

e 是什么?

王强

December 28, 2016

南京大学生命科学学院

书上说的

e 自然对数的底
自然对数 以 e 为底的对数

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x , 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^h - 1}{h} = 1$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x , 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^h - 1}{h} = 1$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x , 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^h - 1}{h} = 1$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

定义 e 为唯一的正数 x , 使得

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = 1$$

“美是第一位的, 在这个世界上丑陋的数学没有永久存在的位置.”

— 戈弗雷·哈罗德·哈代, 一个数学家的辩白

“美是第一位的, 在这个世界上丑陋的数学没有永久存在的位置.”

— 戈弗雷·哈罗德·哈代, 一个数学家的辩白

“在二十世纪中叶, 人们试图将数学与物理分割开来. 其结果是灾难性的.”

— 弗拉基米尔·阿诺尔德

真实的历史

利息

利息 指负债方为借债向债权人所付的补偿性费用, interest.

计算利息的方法:

- **单利** 按照固定的本金计算的利息, simple interest.
- **复利** 利息除了会根据本金计算外, 新得到的利息同样可以生息. compound interest.

利息的计算公式

F	财富在未来的价值, <u>F</u> uture value.
P	现值, 即本金, <u>P</u> resent value.
r	周期内的利息率, interest <u>r</u> ate.
n	累计的周期数.

单利

$$F_S = P + P \cdot r \cdot n$$

复利

$$F_C = P \cdot (1 + r)^n$$

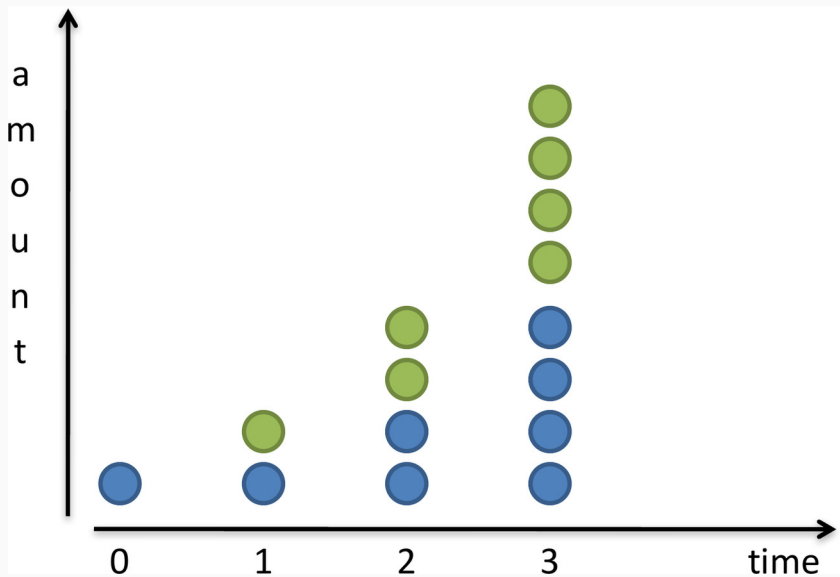
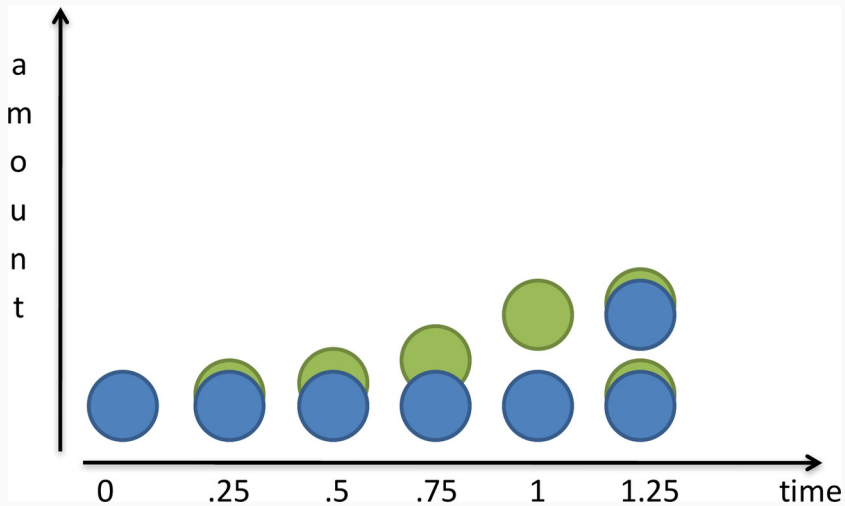
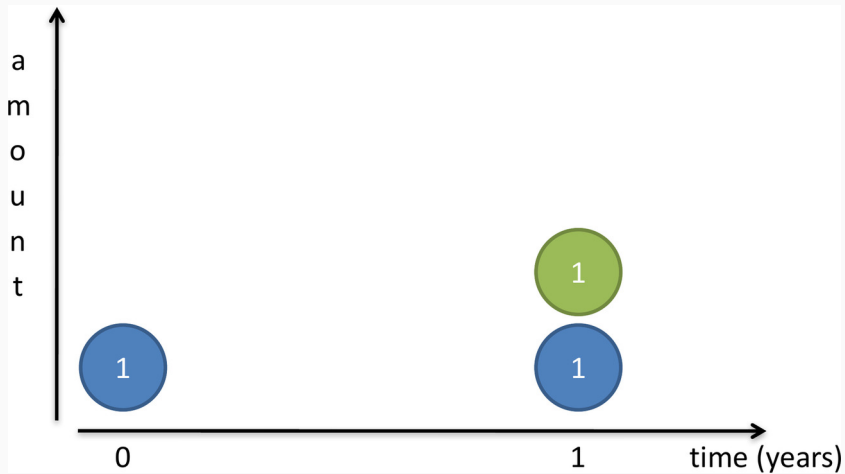
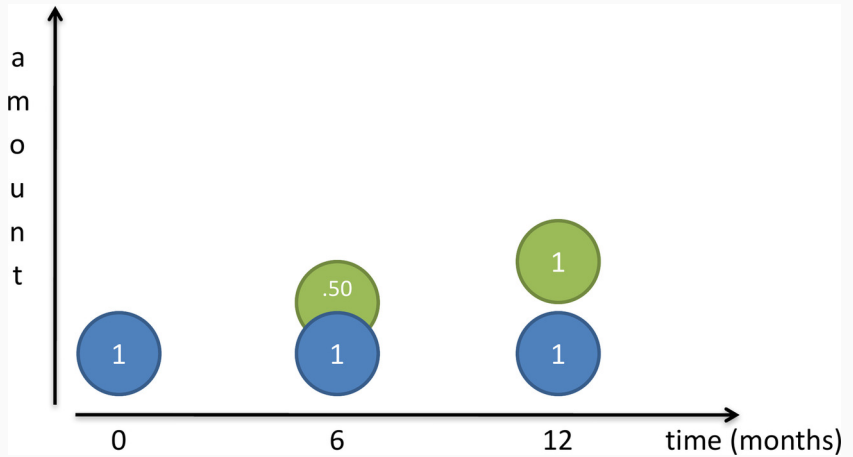
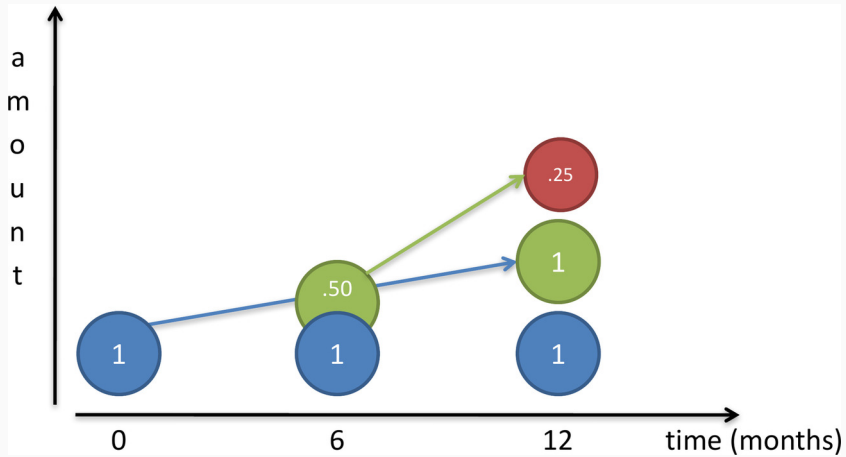


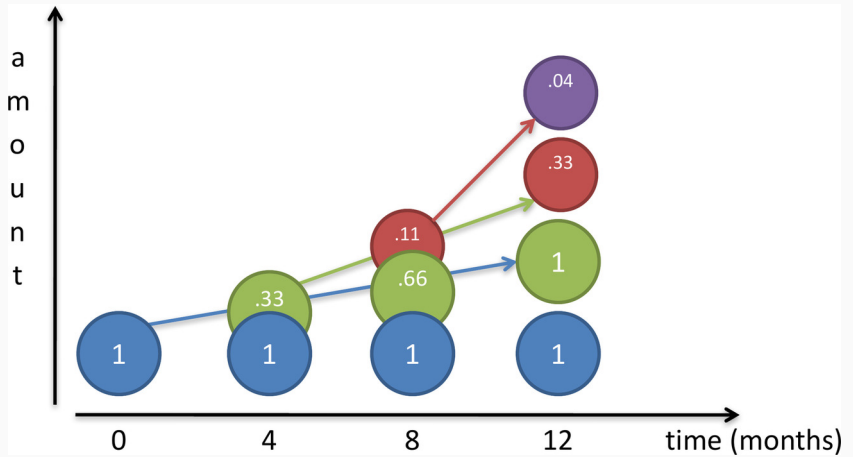
Figure 1. 简化条件: 令 $P = 1, r = 1$, 则 $F_C = (1 + 1)^n$











m 一个周期内, 计复利的次数.

前面的简化公式

$$F_C = (1 + 1)^1$$

利率 $r = 1/m$, 累计的周期数 $n = m$, 上式变成了

$$F_C = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

m	$(a + b)^m$	$(1 + 1/m)^m$	F_C
1	$a + b$	$1 + 1$	2
2	$a^2 + 2ab + b^2$	$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1/2 + (1/2)^2 = 1 + 1 + 0.25$	2.25
3	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1/3 + 3 \cdot 1 \cdot (1/3)^2 + (1/3)^3 \approx 1 + 1 + 0.33 + 0.04$	2.37

m	$F_C = (1 + 1/m)^m$
1	2
2	2.25
3	2.37
12	2.613
365	2.714567
$365 \cdot 24 \cdot 60$	2.718279

m	$F_C = (1 + 1/m)^m$
1	2
2	2.25
3	2.37
12	2.613
365	2.714567
$365 \cdot 24 \cdot 60$	2.718279

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bonus slides

1626 年, 荷兰人以 60 荷兰盾 (NLG) 从当地印地安酋长那里买下整个曼哈顿岛.

印地安酋长将钱存放到荷兰银行, 收取每年 6.5% 的复利利率, 并承受通货膨胀带来的贬值.

$$\begin{aligned} F &= 60 \text{ NLG} \times (1 + 6.5 \div 100)^{2016-1626} \\ &= 60 \text{ NLG} \times 1.065^{390} \\ &\approx 2782904368555 \text{ NLG} \\ &= 2782904368555 \div 2.20371 \times 1.0595 \text{ USD} \\ &\approx 1.338 \text{ Trillion USD} \end{aligned}$$

“Compound interest is the most powerful force in the universe.”

— Albert Einstein

另一条路径

$$f(x) = R^x$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^{x+h} - R^x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(R^x \cdot \frac{R^h - 1}{h} \right)$$

$$= R^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^h - 1}{h}$$

$$f(x) = R^x$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^{x+h} - R^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(R^x \cdot \frac{R^h - 1}{h} \right) \\ &= R^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^h - 1}{h} \end{aligned}$$

$$R^x = \frac{d}{dx} R^x \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^h - 1}{h} = 1$$

数学家们应用 l'Hôpital's rule, 可以求出

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^h - 1}{h} = \ln(R)$$

这里用土一点的办法.

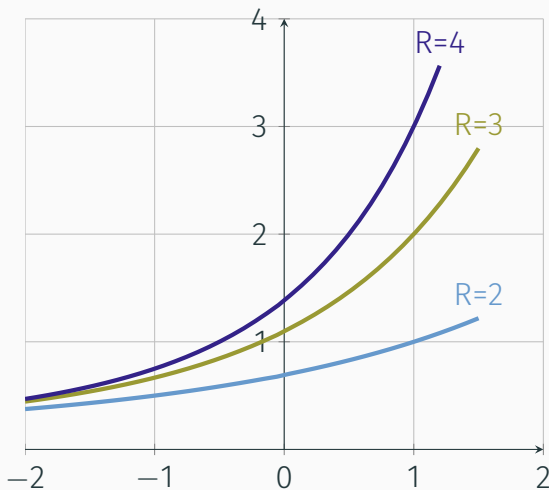


Figure 2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2 \rightarrow 4$

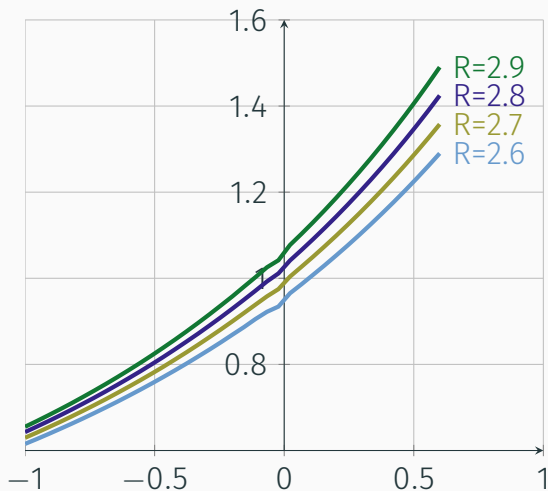


Figure 3. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2.6 \rightarrow 2.9$

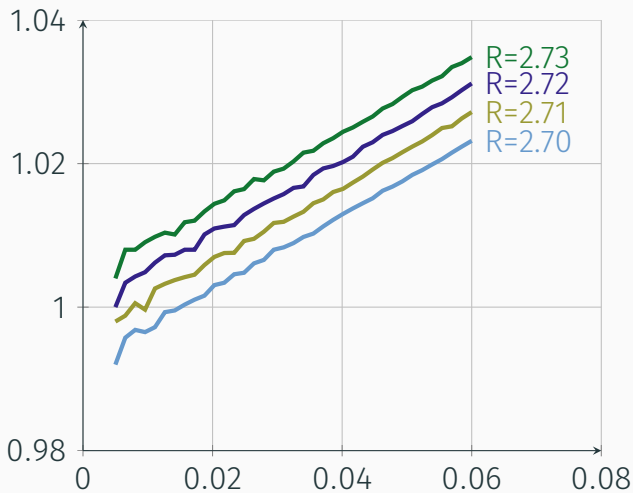


Figure 4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2.70 \rightarrow 2.73$

剩下的两个

第三种定义

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

e^x 的泰勒展式, 令 $x = 1$

$$\text{Series}[e^x, \{x, 0, 4\}] = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

第四种定义

定义 e 为唯一的正数 x , 使得

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = 1$$

看下这个不定积分

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln(t)$$

- 人类科学发展的历史, 先有猜想和算法, 而后严格地形式化证明.
- 每次进一步地形式化, 都提高了门槛, 降低了人们的学习兴趣.
- 没有新人进入, 就减慢了学科的发展, (降低了杂志的影响因子 😞,) 被动地毁灭了学科¹.
- 形式化的学科内容, 决不能在一开始就灌输给初学者.

¹ Watterson, G. A. On the Number of Segregating Sites in Genetical Models without Recombination. *Theoretical Population Biology* 7, 256–276 (1975)