

# 目录

<b>1</b>	<b>代数基本概念</b>	<b>5</b>
1.1	代数运算	5
1.2	群的定义和简单性质	5
1.3	群的例子	7
1.4	子群, 陪集	9
1.5	群的同构	12
1.6	同构, 正规子群	13
1.7	商群	14
1.8	环, 子环	19
1.9	各种特殊类型的环	21
1.10	环的同态, 理想	22
1.11	商环	23
1.12	特征	25
1.13	CHAPTER1 习题	27
<b>2</b>	<b>群</b>	<b>41</b>
2.1	群的同态定理	41
2.2	循环群	50
2.2.1	*	52

2.2.2	*	53
2.2.3	*	53
2.2.4	*	53
2.2.5	*	53
2.3	单群与 $A_n$ 单性	53
2.3.1	*	54
2.3.2	*	54
2.3.3	*	54
2.4	可解群	55
2.4.1	*	55
2.4.2	*	56
2.5	群的自同构群	56
2.5.1	*	57
2.5.2	*	57
2.5.3	*	58
2.6	群作用	58
2.6.1	*	60
2.6.2	*	62
2.6.3	*	62
2.6.4	*	62
2.6.5	*	63
2.6.6	*	63
2.6.7	*	63
2.6.8	*	63
2.7	Sylow 定理	63
2.7.1	*	64
2.7.2	*	66
2.7.3	*	67

目 录	3
2.7.4 *	67
2.8 群的直和	71
2.9 么半群	77
2.9.1 *	78
2.9.2 *	78
2.10 CHAPTER2 习题	80
<b>3 环</b>	<b>91</b>
3.1 环的同态定理	91
3.1.1 *	91
3.1.2 *	94
3.1.3 *	95
3.1.4 *	95



# Chapter 1

## 代数基本概念

### 1.1 代数运算

**定义 1.1.1** (代数运算). 设  $A$  是一个非空集合, 任意一个由  $A \times A \longrightarrow A$  的映射就称为定义在  $A$  上的代数运算.

### 1.2 群的定义和简单性质

**定义 1.2.1** (群). 设  $G$  是一个非空集合, 在  $G$  上定义了一个称之为乘法的代数运算, 记作  $ab$ , 若该代数运算满足如下性质, 就称  $G$  为一个群

$$[\text{结合律}](1)(ab)c = a(bc)$$

$$[\text{左幺元}](2)\exists e \in G \text{ s.t. } \forall a \in G, \text{ 有 } ea = a$$

$$[\text{左逆元}](3)\forall a \in G, \exists b \in G \text{ s.t. } ba = e.$$

**命题 1.2.1** (左右逆元相等). 若  $ba = e$ , 则  $ab = e$ .

证. 任取  $b \in G$ , 存在  $c \in G$ , 使得  $cb = e$ , 于是

$$a = ea = (cb)a = c(ba) = ce, \quad (1.2.1)$$

在等式(1.2.1)两侧同时右乘  $b$ , 就有

$$ab = (ce)b = c(eb) = cb = e,$$

问题证毕. □

**命题 1.2.2** (左右么元相等). 若对所有的  $a \in G$ , 有  $ea = a$ , 那么也有  $ae = a$ , 对所有的  $a \in G$ .

证. 取  $b \in G$ , 使得  $ba = e$ , 同时  $ab = e$ , 于是

$$ae = a(ba) = (ab)a = ea = a,$$

问题证毕. □

**命题 1.2.3** (么元惟一性). 群  $G$  中有唯一的元素  $e$  具有性质

$$\forall a \in G, ea = ae = a.$$

证. 假设  $G$  中有元素  $e_1, e_2$  满足此性质, 则

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2,$$

可见惟一性得证. □

**命题 1.2.4** (逆元惟一性). 对群  $G$  中任意元素  $a$ , 有惟一元素  $b$ , 使  $ab = ba = e$ .

证. 假设在  $G$  中还有元素  $c$  满足  $ac = ca = e$ , 则

$$c = ec = ce = c(ab) = (ca)b = eb = b,$$

这就证明了惟一性. □

**命题 1.2.5.** 对于群  $G$  中任意元素  $a, b$ , 方程

$$ax = b$$

在  $G$  中有惟一解.

证. 在题设方程两侧同时左乘  $a^{-1} \in G$ , 有

$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b$$

亦即  $x = a^{-1}b \in G$ , 解的存在性得证.

假设还有元素  $c \in G$  满足  $ac = b$ , 则

$$ax = b = ac, \quad (1.2.2)$$

在等式(1.2.2)两侧同时左乘  $a^{-1}$ , 就有

$$(a^{-1}a)x = (a^{-1}a)c \iff x = c,$$

解的惟一性得证.

综上所述, 问题得证. □

**定义 1.2.2** (Abel 群 (或交换群)). 若群  $G$  的运算适合交换律, 则称群  $G$  为 Abel 群 (或交换群).

**定义 1.2.3** (阶). 群  $G$  中所含元素的个数称为群  $G$  的阶, 记作  $|G|$ .

**定义 1.2.4** (有限群与无限群). 若  $|G|$  是一个有限数 (无限数), 则称群  $G$  为有限群 (无限群).

## 1.3 群的例子

本节将不加证明地给出一些常见的群的例子和性质.

**定义 1.3.1** (图形  $F$  对称群, 二面体群). 已知  $F$  是平面上的一个图形. 令  $G_F$  为全体保持  $F$  不变的平面正交变换所成的集合, 则  $G_F$  在变换的称发下成群, 称为图形  $F$  的对称群.

若用  $T$  表示绕  $O$  旋转  $90^\circ$ ,  $S$  表示对于直线  $l$  的镜面反射, 则不难看出

$$G_F = \{T, T^2, T^3, T^4, ST, ST^2, ST^3, ST^4\},$$

其中  $T^4 = I, S^2 = I, ST = T^{-1}S$  ( $I$  表示恒等映射).

类似地, 若  $F$  是平面上正  $n$  边形, 则  $F$  的对称群  $G_F$  由  $2n$  个元素组成. 令  $T$  为绕中心转  $\frac{2\pi}{n}$ ,  $S$  为对于某一对称轴的镜面反射, 则有

$$G_F = \{T, T^2, \dots, T^n, ST, ST^2, \dots, ST^n\},$$

其中  $T^n = I, S^2 = I, ST = T^{-1}S$ . 称这些群为二面体群记作  $D_n$ .

**定义 1.3.2** (对称群  $S_n$  集合  $M$  全变换群,  $n$  置换,  $n$  对称群, 不相交的). 若  $M$  为非空集合, 则  $M$  到自身的全体可逆变换关于变换的乘法成群, 称该群为集合  $M$  的全变换群, 记作  $S(M)$ . 当  $M$  是无限集,  $S(M)$  为无限群.

当  $M$  含有  $n$  个元素时,  $M$  的可逆变换称为  $M$  的  $n$  元置换,  $S(M)$  称为  $n$  元对称群, 简记为  $S_n$ .

若  $M$  中的元素用  $1, 2, \dots, n$  编号后, 则  $S$  中的元素表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

其中  $\alpha_i = \sigma(i), i = 1, 2, \dots, n$ . 易见  $n$  元置换与  $n$  阶排列之间存在一一对应, 亦即  $|S| = n!$ .

若一个  $n$  元置换  $\sigma$  将  $1, 2, \dots, n$  中某  $m$  个数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  轮换, 即

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha_1) &= \alpha_2, \sigma(\alpha_2) = \alpha_3, \dots \\ \sigma(\alpha_{m-1}) &= \alpha_m, \sigma(\alpha_m) = \alpha_1, \end{aligned}$$



其余的数保持不变, 则称  $\sigma$  为轮换, 表示为

$$\sigma = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m).$$

当  $m = 2$  时, 也称  $\sigma$  为对换.

若  $S_n$  中的两个轮换  $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$  与  $(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_l)$  满足

$$\alpha_i \neq \beta_j, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, l,$$

则称这两个对换为不相交的.

**命题 1.3.1.** 非单位的置换能唯一地表示成一些不相交的轮换的乘积.  $\square$

## 1.4 子群, 陪集

**定义 1.4.1 (子群).** 若群  $G$  的非空子集合  $H$  对  $G$  的运算也成群, 则称群  $H$  是群  $G$  的子群, 记作  $H < G$ .

**定理 1.4.1.** 群  $G$  的非空子集合  $H$  是群  $G$  的子群的充分必要条件是

$$\forall a, b \in H \implies ab^{-1} \in H.$$

证. 必要性显然, 接下来证明充分性.

(1) 结合律: 显然满足;

(2) 幺元的存在性:  $\forall a \in H$ , 取  $b = a$ , 则  $e = aa^{-1} \in H$ ;

(3) 逆元的存在性:  $\forall b \in H$ , 取  $a = e$ , 则  $b^{-1} = eb^{-1} \in H$ .

结合 (1), (2), (3) 可得  $H$  成为群, 进而是群  $G$  的子群.  $\square$

**定义 1.4.2 (左陪集, 右陪集).** 设群  $H$  是群  $G$  的一个子群, 对  $G$  中的任意一个元素  $a$ , 称  $aH = \{ah : h \in H\}$  是  $H$  的一个左陪集; 称  $Ha = \{ha : h \in H\}$  是  $H$  的一个右陪集.

**定义 1.4.3 (基数).** 若两集合之前存在一个一一对应, 则称这两个集合有相同的基数. 对任意集合  $X$ , 记  $X$  的基数为  $|X|$ .

当  $X$  为无限集时, 记  $|X| = \infty$ ; 当  $X$  为有限集时, 记  $|X|$  为  $X$  所含元素的个数.

**定义 1.4.4 (商集, 指数).** 称群  $G$  关于子群  $H$  的所有左陪集 (或右陪集) 组成的集合为群  $G$  关于子群  $H$  的左商集 (或右商集), 称它的基数为  $H$  在  $G$  中的指数, 记作  $[G:H]$ .

**定理 1.4.2.** 设  $G$  是群,  $H < G$ , 则  $H$  的任意一个左陪集  $gH$  与  $H$  含有同样多的元素. 该定理对于右陪集同样成立.

证. 易见  $h \mapsto ah$  是子群  $H$  到左陪集  $aH$  的一个一一对应,  $h \mapsto ha$  是子群  $H$  到右陪集  $Ha$  的一个一一对应, 因此定理得证.  $\square$

**定理 1.4.3.** 设群  $H$  是群  $G$  的子群.  $H$  的任意两个左 (右) 陪集要么相等, 要么无公共元素. 群  $G$  可以表示为若干个不相交的左 (右) 陪集之并.

证. 利用相互包含证明第一个论断: 取  $H$  的两个左陪集  $aH, bH$  并假设它们有公共元素, 即有  $ah_1 \in aH, bh_2 \in bH$  满足

$$ah_1 = bh_2, \quad (1.4.3)$$

等式(1.4.3)两端同时右乘  $h_1^{-1}$ , 有

$$a = bh_2h_1^{-1} \in bH,$$

可见  $aH \subset bH$ . 同理可证  $aH \supset bH$ , 进而  $aH = bH$ . 第一个论断证毕.

第二个论断的证明: 由于  $a \in aH$ , 所以

$$G = \bigcup_{a \in G} aH,$$

去掉其中的重复项, 就有

$$G = \bigcup_{\alpha} a_{\alpha}H,$$

其中  $a_\alpha H$  两两无交.  $\square$

**推论 1.4.1** (Lagrange 定理). 设  $G$  是有限群,  $H$  是它的子群, 则  $|H|$  是  $|G|$  的因子.

证. 设  $|G| = n, |H| = t$ , 由定理1.4.3可得

$$G = a_1 H \cup a_2 H \cup \cdots \cup a_r H, \quad (1.4.4)$$

其中  $a_i H \cap a_j H = \emptyset (i, j = 1, 2, \cdots, r \text{ 且 } i \neq j)$ , 在等式(1.4.4)两侧同时取因子, 并利用定理1.4.2就有

$$|G| = r|H|,$$

从而  $|H|$  是  $|G|$  的因子.  $\square$

**定义 1.4.5** (由  $a$  生成的子群). 在群  $G$  中, 任意一个元素  $a$  的全体方幂组成的集合  $\{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$  显然成  $G$  的子群, 称为由  $a$  生成的子群.

**注 1.4.1.** (1) 元素  $a$  的方幂要么两两不同要么存在  $l \in \mathbb{Z}_+$  使得  $a^l = e$ ;  
(2) 在 (1) 的后一种情形中, 一定有最小的正整数  $d$  满足  $a^d = e$ . 此时将  $d$  称为元素  $a$  的阶.

**推论 1.4.2.** 设  $G$  为一有限群, 则  $G$  中每一个元素的阶一定是  $|G|$  的因子.

证. 设  $H$  是由  $G$  中的元素  $a$  生成的子群, 则

$$(i) |a| = |\langle a \rangle| = |H|;$$

$$(ii) H \text{ 是 } G \text{ 的子群} \implies |H| \text{ 整除 } |G|,$$

可见  $G$  中每一个元素的阶一定是  $G$  的因子.  $\square$

## 1.5 群的同构

**定义 1.5.1** (群的同构). 若  $G, G'$  是两个群,  $\varphi: g \mapsto g', G \longrightarrow G'$  是一一对应, 并且满足  $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g'_1) \varphi(g'_2), \quad (1.5.5)$$

则称群  $G$  同构于群  $G'$ , 记作  $G \cong G'$ . 适合等式(1.5.5)的一一对应称为同构映射, 简称同构.

**引理 1.5.1.** 任意非空集合上的全体可逆变换构成的集合关于变换的乘法成群.  $\square$

**定理 1.5.1** (Cayley 定理). 任何一个群都同构于某一集合上的变换群.

证. 设  $G$  是群. 对每一个  $a \in G$ , 定义  $G$  上的变换  $\varphi_a$  如下

$$\varphi_a(x) = ax, x \in G,$$

可见  $\forall x \in G$

$$(i) \varphi_{a^{-1}} \varphi_a(x) = \varphi_{a^{-1}}(ax) = a^{-1}ax = x;$$

$$(ii) \varphi_a \varphi_{a^{-1}}(x) = \varphi_a(a^{-1}x) = aa^{-1}x = x,$$

可见  $\forall a \in G, \varphi_a$  均是可逆变换. 记  $G_l = \{\varphi_a : a \in G\}$ , 于是  $\forall a, b \in G_l$

$$\varphi_a \varphi_{b^{-1}}(x) = \varphi_a(b^{-1}x) = ab^{-1}x = \varphi_{ab^{-1}}(x),$$

即  $\varphi_a \varphi_{b^{-1}} = \varphi_{ab^{-1}} \in G_l$ , 根据引理1.5.1与定理1.4.1可得  $G_l$  成群, 亦即  $G_l$  是一变换群.

根据  $G_l$  定义易知映射  $a \mapsto \varphi_a$  为满映射.

由于

$$\varphi_a(e) = a,$$

所以当  $a \neq b$  时,  $\varphi_a \neq \varphi_b$ , 亦即映射  $a \mapsto \varphi_a$  是单映射. 进而映射  $a \mapsto \varphi_a$  是一一对应. 再由  $\varphi_a \varphi_b = \varphi_{ab}$  可知所述映射为同构映射, 从而  $G \cong G_l$ , 定理得证.  $\square$

## 1.6 同构, 正规子群

**定义 1.6.1** (同态映射). 若  $\varphi$  是群  $G$  到群  $G'$  的映射, 满足  $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$$

则称  $\varphi$  是群  $G$  到  $G'$  的同态映射, 或同态.

**注 1.6.1.** 在同态映射的定义中, 既不要求它是映上的, 也不要求它是单射.

当  $\varphi$  是  $G$  到  $G'$  的同态映射时, 常常简记为

$$\varphi : G \mapsto G'.$$

**定义 1.6.2** (象). 若  $\varphi : G \mapsto G'$ , 定义

$$\text{im } \varphi = \{\varphi(a) : a \in G\}$$

为同态映射  $\varphi$  的象.

**注 1.6.2.** (1) 易见  $\text{im } \varphi$  是  $G'$  的子群;

(2) 若  $\varphi$  是映上的, 即  $\text{im } \varphi = G'$ , 称  $\varphi$  为满同态;

(3) 若  $\varphi$  是单射, 即  $G$  与  $\text{im } \varphi$  同构, 亦即  $G$  与  $G'$  的一个子群同构, 则称  $\varphi$  为单一同态, 或嵌入映射.

**定义 1.6.3** (完全反象, 核). 对于同态映射  $\varphi : G \mapsto G'$ , 定义

$$\varphi^{-1}(a') = \{a : \varphi(a) = a'\}$$

为元素  $a'$  的完全反象. 特别地, 定义  $\varphi^{-1}(e')$  为同态映射  $\varphi$  的核, 记作  $\ker \varphi$ .

**命题 1.6.1.** 记  $\varphi(a) = a'$ , 则  $\varphi^{-1}(a') = \begin{cases} a \ker(\varphi); \\ \ker(\varphi)a. \end{cases}$

证. (1) 任取  $h \in \ker \varphi$ , 有

$$\varphi(ah) \xrightarrow{\text{同态映射}} \varphi(a)\varphi(h) = a'e' = a',$$

这说明  $a \ker \varphi$  中的元素在映射  $\varphi$  下的象均为  $a'$ , 亦即  $a \ker \varphi \subset \varphi^{-1}(a')$ ;

(2) 反之, 任取  $a \in \varphi^{-1}(a')$ , 即  $\varphi(a) = a'$ . 又  $e \in \ker \varphi$ , 从而

$$a = ae \in a \ker \varphi,$$

这说明在映射  $\varphi$  下的象为  $a'$  的元素在  $a \ker \varphi$  中, 亦即  $a \ker \varphi \supset \varphi^{-1}(a')$ .

由 (1),(2) 可知  $\varphi^{-1}(a) = a \ker(\varphi)$ .

同理可证  $\varphi^{-1}(a') = \ker(\varphi)a$ . □

**定义 1.6.4** (正规子群). 设群  $H$  是群  $G$  的子群, 若对任意  $g \in G$ , 都有  $gH = Hg$ , 则称  $H$  是  $G$  的正规子群, 记作  $H \triangleleft G$ .

**注 1.6.3.** (1) 由命题 1.6.1 可知, 同态的核都是正规子群;

(2) 正规子群的定义可以改写为

$$\forall g \in G, gHg^{-1} = H.$$

正规子群的定义换个说法就是子群  $H$  的左右陪集相等;

(3) 在 *Abel* 群中, 每个子群都正规.

## 1.7 商群

**定义 1.7.1** (群子集合的运算).

1. 定义

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\},$$

子集乘积满足结合律:  $(AB)C = A(BC)$ ;

2. 定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

利用集合运算, 定理1.4.1可改写为

$$\text{群 } G \text{ 的非空子集 } H \text{ 是子群} \iff HH^{-1} \subset H.$$

**定理 1.7.1.** 设  $H$  是群  $G$  的一个子群.  $H$  是正规子群  $\iff H$  的任意两个左 (右陪集) 之积还是左 (右陪集).

证. (1) 必要性

任取正规子群  $H$  的两个左陪集  $aH$  与  $bH$ , 有

$$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = abH,$$

必要性得证;

(2) 充分性

任取  $H$  的两个左陪集  $aH$  与  $bH$ , 根据已知条件可设  $(aH)(bH) = cH$ , 由于  $ab \in (aH)(bH)$ , 所以  $ab \in cH$ , 再由  $ab \in abH$  与定理1.4.3可得

$$abH = cH = (aH)(bH), \quad (1.7.6)$$

等式两端同时左乘  $a^{-1}$ , 有

$$bH = HbH \supset Hbe = Hb,$$

由于  $b$  具有任意性, 故可以将其改成  $b^{-1}$ , 得到

$$b^{-1}H \supset Hb^{-1},$$

等式两边同时左乘  $b$ , 右乘  $b$ , 得到

$$Hb \supset bH,$$

亦即  $bH = Hb$ , 可见  $H$  是正规子群. □

令  $G/H$  代表正规子群  $H$  的全部不同的右陪集组成的集合.

**命题 1.7.1.**  $G/H$  在陪集的运算下成群.

证. (1) 结合律

由  $(Ha)(Hb) = Hab$  可见, 陪集之间的乘法可归结为陪集代表的乘法, 故结合律显然成立;

(2) 左幺元

$\forall Ha \in G/H$ , 有

$$H \cdot Ha = Ha,$$

可见左幺元存在, 为  $H$ ;

(3) 左逆元

$\forall Ha \in G/H$ , 有

$$(Ha^{-1})(Ha) = H(a^{-1}H)a = H(Ha^{-1})a = (HH)(a^{-1}a) = H,$$

可见  $G/H$  中的任一元都有左逆元.

(1),(2),(3) 说明  $G/H$  成群, 问题得证.  $\square$

**定义 1.7.2** (商群).  $G/H$  在陪集的乘法下所成的群称为群  $G$  对正规子群  $H$  的商群, 仍记作  $G/H$ .

**命题 1.7.2.** 设群  $H$  是群  $G$  的正规子群, 定义映射

$$\begin{aligned}\varphi: G &\rightarrow G/H \\ g &\mapsto Hg,\end{aligned}$$

则  $\varphi$  是满同态且  $\ker \varphi = H$ .

证. (1)  $\forall a, b \in G$ , 有

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= Hab \\ &= HabH\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&=Ha(bH) \\
&=Ha(Hb) \\
&=HaHb \\
&=\varphi(a)\varphi(b) \\
&\implies \varphi \text{ 是同态映射};
\end{aligned}$$

(2) 根据商群的定义,  $\varphi$  显然是映上的;

(3) 对  $\forall h \in H$ , 注意到

$$\begin{aligned}
&\varphi(h) \\
&=hH \\
&=H \\
&=eH,
\end{aligned}$$

可见  $h \in H$ , 于是  $\ker \varphi \supset H$ . 同时对  $\forall k \in \ker \varphi$ , 有

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &=kH \\
&=H,
\end{aligned}$$

所以对任意  $h \in H$ , 都有  $kh \in H$ , 现取  $h = e$ , 所以

$$k = ke \in H,$$

即  $k \in H$ , 所以  $\ker \varphi \subset H$ .

(1),(2) 说明  $\varphi : G \rightarrow G/H$  为满同态;(3) 说明  $\ker \varphi = H$ . □

**注 1.7.1.** 由于  $H \triangleleft G$ , 所以若定义

$$\begin{aligned}
\varphi : G &\rightarrow G/H \\
g &\mapsto gH,
\end{aligned}$$

则命题 1.7.2 也成立.

**定义 1.7.3** (自然同态). 称命题1.7.2中的  $\varphi$  为  $G \rightarrow G/H$  的自然同态.

**注 1.7.2.** 由命题1.6.1可知, 同态的核都是正规子群; 自然同态的构造说明每个正规子群也都是某一同态的核.

**引理 1.7.1.** 若  $H$  为群  $G$  的子群,  $a, b \in G$ , 则

$$b^{-1}a \in H \iff aH = bH;$$

$$ab^{-1} \in H \iff Ha = Hb.$$

证. 只要证明第一条即可, 第二条同理可证.

(1) 必要性

可设  $h \in H$  满足  $b^{-1}a = h$ , 从而  $a = bh \in bH$ , 又  $e \in H$  且  $a = ae$ , 故

$$a = ae \in aH$$

$$a \in bH,$$

可见  $aH \cap bH \neq \emptyset$ , 进而  $aH = bH$ , 必要性得证;

(2) 充分性

等式  $aH = bH$  两端同时左乘  $b^{-1}$  有

$$b^{-1}aH = H \implies b^{-1}a \cdot e \in H \iff b^{-1}a \in H,$$

充分性得证. □

**定理 1.7.2** (群同态基本定理). 若  $\sigma : G \rightarrow G'$ , 则  $G/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$ . 进一步, 若  $\sigma$  是满同态, 则  $G/\ker \sigma \cong G'$ .

证. 设  $\varphi : G \rightarrow G/\ker \sigma$  是自然同态, 则得到两个满同态  $\sigma$  和  $\varphi$ , 交换图如下:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma} & \text{im } \sigma \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ G/\ker \sigma & & \end{array}$$

其中虚线部分的  $\psi$  表示我们要找的同构. 定义映射

$$\psi_0(\ker \sigma \cdot a) = \sigma(a),$$

显然  $\psi_0$  是良定义的.

由于

$$\psi_0(\ker \sigma \cdot a \ker \sigma \cdot b) \xrightarrow{\ker \sigma \text{ 是正规子群}} \psi_0(\ker \sigma \cdot ab) = \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

所以  $\psi_0$  是同态映射.

当  $\sigma(a) = \sigma(b)$  时, 有

$$\begin{aligned}\sigma(a)(\sigma(b))^{-1} &= e' \\ \sigma(ab^{-1}) &= e',\end{aligned}$$

根据引理1.7.1,

$$ab^{-1} \in \ker \sigma \iff b^{-1} \ker \sigma = a^{-1} \ker \sigma,$$

即  $a \ker \sigma = b \ker \sigma$ , 亦即  $\ker \sigma \cdot a = \ker \sigma \cdot b$ . 可见  $\psi_0$  为单射.

显然  $\psi_0$  是满射.

综上所述,  $\psi_0$  是同构映射. 取  $\psi = \psi_0$  即证明了  $G/\ker \sigma \cong \sigma$ .

进一步, 若  $\sigma$  是满同态, 则  $G' \cong \text{im } \sigma$ , 从而  $G/\ker \sigma \cong G'$ .  $\square$

## 1.8 环, 子环

**定义 1.8.1** (环). 设  $L$  是一个非空集合, 在  $L$  上定义了两个代数运算, 一个叫加法, 记为  $a + b$ , 一个叫乘法, 记为  $ab$ . 若这两种运算具有性质

- (1)  $L$  对于加法构成 Abel 群;
- (2)  $L$  对于乘法满足结合律;
- (3)  $L$  满足乘法对加法的分配律,

则称  $L$  为环.

在学习了么半群后, 可用以下更简洁的语言定义环.

已知  $(L, +)$  成 Abel 群,  $(L, \cdot)$  成么半群, 并且  $\cdot$  关于  $+$  满足如下结合律

$$\forall a, b, c \in L, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

则称  $(L, +, \cdot)$  为环.

**定义 1.8.2** (子环). 设  $S$  是环  $L$  的非空子集合, 若  $S$  对于  $L$  的两种运算也成环, 则称环  $S$  是环  $L$  的子环.

**命题 1.8.1.** 环  $L$  的非空子集合  $S$  成环的充分必要条件为  $S$  对于加法是子群且对于乘法封闭.

证. 必要性是显然的, 下面证明充分性.

(1)  $S$  对于加法构成 Abel 群: 任取  $a, b \in S$ , 于是  $a, b \in L$ , 所以

$$ab \xrightarrow{\text{L对于乘法构成 Abel 群}} ba,$$

可见  $S$  关于加法构成的子群满足交换律, 所以  $S$  为 Abel 群;

(2)  $S$  对于乘法满足结合律: 任取  $a, b, c \in S$ , 有  $a, b, c \in L$ , 所以

$$a(bc) = (ab)c = abc \in S,$$

可见  $S$  对于乘法满足结合律;

(3)  $S$  满足乘法对于加法的分配律: 任取  $a, b, c \in S$ , 有  $a, b, c \in L$ , 所以

$$a(b+c) \xrightarrow{\text{L满足乘法对加法的分配律}} ab+ac \in S,$$

可见  $S$  满足乘法对于加法的分配律. □

**定义 1.8.3** (同构映射). 设  $L$  与  $L'$  是两个环, 若有  $L$  到  $L'$  的一一对应  $\sigma$  满足如下性质

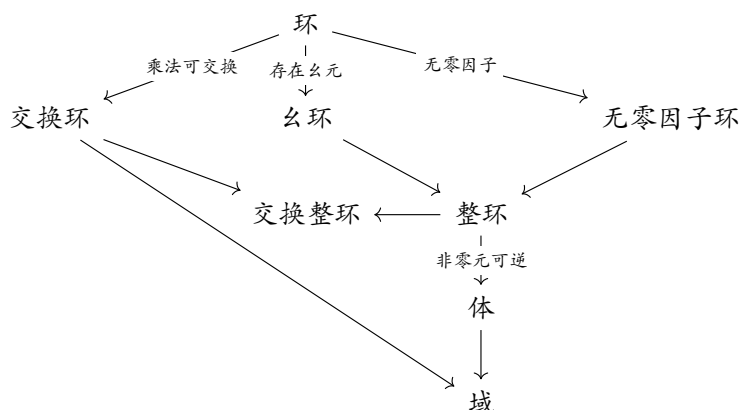
$$(1) \sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b);$$

$$(2)\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

其中  $a, b \in L$ , 则称  $L$  与  $L'$  同构, 称具有以上性质的  $\sigma$  为一个同构映射 (简称同构).

## 1.9 各种特殊类型的环

命题 1.9.1.



注 1.9.1. 幺元: 设  $L$  是环. 若  $e \in L$  满足

$$\forall a \in L, ae = ea = a,$$

则称  $e$  为环  $L$  的幺元 (幺元), 简记为  $1$ ;

用  $0$  表示环中加法群的幺元 (即零元素);

零因子: 设  $L$  是环. 若有  $0 \neq a \in L, 0 \neq b \in L$  满足  $ab = 0$ , 则称  $a$  为一个左零因子, 称  $b$  为一个右零因子.

引理 1.9.1. 非零元可逆  $\Leftrightarrow$  无零因子.

证. (1) 非零元可逆  $\Rightarrow$  无零因子:

设  $L$  是环且非零元可逆. 假设  $a \in L$  是  $L$  的左零因子 (右零因子同理), 则有

$$ab = 0 \text{ 且 } a \neq 0, b \neq 0.$$

设  $c \in L$  是  $a$  的逆元, 即

$$ac = ca = 1,$$

于是

$$(ca)b = c(ab)$$

$$(ca)b = 1b = b \neq 0$$

$$c(ab) = c0 = 0,$$

得到矛盾, 从而  $L$  无零因子, 问题得证.

(2) 无零因子  $\nRightarrow$  非零元可逆:

如整数环. □

**定义 1.9.1 (子域).** 若域  $F$  的子环  $S$  是域, 则称  $S$  是域  $F$  的子域.

## 1.10 环的同态, 理想

**定义 1.10.1 (同态).** 设  $L, L'$  是两个环,  $\sigma$  是  $L$  到  $L'$  的映射. 若对  $\forall a, b \in L, \sigma$  具有性质

$$(1) \sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b);$$

$$(2) \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

就称  $\sigma$  为环  $L$  到环  $L'$  的一个同态映射 (简称同态), 简记为  $\sigma: L \rightarrow L'$ .

**注 1.10.1.** (1) 由同态的定义可以看出  $\sigma(L)$  是  $L'$  的子环;

(2) 若  $\sigma(L) = \{0\}$ , 称  $\sigma$  为零同态;

(3) 若  $\sigma(L) = L'$ , 称  $\sigma$  为满同态, 称  $L'$  为  $L$  的同态象.

**定义 1.10.2 (理想).** 设  $L$  成环,  $I \subset L$  为  $L$  的一个加法子群. 若  $\forall r \in L, \forall a \in I$ , 都有

$$ra \in I, ar \in I,$$

就称  $I$  是  $L$  的理想 (或双边理想). 若只满足  $ra \in I$  (或  $ar \in I$ ), 则称  $I$  是  $L$  的左 (或右) 理想.

**注 1.10.2.** 显然  $\{0\}$  与  $L$  都是  $L$  的理想, 称它们为平凡的理想.

## 1.11 商环

**定义 1.11.1 (陪集).** 设环  $I$  是环  $L$  的理想,  $I$  作为  $L$  的加法群的子群, 按如下方式定义陪集

$$r + I (\forall r \in L) \text{ 为左陪集}; \quad I + r (\forall r \in L) \text{ 为右陪集},$$

按如下方式定义陪集的加法与乘法

$$\begin{aligned} (r_1 + I) + (r_2 + I) &= r_1 + r_2 + I & (\forall r_1, r_2 \in L); \\ (r_1 + I)(r_2 + I) &= r_1 r_2 + I & (\forall r_1, r_2 \in L), \end{aligned}$$

全体陪集所成的集合在这样规定的运算下成环.

**定义 1.11.2 (商环).** 设环  $I$  是环  $L$  的理想.  $L$  对于  $I$  的陪集在定义 1.11.1 的运算下所成的环称为  $L$  对于  $I$  的商环, 记作  $L/I$ .

设环  $I$  是环  $L$  的理想. 不难发现  $\sigma(a) = a + I, a \in L$  是环  $L$  到商环  $L/I$  的满同态, 且该同态的核为理想  $I$ . 可见每个理想都是某一同态的核.

**引理 1.11.1.** 设  $\sigma: L \rightarrow L'$ , 则  $\ker \sigma$  是  $L$  的理想.

证. 对  $\forall a \in \ker \sigma, \forall b \in L$ , 有

$$\sigma(ab) \xrightarrow{\sigma \text{ 是同态}} \sigma(a)\sigma(b) = 0\sigma(b) = 0 \implies ab \in \ker \sigma;$$

$$\sigma(ba) \stackrel{\sigma \text{是同态}}{=} \sigma(b)\sigma(a) = \sigma(b)0 = 0 \implies ba \in \ker \sigma,$$

可见  $\ker \sigma$  是  $L$  的理想. □

**定理 1.11.1** (环同态基本定理). 若  $\sigma : L \rightarrow L'$ , 则  $L/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$ . 进一步, 若  $\sigma$  是满同态, 则  $L/\ker \sigma \cong L'$ .

证. 设  $\varphi : L \rightarrow L/\ker \sigma$  是自然同态, 则得到两个满同态  $\sigma$  和  $\varphi$ , 交换图如下:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma} & \text{im } \sigma \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ L/\ker \sigma & & \end{array}$$

其中虚线部分的  $\psi$  表示我们要找的同构. 定义映射

$$\psi_0(\ker \sigma + a) = \sigma(a),$$

显然  $\psi_0$  是良定义的.

对  $\forall a, b \in L$ , 有

$$\begin{aligned} \psi_0[(\ker \sigma + a) + (\ker \sigma + b)] &\stackrel{\ker \sigma \text{是理想}}{=} \psi_0(\ker \sigma + a + b) \\ &= \sigma(a + b) \\ &\stackrel{\sigma \text{是同态}}{=} \sigma(a) + \sigma(b) \\ &= \psi_0(\ker \sigma + a) + \psi_0(\ker \sigma + b), \end{aligned}$$

由此可见  $\psi_0$  保持加法;

$$\begin{aligned} \psi_0[(\ker \sigma + a)(\ker \sigma + b)] &\stackrel{\ker \sigma \text{是理想}}{=} \psi_0(\ker \sigma + ab) \\ &= \sigma(ab) \\ &\stackrel{\sigma \text{是同态}}{=} \sigma(a)\sigma(b) \\ &= \psi_0(\ker \sigma + a)\psi_0(\ker \sigma + b), \end{aligned}$$



由此可见  $\psi_0$  保持乘法, 于是  $\psi_0 : L/\ker \sigma \rightarrow \text{im } \sigma$ .

对  $\forall \sigma(a) = \sigma(b)$ , 有

$$\begin{aligned}\sigma(a) - \sigma(b) &= 0 \\ \xrightarrow{\sigma \text{ 是同态}} \sigma(a - b) &= 0 \\ \implies a - b &\in \ker \sigma \\ \xrightarrow{\text{引理 1.7.1}} \ker \sigma + a &= \ker \sigma + b \\ \implies \psi_0 &\text{ 是单射.}\end{aligned}$$

$\psi_0$  显然是满射.

综上所述,  $\psi_0$  是同构映射. 取  $\psi = \psi_0$  即证明了  $L/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$ .

进一步, 若  $\sigma$  是满同态, 则  $L' \cong \text{im } \sigma$ , 从而  $L/\ker I \cong L'$ .  $\square$

## 1.12 特征

设  $F$  是域,  $e$  是  $F$  中的么元. 若  $e$  是有限阶元素, 即存在正整数  $m$  使得  $me = 0$ , 则将  $m$  定义为  $F$  的么元在  $F$  的加法群中的阶. 显然  $m$  一定是素数.

**定义 1.12.1 (特征).** 设  $F$  是域. 若  $F$  的么元  $e$  在  $F$  的加法群中是有限阶元素, 阶为  $p$ , 就称域  $F$  的特征为  $p$ . 若么元是无限阶元素, 就称域  $F$  的特征为 0. 域  $F$  的特征记为  $\chi(F)$ .

**命题 1.12.1.** 在域的加法群中, 任一非零元素都与么元有相同的阶.

证. 设  $a$  是域  $F$  的任一非零元, 由

$$ma = mae \xrightarrow{ae \text{ 乘法可交换}} a(me)$$

可知,  $ma = 0$  当且仅当  $me = 0$ , 问题得证.  $\square$

**定理 1.12.1.** 设  $F$  为域. 若  $\chi(F) = p \neq 0$ , 则  $F$  包含与  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  同构的子域; 若  $\chi(F) = 0$ , 则  $F$  包含与有理数域同构的子域.

证. 首先按如下方式定义整数环到  $F$  的映射  $\sigma$

$$\sigma(n) = ne.$$

注意到  $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(n+m) = (n+m)e = ne + me;$$

$$\sigma(nm) = (nm)e = (ne)(me) = \sigma(n)\sigma(m),$$

于是  $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow F$ .

(1) 若  $\chi(F) = p \neq 0$ , 令  $\sigma(n) = 0$ , 有

$$0 = \sigma(n) = ne \iff n \in p\mathbb{Z},$$

可见  $\ker \sigma = p\mathbb{Z}$ . 易见

$$\operatorname{im} \sigma = \{e, 2e, \dots, (p-1)e, 0\} \subset F,$$

不难验证  $\operatorname{im} \sigma$  构成域  $F$  的子域. 根据环同态基本定理 (定理1.11.1), 有

$$F/p\mathbb{Z} \cong \operatorname{im} \sigma.$$

(2) 若  $\chi(F) = 0$ , 令  $\sigma(n) = e$  可推出  $n = 0$ , 即  $\ker \sigma = \{0\}$ , 所以  $\sigma$  是单射. 易见

$$\operatorname{im} \sigma = \{ne \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

与整数环  $\mathbb{Z}$  同构. 按如下方式扩充  $\sigma$  的定义

$$\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = (ne)^{-1}(me),$$

由于当  $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$  时

$$(ne)^{-1}(me)^{-1} = (n'e)^{-1}(m'e)^{-1} \iff \sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \sigma\left(\frac{m'}{n'}\right),$$

所以这是良定义的. 易见

$$\text{im } \sigma = \{(ne)^{-1}me : n \in \mathbb{Z} \text{ 且 } n \neq 0; m \in \mathbb{Z}\} \subset F$$

构成  $F$  的子域, 而  $\text{im } \sigma \cong \mathbb{Q}$ , 亦即  $F$  有一个同构于有理数域  $\mathbb{Q}$  的子域.

综上所述, 问题得证.  $\square$

## 1.13 CHAPTER1 习题

**问题 1.1** (P54T7). 设  $G$  是群,  $a, b \in G$ . 若  $a^{-1}ba = b^r (r \in \mathbb{N}_+)$ , 证明  $a^{-i}ba^i = b^{r^i} (1, 2, \dots)$ .

证. 使用数学归纳法.

- (1) 题设条件已经说明, 当  $i = 1$  时结论成立;
- (2) 假设当  $i = n$  时结论成立即  $a^{-n}ba^n = b^{r^n}$ , 于是

$$\begin{aligned} a^{-(n+1)}ba^{n+1} &= a^{-1}(a^{-n}ba^n)a \\ &= a^{-1}b^{r^n}a \\ &= (a^{-1}ba)^{r^n} \\ &= (b^r)^{r^n} \\ &= b^{r^{n+1}}, \end{aligned}$$

可见当  $i = n + 1$  时结论也成立.

综上所述, 问题得证.  $\square$

**问题 1.2** (P54T8). 证明: 群  $G$  为交换群  $\iff$  映射  $x \mapsto x^{-1}$  为同构映射.

证. 设  $\varphi: G \rightarrow G', x \mapsto x^{-1}$ , 不难发现  $G = G'$ .

(1) 必要性:

令  $\varphi(x) = e$ , 有  $x^{-1} = e \implies x = e \implies \ker \varphi = \{e\}$ , 可见  $\varphi$  是单射;

$\forall x \in G' = G, \exists x^{-1} \in G$  满足  $\varphi(x^{-1}) = x$ , 可见  $\varphi$  是满射;

$\forall x, y \in G$ , 有

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \\ &\stackrel{G \text{ 是交换群}}{=} x^{-1}y^{-1} \\ &= \varphi(x)\varphi(y),\end{aligned}$$

于是  $\varphi$  是同态.

必要性得证.

(2) 充分性:

$\forall x, y \in G$ , 有  $x^{-1}, y^{-1} \in G$ , 并且

$$\begin{aligned}\varphi(x^{-1}y^{-1}) &\stackrel{\varphi \text{ 是同态}}{=} \varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1}) \\ \implies yx &= xy \\ \implies G &\text{ 是交换群.}\end{aligned}$$

充分性得证.

综上所述, 问题得证. □

**问题 1.3** (P54T9). 设  $S$  为群  $G$  的非空子集合, 在  $G$  中定义关系  $a \sim b$  当且仅当  $ab^{-1} \in S$ . 证明这是等价关系的充要条件为  $S$  为  $G$  的子群.

证. 先给出等价关系的定义.

称满足如下三条性质的关系  $\sim$  为等价关系

- (i) 反身性:  $a \sim a$ ;
- (ii) 对称性: 若  $a \sim b$ , 则  $b \sim a$ ;
- (iii) 传递性: 若  $a \sim b, b \sim c$ , 则  $a \sim c$ .

(1) 必要性:

对  $\forall a, b \in S$  亦即  $ae^{-1}, be^{-1} \in S$ , 有

$$ae^{-1}(be^{-1})^{-1} \in S,$$

即  $ab^{-1} \in S$ , 可见  $S < G$ .

必要性得证.

(2) 充分性:

由于  $S$  非空, 所以  $\forall s \in S$ , 有

$$ss^{-1} \in S,$$

即  $s \sim s$ , 反身性得证;

任取  $a \in S$ , 由于  $S$  成群, 所以  $a^{-1} \in S$ , 进而若  $a \sim b$  即  $ab^{-1} \in S$  即  $a \sim b$ , 有

$$ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in S,$$

即  $b \sim a$ , 对称性得证;

设  $a \sim b, b \sim c$  即  $ab^{-1} \in S, bc^{-1} \in S$ , 由  $S$  成群可知

$$(ab^{-1})(bc^{-1}) \in S,$$

即  $a \sim c$ , 传递性得证.

充分性得证.

综上所述, 问题证毕. □

**问题 1.4** (P55T20). 设群  $H, K$  为群  $G$  的子群, 证明  $HK$  为  $G$  的子群当且仅当  $HK = KH$ .

证. (1) 必要性

按以下方式定义从  $HK$  到  $HK$  的一一对应  $\varphi_1$

$$\varphi_1(hk) = (hk)^{-1}, \forall hk \in HK.$$

注意到  $\text{im } \varphi_1 = HK$ , 并且

$$(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH,$$

即  $HK = \text{im } \varphi_1 \subset KH$ . 同理, 按以下方式定义  $KH$  到  $KH$  的一一对应  $\varphi_2$  可证  $KH \subset HK$

$$\varphi_2(kh) = k^{-1}h^{-1}, \forall kh \in KH.$$

由  $HK \subset KH$  及  $KH \subset HK$  可得  $HK = KH$ , 必要性得证.

(2) 充分性

对任意  $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$ , 有

$$\begin{aligned} h_1k_1(h_2k_2)^{-1} &= h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1(k_1k_2^{-1}h_2^{-1}), \end{aligned}$$

而

$$k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH = HK,$$

所以  $h_1k_1(h_2k_2)^{-1} \in HK$ , 亦即

$$\forall a, b \in HK \implies ab^{-1} \in HK,$$

可见  $HK < G$ , 充分性得证.

综上所述, 问题证毕. □

**问题 1.5** (P56T28). 在整数集  $\mathbb{Z}$  上重新定义加法与乘法为

$$a \oplus b = ab, \quad a \odot b = a + b.$$

试问  $\mathbb{Z}$  在新定义的运算下是否成环.

解. 不能成环, 理由如下.

假设  $\mathbb{Z}$  在新定义的运算下成环, 则  $\mathbb{Z}$  关于加法成交换群. 对  $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$1 \oplus n = 1 \cdot n = n,$$

所以  $\mathbb{Z}$  在新定义的运算下, 关于加法的所成的交换群中的么元是 1. 注意到  $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$0 \oplus m = 0 \cdot m = 0 \neq 1,$$

所以在此加法群中, 0 无逆元, 这与  $\mathbb{Z}$  关于加法成交换群矛盾, 所以  $\mathbb{Z}$  在新定义的运算下不成环.  $\square$

**问题 1.6 (P56T29).** 设  $L$  为有么元的交换环, 在  $L$  中定义

$$a \oplus b = a + b - 1,$$

$$a \odot b = a + b - ab.$$

证明在新定义的运算下,  $L$  仍为有么元的交换环, 并且与原来的环同构.

证. (1) 对任意  $a, b, c \in L$

$$\begin{aligned} & (a \oplus b) \oplus c \\ &= (a + b - 1) \oplus c \\ &= (a + b - 1) + c - 1 \\ &= a + b + c - 2 \\ &= a + (b + c - 1) - 1 \\ &= a + (b \oplus c) - 1 \\ &= a \oplus (b \oplus c), \end{aligned}$$

$L$  关于  $\oplus$  满足结合律;

(2) 对任意  $a \in L$

$$1 \oplus a$$

$$=1+a-1$$

$$=a,$$

$L$  关于  $\oplus$  有么元;

(3) 对任意  $a \in L$

$$(-a) \oplus a$$

$$=-a+a-1$$

$$=1,$$

$L$  中的元素关于  $\oplus$  有逆元;

(4) 对任意  $a, b \in L$

$$a \oplus b$$

$$=a+b-1$$

$$=b+a-1$$

$$=b \oplus a,$$

$L$  关于  $\oplus$  可交换;

(5) 对任意  $a, b, c \in L$

$$(a \oplus b) \odot c$$

$$=(a+b-1) \odot c$$

$$=(a+b-1)+c-(a+b-1)c$$

$$=a+b+2c-ac-bc-1,$$

$$(a \odot c) \oplus (b \odot c)$$

$$=(a \odot c) + (b \odot c) - 1$$

$$=(a+c-ac) + (b+c-bc) - 1$$



$$=a+b+2c-ac-bc-1,$$

$L$  满足  $\odot$  对于  $\oplus$  的分配律;

(6) 对任意  $a, b \in L$

$$\begin{aligned} & a \odot b \\ &= a + b - ab \\ &= b + a - ba \\ &= b \odot a, \end{aligned}$$

$L$  关于  $\odot$  满足交换律;

(7) 对任意  $a \in L$ , 存在  $0 \in L$  满足

$$\begin{aligned} & 0 \odot a \\ &= 0 + a - 0a \\ &= a, \end{aligned}$$

$L$  关于  $\odot$  有么元.

(1)~(7) 说明  $L$  成有么元的交换环, 其中零元为 1, 么元为 0.

定义  $\varphi$  为  $(L; +, \cdot) \rightarrow (L; \oplus, \odot)$  的映射

$$\varphi(x) = 1 - x,$$

显然  $\varphi$  为双射.

注意到

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= 1 - x - y, \\ \varphi(x) \oplus \varphi(y) &= (1-x) \oplus (1-y) \\ &= (1-x) + (1-y) - 1 = 1 - x - y, \end{aligned}$$

即  $\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$ ;

$$\varphi(xy) = 1 - xy,$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) \odot \varphi(y) &= (1-x) \odot (1-y) \\
&= (1-x) + (1-y) - (1-x)(1-y) \\
&= 2 - x - y - (1 - y - x + xy) \\
&= 1 - xy,
\end{aligned}$$

即  $\varphi(xy) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ . 可见  $\varphi$  是同态映射.

综上所述,  $\varphi: (L; +, \cdot) \rightarrow (L; \oplus, \odot)$  为同构映射, 问题得证.  $\square$

**问题 1.7** (P56T30). 给环出  $L$  与它的子环  $S$  的例子, 它们分别具有下列性质

- (1)  $L$  有么元,  $S$  无么元;
- (2)  $L$  无么元,  $S$  有么元;
- (3)  $L, S$  均有么元, 但不相同;
- (4)  $L$  不交换,  $S$  交换.

解. (1)  $L = (\mathbb{Z}; +, \cdot), S = (2\mathbb{Z}; +, \cdot)$ .

(1.1) 对于  $L$ :

$$(1.1.1) \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$(a+b)+c = a+b+c = a+(b+c),$$

可见  $(\mathbb{Z}; +)$  满足结合律;

$$(1.1.2) \forall a \in \mathbb{Z}, \exists 0 \in \mathbb{Z} \text{ 满足}$$

$$0 + a = a,$$

可见  $(\mathbb{Z}; +)$  存在左么元;

$$(1.1.3) \forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z} \text{ 满足}$$

$$-a + a = 0,$$

可见  $(\mathbb{Z}; +)$  中的任意元素都有左逆元;

(1.1.4)  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ , 有

$$a + b = b + a \in \mathbb{Z},$$

可见  $(\mathbb{Z}; +)$  满足交换律;

(1.1.5)  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ , 有

$$a(b + c) = ab + ac,$$

可见  $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$  满足乘法对于加法的分配律.

(1.1.1)~(1.1.5) 说明  $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$  成环. 注意到  $\forall a \in \mathbb{Z}$ , 有  $1 \in \mathbb{Z}$  满足

$$1 \cdot a = a,$$

所以  $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$  有么元 1.

(1.2) 对于  $S$ :

同理可证  $S$  成环. 假设  $S$  有么元  $e$ , 则  $\forall s \in S$

$$es = s,$$

现取  $n \in \mathbb{Z}$  且  $m \neq 0$ , 则  $2n \in 2\mathbb{Z}$  且

$$e(2n) = 2n \xrightarrow{\text{等式两端同时除以 } 2n} e = 1 \notin 2\mathbb{Z},$$

这与  $e \in S$  矛盾, 所以  $S$  没有么元.

(2)

$$L = \left( \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left( \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

(2.1) 对于  $L$ :

(2.1) 容易验证  $L$  成环. 令  $e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$  满足

$$\begin{cases} e \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \text{对任意 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 均成立}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 = a \\ bx_1 = b \\ ax_3 = 0 \\ bx_4 = 0 \\ ax_1 + bx_3 = a \\ ax_2 + bx_4 = b \\ ax_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \end{cases} \quad \text{对任意 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 均成立,}$$

解之可得

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin L,$$

亦即  $L$  没有幺元.

容易验证  $S$  成环. 注意到  $\forall s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S, \exists e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$  满足

$$es = se = s,$$

所以  $S$  有幺元  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(3)

$$L = \left( \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left( \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

取  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  验证它们分别是  $L$  与  $S$  中的幺元即可.

(4)

$$L = \left( \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left( \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

(4.1) 对于  $L$ :

$$\text{令 } l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in L, \text{ 易见}$$

$$l_1 l_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = l_2 l_1,$$

于是  $L$  不交换.

(4.2) 对于  $S$ :

$$\text{任取 } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S, \text{ 注意到}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以  $S$  交换. □

**问题 1.8** (P56T31). 环  $L$  中元素  $e_L$  称为左么元, 若对  $\forall a \in L$

$$e_L a = a;$$

元素  $e_R$  称为右么元, 若对  $\forall a \in L$

$$e_R a = a;$$

证明

- (1) 若  $L$  既有左单位又有右单位, 则  $L$  有么元;  
 (2) 若  $L$  有左单位, 无零因子, 则  $L$  有么元;  
 (3) 若  $L$  有左单位, 无右单位, 则  $L$  至少有两个左单位.

证. (1) 由

$$e_L e_R = \begin{cases} e_R (e_L \text{ 是左么元}); \\ e_L (e_R \text{ 是右么元}) \end{cases}$$

可知  $e_L = e_R$ , 所以  $L$  有么元;

(2) 在等式  $e_L a = a$  两端同时左乘  $a$  可得

$$\begin{aligned} a e_L a &= a^2 \\ \implies (a e_L - a) a &= 0 \\ \implies a e_L - a &= 0 \\ \implies a e_L &= a, \end{aligned}$$

可见  $L$  有么元;

(3) 设  $e_L$  为  $L$  的一个左单位, 由于  $L$  无右单位, 所以  $\exists x \in L$ , 满足

$$\begin{aligned} x e_L &\neq x \\ \implies x e_L - x + e_L &\neq e_L. \end{aligned}$$

注意到  $\forall a \in L$

$$(x e_L - x + e_L) a = a,$$

所以  $x e_L - x + e_L$  是异于  $e_L$  的左单位, 所以  $L$  至少有两个左单位. □

**问题 1.9** (P56T32). 设  $F$  为域. 证明  $F$  无非平凡的理想.

证. 设  $I \neq \emptyset$  是  $F$  的理想. 首先证明  $I$  一定含有零元.

对  $\forall a \in I$ , 若  $a$  是零元, 则显然  $I$  含有零元; 若  $a$  不是零元, 由

$$a \in I \subset F$$

可知  $a$  在  $F$  中存在逆元  $-a$ , 于是由理想的定义可知

$$0 = a + (-a) \in I,$$

所以  $I$  有零元.

由理想的定义有  $\forall f \in F$

$$f = 0 + f \in I,$$

所以  $F \subset I$ , 从而  $F = I$ . 可见域  $F$  没有非平凡的理想.  $\square$

**问题 1.10** (P57T35). 设  $L$  为有么元的交换环. 若  $L$  无非平凡的理想, 则  $L$  为域.

证. 由命题1.9.1与引理1.9.1可知, 若能证明  $L$  的非零元可逆, 便能推出  $L$  为域.

任取  $0 \neq a \in L$ , 令

$$La = \{la : l \in L\},$$

首先证明  $La$  是  $L$  的加法子群.

对  $\forall l_1 a, l_2 a \in La$ , 有

$$l_1 a - l_2 a = (l_1 - l_2)a,$$

注意到  $l_1 - l_2 \in L$ , 于是

$$(l_1 - l_2)a \in La \implies l_1 a - l_2 a \in La,$$

所以  $La$  是  $L$  的加法子群.

然后证明  $La$  是  $L$  的理想. 对  $\forall la \in La, b \in L$ , 注意到  $bl, lb \in L, ab = ba$ , 所以

$$lab = l(ab) = l(ba) = lba \in La$$

$$bla \in La,$$

所以  $La$  是  $L$  的理想. 因为  $La \neq \emptyset$  且  $L$  没有非平凡的理想, 所以  $La = L$ .

最后证明  $L$  即  $La$  是域. 由于  $1 \in L = La$ , 所以

$$\exists b \in L \text{ s.t. } ba = 1,$$

所以  $a$  有逆元  $b$ , 亦即  $L$  的非零元均有逆元, 从而  $L$  是域. 问题证毕.  $\square$



# Chapter 2

## 群

### 2.1 群的同态定理

定理 2.1.1 (群的第一同构定理). 设  $G$  是群,  $H < G$ ,  $N \triangleleft G$ , 则

$$(1) HN < G$$

$$(2) H \cap N \triangleleft H \text{ 且 } H/H \cap N \cong HN/N.$$

证. (1) 的证明

$$HN < G \iff$$

$$(i) HN \text{非空}$$

$$(ii) \forall a, b \in HN \implies ab^{-1} \in HN.$$

$HN$  显然非空. 对任意  $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$  注意到

$$\begin{aligned} & h_1n_1(h_2n_2)^{-1} \\ &= h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1h_2^{-1}(h_2n_1n_2^{-1}h_2^{-1}). \end{aligned}$$

由于  $N \triangleleft G$ , 所以  $\forall g \in G, gNg^{-1} \in N$ , 又  $h_2 \in H \subset G$ , 所以

$$h_1 h_2^{-1} (h_2 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1}) \in N,$$

从而

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} \in N,$$

于是  $HN < G$ .

(2) 的证明

定义映射

$$\varphi : H \rightarrow HN/N$$

$$h \mapsto hN,$$

显然这是良定义的. 对  $\forall h_1, h_2 \in H$

$$\begin{aligned} \varphi(h_1 h_2) &= h_1 h_2 N \\ &= h_1 N h_2 N \\ &= \varphi(h_1) \varphi(h_2), \end{aligned}$$

可见  $\varphi$  是同态映射, 所以由群同态基本定理 (定理1.7.2)

$$H/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi.$$

注意到

$$\begin{aligned} h &\in \ker \varphi \\ \iff hN &= N \\ \iff h &\in N \\ \stackrel{h \in H}{\iff} h &\in H \cap N, \end{aligned}$$

所以  $\ker \varphi = H \cap N$ , 从而

$$\begin{aligned} H \cap N &\triangleleft H \\ H/H \cap N &\cong \operatorname{im} \varphi. \end{aligned}$$

对  $\forall hnN \in HN/N$ , 有

$$hnN = hN,$$

所以  $\exists h \in H$  s.t.

$$\varphi(h) = hnN,$$

所以  $\varphi$  是满同态, 从而

$$\operatorname{im} \varphi = HN/N,$$

所以

$$H/H \cap N \cong HN/N.$$

□

**注 2.1.1.** 类似可以证明: 若  $H < G, N \triangleleft G$ , 有

$$\begin{aligned} (1) & NH < G \\ (2) & H \cap N \triangleleft H \text{ 且 } H/H \cap N \cong NH/N. \end{aligned}$$

**定理 2.1.2** (群的第二同构定理). 设  $G$  是群. 若  $N \triangleleft G, H \triangleleft G$  并且  $N \subset H$ , 则

$$\begin{aligned} (1) & H/N \triangleleft G/N \\ (2) & (G/N)/(H/N) \cong G/H. \end{aligned}$$

证. (1) 的证明

定义映射

$$\begin{aligned}\varphi : G/N &\rightarrow G/H \\ gN &\mapsto gH,\end{aligned}$$

显然  $\varphi$  是良定义的. 对  $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned}\varphi(g_1Ng_2N) & \\ \stackrel{N \triangleleft G}{=} \varphi(g_1g_2N) & \\ = g_1g_2H & \\ \stackrel{H \triangleleft G}{=} g_1Hg_2H & \\ = \varphi(g_1N)\varphi(g_2N), &\end{aligned}$$

可见  $\varphi$  是同态映射, 所以由群同态基本定理 (定理1.7.2)

$$(G/N)/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi.$$

注意到

$$\begin{aligned}gN &\in \ker \varphi \\ \iff gH &= H \\ \iff g &\in H \\ \iff gN &\in H/N,\end{aligned}$$

可见  $\ker \varphi = H/N$ , 所以

$$\begin{aligned}H/N &\triangleleft G/N \\ (G/N)/(H/N) &\cong \text{im } \varphi.\end{aligned}$$

(2) 的证明

对  $\forall gH \in G/H, \exists g \in G$  s.t.

$$\varphi(gN) = gH,$$

可见  $\varphi$  是满同态, 进而

$$\text{im } \varphi = G/H,$$

所以

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

□

**注 2.1.2.** 习惯上将群同态基本定理 (定理1.7.2), 群的第一同构定理 (定理2.1.1), 群的第二同构定理 (定理2.1.2) 统称为群的同态定理.

**定理 2.1.3.** 若  $G$  是群,  $N \triangleleft G$ , 则  $G$  的所有包含  $N$  的子群与  $G/N$  的所有子群之间存在一一对应.

证. 取自然同态

$$\pi : G \rightarrow G/N$$

$$g \mapsto gN,$$

则问题转化为证明在集合  $A$  与  $B$  之间存在一一对应, 其中

$$A = \{H : H < G, H \supset \ker \pi\}$$

$$B = \{H' : H' < \text{im } \pi\}.$$

设  $H \in A$ ,  $\pi_H$  为映射  $\pi$  在子群  $H$  上的限制, 容易验证  $\text{im } \pi_H \in B$ . 定义映射

$$\varphi : A \rightarrow B$$

$$H \mapsto \text{im } \pi_H,$$

容易验证  $\varphi$  是良定义. 若能证明  $\varphi$  是一一对应, 则问题证毕.

(1)  $\varphi$  是满射

$\forall H' < \text{im } \pi$  即

$$H' = \{\pi(k) : k \in K \subset G\}.$$

注意到

$H'$  成群

$$\iff \forall \pi(k_1), \pi(k_2) \in H' \implies \pi(k_1)[\pi(k_2)]^{-1} \in H'$$

$$\iff \forall \pi(k_1), \pi(k_2) \in H' \implies \pi(k_1 k_2^{-1}) \in H'$$

$$\iff \forall k_1, k_2 \in K \implies k_1 k_2^{-1} \in K$$

$$\iff K < G,$$

所以

$$H' = \{\pi(k) : k \in K < G\}. \quad (2.1.1)$$

注意到

$$\forall t \in \ker \pi \implies \pi(t) = e \in H',$$

因此不妨让式(2.1.1)中的  $K$  包含  $\ker \pi$ , 即

$$\begin{aligned} H' &= \{\pi(k) : k \in K < G, K \supset \ker \pi\} \\ &= \text{im } \pi_K(K < G, K \supset \ker \pi), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} B &= \{\text{im } \pi_K : K < G, K \supset \ker \pi\} \\ &= \{\text{im } \pi_H : H < G, H \supset \ker \pi\} \end{aligned}$$

$$= \{ \text{im } \pi_H : H \in A \},$$

由此可见  $\text{im } \varphi = B$ , 即  $\varphi$  是满同态;

(2)  $\varphi$  是单射

$$\begin{aligned} &\iff \forall x_1, x_2 \in A, \text{若 } x_1 \neq x_2, \text{则 } \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) \\ &\iff |\{x \in A : \varphi(x) = \varphi(x_0), x_0 \in A\}| = 1 \\ &\iff |\{H \supset N : \text{im } \pi|_H = \text{im } \pi|_{H_0}, H_0 \supset A\}| = 1 \\ &\iff \{H \supset N : \text{im } \pi|_H = \text{im } \pi|_{H_0}, H_0 \supset A\} = \{H_0\} \\ &\iff \text{若 } H_0 \supset N, H \supset N \text{ 且 } \text{im } \pi|_H = \text{im } \pi|_{H_0}, \text{ 则 } H = H_0, \quad (2.1.2) \end{aligned}$$

注意到在(2.1.2)的题设条件下, 显然有  $H \supset H_0$ , 故只需证明  $H \subset H_0$  便可得到  $H = H_0$ .

在(2.1.2)的题设条件下

$$\begin{aligned} &\forall h \in H, \exists h_0 \in H_0 \text{ s.t. } \pi(h) = \pi(h_0) \\ &\iff \forall h \in H, \exists h_0 \in H_0 \text{ s.t. } hN = h_0N \\ &\iff \forall h \in H, \exists h_0 \in H_0 \text{ s.t. } h \in h_0N \subset H_0 \\ &\implies H \subset H_0. \end{aligned}$$

所以  $\varphi$  是单射.

由 (1),(2) 便知

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightarrow B \\ H &\mapsto \text{im } \pi_H \end{aligned}$$

为一一对应, 问题得证. □

**定义 2.1.1** (由  $S$  生成的群). 设  $G$  是群,  $S$  是  $G$  的非空子集合.  $G$  的包含  $S$  的最小的子群, 称为由  $S$  生成的群, 记作  $\langle S \rangle$ , 即

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H \leq G} H.$$

**命题 2.1.1.** 设  $(G, \cdot)$  是群. 若  $S$  是  $G$  的非空子集合, 则

$$\langle S \rangle = \left( \left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}, \cdot \right),$$

即集合  $S \cup S^{-1}$  中任意多个元素的乘积组成的集合关于  $\cdot$  构成  $\langle S \rangle$ .

证. 容易验证群  $G$  的子集合  $\left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}$  关于群  $G$  的乘法成群, 记此群为  $A$ . 注意到  $A$  包含  $S$ , 所以  $A$  包含: 包含  $S$  的最小的子群, 即  $A \supset \langle S \rangle$ .

反之, 对  $\forall a \in A$  有

$$a = \left( \prod_{\alpha \in \Lambda_1} s_\alpha \right) \cdot \left( \prod_{\beta \in \Lambda_2} s_\beta \right),$$

其中

$$s_\alpha \in S \subset \langle S \rangle, \alpha \in \Lambda_1$$

$$s_\beta \in S^{-1}, \beta \in \Lambda_2,$$

注意到  $s_\beta^{-1} \in S \subset \langle S \rangle, \beta \in \Lambda_2$ , 而  $\langle S \rangle$  成群, 从而

$$\begin{aligned} s_\beta &= (s_\beta^{-1})^{-1} \in \langle S \rangle, \beta \in \Lambda_2 \\ \Rightarrow a &= \left( \prod_{\alpha \in \Lambda_1} s_\alpha \right) \cdot \left( \prod_{\beta \in \Lambda_2} s_\beta \right), \end{aligned}$$

可见  $A \subset \langle S \rangle$ .

综上,  $A = \langle S \rangle$ , 即

$$\langle S \rangle = \left( \left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}, \cdot \right).$$

□



**定义 2.1.2** (有限生成的, 循环群). 设  $G$  是群. 若  $\langle S \rangle = G$ , 则称  $S$  为  $G$  的一组生成元. 若  $G$  中存在一有限集合  $S$  使得  $\langle S \rangle = G$ , 则称  $G$  为有限生成的. 由一个元素生成的群称为循环群.

**命题 2.1.2.** 有限群一定是有限生成的, 反之未必成立.

证. 设  $G$  是有限群,  $m = |G| \in \mathbb{N}_+$ , 则  $G$  所含元素的个数为  $m$ . 取

$$S = \{g_1, g_2, \dots, g_m : g_k \text{ 是 } G \text{ 中两两不同的元素}, k = 1, 2, \dots, m\},$$

则

$$G = \langle S \rangle,$$

第一个论断证毕;

注意到

$$\begin{aligned} |(\mathbb{Z}, +)| &= \infty \\ (\mathbb{Z}, +) &= \langle \{1\} \rangle, \end{aligned}$$

所以第二个论断证必. □

**定义 2.1.3** (换位子, 换位子群). 对  $\forall a, b \in G$ , 元素  $a^{-1}b^{-1}ab$  称为群  $G$  中元素  $a, b$  的换位子, 简记为  $[a, b]$ . 由所有换位子生成的群称为  $G$  的换位子群, 记作  $G^{(1)}$ .

**命题 2.1.3.** 已知  $\varphi : G \rightarrow G'$  是同态映射, 有以下结论成立

- (1) 若  $G$  是 Abel 群, 则  $\text{im } \varphi$  是 Abel 群;
- (2) 虽  $\text{im } \varphi$  是 Abel 群, 但  $G$  未必是 Abel 群;
- (3)  $\text{im } \varphi$  是 Abel 群  $\iff G^{(1)} \subset \ker \varphi$ .

证. (1)

对  $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\overline{\varphi \text{ 是同态映射}}} \varphi(g_1 g_2) \\
& \overline{\overline{G \text{ 是 Abel 群}}} \varphi(g_2 g_1) \\
& = \varphi(g_2) \varphi(g_1),
\end{aligned}$$

可见  $\text{im } \varphi$  是 Abel 群.

(2)

令

$$G = \left( \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ 且 } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right\}, \cdot \right)$$

$$\varphi : G \rightarrow G'$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

不难得到上述定义的  $G$  与  $\varphi$  证明了 (2).

(3)

$\text{im } \varphi$  是 Abel 群

$$\begin{aligned}
& \Longleftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1) \varphi(g_2) = \varphi(g_2) \varphi(g_1) \\
& \Longleftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G, [\varphi(g_2) \varphi(g_1)]^{-1} \varphi(g_1) \varphi(g_2) = e \\
& \Longleftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2) = e \\
& \Longleftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G, g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 \in \ker \varphi \\
& \Longleftrightarrow G^{(1)} \subset \ker \varphi,
\end{aligned}$$

问题得证. □

## 2.2 循环群

循环群的定义见定义2.1.2.

**定理 2.2.1.** 整数加群  $\mathbb{Z}$  的子群都是由某一非负整数  $m$  生成的循环群.  
且  $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$

$$n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z} \iff n|m.$$

证. 设  $H$  是  $(\mathbb{Z}, +)$  的一个子群.

(1)(i) 若  $H = (\{0\}, +)$ , 取  $m = 0$  即可.

(ii) 若  $H \neq (\{0\}, +)$ , 则  $H$  中含有非零数, 因而含有正整数. 设  $m$  是  $H$  中最小的正整数, 我们来证明  $H = m\mathbb{Z}$ . 任取  $x \in H$ , 由整数的除法算式有

$$x = qm + r, \text{ 其中 } q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < m,$$

从而

$$r = x - qm \in H.$$

若  $r \neq 0$ , 则  $r$  是  $H$  中小于  $m$  的正整数, 矛盾, 所以  $r = 0$ , 即

$$x = qm,$$

这说明  $H$  中的任意元素都是  $m$  的倍数. 反之, 由群对运算的封闭性不难得到  $m$  的倍数也在  $H$  中. 综上可得

$$H = m\mathbb{Z},$$

第一个论断证毕.

(2) 由  $n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z}$  可知  $m \in n\mathbb{Z}$ , 所以  $n|m$ ;

由  $n|m$  可知,  $m$  的倍数都是  $n$  的倍数, 所以  $n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z}$ .

综上可得

$$n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z} \iff n|m,$$

第二个论断证毕. □

**定义 2.2.1** (无限循环群). 设群  $G = \langle g \rangle$ , 若  $G$  是无限群, 则称  $G$  为无限循环群, 此时记  $|G| = \infty$ .

**定理 2.2.2.** 已知群  $G = \langle g \rangle$ ,  $|G| = m$ , 则有以下结论成立

(1) 若  $m = \infty$ , 则  $G \cong \mathbb{Z}$ , 它的子群与非负整数成一一对应 (见定理 2.2.1);

(2) 若  $m \in \mathbb{N}_+$ , 则  $G \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , 它的子群与  $m$  的因子成一一对应.

证. 定义映射

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{Z} &\rightarrow G \\ n &\mapsto g^n,\end{aligned}$$

显然  $\varphi$  是良定义的满同态.

(1) 若  $m = \infty$ , 则

$$\begin{aligned}\forall n, m \in \mathbb{N}_+, n \neq m, &\implies g^n \neq g^m \\ \iff \varphi \text{ 是单射} \\ \iff \varphi \text{ 是同构映射} \\ \iff G \cong \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

### 2.2.1 \*

(2) 若  $m \in \mathbb{N}_+$ , 不难得到

$$\ker \varphi = m\mathbb{Z},$$

于是根据群同态基本定理 (定理 1.7.2) 有

$$G = \operatorname{im} \varphi \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

**2.2.2 \***

□

**引理 2.2.1.** 设交换群  $G$  中元素  $g, h$  的阶为  $m, n$  且  $(m, n) = 1$ , 则元素  $gh$  的阶为  $mn$ .

**证. 2.2.3 \***

□

**定理 2.2.3.** 若  $G$  是有限交换群, 则在  $G$  中存在一个元素, 它的阶是  $G$  中所有元素阶的倍数.

**证. 2.2.4 \***

□

**定理 2.2.4.** 若  $G$  是有限交换群, 则  $G$  是循环群的充分必要条件是: 对  $\forall m \in \mathbb{N}_+$ , 在  $G$  中适合方程  $x^m = e$  的元素的个数不超过  $m$ .

**证. 2.2.5 \***

□

**2.3 单群与  $A_n$  单性**

**定义 2.3.1** (单群). 若群  $G$  没有非平凡的子群, 则称群  $G$  为单群.

**定理 2.3.1.** 设  $G$  为交换群,  $G \neq \{e\}$ , 则  $G$  为单群的充分必要条件是  $G$  为素数阶的循环群.

证. 2.3.1 \*

□

**定义 2.3.2 (置换).** 设  $\Omega$  为有限集合, 由  $\Omega$  到自身的一个双射叫作  $\Omega$  的一个置换.

**定义 2.3.3 (轮换).** 若一个  $n$  元置换  $\sigma$  把  $i_1$  映成  $i_2$ , 把  $i_2$  映成  $i_3, \dots$ , 把  $i_{r-1}$  映成  $i_r$ , 把  $i_r$  映成  $i_1$ , 其余的元素保持不变, 则称  $\sigma$  为一个  $r$ -轮换, 简称轮换. 2-轮换也称为对换.

**引理 2.3.1.** 每个置换都可以表示成一些对换的乘积; 每个偶置换 (置换  $\sigma$  为偶置换当且仅当  $\sigma$  的对换分解式中对换的个数为偶数) 都可以表示成一些长度为 3 的轮换 (简称 3-轮换) 的乘积.

证. 2.3.2 \*

□

**定义 2.3.4 (全变换群).** 非空集合  $\Omega$  到自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法成群, 称它为集合  $\Omega$  的全变换群, 记作  $S_n$ .

**定义 2.3.5 ( $n$  元交错群).**  $S_n$  中所有偶置换组成的集合, 对于映射的乘法成群, 称它为  $n$  元交错群, 记作  $A_n$ .

**定理 2.3.2.** 交错群  $A_n, n \geq 5$  是单群.

证. 2.3.3 \*

□

## 2.4 可解群

对任意群  $G$  而言, 它的换位子群  $G^{(1)}$  是  $G$  的正规子群, 即

$$G^{(1)} \triangleleft G,$$

再做  $G^{(1)}$  的换位子群  $(G^{(1)})^{(1)}$ , 记作  $G^{(2)}$ , 就有

$$G^{(2)} \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G,$$

以此类推可得

$$\dots \triangleleft G^{(k)} \triangleleft G^{(k-1)} \triangleleft \dots \triangleleft G^{(2)} \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G.$$

若  $G$  是有限群, 这样的群列只有以下两种可能

- (1)  $\exists k \in \mathbb{N}_+$  s.t.  $G^{(k)} = G^{(k+1)} = \dots \neq \{e\}$
- (2)  $\exists k \in \mathbb{N}_+$  s.t.  $G^{(k)} = \{e\}$ .

**定义 2.4.1** (可解群). 设  $G$  是群. 若

$$\exists k \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } G^{(k)} = \{e\},$$

则称  $G$  为可解群.

**定理 2.4.1.** 群  $G$  是可解的当且仅当存在一递降的子群列

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_s = \{e\},$$

其中每个  $G_i$  是前一个  $G_{i-1}$  的正规子群, 且商群  $G_{i-1}/G_i$  交换 ( $i = 1, \dots, s$ ).

**证. 2.4.1 \***

□

由群的第二同构定理 (定理2.1.2) 可知, 当群  $N$  是群  $G$  的正规子群时, 商群  $G/N$  的正规子群与  $G$  中包含  $N$  的正规子群是一一对应的. 因此, 商群  $G/N$  是单群的充要条件为正规子群  $N$  不包含在另一个非平凡的正规子群中, 即不存在  $G$  的正规子群  $N_1, N_1 \neq G, N_1 \neq N$ , 且

$$N < N_1 \triangleleft G,$$

具有此性质的正规子群  $N$  称为极大的.

**定理 2.4.2.** 有限群  $G$  是可解的的充分必要条件为存在递降的子群列

$$G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright \cdots \triangleright H_t = \{e\},$$

其中商群  $H_{i-1}/H_i (i = 1, \cdots, t)$  都是素数阶的循环群.

证. 2.4.2 \*

□

## 2.5 群的同构群

**定义 2.5.1** (自同构与自同构群). 一个群到它自身的同构映射称为自同构映射, 简称为自同构. 群的全部自同构在变换下的乘法下成群, 称为自同构群. 群  $G$  的自同构群记作  $\text{Aut}(G)$ .

设  $G$  为群,  $a \in G$  为固定元素. 定义

$$\begin{aligned} \sigma_a : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto aga^{-1}, \end{aligned}$$

不难验证  $\sigma_a \in \text{Aut}(G)$ .



**定义 2.5.2** (内自同构与内自同构群). 称  $\sigma_a$  这种由  $G$  中元素引起的自同构为内自同构.  $a \mapsto \sigma_a$  给出了群  $G$  到  $\text{Aut}(G)$  的同态,  $G$  的同态像就是  $G$  的全体内自同构, 它们组成  $\text{Aut}(G)$  的子群, 记作  $\text{In}(G)$ , 称为  $G$  的内自同构群.

**定义 2.5.3** (中心). 对任意群  $G$ , 与  $G$  的全体元素可交换的元素组成的集合称为  $G$  的中心, 记作  $Z(G)$ .

**定理 2.5.1.** 定义映射

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow \text{In}(G) \\ a &\mapsto \sigma_a, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \ker f &= Z(G) \\ G/Z(G) &\cong \text{In}(G). \end{aligned}$$

**证. 2.5.1** \*

□

**定理 2.5.2.** 对任意群  $G$ , 有

$$\text{In}(G) \triangleleft \text{Aut}(G).$$

**证. 2.5.2** \*

□

**定义 2.5.4** (外自同构群). 对任意群  $G$ , 称自同构群对于内自同构群的商群

$$\text{Aut}(G)/\text{In}(G)$$

为  $G$  的外自同构群.

**定理 2.5.3.** 对任意群  $G$ , 若  $Z(G) = \{e\}$ , 则

$$G \cong \text{In}(G).$$

此时我们可以认为  $G < \text{In}(G)$ .

证. **2.5.3** \*

□

**定义 2.5.5** (完全群). 一个中心为单位且自同构全是内自同构的群称为完全群.

## 2.6 群作用

**定义 2.6.1** (群  $G$  在集合  $X$  上的作用). 设  $G$  是群,  $X$  是非空集合. 若映射  $f: G \times X \rightarrow X$  适合以下条件

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X:$$

$$(1) f(e, x) = x$$

$$(2) f(g_1 g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x)),$$

就称  $f$  决定了群  $G$  在集合  $X$  上的作用.

**注 2.6.1.** 在不需要明确指出映射  $f$  情况下, 通常把  $f(g, x)$  简写成  $g(x)$ . 按此写法, 定义 2.6.1 中的条件就可以写成

$$(1) e(x) = x$$

$$(2) g_1(g_2(x)) = g_1 g_2(x).$$

**例 2.6.1.** 设  $G$  是群, 取  $X = G$ . 定义

$$g(x) = gx, \quad \text{对 } g, x \in G.$$

这就给出了一个群在集合  $G$  上的作用. 此即以前所谓的左平移.

**例 2.6.2** (共轭变换). 设  $G$  是群, 取  $X = G$ . 定义

$$g(x) = gxg^{-1}, \quad \text{对 } g, x \in G.$$

此即群  $G$  上的共轭变换. 称元素  $x$  与元素  $gxg^{-1}$  共轭; 称子群  $H$  与子群  $gHg^{-1}$  共轭, 它们都是等价关系; 称群  $G$  共轭作用在集合  $G$  上.

**例 2.6.3.** 设  $G$  是群,  $H < G$ , 令  $X = \{xH : x \in G\}$ , 定义

$$g(xH) = gxH, \quad g, x \in G.$$

这就决定了群  $G$  在集合  $X$  上的左右.

**定义 2.6.2** (齐性空间). 设  $G$  是群,  $H < G$ , 称

$$X = \{xH : x \in G\}$$

是群  $G$  的一个齐性空间.

当群  $G$  作用在集合  $X$  上时, 有可能  $G$  中的不同的元素在  $X$  上引起相同的映射, 亦即  $g \mapsto \sigma_g$  不一定是单射. 比如在例2.6.2中,  $Z(G)$  中的元素都对应  $G$  上的恒同映射.

**定义 2.6.3** (如实的). 若映射

$$f : G \rightarrow \text{In}(G)$$

$$a \mapsto \sigma_a$$

是单射, 就称群  $G$  在集合  $X$  上的作用是如实的, 或称群  $G$  如实地作用在集合  $X$  上. 其中

$$\sigma_a : G \rightarrow G$$

$$g \mapsto aga^{-1}.$$

**注 2.6.2.** 例2.6.1中的作用是如实的; 例2.6.2, 例2.6.3不一定是如实的.

**定义 2.6.4** (等价的). 设  $G$  是群,  $X$  与  $X'$  是非空集合,  $G$  作用在  $X$  与  $X'$  上. 若有一个一一对应  $\varphi: X \rightarrow X'$  使得

$$\varphi(g(x)) = g(\varphi(x)),$$

则称  $G$  在集合  $X$  与  $X'$  上的作用是等价的.

从抽象的观点来看, 两个等价的作用可以不加区别.

**定义 2.6.5** (集合  $X$  上的等价关系). 对  $\forall x, y \in X$ , 若

$$\exists g \in G \text{ s.t. } y = g(x),$$

则称  $x$  等价于  $y$ , 记作  $x \sim y$ .

**注 2.6.3.** 定义2.6.5中的关系  $\sim$  是等价关系的证明如下.

**证. 2.6.1** \*

□

**定义 2.6.6** ( $G$ -轨道). 在定义2.6.5中的等价关系下, 集合  $X$  中的元素被分成等价类, 称这样分成的等价类为  $x$  的  $G$ -轨道, 简称轨道, 记作  $O_x$ . 称  $x$  为该轨道的代表.

**注 2.6.4.** 由于轨道就是等价类, 所以任意两条轨道要么相等, 要么无交, 即

$$X = \bigcup_{i \in I} O_{x_i},$$

其中当  $x_i \neq x_j$  时  $O_{x_i} \cap O_{x_j} = \emptyset$ . 进而

$$|X| = \sum_{i \in I} |O_{x_i}|.$$

**定义 2.6.7** (完全代表系). 称集合

$$\{x_i : i \in I\}$$

为  $x$  的  $G$ -轨道的完全代表系.

**定义 2.6.8** (不动元素). 当轨道  $O_x$  只含有一个元素  $x$  即

$$\forall g \in G, g(x) = x$$

时, 称  $x$  为  $G$  的不动元素.

在例2.6.2中, 若  $x \in Z(G)$ , 则显然  $O_x = \{x\}$ ; 反之, 由  $O_x = \{x\}$  可知  $x \in Z(G)$ .

**定义 2.6.9** (传递的). 设群  $G$  作用在集合  $X$  上, 当  $X$  是一个轨道即

$$\forall x, y \in X, \exists g \in G \text{ s.t. } g(x) = y$$

时, 称群  $G$  在集合  $X$  上的作用是传递的.

不难发现, 例2.6.1与例2.6.3都是传递的的情形.

**定义 2.6.10** (稳定子与稳定子群). 设群  $G$  作用在集合  $X$  上, 对  $\forall x \in X$ , 称集合

$$H_x = \{g \in G : g(x) = x\}$$

是  $x$  的稳定子. 容易验证,  $H_x$  是  $G$  的子群, 因此也称为元素  $x$  的稳定子群.

当群  $G$  在集合  $G$  上的作用是共轭作用 (参考例2.6.2) 时

$$\begin{aligned} H_x &= \{g \in G : gxg^{-1} = x\} \\ &= \{g \in G : gx = xg\}. \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

**定义 2.6.11** (中心化子). 称等式(2.6.3)右端的集合为  $x$  在  $G$  里的中心化子, 记作  $Z(x)$ , 它就是在群  $G$  的共轭作用下  $x$  的稳定子群  $H_x$ .

**定理 2.6.1** (轨道-稳定子定理). 设群  $G$  作用在集合  $X$  上,  $x \in X$ ,  $O_x$  是包含  $x$  的轨道,  $H_x$  是  $x$  的稳定子群, 则群  $G$  在集合  $O_x$  上的作用与群  $G$  在齐性空间  $G/H_x$  上的作用等价, 也可写作

$$|O_x| = [G : H_x],$$

即  $x$  的轨道的长度 ( $x$  的轨道所含元素的个数) 等于  $x$  的稳定子在  $G$  中的指数.

证. 2.6.2 \*

□

**推论 2.6.1.** 设群  $G$  在集合  $X$  上的作用是传递的,  $x \in X$ ,  $H_x$  是元素  $x$  的稳定子群. 则  $G$  在  $X$  上的作用与  $G$  在齐性空间  $G/H_x$  上的作用等价.

证. 2.6.3 \*

□

**推论 2.6.2.** 设有限群  $G$  作用在集合  $X$  上. 则任意一个轨道  $O_x$  包含有限多个元素, 并且包含的元素的个数是  $|G|$  的因子.

证. 2.6.4 \*

□

**定义 2.6.12** ( $p$ -群). 设  $G$  是有限群, 若  $|G|$  是素数  $p$  的方幂, 即

$$|G| = p^k, \quad k \geq 1,$$

则称  $G$  为  $p$ -群 ( $p$  是素数).

**推论 2.6.3.** 设有限群  $G$  作用在有限集合  $X$  上. 若  $G$  是  $p$ -群,  $|X| = n$ ,  $(n, p) = 1$ , 则  $X$  中一定有不动元素.

证. 2.6.5 \*

□

**推论 2.6.4.** 设  $p$ -群作用在有限集合  $X$  上,  $|X| = n$ . 若  $t$  为  $X$  中不动元素的个数, 则

$$t \equiv n \pmod{p}.$$

证. 2.6.6 \*

□

**推论 2.6.5.**  $p$ -群有非平凡的中心.

证. 2.6.7 \*

□

**定义 2.6.13** (共轭类). 当群  $G$  在集合  $G$  上的作用是共轭变换 (例 2.6.2) 时, 称轨道  $O_x$  为  $x$  所在的共轭类, 记作  $C(x)$ .

**定理 2.6.2.** 设群  $G$  作用在集合  $X$  上,  $x, y \in X$ . 若存在  $g_0 \in G$  使得  $y = g_0x$ , 则  $H_y = g_0H_xg_0^{-1}$ .

证. 2.6.8 \*

□

## 2.7 Sylow 定理

Lagrange 定理 (推论 1.4.1) 指出, 有限群  $G$  的任意子群的阶是  $|G|$  的因子. 反之, 对于  $|G|$  的任意正因子  $d$ , 是否存在一个  $d$  阶子群? 本节介绍的 Sylow 定理将回答这一问题.

在此之前我们需要以下引理.

**引理 2.7.1.** 若  $n = p^l m, (p, m) = 1, k \leq l, C_n^{p^k}$  是组合数, 则

$$p^{l-k} | C_n^{p^k}, p^{l-k+1} \nmid C_n^{p^k}.$$

证. **2.7.1** \*

□

**定理 2.7.1** (Sylow 第一定理). 若群  $G$  的阶为  $n = p^l m$ , 其中  $p$  为素数,  $(p, m) = 1, l \geq 1$ , 则对于  $0 \leq k \leq l, G$  有  $p^k$  阶子群. 特别地, 称  $p^l$  阶子群为  $G$  的 Sylow  $p$ -子群.

证. 令

$$X = \{A : A \subset G, |A| = p^k\},$$

易见  $|X| = C_n^{p^k}$ . 对  $\forall A \in X$ , 对  $\forall g \in G$  定义映射

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ A &\mapsto gA, \end{aligned}$$

不难验证这是良定义的. 该映射给出了群  $G$  在集合  $X$  上的作用.

由注2.6.4可知

$$|X| = \sum_{i \in I} |O_{A_i}|.$$

由引理2.7.1可知

$$p^{l-k+1} \nmid C_n^{p^k} = |X|,$$

所以至少有一个轨道, 不妨设为  $O_{A_j}$ , 满足

$$p^{l-k+1} \nmid |O_{A_j}|,$$



此即  $|O_{A_j}|$  含有的  $p$  因子至多为  $p^{l-k}$ .

对于  $A_j$  的稳定子群  $H_{A_j}$ , 由轨道-稳定子定理 (定理2.6.1) 可知

$$|O_{A_j}| = [G : H_{A_j}] = \frac{|G|}{|H_{A_j}|},$$

注意到

$$\begin{aligned} |G| \text{ 含有的 } p \text{ 因子恰好为 } p^l \\ |O_{A_j}| \text{ 含有的 } p \text{ 因子至多为 } p^{l-k}, \end{aligned}$$

所以

$$H_{A_j} \text{ 含有的 } p \text{ 因子至少为 } p^k,$$

亦即

$$\exists q \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } |H_{A_j}| = p^k q,$$

可见

$$|H_{A_j}| \geq p^k. \quad (2.7.4)$$

反之, 对  $\forall g \in H_{A_j}$ , 有  $g(A_j) = A_j$ , 所以对  $\forall a \in A_j$ , 有  $ga \in A_j$ , 从而

$$H_{A_j}a = \{ga : g \in H_{A_j}\} \subset A_j,$$

于是

$$|H_{A_j}| = |H_{A_j}a| \leq |A_j| = p^k. \quad (2.7.5)$$

由式(2.7.4)与式(2.7.5)可知,  $H_{A_j}$  是  $G$  的  $p^k$  阶子群. 定理得证.  $\square$

**定理 2.7.2** (Sylow 第二定理). 若有限群  $G$  的阶为  $p^l m$ , 其中  $p$  为素数且  $(p, m) = 1$ , 记  $P$  为  $G$  的 Sylow  $p$ -子群. 则  $G$  的任意一个阶为  $p^k$  ( $k \leq l$ ) 的子群  $H$  包含在一个与  $P$  共轭的 Sylow  $p$ -子群中.

证. 令

$$X = \{gP : g \in G\},$$

对  $\forall h \in H$ , 定义映射

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow X \\ gP &\mapsto hgP, \end{aligned}$$

容易验证该定义是良定义的,  $h$  确定了群  $H$  在集合  $X$  上的作用. 由 Lagrange 定理 (推论1.4.1) 的证明过程可知

$$|G| = |X| \cdot |P|,$$

所以  $|X| = m$ . 注意到有限  $p$ -群  $H$  作用在集合  $X$  上, 并且  $(p, m) = 1$ , 所以由推论2.6.3可知  $X$  有不动元素, 不妨设其中的一个为  $g_jP$ , 即

$$\begin{aligned} &\forall h \in H, hg_jP = g_jP \\ \iff &\forall h \in H, g_j^{-1}hg_jP = P \\ \iff &\forall h \in H, g_j^{-1}hg_j \in P \\ \iff &\forall h \in H, h \in g_jPg_j^{-1} \\ \iff &H \subset g_jPg_j^{-1}, \end{aligned}$$

注意到  $H, P$  均成群, 所以  $H < g_jPg_j^{-1}$ , 即  $H$  包含在一个与  $P$  共轭的 Sylow  $p$ -子群中, 定理得证.  $\square$

**推论 2.7.1.** 对有限群而言, 任意两个 Sylow  $p$ -子群都互相共轭.

证. **2.7.2** \*

$\square$

**推论 2.7.2.** 有限群  $G$  的 Sylow  $p$ -子群是惟一的当且仅当  $G$  的 Sylow  $p$ -子群是正规子群.

证.  $G$  的子群  $P$  是正规子群即  $P$  的所有共轭子群都等与  $P$  自身.

任取  $G$  的两个 Sylow  $p$ -子群  $P_0, P$ , 由推论 2.7.1 可知  $P_0, P$  互相共轭, 又由于  $P_0, P$  互相共轭可知  $P_0 = P$ , 推论得证.  $\square$

**定义 2.7.1** (正规化子). 对群  $G$  的任意子群  $H$ , 定义

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\},$$

则  $N_G(H) < G$  且  $H \subset N_G(H)$ . 称  $N_G(H)$  为子群  $H$  在  $G$  中的正规化子, 简记为  $N(H)$ .

**注 2.7.1.** 由定义 2.7.1 可立即推出  $H \triangleleft N_G(H)$ , 这也是引出正规化子的意义.

**推论 2.7.3.** 若  $G$  是有限群,  $P$  是  $G$  的 Sylow  $p$ -子群, 则

$$(1) N_G(N_G(P)) = N_G(P)$$

$$(2) N_G(P) \text{ 不包含 } G \text{ 的另一个 Sylow } p\text{-子群.}$$

证. 2.7.3 \*

$\square$

**推论 2.7.4.** 若  $G$  是有限群,  $p$  是素数且  $p \mid |G|$ , 则  $G$  的 Sylow  $p$ -子群的个数是  $|G|$  的因子.

证. 2.7.4 \*

$\square$

**定理 2.7.3** (Sylow 第三定理). 若  $|G| = p^l m$ ,  $p$  是素数且  $(p, m) = 1, l \geq 1$ , 记  $G$  的 Sylow  $p$ -子群的个数为  $k$ , 则  $k \equiv 1 \pmod{p}$ .

**分析.** 注意到该定理的结论与推论2.6.4十分相似, 这引诱我们构造某  $p$ -群  $P$ , 使其作用在某  $k$  元集合  $X$  后所得不动元素的个数为 1.

证. 令

$$X = \{P : P < G, |P| = p^l\},$$

于是  $|X| = k$ .

任取  $P \in X$ , 考虑  $P$  在  $X$  上的共轭作用. 对  $\forall a \in P$ , 定义映射

$$\begin{aligned} a : X &\rightarrow X \\ Q &\mapsto aQa^{-1}, \end{aligned}$$

容易验证这是良定义的,  $a$  给出了群  $P$  在集合  $X$  上的作用. 设  $X_0$  为  $P$  作用在  $X$  上的不动点集, 即

$$X_0 = \{Q \in X : a(Q) = Q\},$$

则

$$\begin{aligned} Q \in X_0 &\iff \forall a \in P, a(Q) = Q \\ &\iff \forall a \in P, aQa^{-1} = Q \\ &\iff \forall a \in P, a \in N(Q) \\ &\iff P \subset N(Q), \end{aligned}$$

又  $Q \subset N(Q)$  且  $P, Q$  都是  $G$  的 Sylow  $p$ -子群, 所以由推论2.7.3可知  $P = Q$ , 进而  $|X_0| = 1$ . 由推论2.6.4可知

$$|X_0| \equiv |X| \pmod{p},$$

即

$$\begin{aligned} 1 &\equiv k \pmod{p} \\ \iff k &\equiv 1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

定理得证. □

**推论 2.7.5.** 若群  $G$  的阶为  $p^l m$ , 其中  $p$  是素数且  $(p, m) = 1$ , 则  $G$  的 Sylow  $p$ -子群的个数是  $m$  的因子.

证. 设  $G$  的 Sylow  $p$ -子群的个数为  $k$ .

由推论2.7.4可知  $k \mid |G|$ , 由  $|G| = p^l m$ ,  $p$  是素数且  $(p, m) = 1$

$$k \mid p \text{ 或 } k \mid m. \quad (2.7.6)$$

由 Sylow 第三定理 (定理2.7.3) 可知

$$k \nmid p. \quad (2.7.7)$$

由式(2.7.6)与(2.7.7)可知  $k \mid m$ , 推论得证. □

作为本节的结束, 我们来看一个例子来说明如何利用上面的结果来解决群论的问题.

**例 2.7.1.** 已知有限群  $G$  的阶为 72, 证明  $G$  不是单群.

证. 注意到

$$72 = 2^3 \cdot 3^2,$$

所以利用 Sylow 第三定理 (定理2.7.3), 可设  $G$  的 Sylow 3-子群的个数为

$$1 + 3t, t \in \mathbb{N},$$

再利用推论2.7.5可知

$$(1 + 3t) \mid 2^3,$$

所以  $t = 0$  或  $t = 1$ .

(1) 若  $t = 0$ , 即  $G$  有惟一的 Sylow 3-子群, 设为  $P$ , 由推论2.7.2可知

$$P \triangleleft G,$$

所以此时  $G$  有非平凡的正规子群  $P$ , 从而不是单群.

(2) 若  $t = 1$ , 即  $G$  有 4 个 Sylow 3-子群, 设为  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . 考虑  $G$  在集合

$$X = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

上的共轭变换 (例2.6.2). 由推论2.7.1可知  $G$  任意两个 Sylow 3-子群都互相共轭, 所以  $G$  的每个元素都在  $X$  上诱导出一个 4 次置换, 从而诱导出同态

$$\varphi : G \rightarrow S_4,$$

由群同态基本定理 (定理1.7.2) 可知

$$G/\ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi,$$

所以

$$\begin{aligned} |\ker \varphi| &= \frac{|G|}{|\operatorname{im} \varphi|} \geq \frac{|G|}{|S_4|} = 3 \\ \implies \ker \varphi &\neq \{e\}. \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

由  $G$  的 Sylow 3-子群不惟一可知

$$\begin{aligned} \operatorname{im} \varphi &> 1 \\ \implies \ker \varphi &\neq \{e\} \\ \implies \ker \varphi &\neq G. \end{aligned} \tag{2.7.9}$$

由式(2.7.8)与(2.7.9)可知, 此时  $\ker \varphi$  是  $G$  的非平凡的正规子群.

综上,  $G$  不是单群. □

**注 2.7.2.** 在证明例2.7.1时所构造的群同态  $\varphi$  是十分重要的, 通常将其称为传递置换表示, 下面严格地给出它的定义.

**定义 2.7.2** (传递置换表示). 若  $H$  是群  $G$  的子群,  $H$  的全体左陪集构成集合

$$P = \{a_i H : a_i \in G, i = 1, \cdots, r\},$$

则称群作用

$$\begin{aligned} g : P &\rightarrow P \\ a_i H &\mapsto ga_i H \end{aligned}$$

所诱导出的群同态

$$\varphi : G \rightarrow S_r$$

为群  $G$  在子群  $H$  上的传递置换表示.

## 2.8 群的直和

现在来介绍一种由已知群来构造新群的方法. 先看两个群的情形.

设  $G_1, G_2$  成群, 考虑集合

$$G_1 \times G_2,$$

对  $\forall G_1 \times G_2$  中的两个元素  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ , 定义乘法为

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2), \quad (2.8.10)$$

其中第一个分量为作  $G_1$  的乘法, 第二个分量为作  $G_2$  的乘法.

若  $e_1, e_2$  分别为  $G_1, G_2$  中的么元, 则可验证  $G_1 \times G_2$  在新定义的乘法下成群, 么元为  $(e_1, e_2)$ .

**定义 2.8.1** (群的直和). 已知  $G_1, G_2$  成群, 则将集合  $G_1 \times G_2$  在乘法(2.8.10)下所成的群称为  $G_1$  与  $G_2$  的直和, 记作

$$G_1 \oplus G_2.$$

容易验证有以下 3 个命题成立.

**命题 2.8.1.** 当群  $G_1, G_2$  是有限群时,  $G_1 \oplus G_2$  也是有限群, 并且

$$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|.$$

□

**命题 2.8.2.** 在  $G_1 \oplus G_2$  中令

$$\overline{G_1} = \{a, e_2 : a \in G_1\}, \text{ 其中 } e_2 \text{ 为 } G_2 \text{ 中的幺元}$$

$$\overline{G_2} = \{e_1, b : b \in G_2\}, \text{ 其中 } e_1 \text{ 为 } G_1 \text{ 中的幺元,}$$

则

$$\overline{G_1} \triangleleft G_1 \times G_2, \overline{G_2} \triangleleft G_1 \times G_2$$

$$\overline{G_1} \cong G_1, \overline{G_2} \cong G_2.$$

□

**命题 2.8.3.**  $G_1 \oplus G_2$  中的每个元素都可以分解成  $\overline{G_1}$  与  $\overline{G_2}$  中的元素的乘积, 并且该分解是唯一的. □

定义2.8.1与命题2.8.1,2.8.2,2.8.3均可以推广到多个群的情形.

经过上述讨论我们已经知道, 直和  $\bigoplus_{i=1}^s G_i$  的结构完全被群  $G_i$  的结构决定. 因此如果一个群能够分解成一些群的直和, 那么该群的研究就可以归结为另一些群 (一般比原来的群简单) 的研究. 下面将讨论在什么情况下, 一个群能够分解成一些群的直和.



**定理 2.8.1.** 设群  $N_i$  是群  $G$  的正规子群,  $i = 1, \dots, s$ , 若

$$(1) G = \prod_{i=1}^s N_i$$

$$(2) \text{ 对 } \forall g \in G, \text{ 表示式 } g = \prod_{i=1}^s g_i, \text{ 是唯一的, 其中 } g_i \in N_i,$$

则

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^s N_i.$$

证. 由表示式  $g = \prod_{i=1}^s$  的唯一性可知映射

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \prod_{i=1}^s \\ g_1 g_2 \cdots g_s &\mapsto (g_1, g_2, \dots, g_s) \end{aligned}$$

是一一对应. 若能证明  $\varphi$  是同态映射, 便能得到  $\varphi$  是同构映射, 进而  $G \cong \prod_{i=1}^s N_i$ .

注意到

$\varphi$  是同态映射

$$\Longleftrightarrow \forall x, y \in G, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

$$\Longleftrightarrow \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, \varphi \left[ \left( \prod_{i=1}^s x_i \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^s y_i \right) \right] = \varphi \left( \prod_{i=1}^s x_i \right) \cdot \varphi \left( \prod_{i=1}^s y_i \right)$$

$$\Longleftrightarrow \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, \varphi [(x_1 x_2) \cdots (x_s y_1) \cdots (y_{s-1} y_s)] =$$

$$\varphi \left( \prod_{i=1}^s x_i \right) \cdot \varphi \left( \prod_{i=1}^s y_i \right)$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, (x_1 x_2 \cdots x_s y_1 \cdots x_s y_s) = (x_1 \cdots x_s)(y_1 \cdots y_s) \\
&\iff \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, (x_1 x_2 \cdots x_s y_1 \cdots x_s y_s) = (x_1 y_1 \cdots x_s y_s) \\
&\iff \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, x_1 x_2 \cdots x_s y_1 \cdots y_{s-1} y_s = x_1 y_1 \cdots x_s y_s \\
&\iff \forall g_i, g_j \in G, g_i g_j = g_j g_i,
\end{aligned} \tag{2.8.11}$$

可见, 问题转化成了证明(2.8.11).

对  $\forall g \in N_i \cap N_j, i \neq j$ , 假设  $g \neq e$ , 则  $g$  有两种不同的表示方式

$$\begin{array}{ccc}
g = e \cdots e \overbrace{g}^{\text{第 } i \text{ 位}} e \cdots e = e \cdots e \overbrace{g}^{\text{第 } j \text{ 位}} e \cdots e
\end{array}$$

亦即  $G$  中的元素  $g$  有两种不同的分解方式, 这与题设条件 (2) 矛盾, 所以假设不成立, 即

$$N_i \cap N_j = \{e\}, i \neq j.$$

对  $\forall g_i \in N_i, g_j \in N_j \triangleleft G, i \neq j$

$$\begin{aligned}
&N_i \text{成群} \implies g_i^{-1} \in N_i \\
&g_i^{-1} \in N_i \triangleleft G, g_j \in N_j \triangleleft G \xrightarrow{\text{定义1.6.4}} g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \in N_i,
\end{aligned}$$

从而

$$g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \in N_i, \tag{2.8.12}$$

同理可证

$$g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \in N_j. \tag{2.8.13}$$

由(2.8.12)与(2.8.13)可知

$$\begin{aligned} g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} &\in N_i \cap N_j = \{e\} \\ \iff g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} &= e. \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

注意到当  $i = j$  时(2.8.14)也成立, 从而  $\forall g_i, g_j \in G$

$$\begin{aligned} g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} &= e \\ \iff g_i g_j &= g_j g_i, \end{aligned}$$

可见(2.8.11)成立, 从而定理得证.  $\square$

**定义 2.8.2** (内直和). 若群  $G$  同构于其正规子群  $N_1, \dots, N_s$  的直和, 则称群  $G$  分解成正规子群  $N_1, \dots, N_s$  的直和, 也称  $G$  等于  $N_1, \dots, N_s$  的内直和.

**命题 2.8.4.** 与线性空间分解成子空间的直和的情况类似, 不难证明定理2.8.1的条件 (2) 有以下两种等价描述

(2') 么元的表示方式唯一, 即

$$\text{若 } e = \prod_{i=1}^s x_i, \text{ 则 } x_i = e$$

(2'')

$$N_j \cap \prod_{i=1, i \neq j}^s N_i = \{e\}.$$

**定义 2.8.3** (不可分解的). 若群  $G$  不能被分解成两个非平凡的正规子群的直和, 则称  $G$  是不可分解的.

事实上, 任意一个有限群总能分解成一些不可分解的群的直和. 群的直和是群论中的重要问题, 这里不再细说.

下面给出一个例子, 来看看有限交换群的分解.

**例 2.8.1.** 有限交换群能被分解成  $p$ -群的直和.

证. 设  $G$  是有限交换群,  $|G| = n$  的标准分解式为

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{r_i},$$

其中  $p_i$  是不同的素数,  $r_i > 0$ .

由 Sylow 第一定理 (定理2.7.1) 可知  $G$  存在 Sylow  $p_i$ -子群, 记为  $G_i$ . 注意到  $G$  是交换群, 所以  $G_i$  是正规的, 从而由推论2.7.2可知  $G_i$  是  $G$  的惟一一个 Sylow  $p_i$  子群, 结合2.7.1不难看出  $G_i$  恰由  $G$  中所有阶为  $p_i$  的幂的元素组成.

令  $H = \prod_{i=1}^s G_i$ , 由

$G_i$  中的元素的阶为  $p_i$  的方幂

子群  $\prod_{i=1, i \neq j}^s G_i$  元素的阶为  $\prod_{i=1, i \neq j}^s p_i^{r_i}$  的因子 (引理2.2.1),

可知

$$G_j \cap \prod_{i=1, i \neq j}^s G_i = \{e\},$$

结合定理2.8.1与命题2.8.4可得

$$H \cong \bigoplus_{i=1}^s G_i.$$

由上述讨论可知

$$H < G$$

$$|H| = |G|,$$

所以  $H = G$ , 进而

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^s G_i,$$

问题得证. □

**注 2.8.1.** 有时交换  $p$ -群还能被分解. 以后将证明  $p$ -群不能被分解的充要条件为它是循环群.

## 2.9 么半群

**定义 2.9.1** (么半群). 设  $S$  是一个非空集合, 在  $G$  上定义了一个称之为乘法的代数运算, 记作  $ab$ , 若该代数运算满足如下性质, 就称  $S$  为一个群

$$[\text{结合律}](1)(ab)c = a(bc)$$

$$[\text{么元}](2)\exists e \in S \text{ s.t. } \forall s \in S, es = se = s.$$

**注 2.9.1.** 定义 2.9.1 中的么元是惟一的. □

**定义 2.9.2** (子么半群). 若  $Q$  是么半群  $S$  的具有以下性质的非空子集合

$$(1)e \in Q$$

$$(2)Q \text{ 对于 } S \text{ 的代数运算封闭,}$$

则称  $Q$  是  $S$  的子么半群.

**定义 2.9.3** (变换么半群). 么半群  $M(X)$  的子么半群称为集合  $X$  上的变换么半群.

### 2.9.1 \*

**定义 2.9.4** (同态, 同构). 已知  $\varphi$  是幺半群  $S$  到幺半群  $S'$  的映射, 若它适合以下两个条件

$$(1) \varphi(e) = e'$$

$$(2) \forall a, b \in S, \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

则称  $\varphi$  为  $S$  到  $S'$  的同态映射. 特别地, 若  $\varphi$  还是一一映射, 则称  $\varphi$  为同构映射.

**定理 2.9.1.** 任一幺半群  $S$  都与集合  $S$  上的变换幺半群同构.

证. **2.9.2 \***

□

**定义 2.9.5** (同余关系). 已知  $S$  为幺半群,  $\sim$  为定义在  $S$  上的等价关系. 若  $\sim$  条件

$$a \sim b, b \sim c \implies ab \sim cd,$$

则称  $\sim$  为  $S$  上的同余关系.

**定义 2.9.6** (剩余类的乘法). 已知  $A, B$  为幺半群  $S$  的两个剩余类,  $a \in A, b \in B$ . 称  $ab$  所在的剩余类为剩余类  $A, B$  的乘积, 记作  $AB$ .

**命题 2.9.1.** 幺半群  $S$  的全体剩余类在定义 2.9.6 中的乘法下成幺半群.

证. 易见  $S$  的剩余类在定义 2.9.6 下的乘法可以归结为剩余类  $S$  中的元素的乘法, 因此  $S$  全体剩余类在定义 2.9.6 中的乘法下成幺半群. □

**定义 2.9.7** (商幺半群). 已知  $\sim$  为定义在幺半群  $S$  上的同余关系, 称全体剩余类在上述定义下所成的幺半群为  $S$  对于同余关系  $\sim$  的商幺半群, 记为  $S/\sim$ .

**定理 2.9.2.** 已知  $\varphi: S \rightarrow S'$  是么半群  $S$  到  $S'$  的同态, 定义

$$a \sim b \iff \varphi(a) = \varphi(b),$$

则  $\sim$  是同余关系.

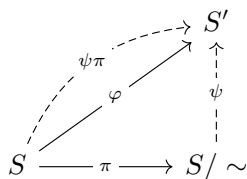
证. 111

□

**定理 2.9.3.** 已知  $\sim$  为定义在么半群  $S$  上的同余关系,  $\pi: S \rightarrow S/\sim$  为自然同态,  $\varphi: S \rightarrow S'$  为同态, 则存在惟一的同态  $\psi: S/\sim \rightarrow S'$  使得

$$\varphi = \pi\psi,$$

即



证. 由  $\pi: S \rightarrow S/\sim$  为自然同态可知  $\pi$  是满同态.

定义

$$\psi: S/\sim \rightarrow S'$$

$A \mapsto \varphi(a)$ , 其中  $A$  是  $a$  在同余关系  $\sim$  下所在的同余类,

容易验证这是良定义的同态映射并且  $\varphi = \pi\psi$ . 假设还有映射  $\psi_0$  同样适合题设条件, 结合  $\pi$  是满同态可知

$$\forall A \in S/\sim, \text{ 都有 } \psi_0(A) = \psi(A),$$

所以  $\psi_0 = \psi$ , 亦即这样的  $\psi$  是惟一的, 定理得证.

□

**定义 2.9.8 (半群).** 若在么半群的定义 (定义 2.9.1) 中不要求有么元, 则称这样的代数结构为半群.

## 2.10 CHAPTER2 习题

**问题 2.1** (P97T1). 已知  $G$  是有限群,  $N \triangleleft G, (|N|, [G : N]) = 1$ . 证明: 若元素  $a$  的阶整除  $|N|$ , 则  $a \in N$ .

证. 考虑自然同态

$$\begin{aligned}\pi : G &\rightarrow G/N \\ g &\mapsto gN,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}[\pi(a)]^{o(a)} &= (aN)^{o(a)} \\ &\stackrel{N \triangleleft G}{=} a^{o(a)} N^{o(a)} \\ &= N,\end{aligned}$$

又  $N$  是  $G/N$  的幺元, 所以

$$|\pi(a)| \mid |o(a)| \mid |N|. \quad (2.10.15)$$

注意到

$$aN \in G/N,$$

所以

$$|aN| \mid [G : N],$$

即

$$|\pi(a)| \mid [G : N]. \quad (2.10.16)$$

由式(2.10.15)与(2.10.16)结合  $(|N|, [G : N]) = 1$  可知

$$|\pi(a)| = 1$$



$$\implies \pi(a) = N$$

$$\implies aN = N$$

$$\implies a \in N,$$

问题得证. □

**问题 2.2** (P97T2). 设  $c$  是群  $G$  中阶为  $rs$  的元素, 其中  $(r, s) = 1$ . 证明  $c$  可以表示成  $c = ab$ , 其中  $a$  的阶为  $r$ ,  $b$  的阶为  $s$ , 且  $a, b$  都是  $c$  的方幂.

证. 由  $(r, s) = 1$  可知

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } ur + vs = 1,$$

不难验证

$$a = c^{vs}$$

$$b = c^{ur}$$

满足题设要求. □

**问题 2.3** (P97T3). 已知群  $G$  中元素  $a$  的阶与正整数  $k$  互素, 证明方程  $x^k = a$  在  $\langle a \rangle$  内恰有一解.

证. 由  $(o(a), k) = 1$  可知

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } uo(a) + vk = 1,$$

所以

$$a^{uo(a)+vk} = a,$$

即

$$a^{vk} = a,$$

由此可见  $x = a^v$  是  $x^k = a$  在  $\langle a \rangle$  内的解.

现设  $x = a_0^v$  也是  $x^k = a$  在  $\langle a \rangle$  内的解, 其中  $0 \leq v - v_0 \leq o(a) - 1$ , 于是

$$\begin{aligned} a^{vk} &= a \\ a^{v_0k} &= a, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} vk &\equiv 1 \pmod{o(a)} \\ v_0k &\equiv 1 \pmod{o(a)}, \end{aligned}$$

所以

$$o(a) \mid (v - v_0)k,$$

由此可见  $v - v_0 = 0$  即  $v = v_0$ .

综上, 问题证毕. □

**问题 2.4** (P97T4). 证明在群中,  $ab$  与  $ba$  有相同的阶.

证. 注意到  $ab = b^{-1} \cdot ba \cdot b$ , 所以

$$\begin{aligned} ab &= e \\ \iff b^{-1} \cdot ba \cdot b &= e \\ \iff ba &= e, \end{aligned}$$

可见问题得证. □

**问题 2.5** (P97T10). 证明  $S_n$  中的任意一个置换能由  $n - 1$  个对换  $(12), (13), \dots, (1n)$  生成, 也能由  $n - 1$  个对换  $(12), (23), \dots, (n - 1, n)$  生成.

证. 由引理2.3.1可知  $S_n$  中的任意一个置换都可以拆成若干个对换  $(ij)$  的复合, 注意到

$$(1i)(1j)(1i) = (ij),$$

所以任意一个置换都能由  $(n-1)$  个对换

$$(12), (13), \dots, (1n)$$

生成, 第一个论断证毕.

注意到

$$(1i)(i \ i+1)(1i) = (1 \ i+1),$$

故可用归纳法证明

$$(12), (23), \dots, (n-1 \ n)$$

能生成

$$(12)(13), \dots, (1n),$$

再结合第一个论断可知它能生成  $S_n$  中的任意一个置换, 第二个论断证毕.

□

**问题 2.6** (P97T16). 设  $H_1, H_2$  是群  $G$  的两个子群, 证明  $H_1 \cap H_2$  的任一左陪集是  $H_1$  的一个左陪集与  $H_2$  的一个左陪集的交.

证. 若能证明对  $\forall g \in G$  都有  $g(H_1 \cap H_2) = gH_1 \cap gH_2$ , 则问题得证. 证明思路为两者互相包含.

(1) 对  $\forall$  给定的  $g \in G$ , 在  $g(H_1 \cap H_2)$  中任取  $gh_0$ , 有

$$\begin{aligned} h_0 &\in H_1 \cap H_2 \\ \implies gh_0 &\in gH_1, gh_0 \in gH_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies gh_0 \in gH_1 \cap gH_2 \\ &\implies g(H_1 \cap H_2) \subset gH_1 \cap gH_2. \end{aligned}$$

(2) 反之, 对任意给定的  $g \in G$ , 在  $gH_1 \cap gH_2$  中任取  $gh_0$ , 有

$$\begin{aligned} &gh_0 \in gH_1, gh_0 \in gH_2 \\ &\xrightarrow{\text{g的任意性}} h_0 \in H_1, h_0 \in H_2 \\ &\implies h_0 \in H_1 \cap H_2 \\ &\implies gh_0 \in g(H_1 \cap H_2) \\ &\implies gH_1 \cap gH_2 \subset g(H_1 \cap H_2). \end{aligned}$$

由 (1),(2) 便知  $g(H_1 \cap H_2) = gH_1 \cap gH_2$ , 综上, 问题得证.  $\square$

**问题 2.7** (P98T18). 设  $G$  为有限群,  $H < G$  且  $[G : H] = n > 1$ . 证明  $G$  或者含有指数能整除  $n!$  的非平凡正规子群, 或者  $G$  同构于  $S_n$  的一个子群.

证. 设群  $G$  在子群  $H$  上的传递置换表示 (定义2.7.2) 为

$$\varphi : G \rightarrow S_n.$$

由  $[G : H] > 1$  可知

$$\begin{aligned} &\text{im } \varphi > 1 \\ &\implies \text{im } \varphi \neq \{e\} \\ &\implies \ker \varphi \neq G. \end{aligned} \tag{2.10.17}$$

(1) 若  $\ker \varphi \neq \{e\}$ , 结合(2.10.17)可知

$$\ker \varphi \text{ 是 } G \text{ 的非平凡正规子群.} \tag{2.10.18}$$

注意到

$$|\ker \varphi| [G : H] \stackrel{\text{群同态基本定理 (定理1.7.2)}}{=} |\operatorname{im} \varphi| |S_n| = n!, \quad (2.10.19)$$

所以由(2.10.18)与(2.10.19)可知  $\ker \varphi$  是  $G$  的指数能够整除  $n!$  的非平凡的正规子群.

(2) 若  $\ker \varphi = \{e\}$ , 则

$$\begin{aligned} G / \ker \varphi &\cong \operatorname{im} \varphi \\ \iff G &\cong \operatorname{im} \varphi < S_n, \end{aligned}$$

即  $G$  同构于  $S_n$  的子群  $\operatorname{im} \varphi$ .

由 (1),(2) 便知问题证毕.  $\square$

**问题 2.8** (P98T19). 设  $G$  为有限群,  $p$  是  $|G|$  的最小素因子. 证明指数 (定义1.4.4) 为  $p$  的子群 (若存在) 必正规.

证. 设  $H$  是群  $G$  的指数为  $p$  的子群, 即  $[G : H] = p$ ,  $\varphi$  是  $G$  在  $H$  上的传递置换表示 (定义2.7.2).

(1) 若  $\ker \varphi = \{e\}$ , 则由群同态基本定理 (定理1.7.2) 可知

$$\begin{aligned} G / \ker \varphi &\cong \operatorname{im} \varphi \\ \iff G &\cong \operatorname{im} \varphi < S_p, \end{aligned}$$

于是

$$|G| = |\operatorname{im} \varphi| |S_p| = p!,$$

结合  $p$  是  $|G|$  的最小素因子便知  $|G| = p$ , 于是

$$\begin{aligned} |H| &= \frac{|G|}{[G : H]} = \frac{p}{p} = 1 \\ \iff H &= \{e\} \end{aligned}$$

$\implies H$  是  $G$  的正规子群.

(2) 若  $\ker \varphi \neq \{e\}$ , 则

$$\begin{aligned} g &\in \ker \varphi \\ &\iff \forall a_i \in G, ga_iH = a_iH \\ &\xrightarrow{\text{当 } a_i = e \text{ 时}} gH = H \\ &\iff g \in H, \end{aligned}$$

由此可见  $\ker \varphi \subset H$ , 从而  $\ker \varphi \triangleleft H$ . 注意到

$$\begin{aligned} [G : \ker \varphi] &= |\operatorname{im} \varphi| = |S_p| = p! \\ &\xrightarrow{p \text{ 是 } |G| \text{ 的最小素因子}} [G : \ker \varphi] = p \\ &\xrightarrow{\ker \varphi \triangleleft H, [G:H]=p} H = \ker \varphi \text{ 是 } G \text{ 的指数为 } p \text{ 的正规子群.} \end{aligned}$$

由 (1),(2) 可知问题证毕. □

**问题 2.9** (P98T21). 证明任一非交换的 6 阶群同构于  $S_3$ .

证明该问题需要用到以下引理.

**引理 2.10.1.** 素数阶群都是循环群.

证. 任取阶为素数  $p$  的有限群  $G, e \neq g \in G$ , 于是由 Lagrange 定理 (推论 1.4.1) 可知

$$\begin{aligned} &\exists k \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } |G| = k | \langle g \rangle | \\ &\xrightarrow{p \text{ 是素数}, g \neq e} |G| = | \langle g \rangle | \\ &\implies G = \langle g \rangle, \end{aligned}$$

亦即  $G$  是循环群, 由  $G$  的任意性可知问题得证. □

证. 设  $G$  是非交换的 6 阶群. 注意到

$$6 = 2 \times 3,$$

所以由  $Sl$  第一定理 (定理2.7.1) 可知  $G$  有阶为 2 的 Sylow 2-子群  $A$ , 阶为 3 的 Sylow 3-子群  $B$ , 由引理2.10.1可知  $A, B$  都是循环群, 故可设

$$A = \langle \alpha \rangle, B = \langle \beta \rangle, \text{ 其中 } o(\alpha) = 2, o(\beta) = 3.$$

由于  $G$  不交换, 故可用反证法证明

$$\begin{aligned} & \alpha, \beta \text{ 不交换} \\ \implies & \alpha \neq \beta, \alpha \neq \beta^2 \\ \xRightarrow{\beta \cdot \beta^2 = \beta^3 = e} & \alpha \neq \beta^{-1} \\ \implies & \alpha \notin B, \end{aligned}$$

所以  $B$  的左陪集  $B, \alpha B$  满足

$$\begin{aligned} B \cap \alpha B &= \emptyset, |B| + |\alpha B| = |B| + |B| = 3 + 3 = 6 = |G| \\ \implies G &= B \cup \alpha B = \{e, \beta, \beta^2, \alpha, \alpha\beta, \alpha\beta^2\}. \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow S_6 \\ \alpha &\mapsto (12) \\ \beta &\mapsto (123), \end{aligned}$$

利用上述讨论不难验证这是良定义的同构映射, 从而

$$G \cong S_6.$$

□

**问题 2.10** (P98T29). 已知  $A, B$  是有限群  $G$  的两个非空子集. 若  $|A| + |B| > |G|$ , 则  $AB = G$ .

证. 反设  $AB \neq G$ , 由于  $AB \subset G$ , 所以

$$\begin{aligned}
 & G/AB \supset \{AB\} \\
 \implies & [G : AB] > 1 \\
 \implies & \exists g \in G \text{ s.t. } g \notin AB \\
 \implies & \exists g \in G \text{ s.t. } \{g\} \cap AB = \emptyset \\
 \implies & \exists g \in G \text{ s.t. } gB^{-1} \cap A = \emptyset \\
 \xRightarrow{|gB^{-1}|=|B^{-1}|=|B|} & G \text{ 中至少有 } |B| \text{ 个元素不在 } A \text{ 中} \\
 \xRightarrow{|G| \neq \infty} & |G| - |A| \geq |B|,
 \end{aligned}$$

矛盾, 假设不成立, 从而  $AB = G$ . □

**问题 2.11** (P98T33). 已知  $G$  是有限群,  $N \triangleleft G$ ,  $P$  为  $N$  的 Sylow  $p$ -子群. 证明  $G = N \cdot N_G(P)$ .

证. 对  $P$  在  $G$  中的任意一个共轭子群  $Q$ , 存在  $g \in G$  使得

$$Q = gPg^{-1} \stackrel{P \leq N}{<} gNg^{-1} \stackrel{N \triangleleft G}{=} N,$$

可见  $P$  在  $G$  的共轭子群都在  $N$  中, 所以对  $\forall g \in G$ ,  $gPg^{-1}$  是  $N$  的 Sylow  $p$ -子群, 并且

(1) 若  $gPg^{-1} = P$ , 则

$$\begin{aligned}
 & g \in N_G(P) \subset N \cdot N_G(P) \\
 \implies & G \subset N \cdot N_G(P).
 \end{aligned}$$

(2) 若  $gPg^{-1} \neq P$ , 注意到

$$gPg^{-1} \text{ 是 } P \text{ 在 } G \text{ 中的共轭子群}$$



$P$  在  $G$  中的共轭子群也在  $N$  中,

所以由  $P$  是  $N$  的 Sylow  $p$ -子群与推论2.7.1可知

$$\begin{aligned} & \exists n \in N \text{ s.t. } gPg^{-1} = nPn^{-1} \\ \iff & (n^{-1}g)P(g^{-1}n) = P \\ \iff & n^{-1}g \in N_G(P), \end{aligned}$$

记  $t \in N_G(P)$  s.t.  $n^{-1}g = t$ , 就有

$$\begin{aligned} g &= nt \in N \cdot N_G(P) \\ \xrightarrow{\text{g的任意性}} & G \subset N \cdot N_G(P). \end{aligned}$$

由  $N \cdot N_G(P) < G$  与 (1),(2) 便知  $G = N \cdot N_G(P)$ . □

**问题 2.12** (P98T35). 已知  $G$  是有限群,  $H < G$ ,  $P$  是  $G$  的 Sylow  $p$ -子群,  $p \nmid |H|$ , 证明存在  $a \in G$  s.t.  $aPa^{-1} \cap H$  是  $H$  的 Sylow  $p$ -子群.

证. 由  $p \nmid |H|$  可知  $H$  存在 Sylow  $p$ -子群, 记为  $A$ , 它也是  $G$  的  $p$ -群, 从而由 Sylow 第二定理 (定理2.7.2) 可知

$$\exists a \in G \text{ s.t. } A \subset aPa^{-1},$$

从而

$$A \subset aPa^{-1} \cap H. \tag{2.10.20}$$

注意到  $aPa^{-1} \cap H$  是  $H$  的阶为  $p$  的幂的子群, 所以

$$|aPa^{-1} \cap H| \leq |H|. \tag{2.10.21}$$

由(2.10.20)与(2.10.21)便知  $aPa^{-1}$  是  $H$  的 Sylow  $p$ -子群, 问题得证. □



# Chapter 3

## 环

第一章介绍了环, 理想, 商环以及环同态等概念并建立了环同态基本定理. 本章将进一步给出环的几个重要的同态定理与几种构造环的方法.

### 3.1 环的同态定理

在给出环的同态定理之前, 先介绍理想的运算.

**命题 3.1.1.** 子群的交仍是子群.

#### 3.1.1 \*

证. 1

□

**命题 3.1.2.** 已知  $H, N$  是环  $R$  的子环, 则  $H \cap N$  是环  $R$  的子环.

证. 由于  $H \cap N$  是  $R$  的加法子 Abel 群, 所以只需证明  $H \cap N$  是关于  $R$  的乘法封闭即可.

$\forall x, y \in H \cap N$  注意到

$$x, y \in H \implies xy \in H$$

$$x, y \in N \implies xy \in N,$$

可见

$$\begin{aligned} \forall x, y \in H \cap N &\implies xy \in H \cap N \\ &\iff H \cap N \text{ 关于 } R \text{ 的乘法封闭,} \end{aligned}$$

所以  $H \cap N$  是  $R$  的子环, 命题得证.  $\square$

**命题 3.1.3.** 已知  $H$  是环  $R$  的子环,  $N$  是环  $R$  的理想, 则  $H \cap N$  是环  $H$  的理想.

证. 注意到

$$H \text{ 是 } R \text{ 的子环} \implies H \text{ 是 } R \text{ 的加法子群}$$

$$N \text{ 是 } R \text{ 的理想} \implies N \text{ 是 } R \text{ 的加法子群,}$$

所以  $H \cap N$  是  $R$  的加法子群.

由于  $N$  是环  $R$  的理想, 故  $\forall n \in H \cap N, h \in H$

$$n \in N, h \in H \subset R \implies nh, hn \in N \quad (3.1.1)$$

$$n \in H, h \in H \implies nh, hn \in H, \quad (3.1.2)$$

由(3.1.1)与(3.1.2)便知  $nh, hn \in H \cap N$ , 从而  $H \cap N$  是  $H$  的理想.  $\square$

**定义 3.1.1** (子环的和). 已知  $H, N$  是环  $R$  的子环, 则称集合

$$\{h + n : h \in H, n \in N\}$$

为子环  $H, N$  的和, 记作  $H + N$ .

**注 3.1.1.** 子环的和不一定是子环, 但子环的和关于环的加法成群.

证. 对于第一个论断, 考虑以下反例

**例.** 已知  $R$  是数域  $\mathbb{F}$  上全体 2 阶方阵关于矩阵的加法与乘法所成的环, 令

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{F} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{F} \right\},$$

容易验证  $H, N$  是  $R$  的子环,  $H + N$  不是  $R$  的子环.

对于第二个论断, 由群的第一同构定理 (定理2.1.1) 即得成立.  $\square$

**命题 3.1.4.** 已知  $H$  是环  $R$  的子环,  $N$  是  $R$  的理想, 则  $H + N$  是  $R$  子环.

证. 由群的第一同构定理 (定理2.1.1) 可知,  $H + N$  是  $R$  的加法子环, 所以只要证明  $H + N$  关于  $R$  的乘法封闭即可.

$\forall x, y \in H + N, \exists x_1, y_1 \in H, x_2, y_2 \in N$  s.t.  $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ , 所以

$$xy = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

注意到  $x_1y_2 \in H, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2 \in N$ , 所以

$$xy \in H + N,$$

这就证明了  $H + N$  关于  $R$  的乘法封闭.

综上, 问题得证.  $\square$

**命题 3.1.5.** 已知  $H, N$  是环  $R$  的理想, 则  $H + N$  是  $R$  的理想.

证. 由群的第一同构定理 (定理2.1.1) 可知,  $H + N$  是  $R$  的加法子群, 所以只要证明  $H + N$  关于  $R$  的乘法具有吸收性即可.

注意到

$$\begin{aligned} & \forall a \in H + N, \exists a_1 \in H, a_2 \in N \text{ s.t. } a = a_1 + a_2 \\ \implies & \forall r \in R, \\ & ar = (a_1 + a_2)r = a_1r + a_2r \in H + N \\ & ra = r(a_1 + a_2) = ra_1 + ra_2 \in H + N, \end{aligned}$$

所以  $H + N$  是  $R$  的理想. □

下面开始介绍环的同态定理.

**定理 3.1.1** (环的第一同构定理). 已知  $H, N$  是环  $R$  的子环, 理想, 则

$$H/H \cap N \cong H + N/N.$$

证. **3.1.2** \* □

**定理 3.1.2.** 已知  $R$  是环,  $\sigma: R \rightarrow \text{im } \sigma$  是同态映射, 则映射

$$\begin{aligned} \varphi: A &\rightarrow B \\ H &\mapsto \text{im } \sigma|_H \end{aligned}$$

是一一对应且理想与理想对应, 其中

$$\begin{aligned} A &= \{H : H \supset \ker \sigma, H \text{ 是 } R \text{ 的子环}\} \\ B &= \{H_0 : H_0 \text{ 是 } \text{im } \sigma \text{ 的子环}\}. \end{aligned}$$

证. **3.1.3** \*

□

**定理 3.1.3** (环的第二同构定理). 已知  $R$  是环,  $\sigma: R \rightarrow \text{im } \sigma$  是同态映射,  $H$  是  $R$  的理想且  $H \supset \ker \sigma$ , 则

$$R/H \cong (R/\ker \sigma) / (H/\ker \sigma).$$

证. **3.1.4** \*

□

**注 3.1.2.** 取  $H = \ker \sigma$  即得环同态基本定理 (定理1.11.1).

将环的第一同构定理 (定理3.1.1) 与环的第二同构定理 (定理3.1.3) 统称为环的同态定理.