Persamaan-persamaan yang sering digunakan

Bobot konfigurasi statistik fermi dirac dinyatakan oleh:
$$W=\prod_s w_s \tag{1}$$
dengan
$$w_s=\frac{g_s!}{n_s!(g_s-n_s)!} \tag{2}$$
Untuk bose-einstein dinyatakan oleh
$$W=\prod_s w_s = \prod_s\frac{[(g_s-1)+n_s]!}{(g_s-1)!n_s!} \tag{3}$$
Untuk Boltzmann:
$$W=N!\prod_s\left\{\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}\right\} \tag{4}$$
Untuk statistik semi-klasik
$$W=\prod_s\left\{\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}\right\} \tag{5}$$
Fungsi distribusi fermi-dirac dinyatakan oleh
$$\overline{n}_{\mathrm{FD}}=\frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1} \tag{6}$$
Fungsi distribusi bose-einstein dinyatakan oleh
$$\overline{n}_{\mathrm{BE}}=\frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}-1} \tag{7}$$
Fungsi distribusi Boltzmann dinyatakan oleh
$$\overline{n}_{\mathrm{boltzmann}}=e^{\mu/kT}e^{-\epsilon/kT}=e^{-(\epsilon-\mu)/kT} \tag{8}$$
Energi bebas Helmoltz dinyatakan oleh
$$F=-kT\ln Z \tag{9}$$
dengan demikian diperoleh
$$S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}, \tag{10}$$
$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}, \tag{11}$$
$$\mu=+\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} \tag{12}$$
$$S=k\ln W \tag{13}$$
$$\frac{\mathcal{F}(s_2)}{\mathcal{F}(s_1)}=\frac{\Omega(s_2)}{\Omega(s_1)} \tag{14}$$
$$\mathcal{P}(s)=\frac{1}{Z}e^{-E_s/kT} \tag{15}$$
$$\frac{N_s}{N}=\frac{e^{-E(s)/kT}}{Z} \tag{16}$$
$$\overline{E}=\frac{\sum_s E(s)N(s)}{N}=\sum_s E(s)\frac{N(s)}{N}=\sum_s E(s)f=\frac{1}{Z}\sum_s E(s)e^{-\beta E(s)} \tag{17}$$

Degenerasi gas fermi.

Jumlah Keadaan energi dalam rentang energi antara ϵ hingga $\epsilon+d\epsilon$ adalah
$$g(\epsilon)d\epsilon=\frac{2\pi(2m)^{3/2}\epsilon^{1/2}d\epsilon\cdot V}{h^3} \tag{18}$$
karena fermion terdapat dua keadaan yang mungkin $-1/2$ dan $1/2$ maka nilai ini dikalikan 2 sehingga diperoleh:
$$g(\epsilon)=V\cdot 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2} \tag{19}$$
Untuk $\epsilon<\epsilon_{\mathrm{F}}(0)$ maka
$$f(\epsilon)=\frac{1}{e^{-\infty}+1}=1 \tag{20}$$
untuk $\epsilon>\epsilon_{\mathrm{F}}(0)$ maka
$$f(\epsilon)=\frac{1}{e^{\infty}+1}=0 \tag{21}$$
Sehingga untuk memperoleh nilai energi fermi, maka persamaan ini Mesti diintegralkan dari 0 sampai ϵ_F
$$\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}}V\cdot 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2}d\epsilon=N \tag{22}$$
yang hasilnya adalah
$$\epsilon_{\mathrm{F}}(0)=\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{3/2} \tag{23}$$
Temperatur fermi selanjutnya dapat diperoleh melalui hubungan:
$$kT_{\mathrm{F}}(0)=\epsilon_{\mathrm{F}}(0) \tag{24}$$
kemudian energi rata-rata elektron dapat dinyatakan sebagai:
$$\overline{\epsilon}(0)=\frac{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}(0)}\epsilon g(\epsilon)d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}(0)}g(\epsilon)d\epsilon}=\frac{3}{5}\epsilon_{\mathrm{F}}(0) \tag{25}$$
Dengan cara yang sama dapat kita hitung momentum rata-rata dan kecepatan rata-rata yakni dengan melakukan transformasi $\epsilon=p^2/2m$. Energi total dinyatakan oleh
$$U=N\overline{\epsilon}=\frac{3}{5}N\epsilon_{\mathrm{F}} \tag{26}$$
Sehingga persamaan keadaan dapat diperoleh yakni
$$P=-\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{3}{5}N\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi}\right)^{3/2}\cdot V^{-3/2}\right]=\frac{2N\epsilon_{\mathrm{F}}}{5V}=\frac{2U}{3V} \tag{27}$$

Statistik bose-einstein: Tinjauan radiasi benda hitam

Jumlah mode gelombang yang diperoleh untuk panjang gelombang λ sampai $d\lambda$ dinyatakan oleh
$$g(\lambda)d\lambda=\frac{4\pi}{\lambda^4}d\lambda \tag{28}$$
Karena dalam gelombang elektromagnetik terdapat dua polarisasi yang saling tegak lurus maka nilai ini mesti dikalikan dengan 2 sehingga diperoleh:
$$g(\lambda)d\lambda=\frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda \tag{29}$$
perhatikan: persamaan (6) setara dengan persmaan (1)
sementara distribusi bose-einstein dinyatakan oleh:
$$n_s=\frac{g_s}{e^{h\nu_s/kT}-1} \tag{30}$$
Sehingga jumlah foton, $n_\lambda(\lambda)d\lambda$ untuk rentang panjang gelombang antara λ hingga $\lambda+d\lambda$ dinyatakan oleh:
$$n_\lambda(\lambda)d\lambda=\frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda\cdot\frac{1}{e^{hc/k\lambda T}-1} \tag{31}$$
Di mana telah disubstitusi $h\nu=hc/\lambda$. Energi $E(\lambda)=n_\lambda(\lambda)h\nu=n_\lambda(\lambda)hc/\lambda$ dapat dinyatakan oleh:
$$E(\lambda)d\lambda=\frac{8\pi hc\,d\lambda}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T}-1)} \tag{32}$$
Untuk panjang gelombang yang besar, maka $e^{hc/k\lambda T}\simeq 1+hc/k\lambda T$ sehingga diperoleh
$$E(\lambda)d\lambda\simeq\frac{8\pi kT\,d\lambda}{\lambda^4} \tag{33}$$
yang sama dengan formulasi Rayleigh Jeans. Sementara untuk panjang gelombang yang rendah di mana $e^{hc/k\lambda T}\gg 1$ akan diperoleh:
$$E(\lambda)d\lambda\simeq\frac{8\pi hc}{\lambda^5}e^{-hc/k\lambda T}\,d\lambda \tag{34}$$
yang merupakan formulasi distribusi Wein. Dari persamaan (11) dapat diperoleh total energi persatuan volume yang terlingkupi dalam benda hitam tersebut yakni:
$$E=\int_0^\infty E(\lambda)d\lambda=\int_0^\infty\frac{8\pi hcd\lambda}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T}-1)}=\frac{8\pi h}{c^3}\left\{\frac{kT}{h}\right\}^4\int_0^\infty\frac{t^3\,dt}{e^t-1} \tag{35}$$
Dengan
$$\int_0^\infty\frac{t^3}{e^t-1}=6\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15} \tag{36}$$
Maka persamaan 35 dapat dituliskan menjadi
$$\boxed{E=\left\{\frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3}\right\}T^4} \tag{37}$$

Gas fonon.

Jumlah fonon $n(\nu)d\nu$ dengan frekuensi antara ν sampai $\nu+d\nu$ adalah
$$n_\nu(\nu)d\nu=\frac{g(\nu)d\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{13}$$
Aproksimasi Debye dinyatakan oleh
$$g(\nu)d\nu=C\nu^2d\nu,\qquad \nu\le\nu_{\mathrm{m}}$$
$$g(\nu)d\nu=0,\qquad \nu>\nu_{\mathrm{m}}$$
Untuk mendapatkan konstanta C maka dilakukan integrasi terhadap seluruh mode yang mungkin yang nantinya akan menghasilkan nilai $3N$ yakni
$$3N=\int_0^\infty g(\nu)d\nu=\int_0^{\nu_{\mathrm{m}}}C\nu^2d\nu=\frac{1}{3}C\nu_{\mathrm{m}}^3$$
atau
$$C_{\mathrm{m}}=\frac{9N}{\nu_{\mathrm{m}}^3}$$
sehingga aproksimasi debye memberikan
$$n_\nu(\nu)d\nu=\frac{9N}{\nu_{\mathrm{m}}^3}\frac{\nu^2d\nu}{e^{h\nu/kT}-1},\ \nu\le\nu_{\mathrm{m}}$$
$$=0,\qquad \nu>\nu_{\mathrm{m}}$$
kemudian
$$E=\int_0^{\nu_{\mathrm{m}}}h\nu n_\nu(\nu)d\nu=\frac{9N_Ah}{\nu_{\mathrm{m}}^3}\int_0^{\nu_{\mathrm{m}}}\frac{\nu^3d\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$
kemudian panas spesifik dapat diperoleh yakni
$$C_\nu=\left\{\frac{\partial E}{\partial T}\right\}=\frac{9N_Ah^2}{\nu_{\mathrm{m}}^3}\frac{1}{kT^2}\cdot\int_0^{\nu_{\mathrm{m}}}\frac{\nu^4e^{h\nu/kT}d\nu}{(e^{h\nu/kT}-1)^2} \tag{38}$$
Jika diadakan perubahan variabel yakni $x=h\nu/kT$ dan $h\nu_{\mathrm{m}}/k$ diganti oleh θ_{D} maka temperatur karakteristik pada Persamaan di atas dapat dinyatakan menjadi:
$$C_\nu=9R\left\{\frac{T}{\theta_{\mathrm{D}}}\right\}^3\int_0^{\theta_{\mathrm{D}}/T}\frac{x^4e^xdx}{(e^x-1)^2}$$
Untuk temperatur tinggi, di mana $\theta_{\mathrm{D}}\ll 1$ maka $e^x\simeq 1+x\simeq 1$ sehingga
$$C_\nu\simeq 9R\left\{\frac{T}{T_{\mathrm{D}}}\right\}^3\int_0^{\theta_{\mathrm{D}}/T}x^2dx=3R$$
Untuk temperatur rendah, di mana $e^{-\theta_{\mathrm{D}}/T}\ll 1$ maka batas atas integrasi diganti menjadi ∞ sehingga
$$C_\nu\simeq 9R\left\{\frac{T}{\theta_{\mathrm{D}}}\right\}^3\int_0^\infty\frac{x^4e^xdx}{(e^x-1)^2}$$
atau dengan melakukan ekspansi taylor terhadap e^x maka
$$\int_0^\infty\frac{x^4e^xdx}{(e^x-1)^2}=24\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{4\pi^4}{15}$$
sehingga
$$C\nu\simeq\frac{12}{5}\pi^4R\left\{\frac{T}{\theta_{\mathrm{D}}}\right\}^3$$

Statistik Maxwell Boltzmann

Untuk sistem partikel terbedakan bobot konfigurasi dinyatakan sebagai
$$W=N!\prod_s\left\{\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}\right\} \tag{39}$$
distribusi momentum, kecepatan, dan energi dinyatakan oleh
$$n_pdp=\frac{4\pi N}{(2\pi mkT)^{3/2}}\cdot e^{-p^2/2mkT}p^2dp \tag{40}$$
$$n_vdv=4\pi N\left\{\frac{m}{2\pi kT}\right\}^{3/2}\cdot e^{-v^2/2mkT}v^2dv \tag{41}$$
$$n(\epsilon)d\epsilon=\frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}}e^{-\epsilon/kT}\epsilon^{1/2}d\epsilon \tag{42}$$
Dengan demikian, untuk sebuah molekul probabilitas kecepatannya berada dalam selang v hingga $v+dv$ dinyatakan oleh
$$f_v(v)dv=\frac{n_v(v)dv}{N}=4\pi\left\{\frac{m}{2\pi kT}\right\}^{3/2}\cdot\exp\left(-mv^2/2kT\right)v^2\,dv$$
Dari sini selanjutnya dapat diperoleh
$$\overline{v}=\int_0^\infty vf_v(v)dv=4\pi\left\{\frac{m}{2\pi kT}\right\}^{3/2}\int_0^\infty\cdot\exp\left(-mv^2/2kT\right)v^3=\boxed{\sqrt{\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)}} \tag{43}$$
sementara
$$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2f_v(v)\,dv=4\pi\left\{\frac{m}{2\pi kT}\right\}^{3/2}\cdot\left(\int_0^\infty\exp\left(-mv^2/2kT\right)\cdot v^4dv\right)=\boxed{\frac{3kT}{m}} \tag{44}$$
Nilai most probable velocity dinyatakan oleh
$$\frac{df_v(v)}{dv}=4\pi\left\{\frac{m}{2\pi kT}\right\}^{3/2}\left\{2v-\frac{mv^3}{kT}\right\}\exp\left(-mv^2/2kT\right)=0 \tag{45}$$
yang menghasilkan
$$2v_m-\frac{mv_m^3}{kT}=0 \tag{46}$$
atau
$$\boxed{v_m=\sqrt{\left(\frac{2kT}{m}\right)}} \tag{47}$$

Prinsip ekuipartisi energi.

Energi kinetik dalam satu derajat kebebasan (misal x) dinyatakan oleh $\epsilon_x=p_x^2/2m$ sehingga
$$\overline{\epsilon_x}=\frac{\int_\Gamma p_x^2/2m\,e^{-\epsilon/kT}d\Gamma}{\int_\Gamma e^{-\epsilon/kT}d\Gamma} \tag{48}$$
Jika energi dinyatakan dalam dua bagian yakni $p_x^2/2m$ dan $(\epsilon-p_x^2/2m)$ makan persamaan di atas dapat dituliskan menjadi
$$\overline{\epsilon_x}=\left(\frac{\int\exp\left(-\left(\epsilon-\frac{p_x^2}{2m}\right)/kT\right)}{\int\exp\left(-\left(\epsilon-\frac{p_x^2}{2m}\right)/kT\right)}\cdot\frac{dx\,dy\,dz\,dp_y\,dp_z}{dx\,dy\,dz\,dp_y\,dp_z}\cdot\frac{\int_{-\infty}^\infty\frac{p_x^2}{2m}\exp\left(-p_x^2/2mkT\right)dp_x}{\int_{-\infty}^\infty\exp\left(-p_x^2/2mkT\right)dp_x}\right)=\frac{1}{2}kT$$
Di mana telah dilakukan substitusi $p_x^2/2mkT=u^2$
Untuk harmonik osilator, di mana energinya dinyatakan sebagai
$$\epsilon_x=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{1}{2}\mu x^2 \tag{49}$$
maka energi rata-ratanya adalah:
$$\overline{\epsilon_x}=\frac{\int_\Gamma\left\{p_x^2/2m+\frac{1}{2}\mu x\right\}e^{-\epsilon/kT}d\Gamma}{\int_\Gamma e^{-\epsilon/kT}d\Gamma}=\frac{\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\left\{\frac{p_x^2}{2m}+\frac{1}{2}\mu x^2\right\}}{\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty}\cdot\frac{\exp\left(-\left[\frac{p_x^2}{2m}+\frac{1}{2}\mu x^2\right]/kT\right)}{\exp\left(-\left[\frac{p_x^2}{2m}+\frac{1}{2}\mu x^2\right]/kT\right)}\cdot\frac{dx\,dp_x}{dx\,dp_x} \tag{50}$$
Jika dilakukan substitusi $p_x^2/2m=r^2\sin^2\theta$ dan $\frac{1}{2}\mu x^2=r^2\cos^2\theta$ maka diperoleh
$$\overline{\epsilon_x}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty e^{-r^2/kT}r^3\,dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty e^{-r^2/kT}r\,dr}=kT$$

Statistik Semiklasik

Secara klasik, jumlah keadaan energi dalam rentang ϵ sampai $\epsilon+d\epsilon$ dinyatakan oleh:
$$g(\epsilon)d\epsilon=BV2\pi(2m)^{3/2}\epsilon^{1/2}d\epsilon \tag{51}$$
Sehingga fungsi partisi menjadi
$$Z=\sum_s g_se^{-\epsilon_s/kT}\equiv\int_0^\infty e^{-\epsilon/kT}g(\epsilon)d\epsilon=2\pi BV(2m)^{3/2}\cdot\int_0^\infty\epsilon^{1/2}e^{-\epsilon/kT}d\epsilon=BV(2\pi mkT)^{3/2} \tag{52}$$
yang nantinya akan diperoleh
$$F=-NkT\ln[BV(2\pi mkT)^{3/2}] \tag{53}$$
dan
$$S=-\left\{\frac{\partial F}{\partial T}\right\}=\boxed{Nk\ln[BV(2\pi mkT)^{3/2}]+\frac{3}{2}Nk} \tag{54}$$
Dengan persamaan ini akan terdapat kenaikan entropi sebesar $2Nk\ln 2$ pada pencampuran 2 volume gas. Fakta ini menuntun pada perumusan statistik semiklasik, di mana bobot konfigurasi dinyatakan oleh
$$W_{\mathrm{MB}}=\prod_s\frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \tag{55}$$
$$W_{\mathrm{BE}}=\prod_s\frac{(n_s+g_s-1)!}{n_s!(g_s-1)!} \tag{56}$$
$$W_{\mathrm{FD}}=\prod_s\frac{g_s!}{n_s!(g_s-n_s)!} \tag{57}$$
Pada limit klasik, yakni $g_s\gg n_s\gg 1$ maka dengan aproksimasi Stirling diperoleh:
$$\ln W_{\mathrm{MB}}=\sum_s(n_s\ln g_s-n_s\ln n_s+n_s)=\sum_s\left(n_s\ln\frac{g_s}{n_s}+n_s\right) \tag{58}$$
$$\ln W_{\mathrm{BE}}\simeq\sum_s[(n_s+g_s)\ln(n_s+g_s)-n_s\ln n_s-g_s\ln g_s]=\prod_s\left[n_s\ln\left\{\frac{n_s+g_s}{n_s}\right\}+g_s\ln\left\{\frac{n_s+g_s}{g_s}\right\}\right]\simeq\prod_s\left(n_s\ln\frac{g_s}{n_s}+n_s\right) \tag{59}$$
di mana telah digunakan hampiran $n_s+g_s-1\simeq(n_s+g_s)$ $\frac{g_s+n_s}{n_s}\simeq\frac{g_s}{n_s}$. Dan $\ln\left\{\frac{n_s+g_s}{g_s}\right\}=\ln\left\{1+\frac{n_s}{g_s}\right\}\simeq\frac{n_s}{g_s}$
Kemudian
$$\ln W_{\mathrm{FD}}=\sum_s[g_s\ln g_s-n_s\ln n_s-(g_s-n_s)\ln(g_s-n_s)]=\sum_s\left[n_s\ln\left\{\frac{g_s-n_s}{n_s}\right\}-g_s\ln\left\{\frac{g_s-n_s}{g_s}\right\}\right]\simeq\sum_s\left(n_s\ln\frac{g_s}{n_s}+n_s\right) \tag{60}$$
Entropi kemudian dinyatakan oleh
$$S=Nk\ln\frac{Z}{N}+\frac{E}{T}+Nk \tag{61}$$
Sementara pernyataannya dalam kuantum mekanik adalah:
$$Z=\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2} \tag{62}$$
dengan demikian entropi untuk sistem semi-klasik dinyatakan oleh
$$S=Nk\left\{\ln\left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{Nh^3}\right]+\frac{5}{2}\right\}$$
energi bebas helmoltz kemudian dinyatakan sebagai
$$F=-kT\ln\frac{Z^N}{N!} \tag{63}$$
dengan $\boldsymbol{Z}=Z^N/N!$ menyatakan fungsi partisi total untuk sistem semi-klasik.

Ensembel Kanonik

Ensembel Kanonik adalah gabungan asembli (konfigurasi sistem/partikel) dengan temperatur yang sama. Jadi asembli dapat dipandang sebagai asembli dari asembli, atau observasi-observasi terhadap asembli sepanjang evolusinya terhadap waktu. Karena ensembel merupakan asembli dari asembli, maka fungsi partisi pada asembli dapat pula digeneralisasi ke ensembel yakni:
$$\boldsymbol{Z}=\sum_i e^{-E_i/kT} \tag{64}$$
dengan
$$p_i=p(0)e^{-E_i/kT}=\frac{e^{-E_i/kT}}{\boldsymbol{Z}} \tag{65}$$
menyatakan peluang asembli pada ensembel untuk berada pada keadaan ke-i sementara p(0) menyatakan fungsi dari temperatur yakni:
$$p(0)=\frac{1}{\sum_i e^{-E_i/kT}} \tag{66}$$
Jadi
$$\sum_i p_i=1 \tag{67}$$
Di sini fungsi partisi analog dengan fungsi partisi total dari asembli pada ensembel. Kemudian energi bebas Helmoltz dinyatakan oleh
$$F=-kT\ln\boldsymbol{Z} \tag{68}$$

Fluktuasi energi pada Ensembel Kanonik

Penyimpangan energi dari nilai rata-rata dinyatakan oleh
$$\delta E=E-\overline{E} \tag{69}$$
sehingga
$$\overline{(\delta E)^2}=\overline{(E-\overline{E})^2}=\overline{(E^2-2E\cdot\overline{E}+\overline{E}^2)}=\overline{E^2}-\overline{E}^2 \tag{70}$$
dengan
$$\overline{E}=\sum_i p_iE_i=\frac{1}{\boldsymbol{Z}}\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial\beta} \tag{71}$$
dan
$$\overline{E^2}=\sum_i p_iE_i^2=\frac{1}{\boldsymbol{Z}}\frac{\partial^2\boldsymbol{Z}}{\partial\beta^2} \tag{72}$$
maka
$$\overline{(\delta E)^2}=\frac{\partial\overline{E}}{\partial\beta}=kT^2\frac{\partial\overline{E}}{\partial T}=C_vkT^2 \tag{73}$$
Dengan demikian fraksi fluktuasi energi dapat dinyatakan sebagai
$$\mathcal{F}=\left\{\frac{\overline{(\delta E)^2}}{\overline{E}^2}\right\}^{1/2}=\left\{\frac{kT^2C_v}{\overline{E}^2}\right\}^{1/2} \tag{74}$$
dengan $C_v=(3/2)Nk$ dan $\overline{E}=(3/2)NkT$ maka
$$\mathcal{F}=\left\{\frac{\frac{3}{2}Nk^2T^2}{\left(\frac{3}{2}NkT\right)^2}\right\}^{1/2}=\left(\frac{3}{2}N\right)^{-1/2} \tag{75}$$

Enesembel Grand Kanonik

Fungsi partisi grand-kanonik dinyatakan oleh persamaan
$$\boldsymbol{Z}=\sum_i e^{(\mu N-E)_i/kT} \tag{76}$$
dengan
$$p_i=e^{-[pV+(\mu N_i-E_i)/kT} \tag{77}$$
di mana
$$\sum_i p_i=1 \tag{78}$$
atau (79)
$$e^{-pV/kT}\sum_i e^{(\mu N_i-E_i)/kT}=1 \tag{80}$$
atau
$$e^{-pV/kT}=\frac{1}{\sum_i e^{(\mu N_i-E_i)/kT}}=\frac{1}{\boldsymbol{Z}} \tag{81}$$
Sehingga
$$p_i=\frac{e^{(\mu N_i-E_i)/kT}}{\boldsymbol{Z}} \tag{82}$$
analog dengan pers.65 untuk ensembel kanonik.
Kemudian
$$\overline{N}=\sum_i p_iN_i=\sum_i\frac{N_ie^{(\mu N_i-E_i)/kT}}{\boldsymbol{Z}}=\frac{kT}{\boldsymbol{Z}}\left\{\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial\mu}\right\}=kT\left\{\frac{\partial\ln\boldsymbol{Z}}{\partial\mu}\right\}_{V,T} \tag{83}$$
dan
$$\overline{N^2}=\frac{(kT)^2}{\boldsymbol{Z}}\left\{\frac{\partial^2\boldsymbol{Z}}{\partial\mu^2}\right\}_{V,T} \tag{84}$$
Dari pers.81 dapat pula diperoleh
$$(pV)=kT\ln\boldsymbol{Z} \tag{85}$$
sehingga jumlah rata-rata partikel pada pers.83 dapat dinyatakan ke dalam
$$\overline{N}=\left\{\frac{\partial(pV)}{\partial\mu}\right\}_{T,V} \tag{86}$$
Perhatikan
$$d(pV)=p\,dV+S\,dT+\overline{N}\,d\mu \tag{87}$$
demikian pula
$$p=\left\{\frac{\partial(pV)}{\partial V}\right\}_{T,\mu} \tag{88}$$
$$S=\left\{\frac{\partial(pV)}{\partial T}\right\}_{V,\mu} \tag{89}$$
Untuk distribusi Bose-einstein, pers. 83 akan menghasilkan
$$\overline{N}=kT\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\ln\prod_j[1-e^{(\mu-\epsilon_j)kT}]^{-1}\right\}_{V,T}=-kT\sum_j\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\ln[1-e^{(\mu-\epsilon_j)/kT}]\right\}_{V,T}=\sum_j\frac{1}{e^{(\epsilon_j-\mu)/kT}-1}=\sum_j\overline{n_j} \tag{90}$$

Dengan cara yang sama untuk distribusi fermi-dirac diperoleh

$$\overline{N} = \sum_j \overline{n_j}$$

$$= \sum_j \frac{1}{e^{(\epsilon_j-\mu)/kT}+1} \tag{91}$$

Fluktuasi Jumlah Partikel dalam ensembel grand kanonik
Dari pers. 83 dan pers. 84 dapat diturunkan

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\frac{1}{\boldsymbol{Z}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial\mu}\right)\right\}_{V,T}$$

$$= \left\{\frac{1}{\boldsymbol{Z}}\frac{\partial^2\boldsymbol{Z}}{\partial\mu^2} - \frac{1}{\boldsymbol{Z}^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial\mu}\right)^2\right\}_{V,T} \tag{92}$$

di mana telah disebutkan

$$\frac{N}{kT} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}}\left\{\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial\mu}\right\}_{V,T} \tag{93}$$

ini akhirnya menghasilkan

$$\frac{1}{(kT)}\left\{\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mu}\right\}_{V,T}$$

$$= \frac{1}{(kT)^2}(\overline{N^2}-\overline{N}^2) \tag{94}$$

atau

$$\overline{(\delta N)^2} = kT\left\{\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mu}\right\}_{V,T} \tag{95}$$

Penurunan persamaan 28
Persamaan schrodinger tak bergantung waktu dinyatakan oleh:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 mE}{h^2}\psi = 0 \tag{96}$$

Untuk partikel bebas, solusinya dinyatakan oleh

$$\psi = \psi_0 e^{j(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{97}$$

di mana $k_x = 2\pi/\lambda_x$, $k_y = 2\pi/\lambda_y$, $2\pi/\lambda_z$ dan $(p_x^2+p_y^2+p_z^2) = 2mE$. Jika partikel/sistem dianggap terperangkap dalam kotak yang sisi-sisinya diberikan oleh L_x, L_y, L_z maka dengan menerapkan sarat batas terhadap solusi (pers. 97), akan diperoleh

$$\left.\begin{aligned} n_x\frac{\lambda_x}{2} &= L_x\\ n_y\frac{\lambda_y}{2} &= L_y\\ n_z\frac{\lambda_z}{2} &= L_z\end{aligned}\right\} \tag{98}$$

yang menyatakan jumlah "setengah panjang gelombang" pada masing-masing arah. Mengingat $\lambda_x = 2L_x/n_x$ maka pers. (98) dapat untuk arah-x dapat dinyatakan menjadi

$$n_x = \frac{2L_x p_x}{h} \tag{99}$$

demikian pula untuk arah yang lain. Sementara itu diperoleh pula

$$(n_x+dn_x) = \frac{2L_x(p_x+dp_x)}{h} \tag{100}$$

atau

$$dn_x = \frac{2L_x dp_x}{h} \tag{101}$$

demikian pula untuk arah yang lain. Dengan demikian diperoleh

$$dn_s = dn_x\,dn_y\,dn_z$$

$$= \frac{8L_xL_yL_z\,dp_z dp_y dp_z}{h^3} \tag{102}$$

Karena dalam satu sumbu, ada dua keadaan momentum yang dibolehkan, yakni (p_x dan $-p_x$), maka nilai aktual dari jumlah keadaan $d\mathfrak{n}$ yang memiliki nilai momentum dalam rentang $+dp_x$, $+dp_y$, $+dp_z$ adalah 1/8 dari nilai pers.102, yakni kuadran pertama koordinat rectilinear atau

$$d\mathfrak{n} = \frac{L_xL_yL_z\,dp_z dp_y dp_z}{h^3} \tag{103}$$

Jika $L_xL_yL_z$ menyatakan volume V, maka pers.103 dapat ditransformasikan ke dalam pernyataan pada koordinat bola, yakni

$$d\mathfrak{n} = \frac{V\cdot 4\pi p^2\,dp}{h^3} = \frac{\Delta\Gamma}{h^3} \tag{104}$$

Jika pernyataan ini dinyatakan dalam panjang helombang $\lambda = h/p$, maka diperoleh

$$d\mathfrak{n} = g(\lambda)d\lambda = \frac{4\pi}{\lambda^4}d\lambda \tag{105}$$

Ekspansi Sommerfeld Aproksimasi Sommerfeld digunakan untuk menghitung pernyataan integral

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon)\overline{n}_{\rm FD}\,d\epsilon$$

$$= g_0\int_0^\infty \epsilon^{1/2}\overline{n}_{\rm FD}\,d\epsilon \tag{106}$$

dengan $\overline{n}_{\rm FD}$ menyatakan fungsi distribusi fermi-dirac (dalam buku pointon dinyatakan sebagai $f(\epsilon)$). Karen daerah yan g ditinjau hanya disekitar $\epsilon = \mu$,maka integralnya dapat dinyatakan ke dalam integral parsial

$$N = \frac{2}{3}g_0\epsilon^{3/2}\overline{n}_{\rm FD}(\epsilon)\Big|_0^\infty +$$

$$\frac{2}{3}g_0\int_0^\infty \epsilon^{3/2}\left(-\frac{d\overline{n}_{\rm FD}}{d\epsilon}\right)d\epsilon \tag{107}$$

suku pertama akan habis pada kedua batas integral sementara suku kedua dinyatakan kembali melalui

$$-\frac{d\overline{n}_{\rm FD}}{d\epsilon} = -\frac{d}{d\epsilon}(e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{kT}\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \tag{108}$$

dengan $x = (\epsilon-\mu)/kT$.
Jadi

$$N = \frac{2}{3}g_0\int_0^\infty \frac{1}{kT}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\epsilon^{3/2}\,d\epsilon$$

$$= \frac{2}{3}g_0\int_{-\mu/kT}^\infty \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\epsilon^{3/2}\,d\epsilon \tag{109}$$

Ada dua pendekatan yang dilakukan, yang pertama adalah dengan melakukan uraian Taylor terhadap $\epsilon^{3/2}$ di sekitar $\epsilon = \mu$ dan hanya mengambil beberapa suku pertama. Sementara yang kedua adalah meng-ekstends batas bawah integralnya sampai $-\infty$ agar mudah dalam mnipulasi matematis selanjutnya dan ini sama sekali tidak berpengaruh pada fungsi secara keseluruhan mengingat pada daerh negatif, fungsinya nol.
Dengan demikian diperoleh

$$\epsilon^{3/2} = \mu^{3/2} + (\epsilon-\mu)\frac{d}{d\epsilon}\epsilon^{3/2}\Big|_{\epsilon=\mu}$$

$$+ \frac{1}{2}(\epsilon-\mu)^2\frac{d^2}{d\epsilon^2}\epsilon^{3/2}\Big|_{\epsilon=\mu} + \cdots$$

$$= \mu^{3/2} + \frac{3}{2}(\epsilon-\mu)\mu^{1/2} +$$

$$\frac{3}{8}(\epsilon-\mu)^2\mu^{1/2} + \cdots \tag{110}$$

sehingga

$$N = \frac{2}{3}g_0\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\Big[\mu^{3/2} +$$

$$\frac{3}{2}(\epsilon-\mu)\mu^{1/2} + \frac{3}{8}(\epsilon-\mu)^2\mu^{1/2}$$

$$+\cdots \tag{111}$$

Integrasi selanjutnya dapat dilakukan pada masing-masing suku yakni untuk suku pertama adalah

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx =$$

$$\int_{-\infty}^\infty -\frac{d\overline{n}_{\rm FD}}{d\epsilon}\,d\epsilon$$

$$= \overline{n}_{\rm FD}(-\infty) - \overline{n}_{\rm FD}(\infty) =$$

$$1 - 0 = 1 \tag{112}$$

Untuk suku kedua

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx =$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(e^x+1)(1+e^{-x})}dx = 0. \tag{113}$$

mengingat pernyataan tersebut merupakan fungsi ganjil dari x.
Suku ketiga dapat diintegrasikan secara parsial secara berurutan yang natinya akan menghasilkan

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{\pi^2}{3} \tag{114}$$

Dengan mengumpulkan hasil-hasil tersebut, maka nilai N selanjutnya dapat dituliskan menjadi

$$N = \frac{2}{3}g_0\mu^{3/2} + \frac{1}{4}g_0(kT)^2\mu^{-1/2}$$

$$\cdot\frac{\pi^2}{3} + \cdots$$

$$= N\left(\frac{\mu}{\epsilon_{\rm F}}\right)^{3/2} + N\frac{\pi^2}{8}\frac{(kT)^2}{\epsilon_{\rm F}^{3/2}\mu^{1/2}}$$

$$+\cdots \tag{115}$$

Di mana telah dilakukan substitusi untuk $g_0 = 3N/2\epsilon_{\rm F}^{3/2}$. Dengan membagi kedua ruas dengan N diperoleh

$$\frac{\mu}{\epsilon_{\rm F}} = \left[1 - \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\epsilon_{\rm F}}\right)^2 + \cdots\right]^{2/3}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\epsilon_{\rm F}}\right)^2 + \cdots \tag{116}$$

yang menunjukkan potensial kimia μ akan naik secara berangsur-angsur seiring naiknya T.
Hasil ini juga dapat digunakan untuk menhitung integral untuk nilai total energi yakni

$$U = \int_0^\infty \epsilon g(\epsilon)\overline{n}_{\rm FD}(e\epsilon)d\epsilon$$

$$= \int_0^\infty \epsilon g(\epsilon)\frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}d\epsilon \tag{117}$$

yakni

$$U = \frac{3}{5}N\frac{\mu^{5/2}}{\epsilon_{\rm F}^{3/2}} +$$

$$\frac{3\pi^2}{8}N\frac{(kT)^2}{\epsilon_{\rm F}} + \cdots \tag{118}$$

Di mana dengan memasukkan pers. 116 diperoleh

$$U = \frac{3}{5}N\epsilon_{\rm F} + \frac{\pi^2}{4}N\frac{(kT)^2}{\epsilon_{\rm F}} + \cdots \tag{119}$$

Kondensasi Bose-Einstein
Kondensasi bose-eintein adalah kondensasi di mana sebagian besar partikel penyusun gas boson akan mengalami kondensasi/pendinginan yakni menempati keadaan energi dasar (ground state).
Jumlah boson yang menempati keadaan dasar dinyatakan oleh:

$$N_0 = \frac{1}{e^{(\epsilon_0-\mu)/kT}-1} \tag{120}$$

Untuk $T = 0$, nilai N_0 cukup besar yang bisa terpenuhi jika peneyebut pada pers. 120 cukup kecil. Dengan demikian potensial kimia μ hanya berbeda cukup kecil dengan ϵ. Dan $kT \gg \epsilon_0$. Jumlah total boson tentunya dinyatakan oleh

$$\boxed{N = \sum_{\text{semua } s}\frac{1}{e^{(\epsilon_s-\mu)/kT}-1}} \tag{121}$$

karena masing-masing suku pada penjumlahan cukup kecil ($kT \gg \epsilon_0 \approx \mu$), dapat dilakukan transformasi ke dalam bentuk integral, yakni:

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon)\frac{1}{e^{(\epsilon_0-\mu)/kT}-1}d\epsilon \tag{122}$$

dengan $g(\epsilon)$ dinyatakan oleh persamaan 19. Dengan demikian

$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}V$$

$$\cdot\int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}\,d\epsilon}{e^{\epsilon/kT}-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}V$$

$$\cdot\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^x-1} \tag{123}$$

Integral terhadap x nilainya adalah 2.315 sehingga dengan mengkomninasikan dengan $2/\sqrt{\pi}$ akan menghasilkan formula

$$N = 2.162\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}V \tag{124}$$

Karena jumlah boson N tidak bergantung pada temperatur T makan hanya satu nilai temperatur di mana persamaan di atas benar, yakni $T = T_c$, sehingga diperoleh

$$N = 2.162\left(\frac{2\pi mkT_c}{h^2}\right)^{3/2}V \tag{125}$$

atau

$$kT_c = 0.527\left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \tag{126}$$

sementara jumlah boson dalam kedaan tereksitasi, dinyatakan oleh

$$N_{\rm excited} = 2.612\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}V$$

$$(\text{untuk } T < T_c) \tag{127}$$

Dengan demikian

$$N_{\rm excited} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}N$$

$$(\text{untuk })(T < T_c) \tag{128}$$

dan

$$N_0 = N - N_{\rm excited}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]N$$

$$(\text{untuk } T < T_c) \tag{129}$$

Contoh penentuan fungsi partisi dan peluang keadaan suatu partikel
1. **Dipol elementer** dengan energi "up states" $-\mu B$ dan "down states"$+\mu B$, maka fungsi partisinya adalah

$$Z = \sum_s e^{-\beta E(s)}$$

$$= e^{+\beta\mu B} + e^{-\beta\mu B}$$

$$= 2\cosh(\beta\mu B) \tag{130}$$

Peluang dipole untuk berada dalam "up states" adalah

$$\mathcal{P}_\uparrow = \frac{e^{+\beta\mu B}}{Z} = \frac{e^{+\beta\mu B}}{2\cosh(\beta\mu B)} \tag{131}$$

Peluang dipole untuk berada dalam "down states" adalah

$$\mathcal{P}_\downarrow = \frac{e^{-\beta\mu B}}{Z} = \frac{e^{-\beta\mu B}}{2\cosh(\beta\mu B)} \tag{132}$$

Dengan demikian energi rata-rata adalah

$$\overline{E} = \sum_s E(s)\mathcal{P}(s)$$

$$= (-\mu B)\mathcal{P}_\uparrow + (+\mu B)\mathcal{P}_\downarrow$$

$$= -\mu B\frac{e^{\beta\mu B}-e^{-\beta\mu B}}{2\cosh(\beta\mu B)}$$

$$= -\mu B\tanh(\beta\mu B) \tag{133}$$

Sementara total energi dinyatakan oleh

$$U = -N\mu B\tanh(\beta\mu B) \tag{134}$$

Momen magnetik dipole kemudian dinyatakan oleh

$$\overline{\mu_z} = \sum_s \mu_s(s)\mathcal{P}(s)$$

$$= (+\mu)\mathcal{P}_\uparrow + (\mu)\mathcal{P}_\downarrow$$

$$= \mu\tanh(\beta\mu B) \tag{135}$$

Sementara total magnetisasi dinyatakan oleh

$$M = N\overline{\mu_z} = N\mu\tanh(\beta\mu B) \tag{136}$$

Perhatikan antara energi dipol dan momen Magnetik berbeda tanda.
2. **Pembuktian Teorema** equipartisi dengan menggunakan fungsi partisi. Jika energi dinyatakan dalam

$$E(q) = cq^2 \tag{137}$$

anggap yang ditinjau hanya dalam satu derajat kebebasan, sehingga fungsi partisinya dinyatakan dalam

$$Z = \sum_q e^{-\beta E(q)} = \sum_q e^{-\beta cq^2} \tag{138}$$

jika ditambahkan Δ di dalam dan di luar persamaan di atas, maka akan diperoleh

$$Z = \frac{1}{\Delta q}\sum_q e^{-\beta cq^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta q}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta cq^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta q}\frac{1}{\sqrt{\beta c}}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Delta q}\sqrt{\frac{\pi}{\beta c}} = C\beta^{-1/2} \tag{139}$$

dengan $C = \sqrt{\pi/c}/\Delta q$. Dengan demikian

$$\overline{E} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}$$

$$= -\frac{1}{C\beta^{-1/2}}\frac{\partial}{\partial\beta}C\beta^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{C\beta^{-1/2}}(-1/2)C\beta^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{2}\beta^{-1} = \frac{1}{2}kT \tag{140}$$

3. **Oilator Harmonik** dalam kuantum memiliki energi dinyatakan dalam

$$\epsilon = (n+1/2)h\nu \tag{141}$$

dengan demikian fungsi partisinya dinyatakan oleh

$$Z = \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+1/2)h\nu/kT}$$

$$= e^{-1/2\,h\nu/kT}\sum_{n=0}^\infty e^{-nh\nu/kT}$$

$$= \frac{e^{-1/2h\nu/kT}}{(1-e^{-h\nu/kT})} \tag{142}$$

dengan demikian

$$\overline{\epsilon} = h\nu\left\{1/2 + \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\right\} \tag{143}$$

untuk temperatur tinggi $h\nu/kT \ll 1$ sehingga

$$e^{h\nu/kT} \simeq 1 + \left\{\frac{h\nu}{kT}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{h\nu}{kT}\right\}^2 \tag{144}$$

dengan demikian

$$\overline{\epsilon} \simeq h\nu\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{h\nu}{kT}+\frac{1}{2}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2}\right\}$$

$$\simeq h\nu\left\{\frac{1}{2} + \frac{kT}{h\nu}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h\nu}{kT}\right)\right\}$$

$$= kT \tag{145}$$

4. Fungsi partisi **Molekul diatomik** akan dinyatakan oleh

$$Z = Z_tZ_rZ_vZ_eZ_n \tag{146}$$

Z_t menyatakan fungsi partisi berkaitan dengan gerak translasi yang dinyatakan oleh

$$Z_t = \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2} \tag{147}$$

Untuk gerak rotasi, energinya dinyatakan oleh $\epsilon_j = j(j+1)\frac{h^2}{8\pi\mathcal{I}}$. Sehingga fungsi partisinya akan menjadi

$$Z_r = \sum_{j=0}^\infty (2j+1)e^{-\epsilon_j/kT}$$

$$= \sum_{j=0}^\infty (2j+1)e^{-j(j+1)K/kT} \tag{148}$$

dengan $K = \frac{h^2}{8\pi\mathcal{I}}$
Kemudian fungsi partisi yang berkaitan dengan gerak vibrasi dinyatakan oleh

$$\boxed{Z_\nu = \frac{e^{-(1/2)h\nu/kT}}{1-e^{-h\nu/kT}}} \tag{149}$$

Fungsi partisi elektronik kemudian dinyatakan oleh

$$Z_e = g_0 + g_1e^{-\epsilon e1/kT} +$$

$$g_2e^{-\epsilon e2/kT} + \cdots \tag{150}$$

Tidak ada kontribusi dari Z_n karena nilainya tidak bergantung pada temperatur.

Jawaban Soal-Soal
1. soal bab 4 buku pointon
Fungsi distribusi bose-einstein sendiri menyatakan bahwa jumlah foton yang berada pada tingkat energi tertentu dinyatakan oleh hubungan

$$n_s = \frac{g_s}{e^{h\nu_s/kT}-1} \tag{151}$$

Sementara pada foton berlaku $h\nu = hc/\lambda$. Dengan demikian persamaan (i.13) dapat dimasukkan ke dalam persamaan (i.14) sebagai jumlah foton, $n_\lambda(\lambda)d\lambda$ dengan panjang gelombang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$ yakni

$$n_\lambda(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda\cdot\frac{1}{e^{hc/k\lambda T}-1} \tag{152}$$

jumlah total foton dalam kotak dapat diperoleh dengan mengintegralkan persamaan (152) terhadap semua panjang gelombang yang mungkin, yakni

$$N_{\rm tot} = \int_0^\infty \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda\cdot\frac{1}{e^{hc/k\lambda T}-1} \tag{153}$$

Jika digunakan pemisalan $t = hc/k\lambda T$ maka $dt = \frac{hc}{kT}(-d\lambda/\lambda^2)$ atau $\frac{d\lambda}{\lambda^2} = -\frac{kT dt}{hc}$ dan $\lambda^2 = \left(\frac{hc}{kT}\right)^2 t^{-2}$ dan batas pengintegralan akan saling terbalik. Jadi persamaan (153) dapat dituliskan menjadi

$$N_{\rm tot} = 8\pi\int_\infty^0 \left(-\frac{kT}{hc}dt\right)\left(\frac{kT}{hc}t\right)^2$$

$$\cdot\left(\frac{1}{e^t-1}\right)$$

$$= 8\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t-1} \tag{154}$$

Persamaan terkahir dapat diselesaikan dengan meninjau hubungan berikut

$$\frac{1}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \tag{155}$$

Dengan mengambil uraian taylor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n \quad (\text{untuk } |x| < 1)$$

pada suku penyebut maka

$$\frac{1}{e^t-1} = e^{-t} + (e^{-t})^2 + (e^{-t})^3 + \ldots \tag{156}$$

Kemudian tinjau integral berikut

$$\int_0^\infty t^2e^{-nt} = -\frac{1}{n}e^{-nt}\cdot t^2\Big|_0^\infty +$$

$$\frac{2}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}t\Big|_0^\infty + \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-nt}dt\right]$$

$$= \Big[-\frac{1}{n}e^{-nt}t^2 - \frac{2}{n^2}e^{-nt}t -$$

$$\frac{2}{n^3}e^{-nt}\Big]_0^\infty \tag{157}$$

Untuk t besar maka $e^t \gg t^2$ jadi $\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0$. Sehingga

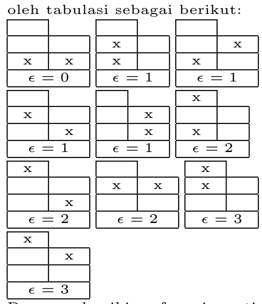
$$\Big[-\frac{1}{n}e^{-nt}t^2 - \frac{2}{n^2}e^{-nt}t -$$

$$\frac{2}{n^3}e^{-nt}\Big]_0^\infty = \frac{2}{n^3} \tag{158}$$

Jadi dengan memasukkan hasil (158) dan uraian (156) ke dalam persamaan (154) maka diperoleh total jumlah foton pada kotak dalam kesetimbangan termal yakni:

$$\boxed{16\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\sum_1^\infty\frac{1}{n^3}} \tag{159}$$

2. Penentuan fungsi partisi untuk statistik fermi dirac, bose-einstein, dan statistik klasik terbedakan
Misal, $\epsilon_0 = 0$; $\epsilon_1 = \epsilon$;$\epsilon_2 = 2\epsilon$, $N = 2$; $g_0 = g_1 = 2$; $g_2 = 1$. Maka untuk statistik fermi-dirac akan diperoleh tabulasi sebagai berikut:



Dengan demikian fungsi partisinya adalah:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_i W_ie^{-\epsilon_i/kT}$$

$$= e^0 + 4e^{-\epsilon/kT} + 3e^{-2\epsilon/kT} + 2e \tag{160}$$

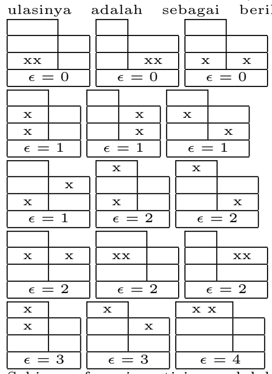
sehingga energi rata-ratanya adalah

$$\overline{E} = \frac{kT^2}{\boldsymbol{Z}}\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial T}$$

$$= \frac{2\epsilon e^{-\epsilon/kT}}{\boldsymbol{Z}}(2 + 3e^{-\epsilon/kT} +$$

$$3e^{-2\epsilon/kT}) \tag{161}$$

Untuk statistik bose-einstein, tabulasinya adalah sebagai berikut



Sehingga fungsi partisinya adalah

$$\boldsymbol{Z} = 3e^0 + 4e^{-\epsilon/kT} + 5e^{-2\epsilon/kT} +$$

$$2e^{-3\epsilon/kT} + e^{-4\epsilon/kT} \tag{162}$$

Dengan demikian

$$\overline{E} = \frac{kT^2}{\boldsymbol{Z}}(0 + \frac{4\epsilon}{kT^2}e^{-\epsilon/kT} + \frac{10\epsilon}{kT^2}e^{-}$$

$$\frac{6\epsilon}{kT^2}e^{-3\epsilon/kT} + \frac{4\epsilon}{kT^2}e^{-4\epsilon}/kT) \tag{163}$$

Untuk sistem klasik terbedakan, pernyataan $\boldsymbol{Z} = Z^N$ bisa digunakan, dengan demikain

$$\boldsymbol{Z} = Z^N$$

$$= \left(\sum_i g_ie^{-\epsilon_i/kT}\right)^N$$

$$= \Big(g_0e^{-\epsilon_0/kT} + g_1e^{-\epsilon_1/kT} +$$

$$g_2e^{-\epsilon_2/kT}\Big)^2$$

$$= \left(2 + 2e^{-\epsilon/kT} + e^{-2\epsilon/kT}\right)^2 \tag{164}$$