일반수학 2

10.5 주면과 2차곡면

C: 평면에 놓인 곡선, L: C의 점을 지나고 평면 C에 수직인 직선

i) 주면: C의 점을 지나고 L에 평행한 모든 직선들의 합집합 (3개의 변수중 2개만 가짐)

ii) 괘선: 직선 L에 평행인 주면위의 직선들 (방정식에 없는 변수의 축이 평행)

iii) 회전곡면: 평면 곡선 C를 사용하여 축 L로 회전 $f(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$ ← 이점을 무조건 지난다.

주어진식에 없는 성분의 축으로는 회전X (의미X) 축 축X

2차곡면: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$

1, 타원체면: $|x|<a, |y|<b, |z|<c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2, 타원포물면: $c>0$ (위), $c<0$ (아래)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

3, 타원추면: $z \neq 0$, z는 양,음 모두 가능

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

4, 일엽쌍곡면: $z=0$에서 타원.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

5, 이엽쌍곡면: 두개의 분리된 엽, $|z|>c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$$

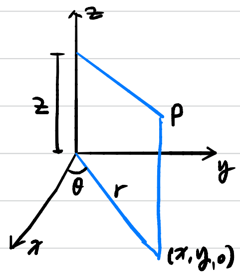
6, 쌍곡포물면: 한방향(yz)으로는 극대, 다른 방향(xz)으로는 극소 (안장점)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c^2}$$

10.6 주면좌표와 구면좌표

12171398 신전희

주면좌표 (r, θ, z): z축에 관하여 대칭인 곡면의 방정식 단순화



i) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $r = x^2+y^2$ ($\neq x^2+y^2+z^2$)

ii) 매개변수방정식: $x(t), y(t)$, $r(t), \theta(t), z(t)$

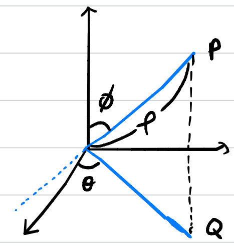
직교좌표: 호의 길이 $S = \int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y'(t)^2 + z(t)^2}$

$x(t) = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta$

$y'(t) = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta$

$\therefore S = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2}\, dt$

구면좌표



i) $r = \rho\sin\phi$, $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$

$x = \rho\sin\phi\cdot\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\cdot\sin\theta$, $z = \rho\cdot\cos\phi$

ii) 매개변수 방정식: $\rho = f(t)$, $\phi = g(t)$, $\theta = h(t)$ $(a \le t \le b)$

$x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $x' = \rho'\sin\phi\cos\theta + \rho\phi'\cos\phi\cos\theta - \rho\theta'\sin\phi\sin\theta$ (하나씩 미분해서 더해줌)

$\therefore S = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\phi'^2 + (\rho^2\sin^2\phi)\theta'^2}\, dt$

미분된X 하나씩

11. 편도 함수

11.1,2 다변수 함수

i, 그래프 : $G = \{(x,y,z) \in R^3 \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$

i, $f(x,y) = C$를 만족하는 f의 정의역 안의 모든 점들의 집합 : 등위곡선

ii, $f(x,y,z) = C$ 〃 : 등위곡면

ii 연속 : 접근하는 경로에 상관없이 $f(x,y)$는 같은 극한을 가져야 극한이 존재

11.1.3 편도함수

i, 편도함수 : $f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$ (y를 상수로 취급), $f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$ (x를 상수로 취급)

$f_x(a,b)$는 $z = f(x,y)$, $y=b$와 만나서 생기는 곡선 $z = f(x,b)$ 위의 점P에서의 기울기

ii 클레로의 정리 : $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$

cf, d대신 ∂를 사용하는 이유는 다변수 함수의 편도함수를 나타내기 위해서이다.

11.4 접평면과 미분

i, $P(a,b,c)$를 지나는 평면의 방정식 : $\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0 \Rightarrow z-c = n(x-a)+m(y-b)$

$\Rightarrow z-c = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$, $c = f(a,b)$

ii, 미분가능 여부 : $z=f(x,y)$의 편도함수 f_x, f_y가 (a,b) 근방에서 존재 and (a,b)에서 연속

iii, 전미분(total differential) : $dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$

dz : 접평면의 높이변화

if, $w = f(x,y,z) \Rightarrow dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$

cf, $\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

11.5 연쇄법칙

i, $z = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

ii, $w = f(x(t), y(t), z(t))$

$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

iii, $w = f(x,y,z)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$, $z = k(s,t)$

$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$, t도 같음

iv 음함수 미분법 : $F(x,y) = 0$, $y = f(x)$

$0 = \frac{dF(x,y)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{F_x}{F_y} \times (-)$

11.6 방향도함수, 기울기 벡터

i, 기울기 벡터 $\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$

$\Delta w \approx \nabla f \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z = \nabla f(p) \cdot v$

ii, 방향도함수 (상수) $D_u f = \frac{dw}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta s} = \nabla f(p) \cdot \underset{\text{단위벡터}}{u}$ $[\, dw = \nabla f \cdot v,\ ds = |v| \,]$

$= |\nabla f(P)| \cos\phi$

$\Rightarrow \cos\phi = 1$ 일때 함수 f는 가장 빨리 증가 ϕ : 점 p에서 ∇f와 단위벡터 u의 사이 각

$\Rightarrow$ 정의역 내의 모든점에서 f는 ∇f와 같은 방향으로 가장 빠르게 증가.

iii, 매개 변수 : $\frac{d}{dt}f(r(t)) = \frac{d}{dt}[f(x(t), y(t), z(t))]$

$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

$= \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$

iv, $F(x,y,z) = 0$ 조건 : i, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\nabla F(p_0) \neq 0$ $\underline{F}$ 함숫값이 0이여서 기울기벡터가 0은아니다. → 순간변화율 : 0 → $D_u f = 0 = \frac{df}{ds}$

ii, $r(t)$: $r(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$인 곡면위의 곡선 ; P_0을 지난다.

$0 = \frac{d}{dt}F(r(t_0)) = \nabla F(r(t_0)) \cdot r'(t_0) = \nabla F(P_0) \cdot r'(t_0)$

$\Rightarrow P_0$을 지나는 모든 곡선들에 직교 $\Rightarrow$ P_0에서 곡면의 법선벡터

$\nabla F(P_0) = n = \frac{\partial F}{\partial x}i + \frac{\partial F}{\partial y}j + \frac{\partial F}{\partial z}k$ ($r(t)$는 증명을 위해서 사용한 것)

v, $z = f(x,y)$를 $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ 으로 쓴다면 법선벡터는 $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right\rangle$

곡면 $F(x,y,z)=0$ 위의 점 $P_0(x_0,y_0,z_0)$에서 접평면은

$F_x(x-x_0) + F_y(y-y_0) + F_z(z-z_0) = 0$

11.7 최대, 최소

i, (a,b)에서 극대, 극소 : 1, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ [필요조건, 이렇다고 꼭 극값이 있는것은 X]

2, 헤시안 Δ

$\Delta = f_{xx}(a,b) \times f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$

i, $\Delta > 0$ [$f_{xx} > 0$ $f(a,b)$: 극소 / $f_{xx} < 0$ $f(a,b)$: 극대]

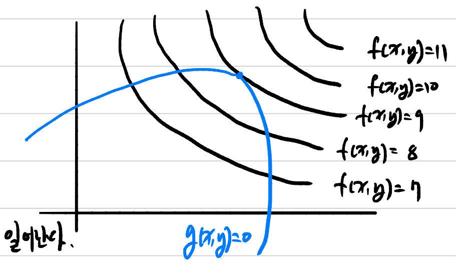
ii, $\Delta < 0$ (a,b) : 안장점

iii $\Delta = 0$ 판정 불가.

ii, 최대 아 최솟값 : 1, $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$ 인 D의 내부점

2, 경계곡선 C 위의 한점

11.8 Lagrange 승수법



$\underset{\text{제약}}{g(x,y)=0}$, f의 최대, 최소 ?

최대 (아 최소)는 $g(x,y)=0$과 $f(x,y)=c$ 가 접할때 일어난다.

$\Rightarrow$ 공통접선을 가지며 같은 법선벡터, 평행한 기울기 벡터

기울기벡터 → $\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$

$\therefore$ $g(x,y)=0$, $f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y)$, $f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y)$: (x,y,λ) 세개의 미지수, 세개의 방정식

[3변수 : $g(x,y,z)=0$, $f_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z)$

$f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z)$

기하학적으로 상상하기 어려움

제약 2개 : $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p) + \mu \nabla h(p)$

12 다중적분

적분범위 기호 확인하기

12.1 이중적분 (직사각형 영역)

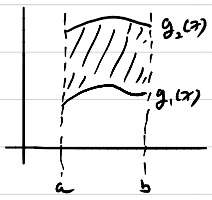
i, 주어진 함수의 밑부분을 사각기둥 다발로 생각 , 사각기둥 다발의 부피합 ≃ 함수 밑부분 부피

직사각형 $R=[a,b]\times[c,d]$ 위의 함수 f

$V=\iint_R f(x,y)\,dA=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ji}^*,y_{ji}^*)\Delta A$, ΔA: 사각기둥 밑변의넓이 , $f(x_{ji}^*,y_{ji}^*)$: 높이 [$n,m\to\infty$ 이면 $f(x_{ji}^*,y_{ji}^*)=f(x,y)$]

$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$

y에 관한 f의 편적분 (x는 상수) → 결과는 x 만의 함수.



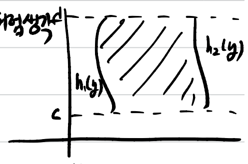
12.2 이중적분 (일반적인 영역)

i, 수직단순

$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$: 높이제한 먼저하고 거리제한

ii 수평단순 (문제풀때 x,y축 변환해서 그려서 정의역 찾기)

$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$: 수직단순과 같은 순서지만 y축을 x축처럼생각

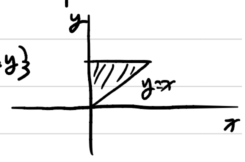


iii, 적분구간과 $f(x,y)$는 별개, 적분구간을 다른 함수라 생각

ex, $\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx$ [$\int_x^1 e^{y^2}dy$ 적분 불가]

수직 → 수평단순 : $R=\{0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}\to R=\{0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$

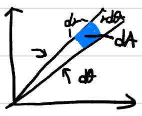
$\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx \Rightarrow \int_0^1\int_0^y e^{y^2}\,dx\,dy$



12.4 . 극좌표 이중적분

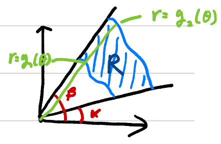
i, 극사각형 영역 : $R=\{(r,\theta)\mid a\le r\le b,\ \alpha\le\theta\le\beta\}$

$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dA=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$, dA: $r\,dr\,d\theta$



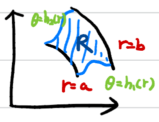
ii, 방사단순 (radially simple) : $\alpha\le\theta\le\beta$, $g_1(\theta)\le r\le g_2(\theta)$

$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$



iii, 각단순 (angular simple) ; $a\le r\le b$. $h_1(r)\le\theta\le h_2(r)$

$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr$



12.5 질량과 무게중심 및 회전관성

Pass.

i, 질량 m : $\iint_R \rho(x,y)\,dA$, ρ : 밀도

$\rho=1$ 이면 질량 = 면적

ii, 무게중심$(\bar{x},\bar{y})$: 1, 평면 : $\bar{x}=\frac{1}{m}\iint_R x\rho(x,y)\,dA$, $\bar{y}=\frac{1}{m}\iint_R y\rho(x,y)\,dA$ 빼먹지 말기

대칭성 먼저 확인

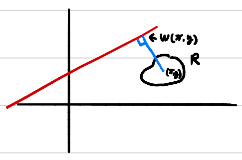
2. 곡선$(\rho=1)$: $\bar{x}=\frac{1}{L}\iint x\,ds$, $\bar{y}=\frac{1}{L}\iint y\,ds$, $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$

if, $\langle x(t),y(t)\rangle \Rightarrow ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

iii, Pappus의 제 1정리 ; 회전체의 부피 = R의 넓이 (평면) X 무게중심과 회전축의 거리

iv, Pappus 의 제 2정리 ; 회전체의 겉넓이 = C의 길이 (곡선) X "

v, L에대한 R의 회전관성 ; $I=\iint_R w(x,y)^2\rho(x,y)\,dA$



축이 z축일 경우 ; $I_0=\iint r^2\rho(x,y)\,dA$

12.6 곡면의 넓이

i, 임의의 곡면 ; $r(x,y)=\langle x,y,f(x,y)\rangle$ 두가지 방법

ex, 1, $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 25)\Rightarrow r(u,v)=\langle u,v,u^2+v^2\rangle$, $r(u,v)=\langle u\cos v,u\sin v,u^2\rangle$

2, 중심이 원점인 구 $\Rightarrow r(u,v)=\langle \rho_0\sin u\cos v,\ \rho_0\sin u\sin v,\ \rho_0\cos u\rangle$

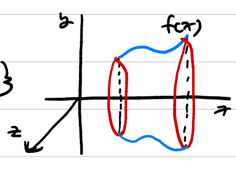
ii, 곡면의 넓이 S 평행사변형

$S=\iint_R\left|\frac{dr}{dx}\times\frac{dr}{dy}\right|dx\,dy$, $r(x,y)=\langle x,y,f(x,y)\rangle$

$=\iint_R\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$

iii, 회전체의 겉넓이 S' , $R=\{(u,v)\mid a\le u\le b,\ 0\le v\le 2\pi\}$

$r(u,v)=(u,\ f(u)\cos v,\ f(u)\sin v)$: 회전체곡면의 함정



$S'=\iint_R\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|du\,dv=\int_a^b 2\pi f(u)\sqrt{1+f'(u)^2}\,du$. $\left(\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|=f(u)\sqrt{f'(u)^2+1}\right)$

iv, 주면좌표

$r(r,\theta)=\langle r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ g(r,\theta)\rangle$

$S=\iint_R\left|\frac{\partial r}{\partial\theta}\times\frac{\partial r}{\partial r}\right|dr\,d\theta=\iint_R\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)^2}\cdot r\,dr\,d\theta$

$dr\,d\theta$ 그대로 들어감 . $r\,dr\,d\theta$ X

가능 $r_x\times r_y\to r_r\times r_\theta$

cf, torus : $(x-b)^2+z^2=a^2$ 을 z축으로 회전 [도넛 모양)

$S=4\pi^2ab$

12(7,8) 삼중적분

i, 직교좌표계

$\iiint_T f(x,y,z)\,dV=\iint_R\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$, 일반적인 3차원 기하학적 부피문제는 $f(x,y,z)=1$

xy 평면으로 사영시키고 z축 여로 보기

ii, 주면좌표계 (극좌표)

$\iiint_T f(x,y,z)\,dV=\iint_{R(r,\theta)}\int_{g(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{h(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$

iii, 구면좌표계

미소 체적의 부피 $\simeq \Delta\rho\times\rho_0\Delta\phi\times\rho_0\sin\phi_0\Delta\theta=\rho_0^2\sin\phi_0\Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta$

$\iiint_T f(x,y,z)\,dV=\iiint_{T(\rho,\phi,\theta)} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

iv, 계산을 간단하게 하기위해서는 문제에 적합한 좌표계를 선택.

직교와 주면 사이에 결정시에는 z의 차이에 주목해본다.

R; 2차원 (x,y 평면) 에서의 영역 ,면

T; 3차원에서의 영역

C; 곡선

S; 3차원 공간속에 곡면) 벡터영역

cf, $r(\phi,\theta)=(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)$

$r_\phi\times r_\theta=(a^2\sin^2\phi\cos\theta,\ a^2\sin^2\phi\sin\theta,\ a^2\sin\phi\cos\phi)$

$|r_\phi\times r_\theta|=a^2\sin\phi$

$r(x,y)=\langle x,y,f(x,y)\rangle$

$r_x\times r_y=\langle -\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\rangle$

$|r_x\times r_y|=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

13장 Vector complehention

1, 벡터장

Ⅰ, 벡터장 F : $F(x,y,z) = \langle P, Q, R \rangle = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$

Ⅱ, 미분연산 : 1, ∇f (그레디언트) $= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right\rangle$

미분가능 함수 → 벡터장

2, $\nabla \times f$ (컬) $= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle$

벡터장 → 또다른 벡터장

3, $\nabla \cdot F(x,y,z)$ (다이버전스) $: \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$

벡터장 → 함수

Ⅲ, 미분연산특징 : 1, $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

2, $\nabla \times (fF) = f\nabla \times F + \nabla f \times F$

3, $\nabla \cdot (fF) = f\nabla \cdot F + \nabla f \cdot F$

4, $\nabla \times (\nabla f) = 0$

5, $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$] f의 2계 편미분은 순서에 관계없이 같다

6, $\nabla \times \nabla f = (0,0,0)$

7, $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F$

2, 선적분

Ⅰ, $\int_c f\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i), y(t_i), z(t_i))\sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2}\,\Delta t$

$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$

Ⅱ, $\int_c f\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i), z(\bar{t}_i))\,x'(t)\Delta t$

$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\frac{dx(t)}{dt}dt$ (y와 z도 마찬가지) , x아y아z 경로가 달라지면 값도 달라진다.

Ⅲ, 곡선 C의 방향을 바꾸었을때 $\int_c f\,ds$ 의 적분값은 변하지 않는 반면에 $\int_c f\,dx$ (or y, z)의 적분값은 부호가 바뀐다.

1, $\int_{-c} f\,ds = \int f\,ds$

2, $\int_{-c} f\,dx = -\int_c f\,dx$

Ⅳ, 단위접선벡터 $T(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|} = \frac{x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}$, $r(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$

$ds = |v(t)| \cdot dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$ 이므로

$\int_c F \cdot T\,ds = \int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ $[(x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k) \cdot dt = dx\,i + dy\,j + dz\,k]$

또한 $T \cdot ds = \frac{v(t)}{|v(t)|} \cdot |v(t)|dt = v(t)\,dt = \frac{d}{dt}(r(t))dt$ 이므로

$\int_c F \cdot T\,ds = \int_c F \cdot dr$: 어느 입자가 $F(x,y,z)$에 의해서 곡선 C를 따라 움직일때 , 이 입자가 한 일

Ⅴ, 벡터장의 선적분 : $\int_c F \cdot ds = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t)\,dt$

3, 경로에 무관한 선적분

Ⅰ, If $F = \nabla f$ $\left[\begin{array}{l} P(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ Q(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ R(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{array}\right]$ $\Rightarrow \int_c \nabla f \cdot T\,ds = \int_c \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

$= f(B) - f(A)$ $[\int_A^B \nabla f \cdot T\,ds]$

⇒ 경로에 무관 , F는 보존적 , f를 F에 대한 퍼텐셜 함수

Ⅱ, 주어진 벡터장 F가 보존적일 경우 (퍼텐셜 함수를 가질조건)

1, 블록영역 U : 공간 U 안에 있는 두점 A, B에 대해서 두점을 연결하는 선분이 U안에 있는 경우

2, 포앙카레 보조정리 : $\nabla \times F$ (컬) $= 0$ 이면 $F = \nabla f$ (보존적)

2차원에서는 $\nabla \times F = \left\langle 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle$ 이므로 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 이면 F는 보존적

Ⅲ, 물리적해석 : If 역장 F 가 보전적

1, 위치E : $F = -\Delta\phi$ ⇒ $-\phi$가 F의 퍼텐셜 함수, ϕ : 위치E

$W = \int_A^B F \cdot T\,ds = -\phi(B) - (-\phi(A)) = \phi(A) - \phi(B)$: 퍼텐셜 에너지 감소 = 일

2, 운동E : $F = ma = mr''(t)$

$W = \int_A^B F \cdot T\,ds = \frac{m}{2}(|V_B|^2 - |V_A|^2)$

3, 역학적E : $\phi(A) - \phi(B) = \frac{m}{2}(|V_B|^2 - |V_A|^2) \Rightarrow \phi(A) + \frac{m}{2}|V_A|^2 = \phi(B) + \frac{m}{2}|V_B|^2$

역학적 E 보존.

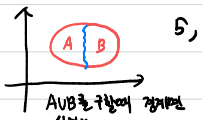
4, Green 정리

Ⅰ, Green 정리 : 1, C는 폐곡선 ⇒ $\int_c (P\,dx + Q\,dy) = \oint_c (P\,dx + Q\,dy)$

2, C는 연속이고 유한개의 꼭짓점을 제외하고 미분 가능

3, C를 매개변수식으로 나타냈을때 t가 증가함에 반시계 방향으로 진행하면 양(+)

4, $\oint_c (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)dx\,dy$



AUB로 구할때 경계면 신경X

5, C 내의 영역이 A, B로 나뉘어 있을경우 (or 여러구역으로 나뉘어 있을 경우)

$\iint_{A\cup B} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy = \int_{A\cup B\text{의 경계}} (P\,dx + Q\,dy)$

Ⅱ, 따름정리 : A : 폐곡선 C로 둘러싸인 영역 D의 넓이

$A = \frac{1}{2}\oint_c (-y\,dx + x\,dy) = -\oint_c y\,dx = \oint_c x\,dy = \iint 1\,dx\,dy$

Ⅲ, 두개의 폐곡선으로 둘러싸인 경우 : 1, 바깥쪽 (반시계 방향) , 안쪽 (시계방향) 이어야 한다

2, $\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)dx\,dy = \int_{C_1 \cup C_2} (P\,dx + Q\,dy)$

C_1, C_2 사이의 영역

Ⅳ, 벡터형태 : 1, $F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ (D 안에서 미분가능한 벡터장)

2, $C(t) = x(t)i + y(t)j$ (D의 경계)

3, $T(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|} = (x'(t)i + y'(t)j)/\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

4, $n = T(t) \times k = \frac{x'(t)i \times k + y'(t)j \times k}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}i - \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}j$ (C 바깥쪽에 대한 법선벡터)

$ds = |v(t)|dt$

5, $\therefore \int_c F \cdot n\,ds = \int_c P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy$

6, $\nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \int_c F \cdot n\,ds = \int_c P\,dy - Q\,dx = \iint_D \nabla \cdot F\,dA$

Ⅴ, C_r : 중심이 (x_0, y_0)이고 n이 C_r의 외향법선벡터

$\nabla \cdot F(x_0, y_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F(x,y) \cdot n(x,y)\,ds$

13.5 곡면적분

Ⅰ, 주어진 적분범위를 $r(\_,\_)$ 두가지 변수로 나타내야함 (ex, (x, y), (ϕ, θ))

곡면의 넓이 $dS = \left|\frac{dr}{du} \times \frac{dr}{dv}\right| du\,dv$ r(x, y)로 시작하면 $dx\,dy \to r\,dr\,d\theta$

곡면적분 : $\iint_S f\,dS = \iint_R f(r(u,v))\left|\frac{dr}{du} \times \frac{dr}{dv}\right| du\,dv$ r(r, θ)로 " 그냥 $dr\,d\theta$

3차원

Ⅱ, 벡터장에 대한 유량 (flux)

1, 유향곡선 : 각 점에서 연속인 단위 접선벡터 존재

단위 접선 벡터 n : $\frac{\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}}{\left|\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}\right|}$

$F \cdot n|S_1|$ = 벡터장 F가 단위시간에 S_1을 통해서 n방향으로 유출 된 양

$\iint_S F \cdot n\,ds$ = 곡면 S를 통한 벡터장의 유량 (flux)

F·n이 양수 : 유출 , 음수 : 유입 ⇒ $\iint_S F \cdot n\,ds$는 순수하게 n방향으로 유출된 총량

13.6 발산정리

1, 발산정리 $\int_c F \cdot n\,ds = \iint_D \nabla \cdot F\,dA = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dA$

공간 T를 둘러싸는 미·가 폐곡면 S , S의 외향 단위법선벡터 n , F : T 안에서 정의된 벡터장

Ⅰ, $\iint_S F \cdot n\,dS = \iiint_T \nabla \cdot F\,dV = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$ 강 외워~

Ⅱ, 영역 T에 있는 임의의 점 (x_0, y_0, z_0)이 중심인 구를 S_r이라 한다. S_r의 부피 : $\frac{4}{3}\pi r^3$

$\nabla \cdot F(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{V_r} \iint_{S_r} F \cdot n\,ds = \lim_{r\to 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint_{S_r} F \cdot n\,ds$

2, Laplacian

$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

조화함수 : $\nabla \cdot \nabla f = 0$

3, f의 법선 방향 도함수 $\frac{\partial f}{\partial n}$: $\nabla f \cdot n(x,y,z)$

왜 S? 함수영역 아닌가...

4, Green의 제1공식 : $\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS = \iiint_T (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)dV$

· let, f=1 ⇒ $\nabla f = 0$, $\iint_S \frac{\partial g}{\partial n}dS = \iiint \nabla^2 g\,dV$

· let, f=g ⇒ $\iint_S g\frac{\partial g}{\partial n}dS = \iiint_T \nabla(g\nabla g)\,dV = \iiint_T (g\nabla^2 g + |\nabla g|^2)\,dV$

13.7 Stokes 정리

1) let, $F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$

Green 정리 : $\oint_C F\cdot T ds = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy$

F를 3차원 벡터장으로 보면 $F(x,y,z) = P(x,y)i + Q(x,y)j + 0k$

$\nabla \times F = 0i + 0j + \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)k$

$\therefore \oint F\cdot T ds = \iint_D (\nabla \times F)\cdot k \, dxdy$

경계선 내부

n을 D의 단위법선 벡터라 한다면 $n = k$, 평면에서는 $dxdy = dS$

$\therefore \oint_C F\cdot T ds = \iint_D (\nabla \times F)\cdot n \, ds$ n: C_r에 수직한 방향, n 방향에서 T방향으로 나사 돌릴때 안쪽이면 양(+)

곡선 C: 양의 방향인 S의 경계, T: 양의 방향으로의 C의 단위접선벡터

폐곡면일 경우 $\iint_D (\nabla \times F)\cdot n ds = 0$

Stokes 정리: F의 접선성분을 경계곡선에 따라 선적분한 값과 컬 F의 법선성분을 곡면 적분한 값은 같다.

곡면의 n을 구하기 쉬우면 $\iint_D (\nabla \times F)\cdot n dS$, dS: 곡면적분요소 $T ds = v(t) dt$

" 어려우면 곡선의 매개 방정식에서 C(T)를 구함, C(T)는 경계곡선으로 여러개 나올 수 있음

그리고 $\iint_D (\nabla \times F)\cdot n ds$를 구하라 하면 $\oint_C F\cdot T ds$로 구하고

$\oint_C F\cdot T ds$를 구하라 하면 $\iint_D (\nabla \times F)\cdot n ds$를 구하면 된다.

2) $\int_{C_r} F\cdot T ds = \iint_{S_r} (\nabla \times F)\cdot n ds$

$\iint_{S_r} (\nabla \times F)\cdot n dS = \pi r^2 (((\nabla \times F)\cdot n)(\bar{x}(r), \bar{y}(r), \bar{z}(r))$

$\Rightarrow ((\nabla \times F)\cdot n)(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F\cdot T ds.$