.1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} f_1(x) \to \max; \\ f_2(x) \to \max; \\ \ldots \\ f_k(x) \to \max; \\ x \in D \subset E^n. \end{cases}$$

Сущность поставленной задачи состоит в нахождении такого ее допустимого решения, т. е. $\{x \in D\}$, которое в том или ином смысле максимизирует (минимизирует) значения всех целевых функций $f_i(x)$, где $i = 1, k$. Решение, буквально максимизирующее одновременно все целевые функции, – редкое исключение. (Если вспомнить пример о поиске одновременно очень качественной, при этом самой дешевой покупки, то становится понятным, что нахождение такого решения – редкая удача, но гораздо чаще – неразрешимая задача.)

---

* Математическая энциклопедия. – М.: Сов. энциклопедия, 1982. – Т. 3.

Отсюда следует, что принципиальным моментом при решении такого рода задач является предварительная договоренность о том, *что считать самым предпочтительным решением*, т. е. надо договориться об используемом *принципе оптимальности*. Ранее используемый принцип оптимальности «хорошо то, что доставляет наибольшее (наименьшее) значение имеющемуся единственному критерию оптимальности», в многокритериальных задачах, очевидно, «не работает».

Задача векторной оптимизации в общем случае не имеет строго математического решения. Для получения того или иного ее решения необходимо использовать дополнительную субъективную информацию специалиста в данной предметной области, которого принято называть *лицом*, *принимающим решение* (ЛПР), в английском языке – decision maker. Это означает, что при решении задачи разными специалистами с привлечением различных источников информации скорее всего будут получены неодинаковые ответы.

Задачи векторной оптимизации в настоящее время принято рассматривать в рамках ***теории принятия решений****. Основная особенность таких задач – наличие неопределенности. Эта неопределенность не может быть исключена с помощью различных приемов моделирования и объективных расчетов. В многокритериальных задачах неопределенность состоит в том, что неизвестно, какому критерию отдать предпочтение и в какой степени. Для устранения этой неопределенности необходимо сформулировать специальный принцип оптимальности, а также привлечь дополнительную субъективную информацию ЛПР, основанную на его опыте и интуиции.

5.2. Основные определения теории векторной оптимизации. Принцип Парето

Введем несколько определений.

Оптимальное решение многокритериальной задачи x_i^* называется *субоптимальным решением* по критерию $f_i(x)$, если оно найдено по какому-либо одному критерию (i-му) без учета остальных. (Например, самый дешевый товар из рассматриваемых – субоптимальное решение

* «Теория принятия решений – это самостоятельное научное направление, возникшее на базе исследования операций, кибернетики, искусственного интеллекта и имеющее свои, отличные от прочих направлений задачи и свою логику развития» (*О.И. Ларичев*).

по критерию наименьшей цены, а самый качественный товар – субоптимальное решение по критерию максимума качества.)

Пусть решается задача (5.1) и есть $x', x'' \in D$ – допустимые решения данной задачи. Говорят, что x' – *более предпочтительное решение по сравнению* с x'', если $f_i(x') \geq f_i(x'')$ $\forall\, i = \overline{1, k}$, причем $\exists$ i_0 такой, что $f_{i_0}(x') > f_{i_0}(x'')$. Другими словами, будем считать, что решение x' более предпочтительно по сравнению с решением x'', если оно *не хуже* x'' по всем рассматриваемым критериям, причем среди всех критериев есть хотя бы один критерий с номером i_0, для которого решение x' *лучше*, чем x''.

Некоторое решение $x^* \in D$ задачи (5.1) называется ***эффективным решением*** данной задачи, если для него не существует более предпочтительных решений. Иначе можно сказать, что эффективным решением называется такое решение x^*, которое нельзя улучшить по какому-либо из критериев, не ухудшив при этом значения других критериев.

Множество эффективных решений называется ***множеством Парето***[*] и обозначается $P(D)$. Очевидно, множество Парето является подмножеством множества допустимых решений, которое в свою очередь принадлежит n-мерному векторному пространству, т. е. $P(D) \subset \subset D \subset E^n$.

Вектор значений критериев, вычисленных для эффективного решения $F(x^*)$, называется ***эффективной оценкой***. Совокупность всех эффективных оценок, т. е. образ множества Парето в пространстве критериев, называется ***множеством эффективных оценок*** и, как правило, обозначается как $F(P)$. Множество эффективных оценок является подмножеством образа множества допустимых решений в пространстве критериев $F(D)$, которое в свою очередь является подмножеством k-мерного векторного пространства, т. е. $F(P) \subset F(D) \subset E^k$. Можно сказать, что множеству Парето P, принадлежащему множеству допустимых решений D, с помощью векторной функции F сопоставляется множество эффективных оценок $F(P)$.

---

[*] Вильфредо Парето (Pareto) – итальянский экономист и социолог (1848–1923). Для обоснования экономических законов использовал математические модели.

Решение $x' \in D$ называется ***слабоэффективным решением*** задачи (5.1), если для него не существует решения x'' такого, что $\forall\, i=1, k$,

$$f(x') > f(x''),$$

другими словами, слабоэффективное решение – решение, которое не может быть улучшено одновременно по всем критериям.

Очевидно, что множество Парето является подмножеством множества слабоэффективных решений, т. е. $P(D) \subset S(D) \subset D \subset E^n$. Введение понятия *слабоэффективных решений* вызвано тем, что в процессе оптимизации часто получаются решения, принадлежащие $S(D)$ (множеству слабоэффективных решений), но не являющиеся эффективными. Такие решения представляют, конечно, меньший интерес по сравнению с эффективными.

Принцип Парето. Смысл введенного понятия эффективного решения состоит в том, что оптимальное решение следует искать только среди элементов множества Парето – множества $P(D)$. В противном случае всегда найдется точка x, оказывающаяся более предпочтительной независимо от расстановки приоритетов и относительной важности отдельных частных критериев.

Принцип Парето позволяет сузить класс возможных претендентов на окончательное решение и исключить из рассмотрения заведомо неконкурентоспособные варианты. А окончательный выбор осуществляется на основе дополнительной информации о предпочтении лица, принимающего решения.

Рассмотрим введенные понятия на примере.

Пример 5.1

$F(x) = \{3x_1 - x_2;\, x_2\} \to \max,$

т. е.

$f_1(x) = 3x_1 - x_2 \to \max;$

$f_2(x) = x_2 \to \max;$

$x_1 \le 2;$

$x_2 \le 4;$

$2x_1 + x_2 \le 6;$

$x_j \ge 0.$

С помощью графического метода найдем субоптимальные решения задачи (рис. 5.1). По критерию f_1 – это точка $E(2,0)$, $f_1(E) = 6$. По критерию f_2 субоптимальные точки – это точки отрезка, соединяющего точки $C(0, 4)$ и $B(1, 4)$,], при этом $f_2(C) = f_2(B) = 4$.

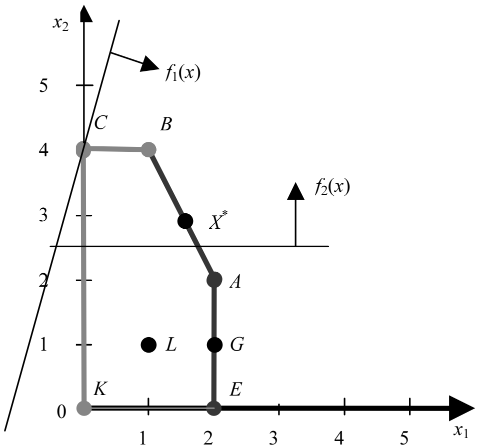


Рис. 5.1. Иллюстрация решения задачи в пространстве решений (в пространстве координат решений):
BAE – множество Парето

В табл. 5.1 даны значения целевых функций $f_1(x) = 3x_1 - x_2$ и $f_2(x) = x_2$ для всех точек, обозначенных на рис. 5.1. На основании данных, приведенных в табл. 5.1, построен рис. 5.2.

Таблица 5.1

Анализ точек множества *D* примера 5.1 на принадлежность множеству Парето

$X \in D$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	Примечание	Свойство решения	$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$
$A(2,2)$	4	2	Не улучшаемые точки	$\in P(D)$	0,2	0,5
$B(1,4)$	–1	4	>>	$\in P(D)$	0,7	0
$G(2,1)$	5	1	>>	$\in P(D)$	0,1	0,75
$E(2,0)$	6	0	>>	$\in P(D)$	0	1
$C(0,4)$	–4	4	Улучшаемая по 1-му критерию	$\in S(D) \notin P(D)$	1	0
$K(0,0)$	0	0	Одновременно улучшаемая по обоим критериям	$\notin P(D)$, $\notin S(D)$	0,6	1
$L(1,1)$	2	1			0,4	0,75

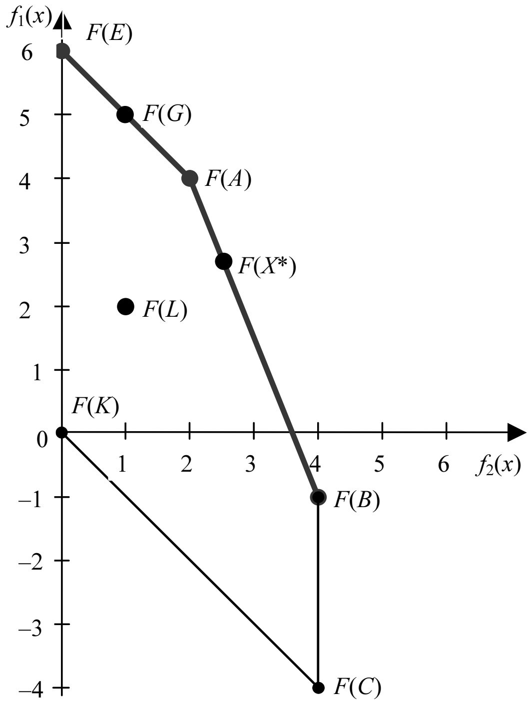


Рис. 5.2. Иллюстрация решения задачи
в пространстве критериев:
$F(E)F(A)F(B)$ – множество эффективных оценок

Полученный многоугольник $F(C)F(K)F(E)F(A)F(G)F(B)$ является отображением многоугольника допустимых решений примера *CKEAGB* в пространстве критериев.

5.3. Нормализация критериев

Зачастую целевые функции $f_i(x)$ имеют различную размерность и их необходимо свести к безразмерному виду с помощью какого-нибудь преобразования. Это преобразование должно удовлетворять следующим критериям:

- иметь общее начало отсчета и один порядок изменения значений на всем множестве допустимых решений;

- быть монотонным преобразованием, так как должно сохранять отношение предпочтения на множестве D, т. е. не менять множество Парето;
- учитывать необходимость минимизации отклонения от оптимальных значений по каждой целевой функции.

Обыкновенно для получения нормализованных критериев $\omega_i(x)$ для критериев вида $f_i(x) \to \max$ в качестве таких преобразований $W_i(f_i(x))$ используют следующие:

$$W_i(f_i(x)) = \omega_i(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}\right]^{\mu} \in [0,1], \\ \left[\dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max}}\right]^{\mu} \in [0,1], \end{cases}$$

где $\mu = 1, 2$, причем, как правило, полагают $\mu = 1$; $f_i^{\max}$, $f_i^{\min}$ – наибольшее и наименьшее значения i-го критерия (наибольшая и наименьшая эффективные оценки) соответственно. Нужно учитывать, что $\omega_i(x) \to \min$, так как в этом случае минимизируется разность между искомым решением и субоптимальным.

Пример 5.1 (продолжение 1)

Если принять преобразование для нормализации критериев вида

$$W_i(f_i(x)) = \omega_i(x) = \left\{ \left[\dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}\right]^{\mu} \in [0,1], \right.$$

то первый нормализованный критерий получается в виде

$$W[f_1(x)] = \omega_1(x) = \frac{6 - 3x_1 + x_2}{6 - (-4)} = 0{,}6 - 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 .$$

И тогда можно рассчитать значение первого нормализованного критерия в наилучшей и наихудшей точках по критерию f_1:

$$\begin{cases} \omega_1(E=(2,0)) = \omega_1^{\min} = 0,6 - 0,6 = 0; \\ \omega_1(C=(0,4)) = \omega_1^{\max} = 0,6 + 0,4 = 1. \end{cases}$$

Второй нормализованный критерий получается в виде

$$\omega_2(x) = \frac{4 - x_2}{4 - 0} = 1 - 0,25x_2 .$$

А значение второго нормализованного критерия в наилучшей и наихудшей точках по критерию f_2 выглядит так:

$$\begin{cases} \omega_2^{\min} = \omega_2(B(1,4)) = 4 - 4 = 0; \\ \omega_2^{\max} = \omega_2(K) = 1. \end{cases}$$

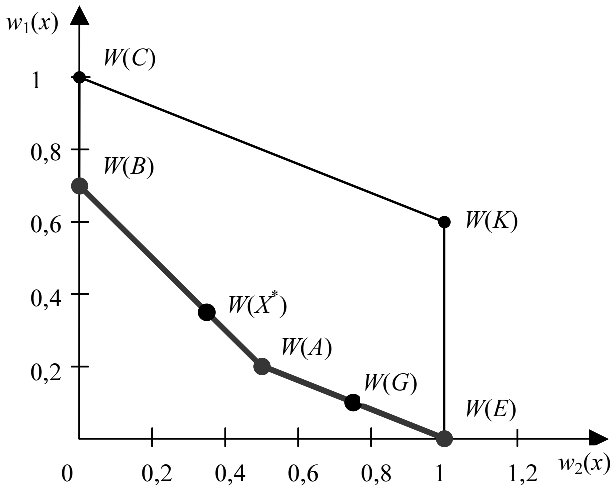


Рис. 5.3. Иллюстрация процесса решения примера 5.1 в пространстве нормализованных критериев:

$W(B)W(A)W(E)$ – множество эффективных нормализованных оценок

График, построенный по значениям нормализованных критериев, вычисленных для вышеперечисленных точек (табл. 5.1), представлен на рис. 5.3. Нижняя ломаная полученного многогранника есть множество нормализованных эффективных оценок.

5.4. Решение многокритериальных задач методом ограничений. Компромиссное решение

Недостаток принципа Парето в том, что в качестве решения он предлагает множество решений, что не всегда приемлемо. Для того чтобы выбрать из этого множества решений единственное, нужны какие-то дополнительные сведения, предположения, договоренность о том, что же считать наилучшим решением (некоторая дополнительная неформальная информация).

Один из возможных подходов предлагает считать наилучшим такое решение, при котором величина отклонений от оптимальных значений по каждой целевой функции $\Delta f_i(x) = f_i^{\max} - f_i(x) \quad \forall i = 1, k$ достигает своего минимального значения. Для преобразованных функций это такое решение, при котором $\omega_i(x) \to \min$. Но наименьшие значения величин $\Delta f_{\mathrm{i}}(x)$ или $\omega_i(x)$, как правило, не достигаются одновременно ни для какого решения из D; т. е. нельзя подобрать такое допустимое решение $x \in D$, чтобы все $f_i(x)$ одновременно достигали своего максимального значения или (что эквивалентно) чтобы $\Delta f_i(x)$, а также $\omega_i(x)$ достигали своего минимального значения $\forall i = 1, k$.

Поэтому нужны некоторые дополнительные процедуры для отыскания какого-то единственного представителя из множества Парето. Специфика решения таких задач состоит в том, что сам выбор метода нахождения окончательного решения в какой-то степени основан на предположениях ЛПР, т. е. на субъективной информации.

Метод ограничений, рассматриваемый в данном разделе, предназначен для отыскания так называемого *компромиссного решения*, *т. е. такого эффективного решения*, *для которого взвешенные относительные потер*и (потери в смысле разности возможного наилучшего значения целевой функции и значения этой функции для данного – компромиссного решения) *минимальны и равны между собой.*

Метод ограничений основан на теореме: если x_0 – эффективное решение для данного вектора предпочтений ρ, то ему соответствует наименьшее значение δ, при котором система равенств

$$\rho_i \omega_i(x_0) = \delta \text{ выполняется для всех } i = \overline{1, k}. \qquad (5.2)$$

При этом под *вектором предпочтений* $\rho = \{\rho_i\}$ понимается некоторый вектор весовых коэффициентов. Как правило, на него накладываются ограничения $\rho_i \geq 0, = 1 \sum \rho_i = 1$. С помощью весовых коэффициентов ЛПР задаются определенные предпочтения (значимость) целевых функций (критериев) друг перед другом, выраженные в количественной шкале. (Например, если принять $\rho_1 = \frac{2}{3}$ и $\rho_2 = \frac{1}{3}$, то это означает, что, по информации ЛПР, первый критерий в 2 раза значимее второго.)

Очевидно, что компромиссное решение – это такое эффективное решение x_0, которое обеспечивает минимальное значение параметра δ, при котором система (5.2) совместна.

Если в качестве решения задачи (5.1) мы хотим принять *компромиссное решение* с заданным вектором предпочтений, то оно может быть найдено как единственное решение системы неравенств вида

$$\rho_i \omega_i(x_0) \leq \delta \quad \forall i = 1, k$$

для минимального значения параметра δ, при котором эта система совместна. И метод отыскания эффективного решения, основанный на этом положении, называется ***методом ограничений***. Этот метод предполагает необходимость решения вспомогательной минимаксной задачи

$$\begin{cases} \max\limits_i \rho_i \omega_i(x) \to \min\limits_x; \\ x \in D. \end{cases} \tag{5.3}$$

Для того чтобы не использовать минимаксный (нелинейный) критерий, вспомогательную задачу (5.3) можно преобразовать в адекватную задачу (5.4), но уже с линейной целевой функцией:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta \to \min; \\ \rho_i \omega_i(x) \leq \delta, \; i = 1, k; \\ x \in D, \; \delta \geq 0. \end{array}\right\} \tag{5.4}$$

Если исходная задача (5.1) является задачей линейного программирования, т. е. представлена с помощью линейных целевых функций и линейных функций-ограничений, то и вспомогательная задача (5.4) очевидно будет задачей ЛП:

$$\begin{cases} \delta \to \min; \\ \rho_i \omega_i(x) \le \delta, i = 1, k; \\ Ax \le b; \\ x \ge 0,\ \delta \ge 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Пример 5.1 (**продолжение 2**)

Выше были построены нормализованные критерии для целевых функций примера 5.1, а именно: $\omega_1(x) = 0{,}6 - 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2$, $\omega_2(x) = 1 - 0{,}25x_2$. Тогда система вновь введенных ограничений вспомогательной задачи (5.5)

$$\begin{cases} \rho_1 \omega_1(x) \le \delta \\ \rho_2 \omega_2(x) \le \delta \end{cases} \text{ при } \rho = (0{,}5; 0{,}5)$$

будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6 - 3x_1 + x_2}{10}\right) \le \delta; \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4 - x_2}{4}\right) \le \delta. \end{cases}$$

Следовательно, вспомогательная задача для этого примера представляет собой задачу ЛП с тремя неизвестными и пятью функциональными ограничениями:

$$\begin{cases} \delta \to \min; \\ -3x_1 + x_2 - 20\delta \le -6; \\ -x_2 - 8\delta \le -4; \\ x_1 \le 2; \\ x_2 \le 4; \\ 2x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1, x_2, \delta \ge 0. \end{cases}$$

Для решения вспомогательной задачи строим симплекс-таблицы:

Итерация № 1	$-x_1$	$-x_2$	$-\delta$	1
$y_1 =$	–3	1	–20	–6
$y_2 =$	0	–1	–8	–4
$y_3 =$	1	0	0	2
$y_4 =$	0	1	0	4
$y_5 =$	2	1	0	6
Z	0	0	1	0

Итерация № 2	$-y_1$	$-x_2$	$-\delta$	1
$x_1 =$	–1/3	–1/3	20/3	2
$y_2 =$	0	–1	–8	–4
$y_3 =$	1/3	1/3	-20/3	0
$y_4 =$	0	1	0	4
$y_5 =$	2/3	5/3	–40/3	2
Z	0	0	1	0

Итерация № 3	$-y_1$	$-y_2$	$-\delta$	1
$x_1 =$	–1/3	–1/3	28/3	10/3
$x_2 =$	0	–1	8	4
$y_3 =$	1/3	1/3	–28/3	–4/3
$y_4 =$	0	1	–8	0
$y_5 =$	2/3	5/3	–80/3	–14/3
Z	0	0	1	0

Итерация № 4	$-y_1$	$-y_2$	$-y_5$	1
$x_1 =$				17/10
$x_2 =$				26/10
$y_3 =$				3/10
$y_4 =$				14/10
$\delta =$				7/40
Z	1/40	5/80	3/80	–7/40

Анализ полученного результата. Оптимальное решение вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} x_1^* = 1{,}7, \\ x_2^* = 2{,}6, \end{cases} \quad \delta^* = 0{,}175.$$

Нетрудно убедиться в том, что полученное *решение* x^* *эффективное* (по теории метода ограничений это решение эффективно по построению). Этот факт иллюстрируется графиком на рис. 5.1. (Если рассчитать $F(x^*)$ и $W(x^*)$, то на графике рис. 5.2 можно показать принадлежность $F(x^*)$ множеству эффективных оценок, а на графике рис. 5.3 – принадлежность $W(x^*)$ $W(x^*)$ множеству нормализованных эффективных оценок.)

Можно показать также, что полученное решение x^* есть не только эффективное, но и *компромиссное решение* в смысле *равенства* относительных взвешенных потерь по всем критериям между собой. Действительно,

$$\begin{cases} \rho_1\omega_1(M) = 0,5\left(\dfrac{6-3\cdot 1,7+2,6}{10}\right) = 0,175 = \delta^*, \\ \rho_2\omega_2(M) = 0,5\cdot\dfrac{1}{4}(4-2,6) = 0,175 = \delta^*. \end{cases}$$

5.5. Решение многокритериальных задач методом уступок

Если лицо, принимающее решение, располагает информацией, которая позволяет ему расположить критерии оптимальности в порядке убывающей важности, то для отыскания решения исходной задачи можно использовать так называемые ***методы мажоритарного типа*** (имеется в виду, что критерии упорядочены по своей значимости, т. е. промажорированы). В этой группе методов наиболее известен ***метод уступок*** [3].

Рассмотрим его более подробно. Предположим, что наиболее значим первый критерий, задаваемый целевой функцией $f_1(x)$, затем по порядку следуют критерии второй, третий и т. д., т. е. $f_2(x)$, $f_3(x)$, … . Приведем все критерии к одному типу, например, будем считать, что каждый из них нужно обратить в максимум (если это не так, изменим знак целевой функции на противоположный).

Процедура построения решения, наиболее предпочтительного для лица, принимающего решение, сводится к следующему. Сначала ищется субоптимальное решение (см. раздел 5.2) исходной задачи по наиболее значимому критерию – первому. То есть необходимо решить обычную однокритериальную задачу и найти значение $f_1^* = f_1(x_1^*)$, где x_1^* – субоптимальное решение по первому критерию. Затем исходя из практических соображений назначается некоторая «уступка» Δf_1, которую ЛПР согласно допустить для того, чтобы максимизировать оставшиеся критерии. Иногда для ЛПР проще предположить долю (процент) от максимального значения первого критерия, которой ЛПР согласно поступиться для того, чтобы и другие критерии получили «хорошие» значения, например, уступка составляет 20 % от наилучшего значения первого критерия, т. е. $\Delta f_1 = 0,2 f_1^*$. Определив уступку, наложим на значение первого критерия f_1 ограничение, чтобы оно было не меньше, чем $f_1^* - \Delta f_1$, где f_1^* – максимально возможное значение f_1 (т. е. уступка должна быть все-таки не больше той величины, которую ЛПР согласно уступить), и получим дополнительное ограничение для последующих задач вида: $f_1(x_1) \geq f_1^* - \Delta f_1$. Далее, уже с учетом данного вновь построенного ограничения ищем субоптимальное решение по следующему по значимости критерию, в нашем случае – по второму критерию f_2. Потом снова назначается «уступка» в показателе f_2, ценой которой можно максимизировать f_3, и т. д.

Очевидно, что и в методе уступок задача количественного обоснования решения по нескольким показателям остается не до конца определенной, и окончательный выбор решения определяется на основании субъективной информации лица, принимающего решение. Дело исследователя – предоставить в распоряжение ЛПР необходимые расчеты, позволяющие лицу, принимающему решение, всесторонне оценить преимущества и недостатки каждого варианта решения и, опираясь на них, сделать окончательный выбор.

Но метод уступок хорош тем, что здесь сразу видно, ценой какой «уступки» по одному критерию достигается более хорошее решение по другому критерию. Для лица, принимающего решение, определение уступки, – как правило, более понятная и реальная задача, чем определение коэффициентов предпочтения. (Действительно, наверное, более очевидна формулировка «я согласен уступить 20 % прибыли для повышения качества производимой продукции», чем, например, «коэффициент предпочтения по критерию прибыли равен 0,6, а по критерию качества продукции – 0,4».)

При этом надо отметить, что свобода выбора решения, приобретаемая ценой даже незначительных «уступок», может оказаться существенной, так как в области максимума эффективность решения обычно меняется очень слабо.

Пример 5.1 (продолжение 3)

Предположим, что первый критерий более значим для ЛПР, чем второй. Тогда решается однокритериальная задача для поиска субоптимального решения по первому критерию:

$f_1(x) = 3x_1 - x_2 \to \max;$

$x_1 \leq 2;$

$x_2 \leq 4;$

$2x_1 + x_2 \leq 6;$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2.$

В разделе 5.2 с помощью графического метода уже было найдено субоптимальное решение по первому критерию (см. рис. 5.1) – точка $E = (2, 0)$, причем $f_1(E) = 6$. Отметим, что значение второго критерия в данной точке, равное 0, далеко от наилучшего значения этого критерия, равного 4. Таким образом, полученное решение (точка E) – явно проигрышное решение по второму критерию.

Предположим, что ЛПР согласно на уступку по первому критерию в размере 50 % от максимального значения критерия, т. е. в размере 3 ед.

Построим новую вспомогательную однокритериальную (по второму критерию) задачу с учетом возможности уступки по первому критерию:

$f_2(x) = x_2 \to \max;$

$f_1(x)= 3x_1 - x_2 \geq f^*_1 - \Delta f_1 = 6 - 3 = 3;$

$x_1 \leq 2;$

$x_2 \leq 4;$

$2x_1 + x_2 \leq 6;$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$

Решение полученной задачи – вектор $x^* = (1{,}8;\ 2{,}4)$. Значения критериев в данной точке: $f_1(x^*) = 3x_1^* - x_2^* = 3;\ f_2(x^*) = x_2^* = 2{,}4$.

Если посчитать относительные потери для найденного решения, то значения нормализованных критериев в точке x^*:

$$\begin{cases} \omega_1(x^*) = \omega_1(1{,}8;\ 2{,}4) = 0{,}6 - 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 = \\ \qquad = 0{,}6 - 0{,}3 \cdot 1{,}8 + 0{,}1 \cdot 2{,}4 = 0{,}3; \\ \omega_2(x^*) = \omega_2(1{,}8;\ 2{,}4) = 1 - 0{,}25 \cdot 2{,}4 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4. \end{cases}$$

Очевидно, что по второму критерию относительные потери несколько больше, чем по второму. Но это соответствует информации ЛПР о том, что для него более значимым является первый критерий.

5.6. Метод свертки для решения многокритериальной задачи

Метод свертки, идея которого состоит в построении на основе заданных k целевых функций единой целевой функции, – один из первых в хронологии появления методов решения многокритериальных задач.

Пожалуй, это самый простой, а поэтому наиболее распространенный метод. При внимательном изучении задачи 1.20 «О туризме», приведенной в главе 1, легко заметить, что эта многокритериальная по сути задача сведена к обычной задаче ЛП именно с помощью метода свертки.

Тем не менее определенные свойства метода не всегда позволяют получить адекватное представление об эффективных решениях задачи.

Рассмотрим метод более подробно. В качестве *свертки* для получения единой целевой функции, как правило, используется преобразование вида

$$\Phi(x) = \left[\sum_{i=1}^{k} \rho_i \left(f_i(x) \right)^{\mu} \right]^{\mu}, \tag{5.6}$$

где $\mu = 1{,}2$, а ρ_i – коэффициенты предпочтения. Отметим, что вместо функций $f_i(x)$ в преобразовании (5.6) можно использовать нормализованные критерии $\omega_i(x)$.

Вспомогательная задача выглядит как

$$\begin{cases} \Phi(x) = \left[\sum_{i=1}^{k} \rho_i \left(f_i(x) \right)^{\mu} \right]^{\mu} \to \max; \\ x \in D. \end{cases} \tag{5.7}$$

Если в преобразовании (5.7) принять, что $\mu = 1$, можно получить вспомогательную задачу с *линейной сверткой*:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i f_i(x).$$

Если исходная задача является задачей ЛП, то вспомогательная задача с линейной сверткой также является задачей ЛП и решается методами ЛП:

$$\begin{cases} \Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i f_i(x) \to \max; \\ Ax \le b; \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Решения многокритериальных задач с линейными целевыми функциями и функциями ограничений методом линейной свертки всегда лежат в крайних точках выпуклого многогранника D – множества допустимых решений исходной задачи. Это соответствует теории линейного программирования, из которой известно, что оптимальное решение задачи ЛП всегда лежит в крайней точке множества D. Таким образом, применение метода свертки с использованием линейной функции свертки существенно сужает множество получаемых эффективных решений по сравнению со всем множеством Парето. Изменения коэффициентов предпочтения ρ_i принципиально ситуацию не изменяют.

Как и метод ограничений, метод свертки предполагает использование субъективной информации ЛПР в виде коэффициентов предпочтения. Надо отметить, что при решении реальных задач определение этих коэффициентов представляет собой не простую задачу.

Контрольные вопросы

1. Дайте постановку задачи многокритериальной задачи оптимизации. Что в этой задаче дано? Что надо найти?
2. Почему многокритериальную задачу оптимизации зачастую называют задачей векторной оптимизации?
3. Придумайте задачу многокритериальной оптимизации и запишите соответствующую модель.
4. Поясните понятие «лицо, принимающее решение». Раскройте роль ЛПР при решении многокритериальных задач.
5. Почему для решения многокритериальных задач оптимизации, как правило, необходимо привлекать дополнительную информацию? Почему эту информацию часто называют субъективной?
6. Являются ли элементы множества Парето допустимыми решениями исходной многокритериальной задачи?
7. Совпадают ли размерности множества Парето, множества эффективных оценок и множества нормализованных эффективных оценок?
8. Поясните понятие компромиссного решения, получаемого методом ограничений? В чем состоит компромисс? Является ли компромиссное решение эффективным?
9. Какую дополнительную информацию ЛПР предлагается использовать при применении метода ограничений, метода уступок и метода свертки?
10. Какие вы видите преимущества и недостатки перечисленных в предыдущем вопросе методов?

ГЛАВА 6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЕ В MS EXCEL

6.1. Настройка MS Excel 2007

Для решения задач ЛП в MS Office Excel 2007 необходима надстройка «Поиск решения». Для ее установки последовательно нажмите кнопку «Office» и затем «Параметры Excel». В открывшемся окне выберите раздел «Надстройки» и кнопку «Перейти…» (рис.6.1). Подключите «Поиск решения» (рис. 6.2) и эта возможность появится в меню Данные.

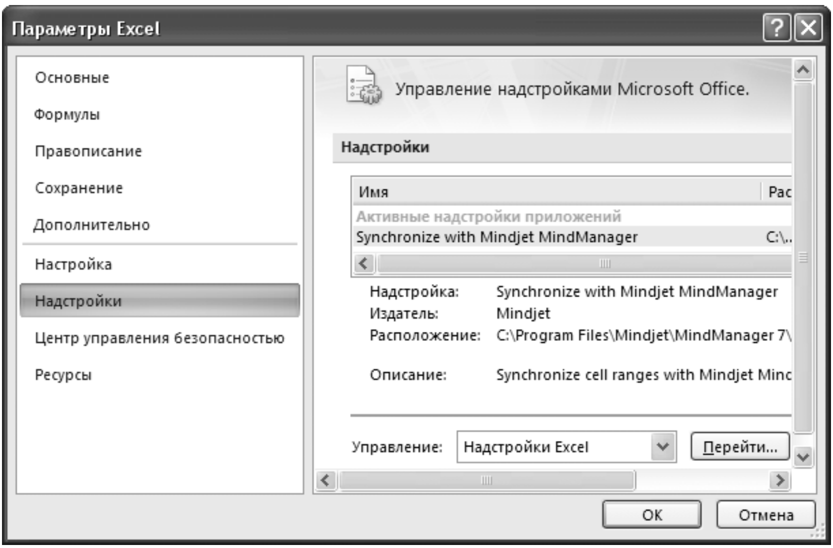


Рис. 6.1. Окно «Надстройки Excel»

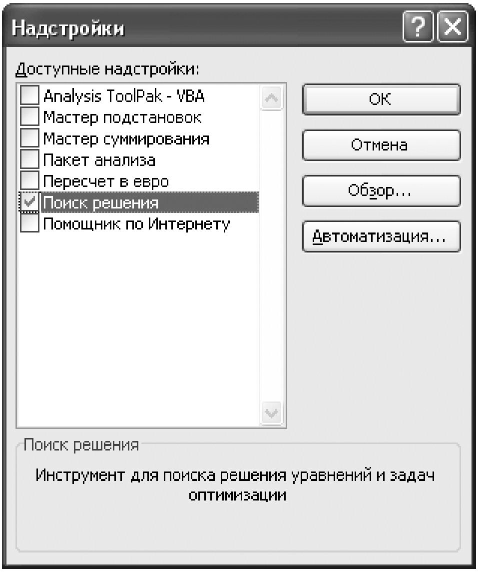


Рис. 6.2. Окно «Надстройки»

6.2. Подготовка листа с исходными данными

Пример 6.1

Пусть необходимо решить задачу ЛП

$$\begin{cases} z = 4x_1 + 2x_2 \to \max; \\ x_1 - 4x_2 \le 2; \\ x_1 + x_2 \le 2,5; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

На рис. 6.3 дано изображение окончательно оформленного листа с исходными данными, подготовленными для расчета.

Порядок заполнения листа

1. Задаем область под переменные. Для нашего примера под x_1 и x_2 отведем ячейки B7 и C7 соответственно (рис. 6.3). В эти ячейки можно занести начальные значения переменных. В соседние ячейки вводим наименование переменной (см. A7).

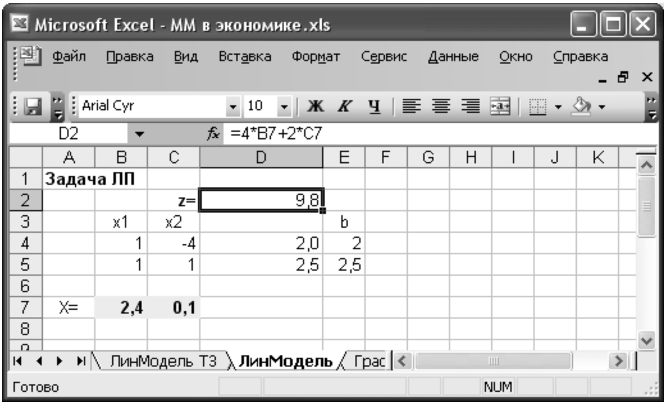


Рис. 6.3. Лист с исходными данными

2. Задаем первое ограничение:

- в ячейки В4 и С4 заносим коэффициенты ограничения a_{1j}, т. е. коэффициенты первого ограничения при соответствующих переменных;
- в ячейку Е4 заносим свободный член b_1, равный 2;
- в D4 задаем формулу вычисления левой части: = B4*B7+C4*C7.

3. Аналогично задаем остальные ограничения.

4. Задаем целевую функцию. В ячейку D2 заносим формулу вычисления целевой функции: = 4*B7+2*C7.

6.3. Установка данных для пакета «Поиск решения»

Запускаем пакет «Поиск решения» (рис. 6.4).

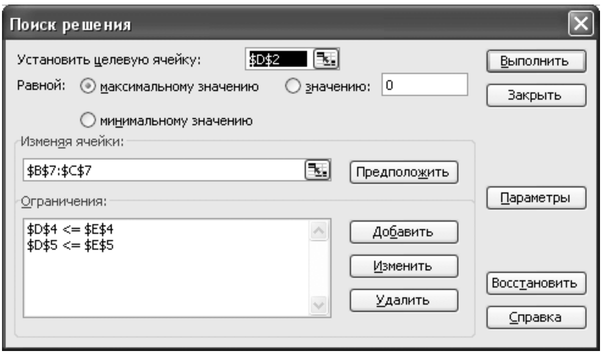


Рис. 6.4. Данные для запуска пакета «Поиск решения»

В открывшемся окне задаем данные для решения задачи:

- в поле «Изменяя ячейки» – диапазон ячеек, отведенный под переменные;
- в поле «Установить целевую ячейку» – адрес ячейки, в которой вычисляется ЦФ;
- выбрать тип ЦФ – к максимуму или минимуму;
- ввести ограничения в нижней части окна. Для того чтобы ввести каждое новое ограничение, необходимо нажать кнопку «Добавить». В открывшемся окне (рис. 6.5) в первом поле задается ячейка, в которой вычисляется левая часть ограничения – $D$4, во втором поле – знак ограничения, в третьем поле – адрес ячейки со свободным членом.

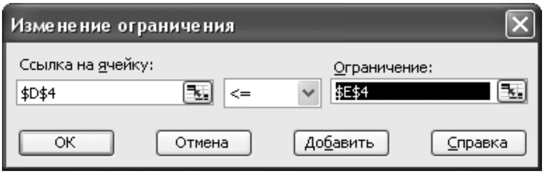


Рис. 6.5. Ввод ограничений

После того как введем все данные, устанавливаем настройки пакета «Поиск решения», нажав кнопку «Параметры». В открывшемся окне устанавливаем параметры «Линейная модель» и «Неотрицательные значения» так, как показано на рис. 6.6. Это связано с тем, что класс

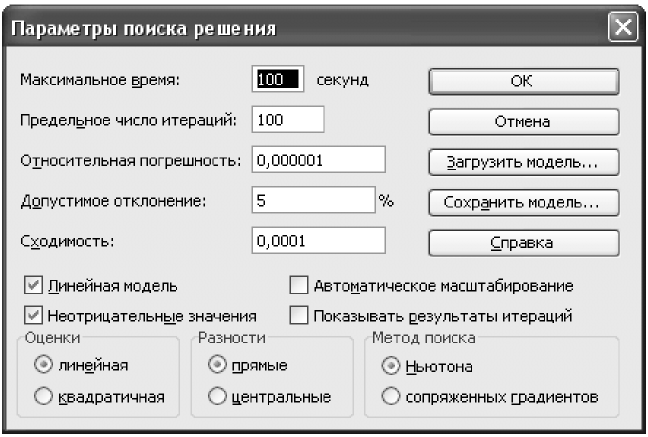


Рис. 6.6. Установка параметров расчета

решаемой задачи – линейное программирование, а также все переменные неотрицательные.

И, наконец, запускаем решение задачи нажатием кнопки «Выполнить» в окне «Поиск решения» (см. рис. 6.4).

6.4. Получение результатов решения

Пакет «Поиск решения» Microsoft Excel выдает один из трех вариантов ответов:

- решение найдено (рис. 6.7). В этом случае ответом являются значения в ячейках, заданных в поле «Изменяя ячейки»;
- решений нет (рис. 6.8) вследствие неограниченности ЦФ на ОДР;
- решений нет (рис. 6.9) вследствие несовместности ограничений.

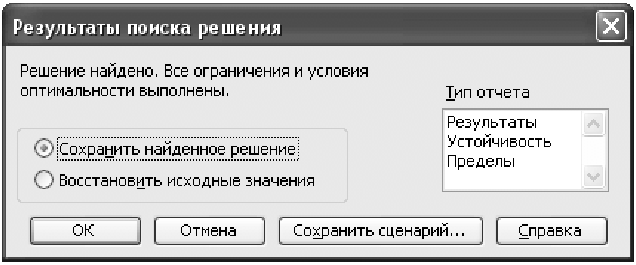


Рис. 6.7. Вариант ответа «Решение найдено»

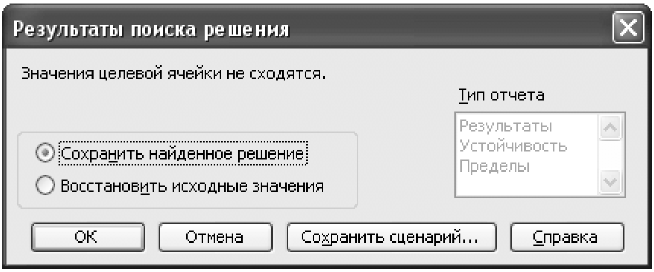


Рис. 6.8. Вариант ответа «Решений нет» вследствие неограниченности целевой функции на ОДР

В окне «Результаты поиска решений» можно сохранить найденное решение, восстановить исходные значения ячеек модели, сохранить сценарий решения задачи, чтобы использовать его в дальнейшем с помощью диспетчера сценариев Microsoft Excel, а также задать тип отчета (если решение найдено), размещаемого на отдельном листе книги.

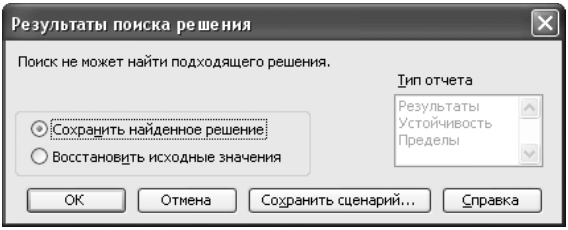


Рис. 6.9. Вариант ответа «Решений нет» вследствие несовместности ограничений

Подробно об отчетах Microsoft Excel см. в разделе 6.7.

6.5. Решение в MS Excel задач ЦЛП

Решение задач ЦЛП в Excel практически не отличается от решения задач ЛП. Единственное отличие – дополнительное ограничение на целочисленность переменных. На рис. 6.10–6.12 изображены окна

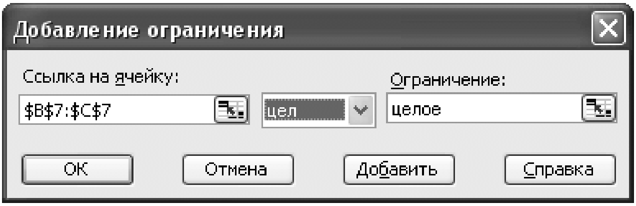


Рис. 6.10. Добавление ограничения на целочисленность переменных

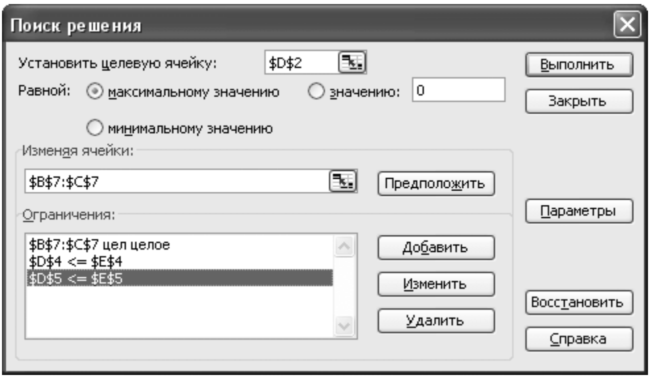


Рис. 6.11. Вид окна «Поиск решения»

«Добавление ограничения» и «Поиск решения» для примера 6.1, рассмотренного ранее, но с условием целочисленности переменных. Даны также результаты решения.

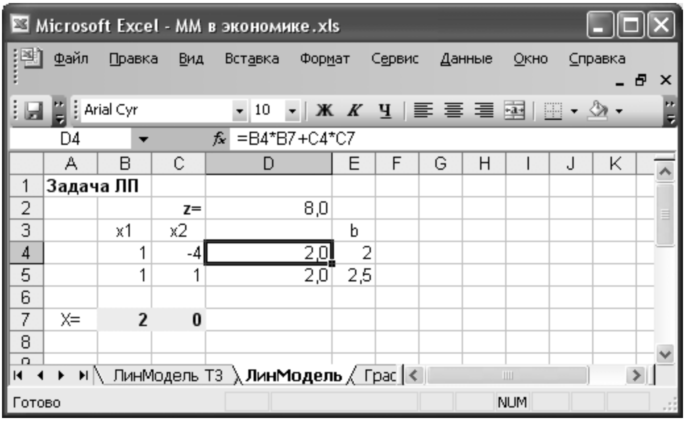


Рис. 6.12. Результат решения задачи ЦЛП

6.6. Пример решения транспортной задачи

На рис. 6.13 показан вид листа после решения транспортной задачи.

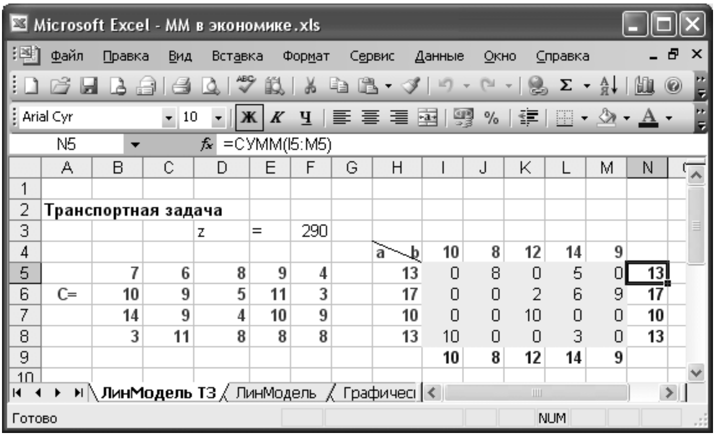


Рис. 6.13. Исходный лист после решения транспортной задачи

На исходном листе дано следующее.

1. В ячейках диапазона B5:F8 введены коэффициенты матрицы стоимостей $\{C_{ij}\}$, в ячейках I4:M4 – объемы потребления b_j, в ячейках H5:H8 – объемы производства a_i.

2. Формула вычисления целевой функции задана в ячейке F3: = = СУММПРОИЗВ(B5:F8;I5:M8).

3. Ячейки диапазонов N5:N8, I9:M9 – это ячейки с формулами, задающими ограничения транспортной задачи (суммы по строкам и столбцам соответственно).

4. Выделенная область I5:M8 – это ячейки, отведенные под искомые решения транспортной задачи x_{ij}. В исходном листе эта область не была заполнена, данные с решением транспортной задачи появились после запуска пакета «Поиск решения» (рис. 6.13).

На рис. 6.14 показан вид окна установки данных для расчета с заданными ограничениями и целевой функцией транспортной задачи.

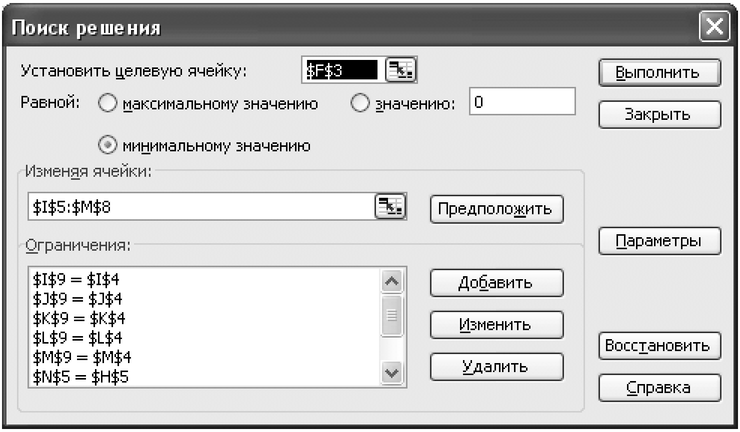


Рис. 6.14. Вид окна «Поиск решения» для транспортной задачи

Как вытекает из рис. 6.13, в результате решения задачи все ограничения выполнены: столбцы и строки с формулами, задающими ограничения, совпадают с исходными объемами производства и потребления.

6.7. Исследование устойчивости решения задачи ЛП

На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т. д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает задача анализа чувствительности задачи ЛП, а именно того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Ограничения оптимизационной модели классифицируются следующим образом. *Связывающие ограничения* проходят через оптимальную точку. *Несвязывающие ограничения* не проходят через оптимальную точку. Аналогично ресурс, предоставляемый связывающим ограничением, называют дефицитным, несвязывающим – недефицитным. Ограничение называют *избыточным* в том случае, если его исключение не влияет на область допустимых решений и, следовательно, на оптимальное решение. Выделяют три вида анализа на чувствительность.

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

• насколько можно увеличить (ограничения типа $\leq$) или уменьшить (ограничения типа $\geq$) запас дефицитного ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ при сохранении базиса (номенклатуры выпуска продукции);

• насколько можно уменьшить (ограничения типа $\leq$) или увеличить (ограничения типа $\geq$) запас недефицитного ресурса при сохранении полученного оптимального значения ЦФ.

2. Анализ увеличения (уменьшения) запаса наиболее выгодного из ресурсов.

3. Анализ изменения значений целевых коэффициентов: каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение (изменяется только оптимальное значение ЦФ)?

Анализ устойчивости в Excel

Проведем анализ устойчивости в Excel на примере задачи о прядильной фабрике.

Пример 6.2. Прядильная фабрика для производства четырех видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон, акрил.

В табл. 6.1 указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года; загрузка оборудования при производстве 1 т пряжи и прибыль от реализации 1 т пряжи каждого вида. Годовой ресурс оборудования составляет 140 тыс. маш./ч.

Таблица 6.1

Тип и нормы расхода сырья

Тип сырья, показатели	Нормы расхода на 1 т пряжи разных видов				Количество сырья, т
	1	2	3	4	
Шерсть Капрон Акрил	0,5 0,1 0,4	0,2 0,6 0,2	0,3 0,4 0,3	0,2 0,5 0,3	600 700 500
Загрузка оборудования в тыс. маш./ч	0,06	0,04	0,03	0,09	
Прибыль от реализации 1 т пряжи, доллары	11 000	9000	9500	12 000	

Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли.

Обозначим: $x_i, i=\overline{1,4}$ – объем производства пряжи i-го вида в тоннах.

Модель

$$\begin{cases} z = 11\,000x_1 + 9000x_2 + 9500x_3 + 12\,000x_4 \to \max; \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \le 600; \\ 0,1x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 0,5x_4 \le 700; \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 + 0,3x_4 \le 500; \\ 0,06x_1 + 0,04x_2 + 0,03x_3 + 0,09x_4 \le 140; \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

На рис. 6.15 представлена заполненная форма для ввода условия задачи в Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные							
2	имя	x1	x2	x3	x4			
3	значе-ние	0	0	0	0			
4								
5						**ЦФ**	**направление**	
6	коэффи-циенты ЦФ	11000	9000	9500	12000	=СУММПРОИЗВ (B3:E3;B6:E6)	макс	
7								
8								
9	ресурсы	коэффициенты				левая часть	знак	правая часть
10	шерсть	0,5	0,2	0,3	0,2	=СУММПРОИЗВ (B3:E3;B10:E10)	<=	600
11	капрон	0,1	0,6	0,4	0,5	=СУММПРОИЗВ (B3:E3;B11:E11)	<=	700
12	акрил	0,4	0,2	0,3	0,3	=СУММПРОИЗВ (B3:E3;B12:E12)	<=	500
13	ресурсы обору-дования	0,06	0,04	0,03	0,09	=СУММПРОИЗВ (B3:E3;B13:E13)	<=	140

Рис. 6.15. Форма ввода условия задачи в Excel

Диалоговое окно «Поиск решения» для рассматриваемой задачи с введенными данными можно видеть на рис. 6.16.

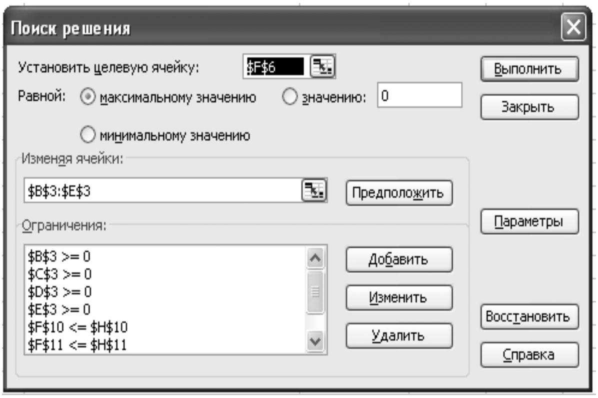


Рис. 6.16. Диалоговое окно «Поиск решения»

После нажатия кнопки «Выполнить» появляется диалоговое окно «Результаты поиска решения». Для получения отчетов по устойчивости необходимо выбрать тип отчета (можно задать все виды): «Результаты», «Устойчивость», «Пределы» и нажать кнопку «ОК» (рис. 6.17).

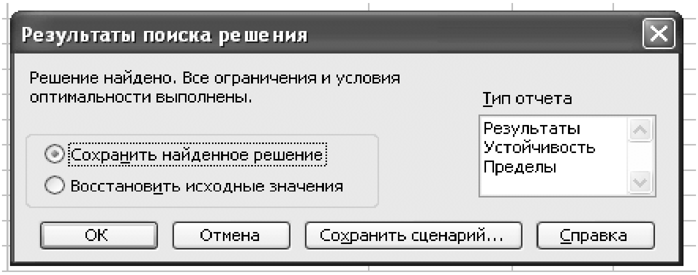


Рис. 6.17. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

Результаты решения выводятся в форму ввода условий задачи: $x_1 = 235{,}29$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1352{,}9$; ЦФ z = 18823529,41 (рис. 6.18), отчеты по результатам, по устойчивости и по пределам выводятся на отдельных листах в текущей рабочей книге Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	***Переменные***							
2	***имя***	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4			
3	значение	235,29	0	0	1352,9			
4								
5						**ЦФ**	**направление**	
6	коэффициенты ЦФ	11000	9000	9500	12000	**18823529,4**	макс	
7								
8								
9	***ресурсы***	***коэффициенты***				***левая часть***	***знак***	***правая часть***
10	шерсть	0,5	0,2	0,3	0,2	**388,24**	<=	600
11	капрон	0,1	0,6	0,4	0,5	**700,00**	<=	700
12	акрил	0,4	0,2	0,3	0,3	**500,00**	<=	500
13	ресурсы оборудования	0,06	0,04	0,03	0,09	**135,88**	<=	140

Рис. 6.18. Результат решения задачи

Отчет по результатам. На рис. 6.19 представлен отчет по результатам для задачи примера 6.2.

Отчет по результатам состоит из трех частей и содержит информацию о целевой функции; о значениях переменных, полученных в результате решения задачи; об ограничениях.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам						
Целевая ячейка (максимум)						
	Ячейка	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
	$F$6	коэффициенты ЦФ	0,00	18823529,41		
Изменяемые ячейки						
	Ячейка	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
	$B$3	значение x1	0	235,29		
	$C$3	значение x2	0	0		
	$D$3	значение x3	0	0		
	$E$3	значение x4	0	1352,94		
Ограничения						
	Ячейка	**Имя**	**Значение**	**Формула**	**Статус**	**Разница**
	$F$12	акрил левая часть	500,00	$F$12<=$H$12	связанное	0
	$F$11	капрон левая часть	700,00	$F$11<=$H$11	связанное	0
	$F$10	шерсть левая часть	388,24	$F$10<=$H$10	несвязанное	211,8
	$F$13	ресурсы оборудования левая часть	135,88	$F$13<=$H$13	несвязанное	4,12
	$B$3	значение x1	235,29	$B$3>=0	несвязанное	235,3
	$C$3	значение x2	0	$C$3>=0	связанное	0
	$D$3	значение x3	0	$D$3>=0	связанное	0
	$E$3	значение x4	1352,94	$E$3>=0	несвязанное	1353

Рис. 6.19. Отчет по результатам

В отчете по результатам представлено следующее: выражение для вычисления значения целевой функции, а также имя ЦФ, исходное значение целевой функции (до решения задачи) и значение целевой функции при оптимальном решении. Для всех переменных задачи приведена аналогичная информация: ячейка для хранения значения переменной; обозначение переменной; исходное значение и оптимальное значение.

По ресурсам приводится следующая информация: формула, соответствующая левой части ограничения; имя ограничения; значение (величина) использованного ресурса при оптимальном решении задачи; формула, задающая ограничение; статус ограничения и разница. Если ресурс используется полностью (т. е. ресурс дефицитный), то в графе «Статус» («Состояние») соответствующее ограничение указывается как «связанное»; при неполном использовании ресурса (т. е. ресурс недефицитный) в этой графе указывается «несвязанное». В графе «Разница» показана разность между значением использованного ресурса и его исходно заданной величиной. Аналогичная информация приводится по переменным задачи: оптимальное значение, статус (связанная, если оптимальное значение переменной нулевое; несвязанная – в противном случае), разность между оптимальным значением переменной и заданным для нее граничным условием.

В задаче о прядильной фабрике полученное оптимальное решение означает выпуск пряжи первого и четвертого видов (базисные переменные: $x_1 = 235{,}29$; $x_4 = 1352{,}9$), выпускать пряжу второго и третьего видов не выгодно ($x_2 = 0$; $x_3 = 0$). При таком плане выпуска полностью будут использованы ресурсы (запасы) акрила и капрона, а запасы шерсти и ресурс оборудования окажутся избыточными.

Отчет по результатам дает информацию для анализа возможного изменения запасов недефицитных ресурсов при сохранении полученного оптимального значения ЦФ. Если на ресурс наложено ограничение типа $\leq$, то в графе «Разница» дается количество ресурса, которое не используется при реализации оптимального решения. Например, используется 388,24 т шерсти. Не израсходован 211,76 т из общих запасов шерсти, на это количество можно уменьшить ресурс шерсти без изменения оптимального решения. Аналогично можно уменьшить ресурсы оборудования на 4,12 тыс. ч, и это не повлияет на оптимальное решение.

Если на ресурс наложено ограничение типа $\geq$, то в графе «Разница» дается количество ресурса, на которое была превышена минимально необходимая норма. Если на эту величину увеличить ресурс, оптимальное решение задачи не изменится.

Отчет по устойчивости. На рис. 6.20 представлен отчет по устойчивости для задачи примера 6.2, состоящий из двух частей: информация по переменным и информация по ограничениям.

Microsoft Excel 11.00 Отчет по устойчивости							
Изменяемые ячейки							
			Рез.	**Нормир.**	**Целевой**	**Допустимое**	**Допустимое**
	Ячейка	**Имя**	**знач.**	**стоимость**	**коэффициент**	**увеличение**	**уменьшение**
	$B$3	x1	235,3	0	11000	2875	8600
	$C$3	x2	0	–1352,9	9000	1352,94	1E+30
	$D$3	x3	0	–1617,7	9500	1617,65	1E+30
	$E$3	x4	1353	0	12000	43000	1045,45
Ограничения							
			Рез.	**Теневая**	**Ограничение**	**Допустимое**	**Допустимое**
	Ячейка	**Имя**	**знач.**	**цена**	**Правая часть**	**увеличение**	**уменьшение**
	$F$12	акрил	500	25294,1	500	33,33	80
	$F$11	капрон	700	8823,5	700	38,89	514,29
	$F$10	шерсть	388	0,00	600	1E+30	211,76
	$F$13	оборудование	136	0,00	140	1E+30	4,12

Рис. 6.20. Отчет по устойчивости

Нормированная стоимость показывает, как изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение. Например, в отчете по устойчивости для рассматриваемой задачи нормированная стоимость для второго вида пряжи равна 1352,94. Это означает, что если включить в план выпуска 1 т пряжи второго вида, то новый план выпуска принесет прибыль на 1352,94 доллара меньше, чем прежний оптимальный план. Нормированная стоимость для базисных переменных всегда равна нулю.

Предельные значения приращения целевых коэффициентов. Для каждой переменной указаны заданные коэффициенты ЦФ, допустимые увеличения и уменьшения коэффициентов, при которых сохраняется оптимальное решение задачи. Например, допустимое увеличение цены на пряжу первого вида равно 2875 долларов за 1 т, а допустимое уменьшение – 8600 долларов. Это означает, что если цена за 1 т пряжи первого вида возрастет не более чем на 2875 долларов (например, станет равной 13 875 долларов), то оптимальное решение сохранится, изменится только значение ЦФ в оптимальной точке.

При выходе за указанные в отчете по устойчивости пределы изменения цен оптимальное решение может измениться как по номенклатуре выпускаемой продукции, так и по объемам выпуска (без изменения номенклатуры).

Далее в отчете по устойчивости приводится информация, относящаяся к ограничениям. В колонке «Результирующее значение» дана величина использованных ресурсов.

Предельные значения приращения ресурсов. В графах «Допустимое уменьшение» и «Допустимое увеличение» показано, на сколько единиц можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом базис оптимального решения (изменить объем выпуска продукции без изменения номенклатуры). Рассмотрим анализ дефицитных ресурсов, так как анализ недефицитных ресурсов был дан при описании отчета по результатам. В рассматриваемой задаче такими ограничениями являются дефицитные ресурсы акрила и капрона. Например, если ресурсы акрила уменьшатся не более чем на 80 т или возрастут не более чем на 33,33 т, базис оптимального решения задачи не изменится (по-прежнему будет оптимально выпускать пряжу первого и четвертого видов, хотя объемы выпуска изменятся).

Теневая цена (ценность дополнительной единицы i-го ресурса). Теневая цена показывает, как возрастет значение ЦФ в случае выделения дополнительной единицы i-го ресурса. Очевидно, что теневая цена не нулевая только для дефицитных ресурсов. Например, если запасы акрила возрастут на 1 т, прибыль увеличится на 25294,12 доллара, если запасы капрона возрастут на 1 т, то прибыль будет на 8823,53 доллара больше, чем исходная. Поэтому в первую очередь для фабрики выгодно увеличивать запасы акрила.

В терминах теории двойственности теневая цена соответствует значению двойственной оценки соответствующего ресурса, а нормированная стоимость – значению дополнительной двойственной оценки, которая равна разности между левой и правой частями в ограничениях двойственной задачи.

Отчет по пределам. Для рассматриваемой задачи отчет по пределам приведен на рис. 6.21.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам						
	Целевое					
Ячейка	**имя**	**Значение**				
$F$6	ЦФ	18823523				
	Изме-няемое		**Ниж-ний**	**Целевой результат**	**Верх-ний**	**Целевой резуль-тат**
Ячейка	**имя**	**Значение**	**предел**		**предел**	
$B$3	x1	235,29	0	16235294,1	235,3	18823529
$C$3	x2	0	0	18823529,4	0	18823529
$D$3	x3	0	0	18823529,4	0	18823529
$E$3	x4	1352,94	0	2588235,3	1352,9	18823529

Рис. 6.21. Отчет по пределам

В отчете по пределам показано, в каком диапазоне могут изменяться значения переменных без изменения базиса (номенклатуры выпуска продукции). Например, если будет выпускаться 235 т пряжи первого вида, то в оптимальном решении ненулевые переменные будут соответствовать объемам выпуска первого и четвертого видов пряжи. В случае выпуска более 235,29 т пряжи первого вида номенклатура выпуска продукции изменится. Также в отчете по пределам приводится информация о величине ЦФ при нижнем и верхнем предельных значениях переменных задачи.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под связывающими, несвязывающими, избыточными ограничениями? Дефицитными и недефицитными ресурсами?

2. Каковы предпосылки и основные задачи анализа оптимального решения на устойчивость?

3. Что означают понятия: *теневая цена*, *нормированная стоимость*, *допустимое увеличение* (*уменьшение*) *запасов ресурсов*, *допустимое увеличение* (*уменьшение*) *коэффициентов ЦФ*, *нижний и верхний пределы значений переменных задачи*?

4. Какую информацию об устойчивости оптимального решения задачи ЛП можно получить из отчета по результатам? Отчета по устойчивости? Отчета по пределам MS Excel?

5. Как называется надстройка MS Excel, позволяющая решать оптимизационные задачи?

Г Л А В А 7

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ, ДИСКРЕТНОЙ И ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ»

7.1. Содержание задания в зависимости от категории

Т а б л и ц а 7.1

Раздел задания	Категория задания		
Вид решаемой задачи	A	B	C
1. Решение задач линейного программирования (ЛП)			
1.1	1. Построить двойственную задачу	XXXXXXXXX	XXXXXXXXX
1.2	2. Графически решить прямую задачу ЛП	XXXXXXXXX	XXXXXXXXX
1.3	3. Решить (одновременно) прямую и двойственную задачи ЛП симплекс-методом («вручную»)	1. Решить (одновременно) прямую и двойственную задачи ЛП симплекс-методом («вручную»)	1. Решить (одновременно) прямую и двойственную задачи ЛП симплекс-методом («вручную»)
1.4	4. Решить прямую и двойственную задачи ЛП в программной системе Excel	XXXXXXXXX	XXXXXXX
1.5	XXXXXXXX	2. Выполнить экономическую интерпретацию прямой и двойственной задач, условий «дополняющей нежесткости»	XXXXXXX

Продолжение табл. 7.1

Раздел задания	Категория задания		
Вид решаемой задачи	A	B	C
1.6	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXX	2. Проанализировать устойчивость решения задачи ЛП при изменении свободных членов ограничений (запасов) с пояснениями на графиках
2. Многокритериальная задача ЛП			
2.1	5. Графически решить бикритериальную задачу ЛП, на графиках показать множество Парето, множество эффективных оценок, множество нормализованных эффективных оценок	3. Графически решить бикритериальную задачу ЛП, на графиках показать множество Парето, множество эффективных оценок, множество нормализованных эффективных оценок	3. Графически решить бикритериальную задачу ЛП, на графиках показать множество Парето, множество эффективных оценок, множество нормализованных эффективных оценок
2.2	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXX	4. Решить задачу методом ограничений, проанализировать полученное решение
3. Решение задач дискретного программирования			
3.1	6. Графически решить задачу целочисленного линейного программирования (ЦЛП)	4. Графически решить задачу целочисленного линейного программирования	5. Графически решить задачу целочисленного линейного программирования
3.2	7. Решить задачу ЦЛП методом ветвей и границ	5. Решить задачу ЦЛП методом ветвей и границ	6. Решить задачу ЦЛП методом ветвей и границ

Окончание табл. 7.1

Раздел задания	Категория задания		
Вид решаемой задачи	A	B	C
3.3	XXXXXXXXXXXX	Решить задачу о назначении:	XXXXXXXXXXX
3.3.1	XXXXXXXXXXXX	6) методом потенциалов (как транспортную задачу)	XXXXXXXXXXX
3.3.2	XXXXXXXXXXXX	7) в программной системе Excel	XXXXXXXXXXX
3.4	Решить задачу коммивояжера		
3.4.1	8) методом ветвей и границ	8) методом ветвей и границ	7) методом ветвей и границ
3.4.2	XXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXX	8) с помощью программной системы Excel

7.2. 100 вариантов заданий

Эти задания предназначены для выполнения расчетно-графической работы. Номер варианта задается преподавателем.

Рассмотрим, как формируются задачи для конкретного варианта. Обозначим номер варианта как ab (например, пусть $ab = 14$).

1. Задача ЛП формируется следующим образом:

а) целевая функция получается как

$$z = (10 + a)x_1 + (10 + b)x_2 \to \max;$$

б) ограничения в задаче берутся из табл. 7.2 в соответствии с номером b;

в) полученная таким образом задача для 14-го варианта:

$z = 11x_1 + 14x_2 \to \max;$

$5x_1 + 6x_2 \geq 30;$

$3x_1 - 2x_2 \leq 24;$

$4x_1 + 5x_2 \leq 52;$

$x_1, x_2 \geq 0.$

2. Бикритериальная задача ЛП получается добавлением к построенной задаче ЛП еще одного критерия вида

$$t = (10 + b)x_1 - (10 + a)x_2 \to \min.$$

Примечание. Если для построенной таким образом задачи множество Парето состоит только из одного решения, то критерий нужно сформировать в виде

$$t = -(10 + b)x_1 + (10 + a)x_2 \to \min.$$

Таблица 7.2

Таблица вариантов систем ограничений в задачах ЛП и ЦЛП для выполнения расчетно-графического проекта

Номер варианта	Система ограничений	Номер варианта	Система ограничений
0	$11x_1 + 12x_2 \le 121$ $2x_1 - x_2 \le 10$ $2x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0$	1	$13x_1 + 11x_2 \le 156$ $2x_1 - x_2 \le 12$ $x_1 + 2x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
2	$3x_1 + 4x_2 \ge 12$ $9x_1 + 11x_2 \le 135$ $2x_1 - x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$	3	$4x_1 - 3x_2 \le 36$ $11x_1 + 14x_2 \le 143$ $x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
4	$5x_1 + 6x_2 \ge 30$ $3x_1 - 2x_2 \le 24$ $4x_1 + 5x_2 \le 52$ $x_1, x_2 \ge 0$	5	$x_1 + 2x_2 \ge 8$ $6x_1 - 5x_2 \le 60$ $2x_1 + 3x_2 \le 40$ $x_1, x_2 \ge 0$
6	$x_1 + 2x_2 \le 23$ $4x_1 - 3x_2 \le 36$ $2x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	7	$8x_1 - 7x_2 \le 56$ $3x_1 + x_2 \ge 6$ $5x_1 + 8x_2 \le 85$ $x_1, x_2 \ge 0$
8	$7x_1 - 6x_2 \le 84$ $x_1 + 4x_2 \ge 8$ $2x_1 + 3x_2 \le 32$ $x_1, x_2 \ge 0$	9	$8x_1 + 11x_2 \le 144$ $x_1 \ge 6$ $3x_1 - 2x_2 \le 18$ $x_1, x_2 \ge 0$

3. Задача ЦЛП получается из задачи ЛП, сформированной в пункте 1, путем добавления ограничений на целочисленность переменных.

4. Матрица эффективности $C_{эф}$ для задачи о назначении формируется следующим образом. В соответствии с номером b в табл. 7.3

выбирается матрица, к каждому элементу которой прибавляется величина, равная a. Так, для 14-го варианта матрица $C_{эф}$ будет следующей:

$$C_{эф} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 13 & 10 & 3 & 7 \\ 8 & 14 & 12 & 2 & 7 \\ 12 & 16 & 14 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Матрица издержек $C_{изд}$ для задачи коммивояжера формируется следующим образом: к матрице $C_{эф}$, полученной в пункте 4, добавляется строка, состоящая из пятерок, а затем все диагональные элементы полагаются равными ∞. Так, для 14-го варианта получена матрица

$$C_{изд} = \begin{pmatrix} \infty & 13 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & \infty & 10 & 3 & 7 \\ 8 & 14 & \infty & 2 & 7 \\ 12 & 16 & 14 & \infty & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

Таблица 7.3

Таблица матриц эффективности для задачи о назначении

Номер варианта	Матрица эффективности	Номер варианта	Матрица эффективности
0	$\begin{pmatrix} 13 & 17 & 15 & 9 & 5 \\ 2 & 14 & 11 & 4 & 8 \\ 9 & 15 & 13 & 3 & 8 \\ 8 & 14 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 13 & 15 & 11 \\ 2 & 6 & 9 & 12 & 0 \\ 1 & 6 & 11 & 13 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 12 & 6 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 16 & 5 & 8 & 14 & 12 \\ 13 & 8 & 4 & 10 & 1 \\ 13 & 8 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 13 & 8 & 4 & 15 & 11 \\ 9 & 3 & 7 & 12 & 4 \\ 11 & 2 & 7 & 13 & 7 \\ 6 & 6 & 8 & 12 & 7 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 7.3

Номер варианта	Матрица эффективности	Номер варианта	Матрица эффективности
4	$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 12 & 9 & 2 & 6 \\ 7 & 13 & 11 & 1 & 6 \\ 11 & 15 & 13 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 11 & 6 & 2 & 9 & 0 \\ 12 & 7 & 2 & 11 & 7 \\ 10 & 8 & 5 & 5 & 5 \\ 14 & 3 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 6 & 12 & 6 \\ 8 & 2 & 6 & 11 & 3 \\ 5 & 5 & 7 & 11 & 6 \\ 12 & 7 & 3 & 14 & 10 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 13 & 8 & 7 \\ 3 & 10 & 13 & 7 & 1 \\ 2 & 12 & 14 & 7 & 8 \\ 8 & 14 & 16 & 4 & 12 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 11 & 9 & 6 & 7 & 6 \\ 12 & 7 & 5 & 10 & 2 \\ 13 & 8 & 4 & 10 & 8 \\ 15 & 6 & 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 & 6 & 6 \\ 11 & 7 & 12 & 11 & 7 \\ 9 & 7 & 12 & 9 & 0 \\ 13 & 4 & 15 & 13 & 11 \end{pmatrix}$

Библиографический список

1. *Акоф Р.*, *Сасиени М.* Основы исследования операций. – М.: Мир, 1971.
2. *Алесинская Т.В.* Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономико-математические методы и модели». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002.
3. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология: учеб. пособие для втузов. – М.: Дрофа, 2004.
4. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. – Киев, 1988.
5. *Зуховицкий С.И.*, *Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1975.
6. Исследование операций: в 2 т. / Под ред. Дж. Моудера, С. Эльмаграби; пер. с англ. И. М. Макарова, И. М. Бескровного. – М.: Мир, 1981.
7. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975. – 270 с.
8. *Крушевский А.В.* Справочник по экономико-математическим моделям и методам. – Киев: Техніка, 1982. – 207 с.
9. *Реклейтис Г.* Оптимизация в технике: в 2 т. / Пер. с англ. В.Я. Алтаева, В.И. Моторина. – М.: Мир, 1986.
10. *Сакович В.А.* Исследование операций (детерминированные методы и модели): справочное пособие. – Минск: Высшая школа, 1984. – 250 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Варианты задач ЛП для домашних заданий

Каждый вариант содержит четыре задачи, которые предлагается решать одновременно графически и симплекс-методом. После решения каждой задачи симплекс-методом рекомендуется на соответствующем графике показать точки, полученные на всех его итерациях.

№ варианта	№ задачи	Целевая функция Z	Ограничения	№ варианта	№ задачи	Целевая функция Z	Ограничения
1	1	$x_1 + x_2 \to \min$	$2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \ge 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	**3**	1	$4x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 - 2x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $2x_1 + x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$4x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \le 6$ $x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 - 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \le 6$ $2x_1 + x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$4x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 - 2x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
2	1	$5x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + 5x_2 \le 10$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**4**	1	$x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$-5x_1 - x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $3x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + 5x_2 \to \max$	$x_1 + 5x_2 \le 10$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $2x_1 + x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$5x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $x_1 + 2x_2 \le 2$ $3x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$x_1 - 3x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $2x_1 + x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$

5	1	$2x_1 + x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 + x_2 \le 3$ $4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**8**	1	$5x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$2x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 4$ $4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-5x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 - 2x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$2x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$5x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 - 2x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$
6	1	$x_1 + 2x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $3x_1 + x_2 \ge 9$ $x_1 - 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**9**	1	$x_1 - 3x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $x_1 + 2x_2 \le 2$ $3x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$-2x_1 - x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 - 4x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-x_1 + 3x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $3x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 - 4x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 5$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \ge 9$ $x_1 - 4x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-x_1 - x_2 \to \min$	$2x_1 + 4x_2 \le 5$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
7	1	$2x_1 + x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1 + 3x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$	**10**	1	$-4x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 - 5x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$2x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$4x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 - 5x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$4x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$2x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$

11	1	$-3x_1 + x_2 \to \min$	$5x_1 - x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$	**14**	1	$-x_1 - x_2 \to \min$	$-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$3x_1 - x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$x_1 + x_2 \to \max$	$-2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + 2x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$-3x_1 + x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + 2x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-x_1 - x_2 \to \max$	$x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
12	1	$-x_1 - 5x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	**15**	1	$2x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 6$ $-2x_1 + x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$2x_1 + 6x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + 5x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 6$ $-2x_1 + x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$-2x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 5x_2 \to \max$	$x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$2x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
13	1	$x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + 4x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$	**16**	1	$2x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 5$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$-x_1 - 2x_2 \to \min$	$-x_1 + 4x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$3x_1 - x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + 2x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1 + x_2 \le 3$ $-x_1 + 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 5$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 4$ $-x_1 + 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-3x_1 + x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$

17	1	$-x_1 - 4x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $-5x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**20**	1	$x_1 + 5x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$x_1 + 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $-5x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-x_1 - 5x_2 \to \min$	$5x_1 + x_2 \le 10$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$-x_1 - 4x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$-x_1 - 5x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$3x_1 + x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$5x_1 + x_2 \to \max$	$5x_1 + x_2 \le 10$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
18	1	$-3x_1 - 2x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $-2x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$	**21**	1	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \ge -2$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$3x_1 + 2x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$x_1 + x_2 \to \max$	$-4x_1 + x_2 \le 2$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$-6x_1 - 2x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 4$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \ge 9$ $-4x_1 + x_2 \ge 6$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$3x_1 + 2x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \le 4$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-2x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \ge 9$ $-4x_1 + x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
19	1	$3x_1 + x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	**22**	1	$x_1 - 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $-2x_1 + x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$x_1 + 4x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-x_1 + 4x_2 \to \min$	$-2x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 + 2x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$-x_1 - 4x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \le 5$ $-5x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$x_1 + 4x_2 \to \max$	$-2x_1 + x_2 \le 6$ $2x_1 + x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $-5x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$-2x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$

23	1	$2x_1 + x_2 \to \min$	$3x_1 + 4x_2 \geq 10$ $x_1 - 2x_2 \geq 2$ $5x_1 - x_2 \leq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$	**26**	1	$x_1 + 4x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \geq 5$ $2x_1 + 4x_2 \leq 4$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$-2x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 - 2x_2 \leq 2$ $5x_1 - x_2 \geq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$5x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \geq 5$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$3x_1 + 4x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 2$ $3x_1 + 4x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$x_1 + 5x_2 \to \max$	$x_1 + 5x_2 \leq 10$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$2x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 2$ $3x_1 + 4x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$-7x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + 5x_2 \leq 10$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
24	1	$x_1 + x_2 \to \min$	$4x_1 + 5x_2 \geq 14$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $-x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	**27**	1	$x_1 - 5x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 6$ $2x_1 + 2x_2 \geq 9$ $2x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 5x_2 \geq 14$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$4x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \geq 5$ $x_1 - 2x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$4x_1 + 5x_2 \to \max$	$4x_1 + 5x_2 \leq 14$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$4x_1 + 2x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 6$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$-x_1 - x_2 \to \min$	$4x_1 + 5x_2 \leq 14$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$5x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 6$ $x_1 + 2x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
25	1	$3x_1 - 5x_2 \to \min$	$4x_1 + x_2 \leq 6$ $x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \geq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	**28**	1	$-x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $2x_1 + 2x_2 \geq 9$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$-x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$7x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 - 2x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$3x_1 + 6x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$-2x_1 + 6x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$

29	1	$x_1 + 6x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \le 3$ $2x_1 + 2x_2 \ge 7{,}5$ $4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**32**	1	$6x_1 + 5x_2 \to \max$	$2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$2x_1 + x_2 \to \max$	$3x_1 + 3x_2 \ge 10$ $4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-5x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$3x_1 + 3x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 - 2x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$4x_1 + 2x_2 \to \max$	$2x_1 - 0{,}5x_2 \le 3$ $-x_1 - x_2 \ge -3$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$5x_1 + 2x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 - 2x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$
30	1	$-4x_1 - 2x_2 \to \min$	$-x_1 + 4x_2 \ge -2$ $x_1 + x_2 \le 2{,}5$ $x_1, x_2 \ge 0$	**33**	1	$4x_1 - 3x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $x_1 + 2x_2 \le 2$ $3x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$8x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \le 2{,}5$ $3x_1 + x_2 \ge 9$ $x_1 - 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-x_1 + 5x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $3x_1 - x_2 \ge 7$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 - 4x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 5$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \ge 9$ $x_1 - 4x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + 2x_2 \le 2{,}5$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
31	1	$-4x_1 - 2x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**34**	1	$5x_1 - x_2 \to \min$	$2x_1 + 3x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 - 5x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$5x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$x_1 + 5x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 - 5x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$3x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$2x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1 + 3x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$2x_1 + 6x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 6$ $2x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$

35	1	$-8x_1 + 7x_2 \to \min$	$7x_1 - x_2 \le 7$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$	**38**	1	$-2x_1 - x_2 \to \min$	$-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$2x_1 - 5x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$x_1 + x_2 \to \max$	$-3x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 9$ $x_1 + 2x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$2x_1 + 3x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$-4x_1 + x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + 2x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-5x_1 - x_2 \to \max$	$x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
36	1	$-2x_1 - 5x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 4$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	**39**	1	$-2x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 6$ $-2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-2x_1 - 6x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $4x_1 - 2x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$2x_1 + 10x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 6$ $-2x_1 + x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$-7x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 5x_2 \to \min$	$x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$7x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
37	1	$-x_1 - x_2 \to \min$	$3x_1 + 5x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$	**40**	1	$2x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 5$ $-x_1 + 3x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$3x_1 + 6x_2 \to \max$	$-x_1 + 4x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$3x_1 - 2x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$5x_1 + 2x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 + x_2 \le 3$ $-x_1 + 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 5$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$2x_1 + 3x_2 \to \max$	$3x_1 + 3x_2 \ge 10$ $-x_1 + 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$8x_1 + x_2 \to \min$	$x_1 + 2x_2 \ge 5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$

41	1	$-2x_1 - 5x_2 \to \min$	$2x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $-5x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**44**	1	$2x_1 - 7x_2 \to \max$	$3x_1 + 4x_2 \ge 5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$3x_1 + 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $-5x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$2x_1 + 5x_2 \to \max$	$5x_1 + x_2 \le 10$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + 5x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$-x_1 - 5x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$6x_1 + 2x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$10x_1 + 2x_2 \to \max$	$5x_1 + x_2 \le 10$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
42	1	$-3x_1 + 7x_2 \to \min$	$5x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $-2x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$	**45**	1	$x_1 + 3x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \ge -2$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$5x_1 + 2x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$x_1 + x_2 \to \max$	$-4x_1 + x_2 \le 2$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$-6x_1 - 2x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$-5x_1 + x_2 \to \min$	$2x_1 + 3x_2 \ge 9$ $-4x_1 + x_2 \ge 6$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$-3x_1 - 2x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 4$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-2x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \ge 9$ $-4x_1 + x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
43	1	$6x_1 + 2x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-10x_1 + x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$	**46**	1	$5x_1 - 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $-2x_1 + x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$-x_1 - 4x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 6$ $-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-x_1 + 8x_2 \to \min$	$-2x_1 + x_2 \le 6$ $2x_1 + x_2 \ge 10$ $x_1 + 2x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$-5x_1 - 4x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \le 5$ $-5x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$x_1 + 3x_2 \to \max$	$-2x_1 + x_2 \le 6$ $2x_1 + x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$3x_1 + 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $-5x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-x_1 - 2x_2 \to \min$	$-2x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$

47	1	$-5x_1 + x_2 \rightarrow \min$	$x_1 + 4x_2 \geq 10$ $x_1 - 2x_2 \geq 2$ $5x_1 - x_2 \leq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$	**50**	1	$x_1 - 6x_2 \rightarrow \max$	$4x_1 + 2x_2 \geq 5$ $x_1 + 2x_2 \leq 2$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$-2x_1 - x_2 \rightarrow \min$	$x_1 - 2x_2 \leq 2$ $5x_1 - x_2 \geq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$-5x_1 - x_2 \rightarrow \min$	$4x_1 + 2x_2 \geq 5$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 2$ $3x_1 + 4x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$	$x_1 + 5x_2 \leq 10$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$4x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$-x_1 + 2x_2 \geq -2$ $3x_1 + 4x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$	$x_1 + 5x_2 \leq 10$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
48	1	$3x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$	$3x_1 + 5x_2 \geq 14$ $2x_1 - x_2 \geq 6$ $-x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	**51**	1	$3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$	$3x_1 - 2x_2 \leq 6$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$3x_1 + 6x_2 \geq 14$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$5x_1 - x_2 \rightarrow \min$	$x_1 + x_2 \geq 5$ $x_1 - 2x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$	$4x_1 + 5x_2 \leq 14$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$2x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 6$ $2x_1 + x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$-2x_1 - x_2 \rightarrow \min$	$4x_1 + 5x_2 \leq 14$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$5x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 6$ $x_1 + 2x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
49	1	$-8x_1 + x_2 \rightarrow \min$	$x_1 + 2x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \geq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	**52**	1	$-2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$	$10x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$-x_1 - x_2 \rightarrow \min$	$x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$-2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$3x_1 + 3x_2 \leq 9$ $x_1 - 2x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$2x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 11$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$	$2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$-x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$

53	1	$9x_1 - x_2 \to \min$	$5x_1 + 3x_2 \ge 15$ $x_1 + x_2 \le 3$ $4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**56**	1	$x_1 + 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \le 5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$4x_1 + x_2 \to \max$	$3x_1 + 3x_2 \ge 12$ $4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-6x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 - 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$-2x_1 - x_2 \to \min$	$4x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-5x_1 - x_2 \to \min$	$4x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 - 2x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$
54	1	$-7x_1 + 2x_2 \to \min$	$5x_1 + 2x_2 \le 5$ $3x_1 + x_2 \ge 9$ $x_1 - 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$	**57**	1	$2x_1 - 7x_2 \to \min$	$x_1 + 2x_2 \le 2$ $2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $3x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$2x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 - 4x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$-x_1 + 5x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $3x_1 - x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$3x_1 + 3x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 - 4x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 5$ $5x_1 - x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 3x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \ge 9$ $x_1 - 4x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 5$ $3x_1 - x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
55	1	$x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1 + 3x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$	**58**	1	$-10x_1 - x_2 \to \min$	$3x_1 + 3x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 - 5x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$4x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$4x_1 + 3x_2 \to \max$	$2x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1 - 5x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$-x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$-4x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$2x_1 + 6x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$

59	1	$-x_1 + 5x_2 \to \min$	$7x_1 - x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$	**62**	1	$-x_1 - x_2 \to \min$	$2x_1 - x_2 \ge -5$ $x_1 + x_2 \ge 7$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$5x_1 - x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$5x_1 + 5x_2 \to \max$	$-2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$2x_1 + 4x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + 2x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$4x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$-3x_1 + 2x_2 \to \max$	$-5x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + 2x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-5x_1 - 5x_2 \to \max$	$x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
60	1	$-2x_1 - 5x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	**63**	1	$4x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$-x_1 - 2x_2 \to \min$	$2x_1 + 4x_2 \le 6$ $-2x_1 + x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$3x_1 + 9x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$2x_1 + 5x_2 \to \max$	$2x_1 + 4x_2 \le 6$ $-2x_1 + x_2 \le 0$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$-4x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 5$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$-3x_1 + 5x_2 \to \max$	$x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $-2x_1 + x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$4x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 + 3x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \ge 5$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$
61	1	$-x_1 + x_2 \to \min$	$x_1 + 4x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$	**64**	1	$-2x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \le 6$ $4x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
	2	$x_1 + 4x_2 \to \max$	$-x_1 + 4x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$		2	$3x_1 - x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \ge 5$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	3	$-4x_1 + 2x_2 \to \min$	$3x_1 + 3x_2 \ge 10$ $x_1 + x_2 \le 3$ $-x_1 + 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		3	$3x_1 + 3x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \le 5$ $-x_1 + 3x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$
	4	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$3x_1 + 3x_2 \ge 10$ $-x_1 + 4x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$		4	$-3x_1 + 8x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \ge 2{,}5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $-x_1 + 3x_2 \ge 6$ $x_1, x_2 \ge 0$

65	1	$-9x_1 - 4x_2 \to \min$	$6x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $-5x_1 + x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$	**68**	1	$-x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \geq 2,5$ $2x_1 + x_2 \leq 2$ $-x_1 + 3x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$9x_1 + 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \geq 5$ $-5x_1 + x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$x_2 \to \max$	$5x_1 + x_2 \leq 10$ $-x_1 + 3x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$2x_1 + 8x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \leq 6$ $-5x_1 + x_2 \leq 5$ $x_j \geq 0$		3	$-x_1 - 5x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \geq 5$ $-x_1 + 3x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$9x_1 + 3x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \leq 6$ $-5x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$5x_1 + x_2 \to \max$	$5x_1 + x_2 \leq 10$ $-x_1 + 3x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
66	1	$-x_1 - 2x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \leq 4$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $-2x_1 + 2x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$	**69**	1	$2x_1 + 8x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \geq -2$ $2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$x_1 + 2x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \geq 5$ $-x_1 + 2x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$8x_1 + 8x_2 \to \max$	$-4x_1 + x_2 \leq 2$ $2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$-6x_1 - 2x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \leq 4$ $-x_1 + 2x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$2x_1 + 3x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \geq 9$ $-4x_1 + x_2 \geq 6$ $2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$3x_1 + 2x_2 \to \max$	$-3x_1 - x_2 \geq -4$ $-x_1 + 2x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$-8x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 + 3x_2 \geq 9$ $-4x_1 + x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
67	1	$-6x_1 - 2x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \leq 6$ $-5x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	**70**	1	$3x_1 - 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \geq 5$ $-2x_1 + x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$x_1 + 4x_2 \to \max$	$3x_1 + x_2 \leq 6$ $-5x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$-3x_1 + 4x_2 \to \min$	$-2x_1 + x_2 \leq 6$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $x_1 + 2x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$-5x_1 - 4x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 + x_2 \leq 5$ $-5x_1 + x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$-x_1 - 4x_2 \to \max$	$-2x_1 + x_2 \leq 6$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$5x_1 + 4x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \geq 5$ $-5x_1 + x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$3x_1 + 6x_2 \to \max$	$-2x_1 + x_2 \leq 6$ $x_1 + 2x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$

71	1	$6x_1 - x_2 \to \min$	$3x_1 + 4x_2 \geq 10$ $x_1 - 2x_2 \geq 2$ $5x_1 - x_2 \leq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$	**74**	1	$-5x_1 + x_2 \to \max$	$3x_1 - x_2 \geq 6$ $2x_1 + 2x_2 \geq 5$ $x_1 + 2x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$-6x_1 - x_2 \to \min$	$x_1 - 2x_2 \leq 2$ $5x_1 - x_2 \geq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$-10x_1 - 2x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \geq 5$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$3x_1 + 4x_2 \to \max$	$2x_1 - 4x_2 \leq 4$ $3x_1 + 4x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$2x_1 + 10x_2 \to \max$	$x_1 + 5x_2 \leq 10$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$x_1 + x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 2$ $3x_1 + 4x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$10x_1 + 2x_2 \to \max$	$x_1 + 5x_2 \leq 10$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
72	1	$-5x_1 + x_2 \to \min$	$3x_1 - x_2 \geq 6$ $3x_1 + 5x_2 \geq 18$ $-x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	**75**	1	$x_1 - 4x_2 \to \min$	$2x_1 - 4x_2 \leq 12$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$x_1 + x_2 \to \max$	$3x_1 + 5x_2 \geq 18$ $3x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$x_1 - 4x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \geq 5$ $x_1 - 2x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$4x_1 + 5x_2 \to \max$	$4x_1 + 5x_2 \leq 14$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$4x_1 + 2x_2 \to \max$	$x_1 - 2x_2 \leq 6$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$-4x_1 - 5x_2 \to \min$	$4x_1 + 5x_2 \leq 14$ $3x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$4x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 - 4x_2 \leq 12$ $x_1 + 2x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
73	1	$5x_1 + 6x_2 \to \min$	$2x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \geq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	**76**	1	$5x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$5x_1 + 6x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$-5x_1 + 3x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$5x_1 + 5x_2 \to \max$	$x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 - 2x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$10x_1 + 5x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$5x_1 + 10x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$-x_1 + 3x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$

77	1	$3x_1 + x_2 \to \min$	$3x_1 + 3x_2 \geq 15$ $x_1 + x_2 \leq 3$ $4x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$	**79**	1	$2x_1 + 5x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \geq 6$ $x_1 + 3x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$3x_1 + x_2 \to \max$	$3x_1 + 3x_2 \geq 10$ $4x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$2x_1 + 5x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$3x_1 + 3x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \geq 6$ $x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$2x_1 + 6x_2 \to \max$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + 3x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$6x_1 + 3x_2 \to \max$	$4x_1 - x_2 \leq 6$ $x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$-2x_1 + x_2 \to \min$	$x_1 - 5x_2 \leq 5$ $x_1 + 3x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
78	1	$-8x_1 + 2x_2 \to \min$	$2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $3x_1 + x_2 \geq 9$ $x_1 - 4x_2 \geq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$	**80**	1	$-x_1 - 3x_2 \to \max$	$2x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
	2	$8x_1 + 4x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_1 - 4x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		2	$-x_1 - 3x_2 \to \min$	$x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1 - 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
	3	$x_1 + x_2 \to \max$	$2x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_1 - 4x_2 \leq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$		3	$2x_1 + x_2 \to \max$	$4x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_1 - 2x_2 \leq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$
	4	$-x_1 - 2x_2 \to \min$	$3x_1 + x_2 \geq 9$ $x_1 - 4x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$		4	$-5x_1 - x_2 \to \min$	$4x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_1 - 2x_2 \leq 0$ $x_1, x_2 \geq 0$

Казанская Ольга Васильевна
Юн Светлана Геннадьевна
Альсова Ольга Константиновна

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Редактор *Н.А. Лукашова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Подписано в печать 18.06.2012. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 11,85. Печ. л. 12,75. Изд. № 419/11. Заказ № 973. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20