e 是什么?

王强

December 28, 2016

南京大学生命科学学院

书上说的

e	自然对数的底
自然对数	以 e 为底的对数

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^h - 1}{h} = 1$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^h-1}{h}=1$$

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^h - 1}{h} = 1$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

定义 e 为唯一的正数 x, 使得

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = 1$$

“美是第一位的, 在这个世界上丑陋的数学没有永久存在的位置.”

— 戈弗雷 · 哈罗德 · 哈代, 一个数学家的辩白

“美是第一位的, 在这个世界上丑陋的数学没有永久存在的位置.”

— 戈弗雷 · 哈罗德 · 哈代, 一个数学家的辩白

“在二十世纪中叶, 人们试图将数学与物理分割开来. 其结果是灾难性的.”

— 弗拉基米尔 · 阿诺尔德

真实的历史

利息

利息　　指负债方为借债向债权人所付的补偿性费用, interest.

计算利息的方法:

- 单利　　按照固定的本金计算的利息, simple interest.
- 复利　　利息除了会根据本金计算外, 新得到的利息同样可以生息. compound interest.

利息的计算公式

F	财富在未来的价值, Future value.
P	现值，即本金, Present value.
r	周期内的利息率, interest rate.
n	累计的周期数.

单利

$$F_{\mathrm{S}} = P + P \cdot r \cdot n$$

复利

$$F_{\mathrm{C}} = P \cdot (1 + r)^{n}$$

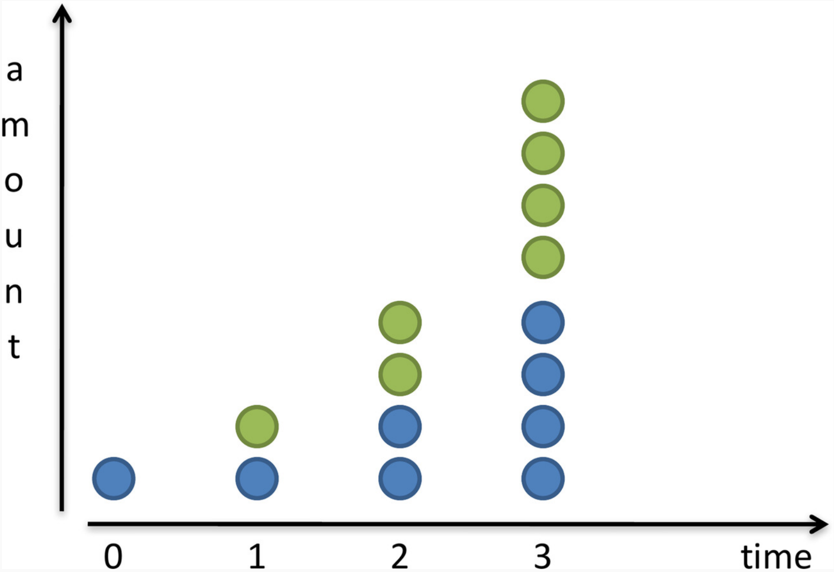
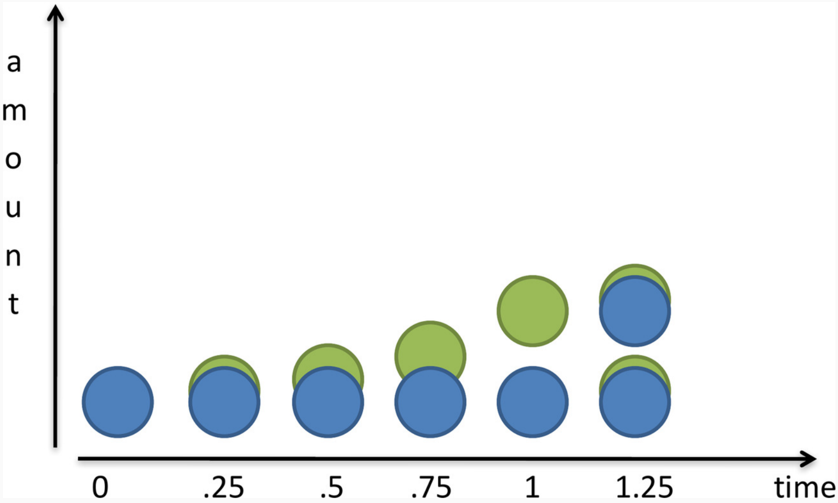
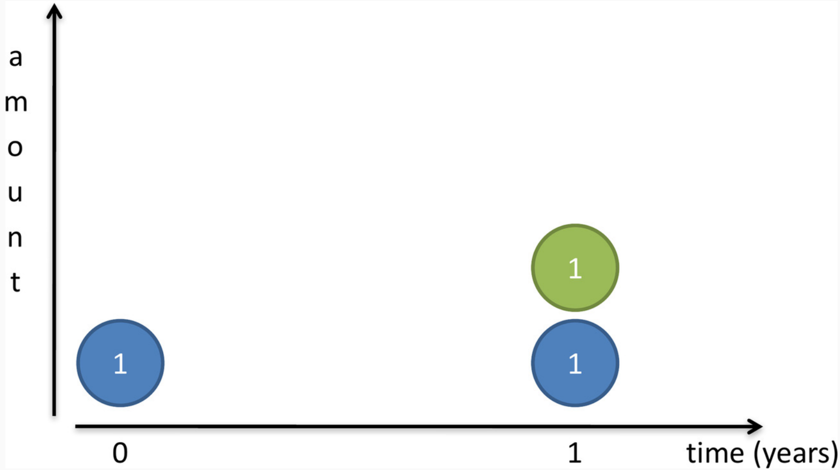
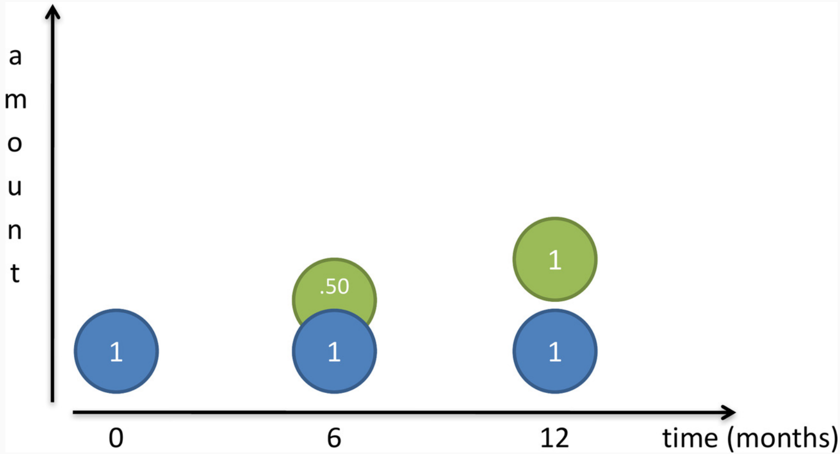


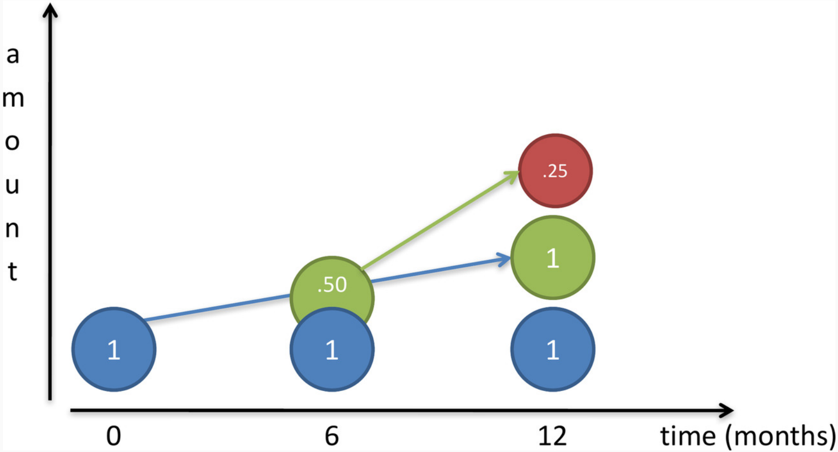
Figure 1. 简化条件: 令 $P = 1, r = 1$, 则 $F_C = (1+1)^n$

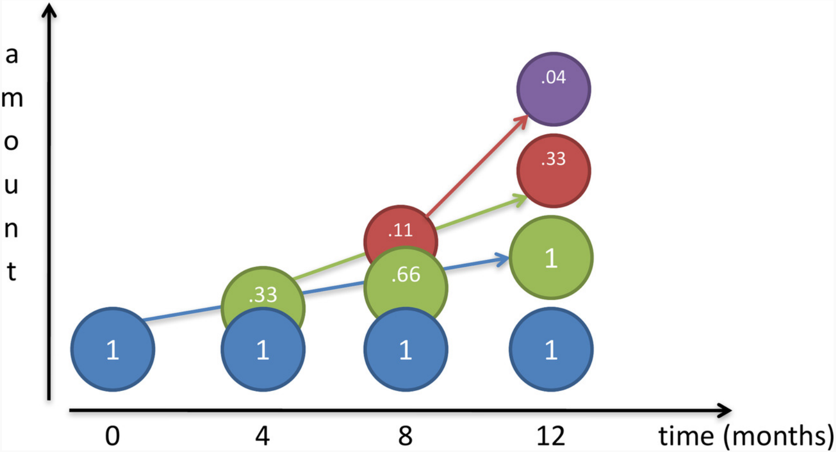

a
m
o
u
n
t
0
.25
.5
.75
1
1.25
time



amount
1
1
1
0
1
time (years)


a
m
o
u
n
t
.50
1
1
1
1
1
0
6
12
time (months)


amount
1
1
.50
1
1
.25
0
6
12
time (months)


a
m
o
u
n
t
.04
.33
.11
1
.66
.33
1
1
1
1
0
4
8
12
time (months)

m 一个周期内, 计复利的次数.

前面的简化公式

$$F_C = (1+1)^1$$

利率 $r = 1/m$, 累计的周期数 $n = m$, 上式变成了

$$F_C = (1+\frac{1}{m})^m$$

m	$(a+b)^m$	$(1+1/m)^m$	F_C
1	$a+b$	1 + 1	2
2	$a^2+2ab+b^2$	$1^2+2\cdot1\cdot1/2+(1/2)^2=1+1+0.25$	2.25
3	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$1^3+3\cdot1^2\cdot1/3+3\cdot1\cdot(1/3)^2+(1/3)^3\approx1+1+0.33+0.04$	2.37

m	$F_C = (1 + 1/m)^m$
1	2
2	2.25
3	2.37
12	2.613
365	2.714567
$365 \cdot 24 \cdot 60$	2.718279

m	$F_C = (1 + 1/m)^m$
1	2
2	2.25
3	2.37
12	2.613
365	2.714567
$365 \cdot 24 \cdot 60$	2.718279

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bonus slides

1626 年, 荷兰人以 60 荷兰盾 (NLG) 从当地印地安酋长那里买下整个曼哈顿岛.

印地安酋长将钱存放到荷兰银行, 收取每年 6.5% 的复利利率, 并承受通货膨胀带来的贬值.

$$
\begin{aligned}
F &= 60\ \text{NLG} \times (1 + 6.5 \div 100)^{2016-1626} \\
&= 60\ \text{NLG} \times 1.065^{390} \\
&\approx 2782904368555\ \text{NLG} \\
&= 2782904368555 \div 2.20371 \times 1.0595\ \text{USD} \\
&\approx 1.338\ \text{Trillion USD}
\end{aligned}
$$

"Compound interest is the most powerful force in the universe."

— Albert Einstein

另一条路径

$$
\begin{aligned}
f(x) &= R^x \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{R^{x+h} - R^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(R^x \cdot \frac{R^h - 1}{h} \right) \\
&= R^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= R^x \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{R^{x+h} - R^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(R^x \cdot \frac{R^h - 1}{h} \right) \\
&= R^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h}
\end{aligned}
$$

$$
R^x = \frac{d}{dx} R^x \to \lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h} = 1
$$

数学家们应用 l’Hôpital’s rule, 可以求出

$$\lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h} = \ln(R)$$

这里用土一点的办法.

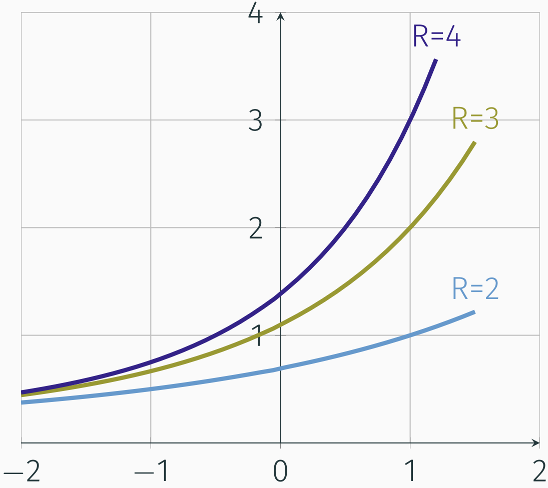


Figure 2. $\lim_{h\to 0} \frac{R^h-1}{h}$, $R = 2 \to 4$

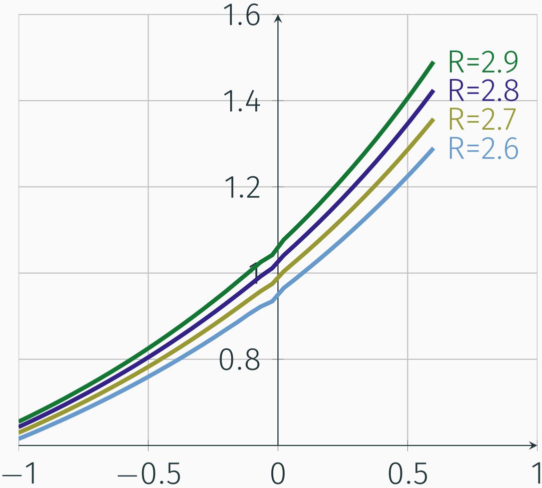


Figure 3. $\lim_{h\to 0} \frac{R^h-1}{h}$, $R = 2.6 \to 2.9$

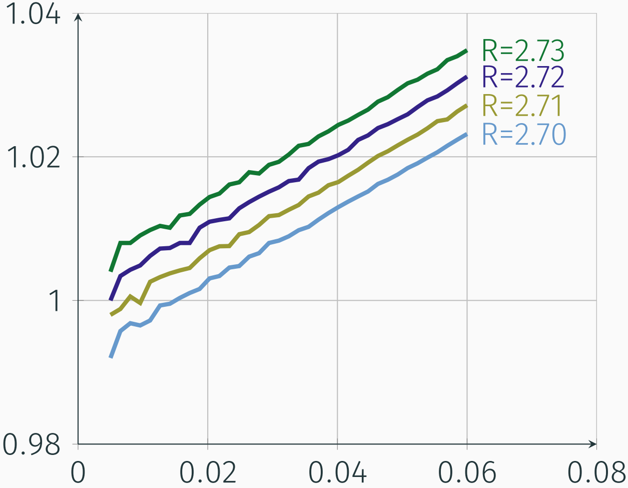


Figure 4. $\lim_{h\to 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2.70 \to 2.73$

剩下的两个

第三种定义

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

e^x 的泰勒展式, 令 $x=1$

$$\mathrm{Series}\left[e^x,\{x,0,4\}\right]=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O\left(x^5\right)$$

第四种定义

定义 e 为唯一的正数 x, 使得

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$$

看下这个不定积分

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \ln(t)$$

- 人类科学发展的历史, 先有猜想和算法, 而后严格地形式化证明.
- 每次进一步地形式化, 都提高了门槛, 降低了人们的学习兴趣.
- 没有新人进入, 就减慢了学科的发展, (降低了杂志的影响因子 ☹,) 被动地毁灭了学科[1].
- 形式化的学科内容, 决不能在一开始就灌输给初学者.

[1] Watterson, G. A. On the Number of Segregating Sites in Genetical Models without Recombination. *Theoretical Population Biology* **7**, 256–276 (1975)