12171398 신전희

선형대수

3장

1, $(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$

2, 행벡터 $r = [r_1\ r_2 \cdots r_n]$, 열벡터 $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$

3, 곱AB

i, • Ax를

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n \quad n \times 1$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

열벡터와의 결합일때는 바로 앞 Matrix의 열 만 보면된다

• B가 $s \times n$행렬, $\mathbf{y}$는 성분이 $y_1, y_2, \cdots, y_s$인 행벡터

$$\mathbf{y}B = y_1\mathbf{r}_1(B) + y_2\mathbf{r}_2(B) + \cdots + y_s\mathbf{r}_s(B)$$

$[y_1\ y_2 \cdots y_n]$

행벡터와의 결합일때는 바로 뒤 Matrix의 행만 보면된다

ii, $A(Bx) = (AB)\underset{\sim}{x}$ 열벡터

$Bx = [b_1\ b_2 \cdots b_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 b_1 + x_2 b_2 \cdots x_n b_n$

$A(Bx) = A(x_1 b_1 + x_2 b_2 \cdots x_n b_n) = x_1(Ab_1) + x_2(Ab_2) + \cdots x_n(Ab_n)$

☆ iii, $A: m \times s$, $B: s \times n$, $[b_1\ b_2\ b_3 \cdots b_n]$: B의 열벡터들의 집합

A는 그대로 따라간다.

$AB = [Ab_1\ Ab_2 \cdots Ab_n]$

iv, $(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{is}b_{sj}$

scalar $= \underset{\sim}{r_i(A)c_j(B)}$

$1 \times s \cdot s \times 1 = 1 \times 1$ Scalar

v, AB의 특정 행,열 구하기 (AB의 행은 A의 행으로 결정, 열은 B의 열로 결정)

$c_j(AB) = Ac_j(B)$ ⋯ 열규칙

$r_i(AB) = r_i(A)B$ ⋯ 행규칙

vi 전치행렬 A^T , 대각합 $tr(A)$

$(A)_{ij} = (A^T)_{ji}$ A의 주대각선 위의 성분들의 합

$m \times n \quad n \times m$

(a) $(A^T)^T = A$	(a) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$
(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$	(b) $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}(A)$
(c) $(A-B)^T = A^T - B^T$	(c) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
(d) $(kA)^T = kA^T$	(d) $\mathrm{tr}(A-B) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B)$
(e) $(AB)^T = B^T A^T$	(e) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

(f) $r: 1 \times n$, $c: n \times 1$

$\underset{\text{내적}}{r \cdot c} = tr(\underset{\text{외적}}{cr})$

$r = k^T$

$k^T c = tr(ck^T)$

vii AB, BA : 같을수도 있고 애초에 식이 성립 안 될수도 있다

교환된다

4, 내적, 외적

i, u,v 같은 크기의 열벡터 ⇒ $u \cdot v = u^T v$ $[\quad]_{1 \times m} [\quad]_{m \times 1} = [\ ]$ Scalar

행벡터일때는X

임의의 크기 ⇒ $u \times v = uv^T$ $[\quad]_{m \times 1} [\quad]_{1 \times s} = [\quad]_{m \times s}$ matrix

ii, $u^T v = tr(uv^T)$, $u^T v = u \cdot v = v \cdot u = v^T u$, $tr(uv^T) = tr(vu^T) = u \cdot v$

• $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$의 행렬내적

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = [u_1\ u_2\ \cdots\ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

• $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$의 행렬외적

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n] = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix}$$

5, 영행렬 : 모든 성분이 영

i, 소거법칙 성립X: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ $B \neq C$

ii, 영이 아닌 행렬의 곱이 0 가능: $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$와 $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $CA = 0$ 이지만 $C \neq 0$ 이고 $A \neq 0$ $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6 항등행렬 : 주대각선 상의 성분 1 , 나머지 0

$AB = BA = I$, A,B 정사각행렬

A: 가역행렬 , if 성립X , A: 특이행렬 (가역행렬 아닌것)

B: 역행렬 A와 B는 서로 역행렬

7, 역행렬 A^{-1}

i, A:가역행렬 , B,C가 A의 역행렬이면 $B = C$

⇒ 가역행렬은 단 한개의 역행렬을 갖는다

ii, 가역행렬일 필요조건 $ad - bc \neq 0$, $ad - bc$: 행렬식(determinant), $det(A)$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ⇒ $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

iii, A가 가역행렬

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$, n이 음이 아닌 정수

(c) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

8, 기본행렬 E : 항등행렬에 한개의 기본행연산

i, 기본행연산: 1, 두 행 서로 바꾸기

2, 한 행에 상수 곱하기

3, 한행의 스칼라 배수를 다른 행에 더하기

ii, 기본행렬은 가역행렬 , 그 역행렬도 가역

$EE_0 = I$, $E_0 E\ I$ ⇒ E_0은 E의 역행렬

iii, 행동치: 유한 번의 기본행연산을 실행하여 얻은 행렬들

$E_k \cdots E_2 E_1 A = B$ $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B$

iv, 반전알고리즘

$\underset{\sim}{E_k \cdots E_2 E_1} A = I_n$ ⇒ $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$, $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$

$\therefore A^{-1} = \underset{\sim}{E_k \cdots E_2 E_1} I_n$

$[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$

9, 부분공간 : R^n의 벡터들로 이루어진 집합이 스칼라 곱과 덧셈에 닫혀있음

벡터 $v_1, v_2 \cdots v_s$는 평면 (부분공간) W을 생성한다

$W = x = t_1v_1 + t_2v_2 \cdots t_sv_s$ (t:상수) $= span\{v_1, v_2 \cdots v_s\}$, 부분공간은 $\{0\}$을 꼭 지나간다

10, 선형계의 해공간 : $Ax = 0$ (homogeneous) ; n개의 미지수를 갖는다면 그 해집합은 R^n의 부분공간

부분공간 $x = t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_sv_s$ 의 기하학적 성질은 $v_1, v_2 \cdots, v_s$ 사이의 관계에 영향

임의의 방정식 $c_1v_1 + c_2v_2 \cdots + c_sv_s = 0$ 일차독립 ; $c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$, 일차종속 ; 하나라도 0 아닌것

일차종속일 필·충: 하나의 벡터가 다른 벡터들의 일차결합일 경우.

$c_1v_1 + c_2v_2 \cdots + c_sv_s = 0$ ⇒ $[v_1, v_2 \cdots v_s] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (let v_n: 열벡터)

식이 자명하지 않은 해를 가졌는지를 판정하는 문제 ⇒ $Ax = 0$ 자명해만을 가짐 $\xleftrightarrow{\text{필·충}}$ A의 열벡터 일차독립

11, 성질 <정리 3.4.9> A가 $n \times n$ 행렬이면 다음 명제들은 동치이다.

(a) A의 기약행 사다리꼴은 I_n이다.

(b) A의 기본행렬의 곱으로 표현할 수 있다.

(c) A는 가역행렬이다.

"동치" (d) $A\mathbf{x} = 0$은 자명한 해만을 갖는다.

(e) R^n의 모든 벡터 $\mathbf{b}$에 대하여 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 해를 갖는다.

(f) R^n의 모든 벡터 $\mathbf{b}$에 대하여 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 오직 한 개의 해만을 갖는다.] A가 넘어가면됨

(g) A의 열벡터들은 일차독립이다.

(h) A의 행벡터들은 일차독립이다.] 기약행 사다리꼴 I_n을 생각, A가 가역 → A^T도 가역 (행과열의관계)

(i) $det(A) \neq 0$

3.5 선형계의 기하학

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&0&2&0\\2&6&-5&-2&4&-3\\0&0&5&10&0&15\\2&6&0&8&4&18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\5\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&0&2&0\\2&6&-5&-2&4&-3\\0&0&5&10&0&15\\2&6&0&8&4&18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}+r\underbrace{\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{v_1}+s\underbrace{\begin{bmatrix}-4\\0\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{v_2}+t\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_3}$$

(1) 의 해집합

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-4\\0\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

(2) 의 해집합

1) W: $Ax=0$의 해집합 $\Rightarrow$ x_0+W: $Ax=b$의 해집합 (x_0: $Ax=b$의 임의의 해)

비동차의 해집합은 동차의 해집합의 평행이동이므로 차원은 같다.

2) A: $m\times n$ 일때 다음 명제는 동치

i) $Ax=0$ 는 자명한 해를 갖는다 ($x=0$)

ii) $Ax=b$ 는 해를 갖지않거나 유일한 해를 가진다

?

자명한 해의 평행이동

3) a: A의 열벡터, $Ax=b \Rightarrow x_1a_1+x_2a_2\cdots+x_na_n=b$

해가 존재하려면 a들은 일차독립 $\Rightarrow$ b가 a의 일차결합으로 표현 $\Rightarrow$ b가 A의 열공간에 속함

4) 초평면 (hyper plane)

$$Ax=b \quad \begin{bmatrix}a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n}\\ \vdots \\ \ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$: 초평면

$a_1x_1+a_2x_2\cdots a_nx_n=0$: " , 법선벡터가 a인 초평면, $a^{\perp}$

$(x_1,x_2\ldots,x_n)$은 초평면에 속함 $\Rightarrow$ A의 행벡터에 X는 수직이다

3.6 특수 형태의 행렬

1, 대각행렬 $D=\begin{bmatrix}d_1&0&\cdots&0\\0&d_2&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\\0&\cdots&&d_n\end{bmatrix}$, D^{-1}(역행렬) $=\begin{bmatrix}1/d_1&0&\cdots&0\\\vdots&1/d_2&&\vdots\\&&\ddots&\\0&\cdots&&1/d_n\end{bmatrix}$, D^k(거듭제곱) $=\begin{bmatrix}d_1^k&0&\cdots&0\\&d_2^k&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\\0&\cdots&&d_n^k\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1a_{11}&d_1a_{12}&d_1a_{13}&d_1a_{14}\\d_2a_{21}&d_2a_{22}&d_2a_{23}&d_2a_{24}\\d_3a_{31}&d_3a_{32}&d_3a_{33}&d_3a_{34}\end{bmatrix}$$ 행으로 들어감

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1a_{11}&d_2a_{12}&d_3a_{13}\\d_1a_{21}&d_2a_{22}&d_3a_{23}\\d_1a_{31}&d_2a_{32}&d_3a_{33}\\d_1a_{41}&d_2a_{42}&d_3a_{43}\end{bmatrix}$$ 열로 들어감

2, 삼각행렬 : $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&a_{44}\end{bmatrix}$: 상부삼각행렬 (대각성분 0가능), 하부 " : 상부 전치

i) 하부들의 곱 : 하부, 상부들의 곱 : 상부

ii) 삼각행렬이 가역일 필충 : 대각성분 0아님

iii) 하부 역행렬은 하부, 상부 역행렬은 상부

3, 대칭행렬 : $A^T=A$ (대칭행렬), $A^T=-A$ (반대칭)

i) A,B 대칭 $\rightarrow$ $(AB)^T=B^TA^T=BA$: 대칭행렬의 곱이 대칭행렬일 필충은 행렬들이 교환될때이다.

ii) 대칭행렬의 가역성 : 주대각선 성분에 0이있으면 가역X, A가 가역대칭 $\Rightarrow$ A^{-1} : 대칭

$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$

iii) A: $m\times n$, A^T: $n\times m$ $\Rightarrow$ $AA^T(m\times m)$, $A^TA(n\times n)$ $\Rightarrow$ $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$, $(A^TA)^T=A^TA$

$\Rightarrow A^TA$는 대칭

A가 정사각행렬이면 행렬 A, AA^T, A^TA 는 모두 가역 or 모두 특이 행렬(가역X)

4, 고정점 (Fixed point)

$Ax=x$ ($(I-A)x=0$) 의 해를 A의 고정점이라 한다. , $x=0$은 임의의 행렬 A의 고정점 , $x=0$ 외의 해가 관심

5, 행렬 다항식에 대한 대수는 일반적인 대수와 흡사. $(1-x)(1+x+x^2\cdots x^{k-1})=1-x^k$ (일반적 대수)

$(I-A)(I+A+A^2\cdots+A^{k-1})=I-A^k$

if, A가 정사각행렬, $A^k=0$ $\Rightarrow$ $I-A$는 가역이고 $(I-A)^{-1}=I+A+A^2\cdots A^{k-1}$

if, A가 정사각행렬, 각 열(또는 각행)의 성분들의 절대값의 합이 1보다 작으면 $I-A$는 가역행렬이고

$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots$: $(I-A)^{-1}$의 거듭제곱수 표현

3.7 LU분해

1) L: 하부행렬, U: 상부행렬 (사다리꼴)

$Ax=b$, $A=LU$ $\Rightarrow$ $LUx=b$ $\Rightarrow$ $Ux=y$, $Ly=b$ 두개의 선형계 풀어야함

2) $E_k\cdots E_2E_1A=U$ (A의 행교환 없어야 함)

$A=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}U$, $A=LU$ $\Rightarrow$ $L=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$

$\Rightarrow$ 정사각행렬 A를 행교환 없이 Gauss 소거로 행사다리꼴로 변환할수 있으면 A는 LU분해을 가진다

삼각행렬은 정사각행렬에서만 정의

3, L 찾기

i, A를 U로 변환

ii, L의 주대각선 : U를 만드는 곱하기의 역수를 넣음

iii, L의 주대각선 아래 : U를 만드는 과정에서 성분을 0으로 만들기 위하여 선행1에 곱하는 수의 음수

$$A=\begin{bmatrix}6&-2&0\\9&-1&1\\3&7&5\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\bullet&0&0\\\bullet&\bullet&0\\\bullet&\bullet&\bullet\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}&0\\9&-1&1\\3&7&5\end{bmatrix}\longleftarrow 곱수 = \frac{1}{6} \qquad \begin{bmatrix}6&0&0\\\bullet&\bullet&0\\\bullet&\bullet&\bullet\end{bmatrix}$$

주대각선 역수곱함

$$\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}&0\\0&2&1\\0&8&5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\longleftarrow 곱수 = -9\\\longleftarrow 곱수 = -3\end{matrix} \qquad \begin{bmatrix}6&0&0\\9&\bullet&0\\3&\bullet&\bullet\end{bmatrix}$$

주대각선 아래 -곱의수 곱함

$$\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&8&5\end{bmatrix}\longleftarrow 곱수 = \frac{1}{2} \qquad \begin{bmatrix}6&0&0\\9&2&0\\3&\bullet&\bullet\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\longleftarrow 곱수 = -8 \qquad \begin{bmatrix}6&0&0\\9&2&0\\3&8&\bullet\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\longleftarrow 곱수 = 1 \qquad L=\begin{bmatrix}6&0&0\\9&2&0\\3&8&1\end{bmatrix}$$

4, LDU

· $L=L'D$: L의 대각성분을 1로 만드는 과정

$$\underset{L}{\begin{bmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}}=\underset{L'}{\begin{bmatrix}1&0&0\\a_{21}/a_{11}&1&0\\a_{31}/a_{11}&a_{32}/a_{22}&1\end{bmatrix}}\underset{D}{\begin{bmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{bmatrix}}$$

4장 행렬식

1, 기본곱 (Elementary product) : 서로 다른 행과 서로 다른 열에서 하나씩 n개의 원소를 택하여 곱

$\boxed{a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}\cdots a_{n\_}}$ (한 덩어리가 기본곱) , $\{j_1, j_2, j_3\}$: 기본곱의 부호

$j = (-1)^k$, k : 열번호 순열을 자연순서로 $\underset{(1,2,3\cdots)}{}$ 만드는 교환수

교환방법 : 순열의 앞자리부터 순서대로 배치 (1을 첫번째 자리에 넣기 → 2를 두번째 자리에 넣기)

2, 일반행렬식 (n×n) : det(A) , 기본곱들의 합

Ⅰ, $\underbrace{a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}}_{\text{행조건의 위치는 변함X}}\cdots a_{n\_}$: 행의 자연순서에서 이미 서로 다른 행조건을 만족 → (1,2,3⋯,n)을 중복하지 않고 순열 → 서로 다른 열 조건 만족

Ⅱ, 행렬 A가 0으로 구성된 행 or 열을 가지면 det(A) = 0

Ⅲ, A가 삼각행렬이면 det(A) 는 주대각선 곱 ⇒ |A|를 구할때 , A = L·U or A = LDU로 바꿔서 풀면 편함

3, 소행렬식 , 여인수

Ⅰ, a_{ij}의 소행렬식 M_{ij} : 정방행렬 A에서 (정사각행렬) i행과 j열을 삭제해서 얻은 행렬식

a_{ij} 의 여인수 C_{ij}(cofactor) : $(-1)^{i+j}M_{ij}$ → $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ → $C_{32} = -1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

행렬식 그대로 따라온다.
보이는 대로

3X3 행렬식 여인수 전개 :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \end{aligned}$$

Ⅱ, 기본행 연산의 영향 ⇒ 0을 활용한다.

(a) 행렬 A를 한 행(열)에 상수 k를 곱하여 얻은 행렬을

공배수를 앞으로 빼낸다고 생각 → $B \Rightarrow \det(B) = k\det(A)$ → $\det(kA) = k^n\det(A)$

(b) 행렬 A의 두 행(열)을 교환하여 얻은 행렬을 $B \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$ (여인수 전개로 생각)

(c) 행렬 A의 한 행(열)에 다른 한 행(열)의 상수배를 더한 행렬을 $B \Rightarrow \det(B) = \det(A)$ ⇒ 계산간략화 (0을 만듦)

(d) A,B가 같은 크기의 정방행렬이면 det(AB) = det(A) · det(B) ⇒ L·U 분해 활용 ($\det(A^n) = [\det(A)]^n$)
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ [$AA^{-1} = I$ 이용)

(e) A가 정방행렬이면 A의 두행 또는 두열이 같거나 비례하면 det(A) = 0

4, adj(A) : 딸림행렬

Ⅰ, 어떤 행(열)의 성분과 다른 행(열)의 성분의 여인수들을 곱하면 그 합은 0 (ex, $a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$)

Ⅱ, C_{ij}가 a_{ij}의 여인수이면 $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$ 의 전치행렬을 A의 딸림행렬 (adj(A))

Ⅲ, $A \cdot adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & & \\ C_{1n} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & & \ddots \ |A| \end{bmatrix} = \det(A) \cdot I$

∴ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$ [$\underline{x}\,\underline{y} = \underline{z}$ 일때 $\underline{z}$의 성분 z_{ij}는 x의 i행과 y의 j열의 곱의 합
⇒ i≠j 이면 Ⅰ에 의해 0]

5. Cramer 규칙

$Ax = b$ 가 유일한 해를 가질 필·충 조건은 det(A) ≠ 0 이며 해는

$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$, $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$, ⋯ $x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$ [A_j는 A의 j번째 열이 b로 바뀐것]

6, 기하학적 설명

A(2X2) , |det(A)| 는 A의 2개의 열벡터로 이루어지는 평행사변형의 넓이

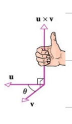
A (3X3) , 〃 3개의 열벡터로 이루어지는 평행육면체의 부피

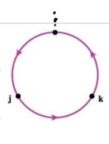
$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ 로 주어진 삼각형 , $\triangle P_1P_2P_3$의 면적 $= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$

7. 외적

Ⅰ, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ (열벡터는 해당 X)

$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$ "정의"

$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$, u×v 방향 

, 순방향 : 

Ⅱ, (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (반대로 회전

(b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(d) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

(e) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(f) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Ⅲ, $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin\theta$ ⇒ u, v가 이루는 평행사변형 넓이 $A = \|u \times v\|$

8. 고정점

Ⅰ, n×n 행렬 A의 고정점은 $A\underline{x} = \underline{x}$ ⇒ $(I-A)\underline{x} = 0$

if, $(I-A)^{-1}$ 존재하면 $\underline{x} = \underline{0}$ (자명한 고정점)

else. 〃 존재X $\underline{x} = \square$ (자명하지 않은 고정점) ⇒ det(I-A) = 0

9, 고유값과 고유벡터 (A는 행렬이고 λ는 스칼라인것에 주목)

Ⅰ, 고유값 : A가 n×n 행렬 , $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ 인 0이 아닌 $\underline{x}$가 존재하면 λ를 A의 고유값

고유벡터 : 그 λ에 대응하는 $\underline{x}$

Ⅱ, $A\underline{x} = \lambda I\underline{x}$ or $(\lambda I - A)\underline{x} = 0$ ⇒ $\det(\lambda I - A) = 0$: 특성방정식

Ⅲ, · if, A가 삼각행렬 , A의 고유값 : 주대각성분

· $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$ ⇒ λ^k는 A^k의 고유값이고 $\underline{x}$는 대응하는 고유벡터.

Ⅳ, 2X2 행렬의 고유값 분석

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$

$= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$

6장 선형변환

1, 변환으로서의 행렬

i) 함수 : T가 $\underline{x}$부터 $\underline{w}$로 사상하는 변환이면 $\underline{w} = T(\underline{x})$: $\underline{x} \xrightarrow{T} \underline{w}$

ii) 행렬변환 : $\underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{x}_{n\times 1} = \underbrace{Y}_{m\times 1}$: $\underline{x}(R^n) \to \underline{Y}(R^m)$, $\underline{x} \xrightarrow{T_A} A\underline{x}$

iii) 선형변환 : 1, 동차성 : $f(cx) = cf(x)$
2, 가산성 : $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$] homogeneity

3, 특성들 : $\cdot\ T(0) = 0$, $\cdot\ T(-u) = -T(u)$, $\cdot\ T(u-v) = T(u) - T(v)$

iv $R^n \to R^m$ 이 선형변환 → 행렬변환

1, $\underline{x}$: 열벡터 ⇒ $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots x_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ ⇒ R^n에서 임의의 $\underline{x}$는 R^n의 표준벡터의 1차결합

2, $T(\underline{x}) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \cdots + x_nT(e_n)$: 선형

3, $T(\underline{x}) = [T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\underline{x}$: 표준단위벡터를 입력하여 "A"를 구할 수 있다.

$A = \begin{bmatrix} (\ ) & (\ ) & \cdots & (\ ) \end{bmatrix}$, 열벡터 $e_1, e_2, \ldots, e_n$

열벡터 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

표준행렬 : y축에 대한 반사 : $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

x축에 대한 반사 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

y=x에 대한 반사 : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

v, 중요한 선형연산자

i) 회전 $R_\theta = [T(e_1)\ T(e_2)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ii) 반사 $H_\theta = [T(e_1)\ T(e_2)] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

iii) 정사영 $P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$ 표준행렬 : x축 위로의 정사영 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

y축 " : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2, 선형 연산자의 기하학

i) 벡터의 길이 or 사이각을 변화시키지 X (회전, 반사) ⇒ $\|T(x)\| = \|x\|$ 을 가지는 선형연산 T을 직교작용소 (orthogonal operator)

- $\|T(x)\| = \|x\|$: 직교 (길이보존) $\xleftrightarrow{동치}$ $T(x)\cdot T(y) = x\cdot y$ (직교 ⊂ 직교작용소)

- 직교작용소(orthogonal operator)는 각과 직교성 보존

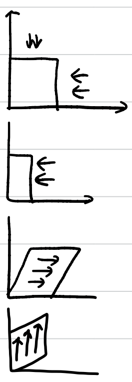
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x\cdot y}{\|x\|\|y\|}\right)$, T : 직교작용소 ⇒ $\cos^{-1}\left(\frac{T(x)\,T(y)}{\|T(x)\|\|T(y)\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x\cdot y}{\|x\|\|y\|}\right)$: 각보존

- T가 직교작용소이면 A는 직교행렬, $A^{-1} = A^T$ $\overset{동치}{\Longleftrightarrow}$ A의 열벡터들은 정규직교벡터들이다.

- $R^2 \to R^2$가 선형직교작용소라면, T는 원점에 관한 회전 or 원점을 통과하는 직선에 대한 반사이다.

$\det(R_\theta) = 1$, $\det(H_{\theta/2}) = -1$

ii) R^2에서 다른 선형 연산자 (표준행렬은 e_1, e_2를 대입)



1, 축약과 확대 : $T(x,y) = (kx, ky)$ $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

$0 \le k < 1$: 축약, $k > 1$: 확대

2, 수평압축과 확대 : " $= (kx, y)$ or (x, ky) x축 : $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y축 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

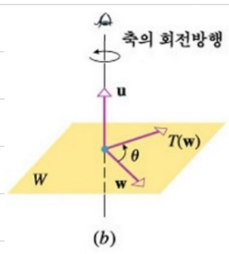
$0 \le k < 1$: 압축, $k > 1$: 확대

3, 층밀림 : " $= (x+ky, y)$ or $(x, y+kx)$ x축 : $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y축 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

iii) R^3에서의 선형 연산자들

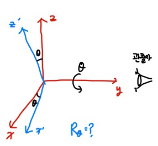
- 유형 : 1, 원점을 지나는 선에 관한 회전 $\det(A) = 1$
2, 원점을 지나는 면에 관한 반사
3, 유형 1 이후 그 직선에 수직인 원점을 지나는 면에 대한 반사] $\det(A) = -1$

1, 회전



- $u = w \times T(w)$, u에서 평면을 봤을때 시계반대 방향

- $R_{y,\theta}$ $e_1 = (1,0,0) \xrightarrow{R_{y,\theta}} (\cos\theta, 0, -\sin\theta)$
$e_2 = (0,1,0) \xrightarrow{R_{y,\theta}} (0, 1, 0)$
$e_3 = (0,0,1) \xrightarrow{R_{y,\theta}} (\sin\theta, 0, \cos\theta)$



- R^3 회전에 대한 문제유형 2가지

i) $\underline{u}, \theta$ 이 알려졌을때, A를 구하라 : $\underline{u} = (a,b,c)$ [단위벡터], $R_{u,\theta}$: 원점을 통과하는 축에 대해서 θ만큼회전

$$R_{u,\theta} = \begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

ii) A가 주어졌을때, $\underline{u}$ θ를 구하라

u는 A의 고정점 $(I-A)\underline{x} = 0$
$u = \underline{w} \times A\underline{w}$ ⇒ $\cos\theta = \frac{w\cdot Aw}{\|w\|\|Aw\|}$ (?)

회전축은 변하지 않으므로

공식화 ⇒ $\cdot \cos\theta = \frac{tr(A)-1}{2}$

$\cdot\ \underline{v} = A\underline{x} + A^T\underline{x} + [1 - tr(A)]\underline{x}$
회전축

3, 핵과 치역

i) ker(T) : 핵, $T : R^n \to R^m$가 선형변환이라면, T를 통해 0으로 보내지는 R^n에서의 벡터집합

ii) A가 m×n 행렬이라면, 선형변환의 핵은 $A\underline{x} = 0$의 해공간
" , 해공간 or T_A의 핵을 null(A)로 표시.

iii) 치역 (range) : 변환 T로 인한 정의역 R^n의 상, A의 열공간 (culumn space) ≠ 핵

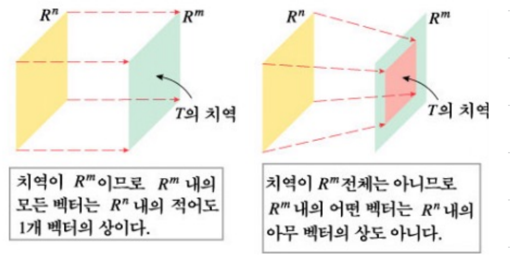
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A\underline{x} = \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

iv) 존재성 질문 : T의 치역은 R^m 자체인가? ⇒ if, O T : 전사변환

유일성 질문 : $R^n \to R^m$의 변환에서 R^n 내의 2개의 다른 벡터들이 R^m에서 같은 상을 가지는가? ⇒ if, X T : 단사변환 (일대일변환)

T는 단사변환이다. $\overset{동치}{\Longleftrightarrow}$ $\ker(T) = \{0\}$

존재성 질문 :



4, 합성과 가역성

i) $[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1]$: T_2, T_1의 표준행렬의 곱이 합성의 표준행렬

ii) 합성은 교환 X

iii) R^3에서 원점을 지나는 축에 관한 회전의 연속이면, 여러번의 회전은 어떤 적절한 축에 관한 한번의 회전.

iv) 인수분해

i) 대각행렬 $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D_2D_1$; x, y으로 압축, 확대

ii) 2×2 유형 : 1, $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{층밀림변환(x)}$ 2, $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}}_{"\ (y)}$ 3, $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{y=x\ 반사}$ 4, $\underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{압축,확대(x)}$ 5, $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}}_{"\ (y)}$

4, 5번에서 k<0이라면 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{y축에\ 대한\ 반사.}\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

R^3에서의 선형연산자들

i, 회전 : x축방향에서 θ	y축 "	z축 "
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
ii, 반사 : xy 평면에 대한 반사	xz	yz
$(x,y,z) \xrightarrow{T} (x, y, -z)$	$(x, -y, z)$	$(-x, y, z)$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
iii, 정사영 ; xy로의 정사영	xz	yz
$(x,y,z) \xrightarrow{T} (x, y, 0)$	$(x, 0, z)$	$(0, y, z)$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. 차원과 구조

1, 기저와 차원

i, $V = span\{v_1, v_2 \cdots v_s\}$: 부분공간

집합 $\{v_1, v_2 \cdots v_s\}$ 이 독립이고 V를생성 : 기저 (basis) : 모든 기저들은 같은 수의 벡터를 가진다.

dim(V) [V의 차원의 수] = 기저에 포함된 벡터의 수

ii, 초평면 $a^\perp$: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \Rightarrow x_n = -\frac{a_1}{a_n}x_1 - \frac{a_2}{a_n}x_2 \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1}$

하나의 선행변수, n-1개의 자유변수 ⇒ 해공간 : n-1, $\dim(a^\perp) = n-1$

2, 기저의 성질

i, if, $S = \{v_1, v_2 \cdots v_s\}$ 가 V의 기저 ⇒ V의 모든 벡터 v는 한가지방법으로 S의 벡터들에 의해 표현

R^n에서의 기저 벡터 $v_k = \{a_1, a_2 \cdots a_n\}$

ii, dim (V) : V의 일차독립벡터의 최대수

iii, 생성 = 일차독립 : K차원의 부분공간을 생성(span) ⇒ k개의 일차독립 벡터들(basis)가 존재해야함

iv, ❖ 통합정리

<정리7.2.7> A가 $n \times n$ 행렬이고 T_A가 표준행렬 A를 가지는 R^n의 일차연산자라 하면, 다음 명제들은 동치이다.

(a) A의 기약 행사다리꼴은 I_n이다.
(b) A는 기본행렬들의 곱으로 표현할 수 있다.
(c) A는 가역이다.
(d) $Ax = 0$는 단지 자명해를 가진다.
(e) $Ax = b$는 R^n 의 모든 벡터b에 대해 해를 가진다.
(f) $Ax = b$는 R^n 이 모든 벡터b에 대해 정확히 하나의 해를 가진다.
(g) $\det(A) \neq 0$ 이다.
(h) $\lambda = 0$ 은 A의 고유값이 아니다.
(i) T_A은 단사이다.
(j) T_A 은 전사이다.
(k) A의 열벡터들은 일차독립이다.
(l) A의 행벡터들은 일차독립이다.
(m) A의 열벡터들은 R^n 을 생성한다.
(n) A의 행벡터들은 R^n 을 생성한다.
(o) A의 열벡터들은 R^n의 기저를 이룬다.
(p) A의 행벡터들은 R^n의 기저를 이룬다.

3, 행렬의 기본공간들

<정리7.3.7>
(a) 기본행연산은 행렬의 행공간을 바꾸지 못한다.
(b) 기본행연산은 행렬의 영공간을 바꾸지 못한다.
(c) 행렬의 행사다리꼴의 영이 아닌 행벡터는 그 행렬의 행공간의 기저를 이룬다.

i, A와 관련된 3공간 (부분공간) : 1, row (A) : 행공간, A의 행벡터들에 의해생성 (차원 : rank(A)) (계수)
2, col (A) : 열공간
3, null(A) : $Ax = 0$의 해공간 (차원 : nullity (A))
⇒ A의 기본공간
row (A) ¦ null(A)
col (A) ¦ null (A^T)

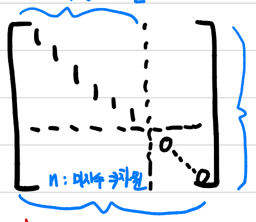
ii, 직교여공간 $S^\perp$: S의 모든 벡터들에 수직한 벡터들의 집합 [if, $S \subset R^n$, $S^\perp \subset R^n$]

iii, if, S : m×n인 행렬 A의 행벡터 집합 ⇒ $S^\perp$: $Ax = 0$의 해공간

⇒ $row(A)^\perp = null(A)$ [$null(A)^\perp = row(A)$], $col(A)^\perp = null(A^T)$ [$null(A^T) = col(A)$]

4, 행렬의 차원정리

i, $A_{m\times n}$ =



$n = \underbrace{r}_{rank} + \underbrace{n-r}_{nullity}$; 자유변수 갯수 (해공간)

$R^n = w + w^\perp$

ii, 일차독립 $\{v_1, v_2 \cdots v_k\}$ 을 알고있는 상태에서 기저를 이루는 다른 벡터찾기
1, null (A) 와 row(A)가 직교하는 것을 이용
2, $v_1, v_2 \cdots v_k$ 를 행벡터로 가지는 행렬 A
3, $Ax = 0$ 을 풀어 영공간에 대한 기저 찾음 (차원정리로 의해 기저는 n-k 벡터)
4, 벡터 $\{w_{k+1}, \cdots, w_n\}$ 찾음 ⇒ R^n의 기저 : $\{v_1, v_2, v_3 \cdots v_k, w_{k+1}, \cdots, w_n\}$

iii, $A = n \times n$, rank(A) = n [nullity(A) = 0] 이면 가역이다.

iv, rank (A) = 1 [nullity(A) = n-1] 일때
1, A의 행공간은 R^n의 원점을 지나는 직선, 영공간은 원점을 지나는 초평면, 서로 직교
2, A의 행공간은 벡터 a에 의해 생성되고, A의 모든 행 벡터들은 a의 스칼라배
3, 열벡터들의 외적을 계산할때 발생

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \Rightarrow uv^T = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ & \vdots & & \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \cdots & u_mv_n \end{bmatrix}$$

v, 계수정리 : 행렬의 행공간과 열공간은 같은 차원을 가진다.

$$\underbrace{Rank(A)}_{\text{행공간의 차원}} = \underbrace{rank(A^T)}_{\text{열공간의 차원}}$$

vi, 전열계수 : 열벡터들이 독립 ⇒ 열벡터들이 열공간의 기저를 이룸 ($Rank(A^T) = Rank(A) = n$) ⇒ A^TA 는 가역
전행계수 : 행 〃 ⇒ 행벡터들이 행공간의 〃 ($Rank(A) = m$) ⇒ AA^T는 가역

n×n을 만들고 A와 같은 행,열,영 공간을가짐

vii, A^TA 와 AA^T ($A - A^TA$, $A^T - AA^T$)

1, $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ (a_k : 열벡터) ⇒ $A^TA = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 & \cdots & a_1 \cdot a_n \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 & \cdots & a_2 \cdot a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n \cdot a_1 & a_n \cdot a_2 & \cdots & a_n \cdot a_n \end{bmatrix}$

2, $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$ (r_k : 행벡터) ⇒ $AA^T = \begin{bmatrix} r_1 \cdot r_1 & r_1 \cdot r_2 & \cdots & r_1 \cdot r_m \\ r_2 \cdot r_1 & r_2 \cdot r_2 & \cdots & r_2 \cdot r_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_m \cdot r_1 & r_m \cdot r_2 & \cdots & r_m \cdot r_m \end{bmatrix}$

3, A와 A^TA (A^T와 AA^T)는 같은 영공간, 행공간, 열공간을 가진다.

4, A와 A^TA (AA^T) 는 같은 계수를 가짐.

viii, 해를 가짐 정리 : 다음 3가지는 동치
1, $Ax = b$는 해를가진다
2. b는 A의 열공간에 있다
3. 행렬 A의 불인 행렬 [A|b]은 같은계수를 가진다.

6, 추축정리

i, 기본행 연산은 행렬의 열공간을 바꾼다.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

그러나, 열벡터들 사이의 종속관계는 유지 → $Ax = 0$ 과 $Bx = 0$은 같은 해집합

ii, 추축열 : 행사다리꼴에서 선행 1을 이끄는 열의 위치에 있는 열벡터들, 열공간에 대한 기저를 이룸

iii, 열-행 인수분해 : A가 계수 K를 가지는 m×n 행렬이면, A는 A=CR로 분해될 수 있다.
C : A의 추축열들이 열벡터인 m×k 행렬
R : A의 기약행사다리꼴의 영이 아닌 k×n 인 행렬

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & 19 \end{bmatrix}$

$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & 19 \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} \underset{R}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}$

iv, 열-행 확장 : $A = c_1r_1 + c_2r_2 + \cdots + c_kr_k$

$c_1 \cdots c_k$ 는 연속적인 추축열, $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 는 A의 기약행 사다리꼴의 연속적인 영이 아닌 행벡터들

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [1\,0\,2] + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} [0\,1\,3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$

순서 맞춰야 함

7, 정사영

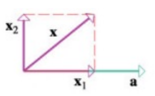
i, $proj_a x$: x의 $W = span\{a\}$ 로의 정사영 $= \frac{x \cdot a}{\|a\|^2} a$, $\|proj_a x\| = \frac{|x \cdot a|}{\|a\|}$

a인것 확인. 제곱인거 확인

$proj_u e_1 = (\cos^2\theta, \sin\theta\cos\theta)$, $proj_u e_2 = (\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta)$ ⇒ P_θ (표준행렬) $= \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$

ii, a에 수직한 x의 벡터성분 : x_2

$x_2 = x - proj_a x$



iii, $T(x) = proj_a x$에 대한 표준행렬 $P = \frac{1}{a^Ta} aa^T$ ⇒ $P = uu^T$ ($u^Tu = \|u\|^2 = 1$)

열형태로 놓여야한다.

a를 a의 스칼라배로 대치해도 P는 안변함

P는 대칭이고 계수는 1이다. a를 열형태로 생각

iv, W가 R^n의 부분공간이면, R^n의 모든 벡터는 한가지 방법으로 표현

$x = x_1 + x_2$ [x_1은 W, x_2는 $W^\perp$에 있다]

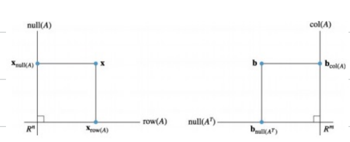
v, M : W에 대한 기저벡터들을 연속적인 열로 가지는 행렬 M.

$proj_W x = M(M^TM)^{-1}M^T x$ $P = M(M^TM)^{-1}M^T$ (암기)

vi, n×n 행렬 P가 대칭이고, 멱등원이고, 계수 K를 가지면

P는 R^n의 K차원 부분공간 위로 R^n의 정사영에 대한 표준행렬

vii, Strang 도표



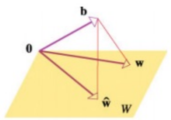
1, $x = x_{row(A)} + x_{null(A)}$
2, $b = b_{col(A)} + b_{null(A^T)}$
3, $Ax = b$가 해를 갖기 위한 필요조건은 $b_{null(A^T)} = 0$ 이다.

viii, $W^\perp$위의 정사영
1, $W^\perp$의 기저벡터들로 이루어진 M의 열벡터 이용
2, $x = proj_W x + proj_{W^\perp} x$ ⇒ $proj_{W^\perp} x = x - proj_W x = Ix - Px = (I-P)x$

$I - P = I - M(M^TM)^{-1}M^T$

7.8. 최적근사와 최소제곱

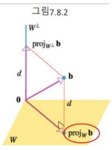
ⅰ, 최소거리 문제



1, R^n의 부분공간 W, $\underline{b}$

$\|b-\hat{w}\| < \|b-w\|$인 b에 가장 가까운 $\hat{w}$를 찾아라, $\hat{w}$: b의 최적근사.

b에 가장 가까운 W 내의 점 : $\hat{w} = proj_W b$ (유일)



2, b에서 W의 거리 $d = \|b - proj_W b\|$ or $\|proj_{W^\perp} b\|$ ($W^\perp$은 W에 수직한 원점을 지나는 직선)

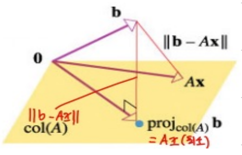
ⅱ, 최소제곱해

1, A는 m×n 행렬, $\|\underline{b}-A\hat{x}\| \le \|\underline{b}-A\underline{x}\|$ 이면

$\hat{x}$: $A\underline{x}=b$ 의 최소제곱해

$b-A\hat{x}$: 최소제곱 오차벡터

$\|b-A\hat{x}\|$: 최소제곱오차



2, $\|\underline{b}-A\underline{x}\|$는 $A\underline{x} = proj_{col(A)} b$ 일때 최소이다.

$\|\underline{b}-A\underline{x}\|$가 최소일때의 $\underline{x}$를 찾자

ⅰ, $b - A\underline{x} = b - proj_{col(A)} b \Rightarrow A^T(b-A\underline{x}) = A^T(b - proj_{col(A)} b)$

ⅱ, $b = proj_{col(A)} b + proj_{null(A^T)} b$: $b - proj_{col(A)} b$가 A^T의 영공간 $\Rightarrow A^T(b - proj_{col(A)} b) = 0$

ⅲ, $\therefore A^T(b-A\underline{x}) = 0 \Rightarrow A^TA\underline{x} = A^Tb \Rightarrow \underline{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

$A\underline{x}=b$의 정규방정식, (A가 전열계수를 가지지 않는다면 A^TA 역행렬 존재X

$A^TA\underline{x} = A^Tb$ 자체에서 x를 구해야 한다.)

ⅲ, 실험 데이터 곡선 맞추기

1, $y = a + bx$ 실험결과 : $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$

2, $y_1 = a + bx_1$
$y_2 = a + bx_2$
$\vdots$
$y_n = a + bx_n$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow Mv = y$$

3, $M^TMv = M^Ty \Rightarrow v = (M^TM)^{-1}M^Ty$

7.9 정규직교기저

ⅰ, 직교기저 : $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$, $v_2 \cdot v_3 = 0$ (서로 직각)

정규직교기저 : 직교기저조건 + ($|v_1|=1$, $|v_2|=1$, $|v_3|=1$) (크기:1)

R^n의 직교집합은 일차독립

ⅱ, 정규직교기저를 이용한 정사영

방법 1 : • M = W에대한 기저를 이루는 행렬, $proj_W \underline{x} = M(M^TM)^{-1}M^T\underline{x}$

• M의 열벡터들이 정규직교라면 $M^TM = I$

• $proj_W \underline{x} = MM^Tx \Rightarrow P = MM^T$

방법2 : • $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$가 W에 대한 정규직교기저 정사영 : $\frac{|x \cdot a|}{\|a\|^2}(a)$

$proj_W x = (x \cdot v_1)v_1 + (x \cdot v_2)v_2 + \cdots (x \cdot v_k)v_k$: 정규직교벡터(직교벡터)의 일차결합

ⅲ, 정규직교기저 벡터들의 일차결합

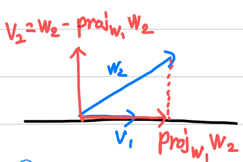
$\{v_1, v_2 \cdots v_k\}$가 R^n의 부분공간 W에대한 정규직교기저, $\underline{w}$가 W의 벡터라면

$\underline{w} = (\underline{w} \cdot v_1)v_1 + (\underline{w} \cdot v_2)v_2 + \cdots + (\underline{w} \cdot v_k)v_k$

↑ $proj_W x$와 같은 공간에 있는것.

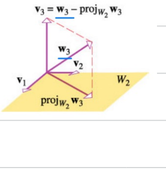
ⅳ, Gram - Schmidt 직교화 과정

W : R^n의 부분공간, $\{w_1, w_2 \cdots w_k\}$: W에 대한 기저 $\Rightarrow$ W에 대한 직교기저 $\{v_1, v_2 \cdots v_k\}$를 만든다.



1, $v_1 = w_1$ 이라 하자

2, $v_2 = w_2 - proj_{w_1} w_2 = w_2 - \frac{w_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1$



3, $v_3 = w_3 - proj_{w_2} w_3 = w_3 - \left(\frac{w_3 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{w_3 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 \right)$

4, $v_4 = w_4 - proj_{w_3} w_4 = w_4 - \left(\frac{w_4 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{w_4 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{w_4 \cdot v_3}{\|v_3\|^2} v_3 \right)$

7.10 Q-R 분해

1, 조건 : A가 $\underline{w_1}, \underline{w_2}, \cdots, w_k$ 를 열벡터로 갖고 전열계수를 갖는 m×k 행렬이다

$A \xrightarrow{G.S.P} Q : \{q_1, q_2 \cdots q_k\}$: 열공간의 정규직교기저

2, $w_1 = (w_1 \cdot q_1)q_1 + 0 + \cdots + 0$

$w_2 = (w_2 \cdot q_1)q_1 + (w_2 \cdot q_2)q_2 + 0 + \cdots + 0$

$\vdots$

$w_k = (w_k \cdot q_1)q_1 + (w_k \cdot q_2)q_2 + \cdots + (w_k \cdot q_k)q_k$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} (w_1 \cdot q_1) & (w_2 \cdot q_1) & \cdots & (w_k \cdot q_1) \\ 0 & (w_2 \cdot q_2) & \cdots & (w_k \cdot q_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (w_k \cdot q_k) \end{bmatrix}$$

cf, j단계의 q_j는 span$\{w_1, w_2, \cdots, w_{j-1}\}$에 직교한다.

$$\therefore \underset{A}{[w_1 w_2 \cdots w_k]} = \underset{Q}{[q_1 q_2 \cdots q_k]} \underset{R}{\begin{bmatrix} (w_1 \cdot q_1) & (w_2 \cdot q_1) \cdots (w_k \cdot q_1) \\ 0 & (w_2 \cdot q_2) \cdots (w_k \cdot q_2) \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 & 0 \quad \cdots (w_k \cdot q_k) \end{bmatrix}}$$

3, Q의 열벡터 정규직교 $\Rightarrow Q^TQ = I$

$\therefore Q^TA = Q^TQR \Rightarrow R = Q^TA$

4, $A\underline{x} = \underline{b}$ 의 해를 구하는 방법

ⅰ, $A^TA\underline{x} = A^T\underline{b} \Rightarrow (R^TQ^T)(QR)\underline{x} = R^TQ^T\underline{b}$

ⅱ, $Q^TQ = I \Rightarrow R^TR\underline{x} = R^TQ^Tb \Rightarrow Rx = Q^Tb$

ⅲ, $\hat{x} = R^{-1}Q^Tb$ ($\hat{x}$: 최소제곱해)

7.11 기저에 대응하는 좌표

1, 용어

R^n의 부분공간 W의 순서기저 $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

$w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$: B에 대응하는 W의 좌표

$(w)_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$: w에 대한 좌표벡터

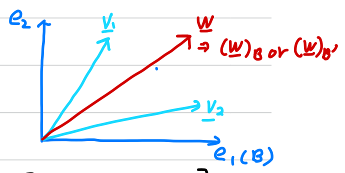
$[w]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$: w의 좌표행렬

2, if, $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$가 W에 대한 정규직교좌표라면

$w = (w \cdot v_1)v_1 + (w \cdot v_2)v_2 + \cdots + (w \cdot v_k)v_k \Rightarrow (w)_B = ((w \cdot v_1), (w \cdot v_2), \cdots, (w \cdot v_k))$

and $\|w\| = \|(w)_B\|$, $u \cdot v = (u)_B \cdot (v)_B$

$P_{B' \to B}$와 $P_{B \to B'}$는 직교행렬(회전 연상해보자) $\Rightarrow P^{-1} = P^T$



3, 기저변화문제 : 기저가 $B \to B'$ 이라면, $[w]_B$와 $[w]_{B'}$의 관계는?

$B = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$, $B' = \{v_1', v_2', \cdots, v_n'\}$

$\Rightarrow [w]_{B'} = P_{B \to B'}[w]_B$, $P_{B \to B'} = [[v_1]_{B'} | [v_2]_{B'} | \cdots [v_n]_{B'}]$

B의 basis를 B'로 표현한것의 column vector 형태

P : B에서 B'로의 추이행렬

cf, $P_{B' \to B} P_{B \to B'} = P_{B \to B} = I \Rightarrow P_{B' \to B}$와 $P_{B \to B'}$는 서로 역

4, 추이행렬 찾는 방법 : [새 기저 | 이전 기저] $\xrightarrow{\text{행연산}}$ [I | 추이행렬]

계수가 n이고 기약행사다리꼴은 항등행렬

8. 대각화

가운데 A가 있으면 $P^{-1}AP$ 이고 D가 있으면 PDP^{-1} 이다.

1 선형변환의 행렬표현

i, 목적: 표준 행렬보다 선형변환의 기하학적 성질을 더 잘 나타내는 행렬을 만들자

ii $T: R^n \to R^n$ 선형연산자, $B = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ R^n의 기저

$[T(x)]_B = [T_B][x]_B$, $[T]_B = [\,[T(v_1)]_B \mid [T(v_2)]_B \mid \cdots \mid [T(v_n)]_B\,]$

↳ $T(v)$를 구하고 B의 기저로 좌표구하기

B에 대응하는 x의 좌표행렬

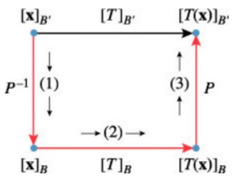
iii, 기저 변환하기

1, i, 상단우측방향: $[T]_{B'}[x]_{B'} = [T(x)]_{B'}$

ii, 반시계방향: $P^{-1}[x]_{B'} = [x]_B$ $\quad P: P_{B \to B'}$

$[T]_B[x]_B = [T(x)]_B$

$P[T(x)]_B = [T(x)]_{B'}$



$\therefore (P[T]_BP^{-1})[x]_{B'} = [T(x)]_{B'}$

$= [T]_{B'}[x]_{B'}$

$\Rightarrow P[T]_BP^{-1} = [T]_{B'}$ $\quad ([T]_B = P^{-1}[T]_{B'}P)$

↖ B에 관련된 것으로 외우자

2, 많은 선형연산자는 표준행렬에 의해 정의 ⇒ $B' = S$로 놓자

⇒ $P = P_{B \to B'} = P_{B \to S} = [v_1 | v_2 | \cdots | v_n]$ $\quad$ P는 B에서 다른걸로 바꾸는거라 생각

$[T] = P[T]_BP^{-1}$, $P = [v_1 | v_2 | \cdots | v_n]$

$\therefore [T]_B = P^{-1}[T]P$, B가 정규직교이면 $[T_B] = P^T[T]P$ $\quad$ 문제에서 제시한거면 역함수 P가 앞에 붙음

cf, ⇒ $[w]_{B'} = P_{B \to B'}[w]_B$, $P_{B \to B'} = [\,[v_1]_{B'} \mid [v_2]_{B'} \mid \cdots [v_n]_{B'}\,]$

$[v_1]_S = v_1$

2. 닮음, 대각화

1, If, A, C가 같은크기의 정사각행렬, $C = P^{-1}AP$를 만족 (두행렬이 동일한 선형연산자를 표현하는 두개의 행렬)

⇒ A와 C는 닮았다, $\det(A) = \det(C)$

A, C는 같은 [공간, 대각합, 고유값, 대수적 중복도, 기하학적 중복도]

2, 대각화

i, 정사각행렬 A에 대해서 $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되는 P가 존재하다면 A는 대각화 가능이라 한다.

A가 n개의 일차독립인 고유벡터를 가지면 대각화 가능

$P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD$, $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$ 와 $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

⇒ $A[P_1\ P_2 \cdots P_n] = [\lambda_1 P_1\ \lambda_2 P_2 \cdots \lambda_n P_n]$

⇒ $AP_1 = \lambda P_1$, $AP_2 = \lambda_2 P_2$, $\cdots$ $AP_n = \lambda_n P_n$: $P_1, P_2 \cdots P_n$은 각각 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$에 대응하는 A의 고유벡터

⇒ A가 n개의 일차독립인 고유벡터 $(P_1, P_2 \cdots P_n)$을 갖는것, 고유값: $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$

ii, 대각화 하는 방법: $A \to \lambda, P \to D = P^{-1}AP$ $\quad P = [P_1\ P_2 \cdots P_n]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

고유벡터의 열벡터

iii, 통합정리:

<정리 8.2.11> A가 $n \times n$ 행렬이면 다음 명제는 동치이다.

(a) A는 대각화 가능이다.

(b) A는 n개의 일차독립인 고유벡터를 갖는다.

(c) R^n은 A의 고유벡터로 이루어진 기저를 갖는다.

(d) A의 고유값의 기하학적 중복도의 합은 n이다.

(e) A의 각 고유값의 기하학적 중복도는 대수적 중복도와 같다.

3. 직교대각화

1, 직교닮음

i, A와 C를 같은크기의 정사각행렬, if, $C = P^TAP$ ⇒ C, A 직교적으로 닮음

⇒ P는 A를 직교대각화한다.

ii, 직교대각화 가능한 $n \times n$행렬 A는 대칭행렬이어야 하고 n개의 고유벡터로 이루어진 정규직교집합 존재

iii, 방법; 1, A의 각 고유공간의 기저 구하기 [$(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$, $(P_1, P_2 \cdots P_n)$ 구하기]

2, $(P_1, P_2 \cdots P_n)$에 Gram-Schmidt 과정 적용 → 정규직교기저 만듦

2, 스펙트럼 분해

i,

$$A = PDP^T = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} = [\lambda_1\mathbf{u}_1\ \ \lambda_2\mathbf{u}_2\ \cdots\ \lambda_n\mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$$

$A = \underbrace{\lambda_1 u_1 u_1^T}_{\lambda_1 \text{에 해당}} + \underbrace{\lambda_2 u_2 u_2^T}_{\lambda_2} + \cdots + \underbrace{\lambda_n u_n u_n^T}_{\lambda_n}$

3, 대각화 가능한 행렬의 거듭제곱

i, $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ ⇒ A가 대각화 가능 $(P^{-1}AP = D)$ ⇒ $P^{-1}A^kP = D^k$

$\therefore A^k = PD^kP^{-1}$

ii, $A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T \cdots + \lambda_n u_n u_n^T$ 인 경우

$A^k = \lambda_1^k u_1 u_1^T + \lambda_2^k u_2 u_2^T + \cdots + \lambda_n^k u_n u_n^T$

4, Cayley-Hamilton 정리 $\quad$ p659, 23번

i, 모든 정사각행렬은 $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ 을 만족 (특성방정식 $\det(\lambda I - A)$)

⇒ $A^n + c_1A^{n-1} + \cdots + c_nI = 0$ ⇒ 고차, A^{-1} 표현가능

ii, A가 $n \times n$행렬, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m \Rightarrow f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$

A를 D로 대각화할 수 있다면 $A = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_n \end{bmatrix}$, $f(A) = \begin{bmatrix} f(d_1) & & \\ & f(d_2) & \\ & & f(d_n) \end{bmatrix}$ $\quad$ A가 대각행렬일때만 이와 같이 표현할 수 있다.

$P^{-1}f(A)P = a_1I + a_2D + a_3D^2 \cdots a_nD^n = f(D)$

⇒ $f(A) = Pf(D)P^{-1}$

iii, 대각화와 선형계

- 대칭행렬 A를 대각화하는 문제는 선형계 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$를 푸는 문제와 밀접한 관련
- A가 대각화 가능이고 $P^{-1}AP = D$
- 새로운 벡터 $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$를 정의하고, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$에 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ (23)
- $AP\mathbf{y} = \mathbf{b}$
- 양변에 P^{-1}을 곱하면 $P^{-1}AP = D$ $\quad D\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{b}$