声波正演模拟方法

这一节主要介绍如何利用 SMART 工具包进行波动方程的正演模拟。以二阶波动方程为例，从无边界并且模拟结果频散比较严重的简单程序，一步一步改进至模拟效果较好的程序。在这个过程中对相应的函数、参量做详细的说明，同时对伪谱法以及 GPU、CUDA 加速做相应的说明。

1. 二阶方程

1.1 有限差分

首先从最简单的声波方程入手，介绍波动方程的数值求解。常密度二维波动方程如下所示：

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)f\,. \tag{1}$$

所谓波动方程的求解就是利用边界值条件、初始条件和震源，从当前（或联合过去）时刻求取下一时刻的值，用公式表述为

$$p^{n+1}=fun\left(p^n,p^{n-1},.....\right). \tag{2}$$

显然，波动方程求解的关键是构造出递推格式。递推格式是通过时间导数的有限差分格式实现的。对二阶导数进行二阶差分近似，有

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\approx\frac{p^{n+1}-2p^n+p^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{3}$$

那么

$$p^{n+1}\approx 2p^n-p^{n-1}+\Delta t^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) \tag{4}$$

如此以来，有

$$p^{n+1}=2p^n-p^{n-1}+\Delta t^2v^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)+\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)f \tag{5}$$

上面的格式是最常用的时间差分格式。当然，时间微分也可以利用高阶差分近似，具体可参阅董良国（2000）的论文《一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法》。将空间导数也进行二阶差分近似，有

$$p^{n+1}=2p^n-p^{n-1}+\Delta t^2v^2\left(\frac{p_{i-1,j}-2p_{ij}+p_{i+1,j}}{\Delta x^2}+\frac{p_{i,j-1}-2p_{ij}+p_{i,j+1}}{\Delta z^2}\right)+\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)f \tag{6}$$

在程序开始之前，先对一些参数、变量和函数做一些简单的说明。

1、模型导入。本例子中速度场是简单的均匀介质，我们直接构造一个速度场 vp。

vp=vp0*fones(Nz,Nx); %ones 函数的浮点型版本。在支持 GPU 的机器上，可以使用

vp=vp0*gones(Nz,Nx);%申请 GPU 数组，或者利用

vp=gpuArray(vp); %将 CPU 数据导入进 GPU

2、波场变量。本例中涉及三个场变量 $p^{n+1}, 2p^{n}, p^{n-1}$,利用 fzeros 申请内存

P2=fzeros(Nz,Nx); %zeros 函数的浮点型版本。在支持 GPU 的机器上，可以使用

P2=gzeros(Nz,Nx); %申请 GPU 数组，或者利用

P2=gpuArray(P2); %将 CPU 数据导入进 GPU，另外两个 P1,P0 变量可同样方式申请

3、网格参数设置。网格大小 Nz,Nx 由模型决定，本例直接给定。空间采样间隔 dx,dz 由模型决定，本例直接给出

4、子波序列。子波序列可由外部导入，也可直接构造。笔者一般使用 Ricker 子波作为震源。

wlet=gfricker(Nt, dt,fm,lag) %Ricker 子波函数，Nt 是模拟时长，实为迭代次数，总时长为 T=Nt*dt。dt 是采样间隔，采样间隔由有限差分稳定性决定 Vmax*dt/dh<R. R 与差分格式、阶数等相关，一般是小于 1 的数。笔者大多数采用 dt=0.001,dh=10m 的设置，Vmax 一般在大于 7000m/s，会发生溢出。fm 是 Ricker 子波峰值频率，lag 指的子波峰值出现的位置相对于 0 点的延迟（点数）。lag 一般设置为 40 即可出现整个波形, lag=0 则表示半个子波。

5、子波的位置函数。由于脉冲函数的频谱为全频带，高频成分会引起频散。笔者一般采用

loc=gfloc(Nz,Nx,sz,sx) %设置一高斯函数震源位置

6、空间差分。空间差分是 MATLAB 进行微分方程求解的关键。在利用 MATLAB 进行差分计算时，尽量避免逐点计算，SMART 中的差分是采用褶积算子 conv 实现的。比如 conv2(p1,[1，-2，1])便可以实现二阶导数的二阶差分近似。

7、边界条件。边界条件多种多样，以笔者的经验而言，吸收衰减边界条件就已经满足要求。笔者一般采用最简单的吸收边界和分裂 PML 边界。采用

[qx,qz]=gfpml(Nz,Nx,Nlayer,par) %产生中间为 0，边界处逐渐增大的矩阵

8、注：以上涉及到的函数均有各种不同的版本（有时为了方便，有时为了效率）。详细的参数列表见 SMART 帮助文档。

下面程序 1-1 是公式(6)的 MATLAB 实现。图 1-1 是子波频率 30Hz 和 50Hz 时的结果。由于该程度未做任何压制频散的优化设计，所以频散非常严重（惨不忍睹！）。下面逐步的改

善频散问题。频散是有限差分的一个固有缺点。频散可以用一个波长λ内的采样点G数表征，在一个波场内采样点数越多频散越弱，模拟精度越高，并且由$\lambda = v/f$可知，提高波速，降低频率可以压制频散。那么在模型速度和子波频率确定的情况下下如何压制频散呢？

程序 1.1：MAc2FDCPU1

```
%**********************************************************************%
% Name      :  An example of 2-order acoustic wave equation FD modeling
%Author     :  C.F. Guo
%Date       :  2017-1-19
% Version   :  1.0
%**********************************************************************%
Nx=300; Nz=300;Nt=400;                        %模型大小,模拟时间
dt=0.001; dx=10; dz=10;                       %时间和空间采样间隔
P1=fzeros(Nx,Nz); P2=P1; P0=P1;               %申请三个场变量，fzeros 浮点型内存分配
vp=3000*fones(Nx,Nz);                         %模型
loc=fzeros(Nx,Nz); loc(Nx/2,Nz/2)=1;          %震源位置
fm=30;lag=40; wlet=gfricker(Nt,fm,dt, lag);   %fm 子波频谱，lag 延迟, wlet 子波序列
cn=dt.*dt.*vp.*vp;
mx=[1,-2,1]/dx/dx; mz=[1,-2,1]'/dx/dx;        %差分系数
for it=1:Nt                                   %时间迭代
                    %X 方向空间差分     % Z 方向空间差分
    P2=2*P1-P0+ cn.*(conv2(P1,mx,'same') +conv2(P1,mz,'same'))+loc*wlet(it);
    P0=P1;          %迭代
    P1=P2;          %迭代
end
gfplot(p1);                                   %数据显示
```

频散压制主要有以下几种方法：

1. 减小网格间距。减小网格间距可以增加一个波长内的采样点数，采样点数增大，频散会明显减弱。但是网格点数增加计算量也会增加，由稳定性条件限制，空间采样间隔减小，时间采样间隔也相应减小。
2. 子波的位置函数的改善。脉冲函数的频谱是全频带的。其中的高频成分则会引起频散。为了压制频散，可以将脉冲函数的超出地震频带范围的高频成分衰减掉。SAMRT 中采用是高斯衰减函数。由于高斯函数在频率（波数）域和时间（空间）域具有形同的形式。因此 SMART 中的震源位置函数至直接利用一个高斯函数代替。图 1-2（a）所示是改善后的模拟结果，相比图 1-1（b），频散得到明显压制。

程序 1.2：MAc2FDCPU2

```
%*********************************************************************%
% Name      ： An example of 2-order acoustic wave equation FD modeling. Modified from
%              MAc2FDCPU1
%Author     ： C.F. Guo
%Date       ： 2017-1-19
% Version   ： 2.0
%*********************************************************************%
......                                  %其余省略
%loc=fzeros(Nx,Nz); loc(Nx/2,Nz/2)=1
loc=gfloc(Nz,Nx,sz,sx)                  %震源位置,sz 和 sx 为震源中心位置
……                                      %其余省略
```

3. 采用高阶差分格式。图 1-2（b）是采用八阶有限差分格式的模拟结果，从图中几乎看不到频散发生。高阶差分格式是最常用的压制频散的方法。高阶差分格式的知识参见相关文献。

程序 1.3：MAc2FDCPU3

```
%*********************************************************************%
% Name      ： An example of 2-order acoustic wave equation FD modeling. Modified from
%              MAc2FDCPU2
%Author     ： C.F. Guo
%Date       ： 2017-1-19
% Version   ： 3.0
%*********************************************************************%
......                                                  %其余省略
% P2=2*P1-P0+cn.*(conv2(P1,mx,'same')+conv2(P1,mz,'same'))+loc*wlet(it);
P2=2*P1-P0+cn.*(gfLx2(P1,dx)+gfLz2(P1,dz))+loc*wlet(it);  %gfLx2 和 gfLz2 采用的是
                                                        %8 阶差分格式
……                                                      %其余省略
```

4. 采用通量传输校正的方法，具体参见 Fei Tong (1995，Elimination of numerical dispersion in finite-difference modeling and migration by flux-corrected transport).
5. 优化差分系数方法，具体参见 Liu Yang (2012，Globally optimal finite-difference schemes based on least squares)。SMART 里的差分算子大部分是采用优化的差分系数，压制频散。

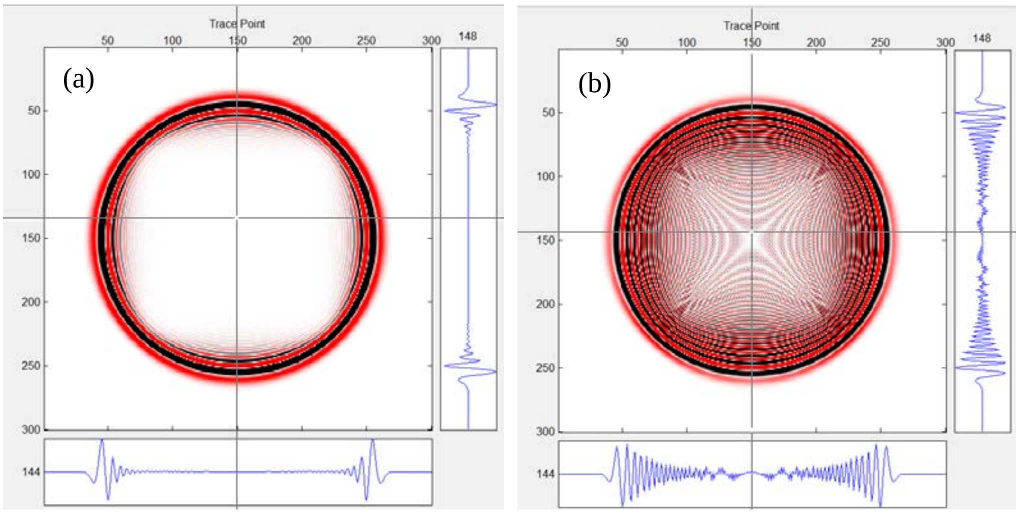

图 1-1. 二阶声波方程二阶有限差分模拟结果，子波主频：(a) 30Hz, (b)50Hz

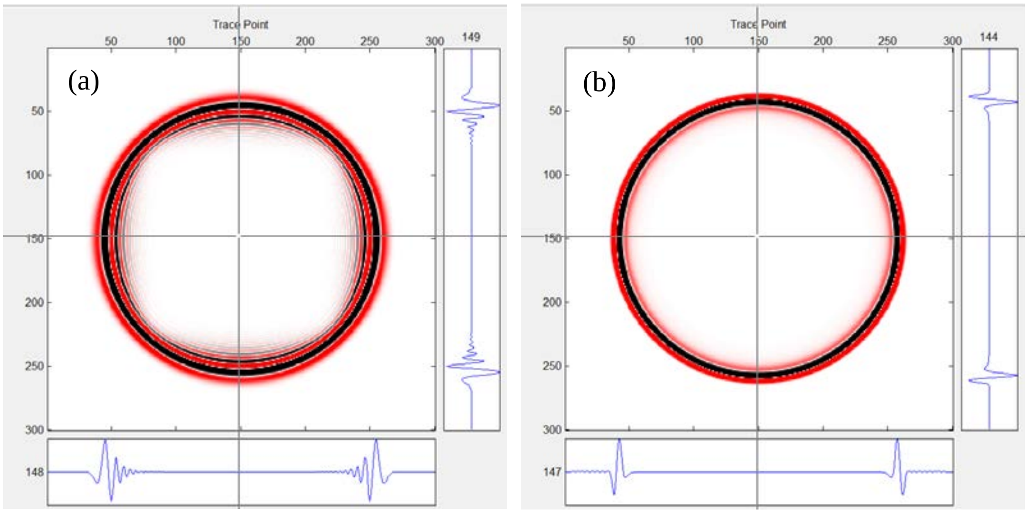

图 1-2. 二阶声波方程有限差分模拟结果, 子波频率为 50Hz:（a）改善的震源位置函数（二阶差分格式）;（b）八阶差分格式

前面介绍的是没有边界条件时的正演模拟方法，接下来对二阶方程的边界条件做简单介绍。边界条件多种多样。笔者个人认为最简单的吸收边界条件已经可以满足绝大部分需求。边界条件可由衰减介质推导出。典型的衰减方程为

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\frac{\eta}{v^2}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{7}$$

公式(7)的离散格式为:

$$\frac{p^{n+1}-2p^n+p^{n-1}}{\Delta t^2}+\eta\frac{p^{n+1}-p^{n-1}}{2\Delta t}=v^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) \tag{8}$$

那么有：

$$p^{n+1}=\frac{1}{1+\eta\Delta t/2}\left(2p^{n}-\left(1-\eta\Delta t/2\right)p^{n-1}+v^{2}\left(Lx2\left(p^{n}\right)+Lz2\left(p^{n}\right)\right)\right) \tag{9}$$

下面是公式(9)的 MATLAB 实现。

程序 1.4：MAc2FDCPU4

```
%**********************************************************************%
% Name      ： An example of 2-order acoustic wave equation FD modeling. Modified from
%              MAc2FDCPU3
%Author     ： C.F. Guo
%Date       ： 2017-1-19
% Version   ： 4.0
%**********************************************************************%
Nx=300; Nz=300;Nt=600;                          %模型大小,模拟时间
dt=0.001; dx=10; dz=10;                         %时间和空间采样间隔
P1=fzeros(Nx,Nz); P2=P1; P0=P1;                 %申请三个场变量，fzeros 浮点型内存分配
vp=3000*fones(Nx,Nz);                           %模型
loc=gfloc(Nz,Nx,sz,sx);                         %震源位置
fm=30;lag=40; wlet=gfricker(Nt,fm,dt, lag);     %fm 子波频谱，lag 延迟, wlet 子波序列
cn=dt.*dt.*vp.*vp;
[qz,qx]=gfpml(Nz,Nx,20,0.1);                    %构造边界条件
Q=qx+qz;                                        %Q 即为公式(9)的 zeta. Q 为一个中间为 0，
pl=1./(1+Q*dt/2);                               %在边界逐渐增大的一个矩阵
pm=(1-Q*dt/2);
for it=1:Nt                                     %时间迭代
    P2=pl.*(2*P1-pm.*P0+cn.*(gfLx2(P1,dx)+gfLz2(P1,dz)))+loc*wlet(it);
    P0=P1;            %迭代
    P1=P2;            %迭代
end
gfplot(p1);                                     %数据显示
```

很不幸的是，吸收效果并不理性，如图 1-3（a）和图 1-4（a）（蓝色线）所示，边界反射还是很明显的。出现这种情况的原因是所谓的衰减方程是基于一维假设推导到的，二维是其简单的拓展。类比 PML 边界条件的处理方法（关于 PML 边界的文献非常多），可以将方程(7)分裂成两个方向上的量 $p=p_x+p_z$，分别对应微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 p_x}{\partial t^2}+\dfrac{\eta}{v^2}\dfrac{\partial p_x}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 p_x}{\partial x^2}\\[2ex]\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 p_z}{\partial t^2}+\dfrac{\eta}{v^2}\dfrac{\partial p_z}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 p_z}{\partial z^2}\end{cases} \tag{10}$$

下面是方程(10)的 MATLAB 实现。

程序 1.5：MAc2FDCPU5

```
%************************************************************************%
% Name        ：  An example of 2-order acoustic wave equation FD modeling. Modified from
%                 MAc2FDCPU4
%Author       ：  C.F. Guo
%Date         ：  2017-1-19
% Version     ：  5.0
%************************************************************************%
Nx=300; Nz=300;Nt=600;                       %模型大小,模拟时间
dt=0.001; dx=10; dz=10;                      %时间和空间采样间隔
P1=fzeros(Nx,Nz);                            %分配分裂波场变量
P2x=P1;P1x=P1;P0x=P1;
P2x=P1;P1z=P1;P0z=P1;
vp=3000*fones(Nx,Nz);                        %模型
loc=gfloc(Nz,Nx,sz,sx);                      %震源位置
fm=30;lag=40; wlet=gfricker(Nt,fm,dt, lag);  %fm 子波频谱，lag 延迟, wlet 子波序列
cn=dt.*dt.*vp.*vp;
[qz,qx]=gfpml(Nz,Nx,20,0.1);                 %重新构造边界条件
%Q=qx+qz;
%pl=1./(1+Q*dt/2);
%pm=(1-Q*dt/2);
plx=1./(1+qx*dt/2);                          %X 方向边界
pmx=1-qx*dt/2;
plz=1./(1+qz*dt/2);                          %Z 方向边界
pmz=1-qz*dt/2;
for it=1:Nt
    %P2=pl.*(2*P1-pm.*P0+cn.*(gfLx2(P1,dx)+gfLz2(P1,dz)))+loc*wlet(it);
    %P0=P1;                    %迭代
    %P1=P2;                    %迭代
     P2x=plx.*(2*P1x-pmx.*P0x+cn.*gfLx2(P1,dx));  %X 方向迭代
     P0x=P1x;
     P1x=P2x;
     P2z=plz.*(2*P1z-pmz.*P0z+cn.*gfLz2(P1,dz));  %Z 方向迭代
     P0z=P1z;
     P1z=P2z;
     P1=P1x+P1z+loc*wlet(it);      %和并变量
end
gfplot(p1);                                  %数据显示
```

图 1-3（b）是分裂形式的边界条件的结果，边界吸收效果比较好。分裂形式的反射能量大约是非分裂形式的1/10左右。对比图1-4(b)的数值，反射能量最大大约是入射波的5/1000。效果是可以满足大部分需求的。比较遗憾的一点是，经过分裂之后波形发生了一定的变化。

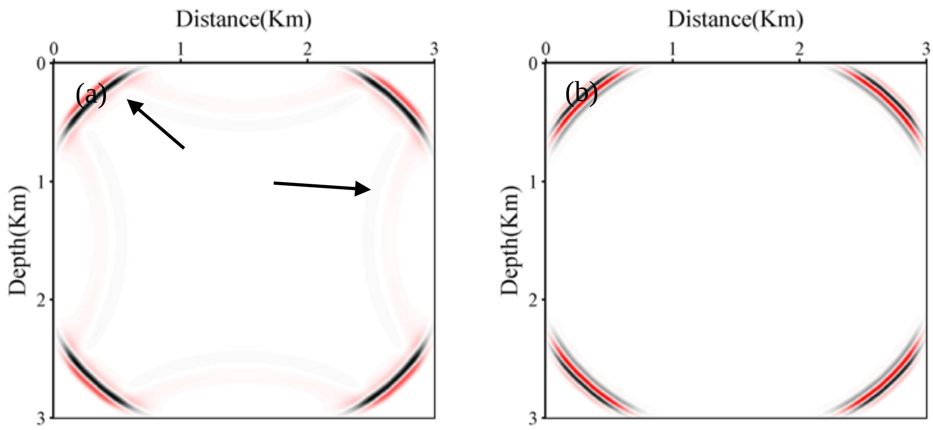

图 1-3 吸收边界效果：(a)非分裂; (b)分裂形式

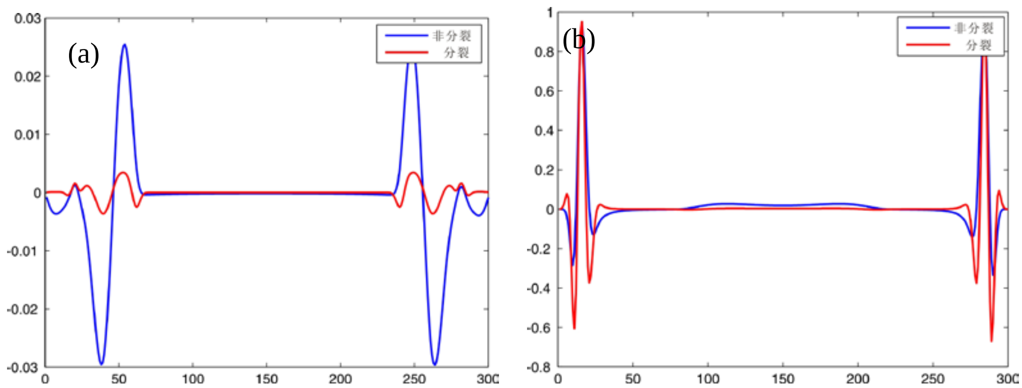

图 1-4 (a)第 150 道数据对比, (b)第 50 道数据对比

1.2 伪谱法

伪谱法的基本原理是利用 Fourier 变换的微分性质：

$$F\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=-ik_xF[u] \tag{11}$$

那么有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=F^{-1}\left[-ik_xF[u]\right] \tag{12}$$

伪谱法实现中的关键是构建波数域算子 k，SMART 中计算波数算子的函数是 gfkzkx，fft 的必要知识请查阅相关书籍。下面是声波方程伪谱法的 MATLAB 实现。图 1-5 是波数域算子，图 1-6 是伪谱法模拟结果。

程序 1.5：MAc2PSCPU

```
%**********************************************************************%
% Name      :  An example of 2-order acoustic wave equation PS modeling.
%Author     :  C.F. Guo
%Date       :  2017-1-19
```

```
% Version     :  1.0
%*****************************************************************%
……                                          %其他省略
[kz,kx]=gfkzkx(Nz,Nx,dz,dx);                %波数域算子
KZ2=kz.*kz;
KX2=kx.*kx;
for it=1:Nt
      temp=fft2(P1);
      P2x=plx.*(2*P1x-pmx.*P0x-cn.*ifft2(temp.*KX2));   %微分计算，注意微分前面是
      P2z=plz.*(2*P1z-pmz.*P0z-cn.*ifft2(temp.*KZ2));    %负号，i*i=-1
      P0x=P1x;
      P1x=P2x;
      P0z=P1z;
      P1z=P2z;
      P1=P1x+P1z+loc*wlet(it);
end
gfplot(p1);                                 %数据显示
```

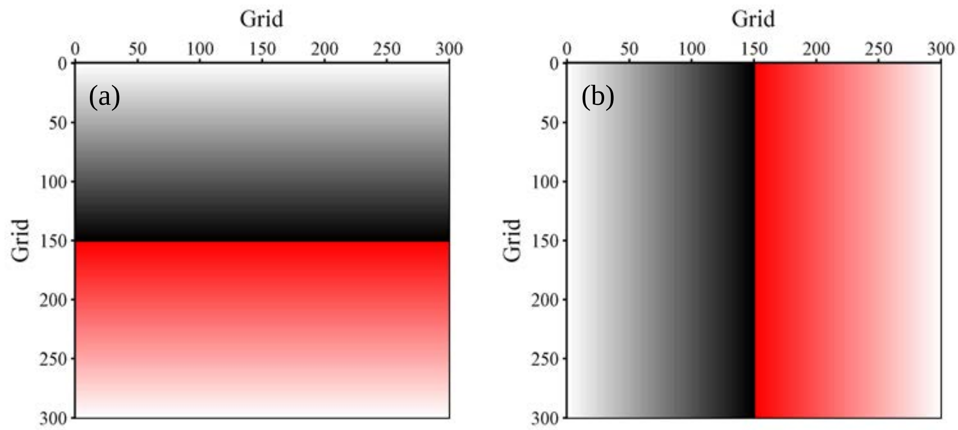

图 1-5 波数域算子：（a）kx 和（b）kz

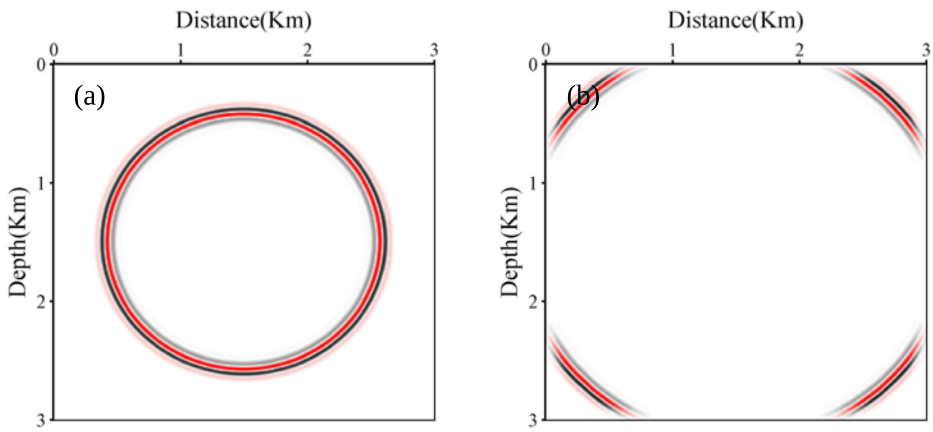

图 1-6 伪谱法模拟结果：(a)400ms 时刻波场快照, (b) 600ms 时刻波场快照,

2. 一阶方程