

目录

1	代数基本概念	3
1.1	代数运算	3
1.2	群的定义和简单性质	3
1.3	群的例子	5
1.4	子群, 陪集	6
1.5	群的同构	8
1.6	同构, 正规子群	9
1.7	商群	11
1.8	环, 子环	16
1.9	各种特殊类型的环	17
1.10	环的同态, 理想	18
1.11	商环	19
1.12	特征	21
1.13	CHAPTER1 习题	23
2	群	37
2.1	群的同态定理	37
2.2	循环群	46
2.3	单群与 A_n 单性	48

2.4	可解群	49
2.5	群的自同构群	50
2.6	群作用	52
2.7	Sylow 定理	57
2.8	CHAPTER2 习题	64

Chapter 1

代数基本概念

1.1 代数运算

定义 1.1.1 (代数运算). 设 A 是一个非空集合, 任意一个由 $A \times A \longrightarrow A$ 的映射就称为定义在 A 上的代数运算.

1.2 群的定义和简单性质

定义 1.2.1 (群). 设 G 是一个非空集合, 在 G 上定义了一个称之为乘法的代数运算, 记作 ab , 若该代数运算满足如下性质, 就称 G 为一个群

[结合律](1) $(ab)c = a(bc)$;

[左幺元](2) $\exists e \in G$ s.t. $\forall a \in G$, 有 $ea = a$;

[左逆元](3) $\forall a \in G, \exists b \in G$ s.t. $ba = e$.

1. 若 $ba = e$, 则 $ab = e$.

证. 任取 $b \in G$, 存在 $c \in G$, 使得 $cb = e$, 于是

$$a = ea = (cb)a = c(ba) = ce, \quad (1.2.1)$$

在等式(1.2.1)两侧同时右乘 b , 就有

$$ab = (ce)b = c(eb) = cb = e,$$

问题证毕. □

2. 若对所有的 $a \in G$, 有 $ea = a$, 那么也有 $ae = a$, 对所有的 $a \in G$.

证. 取 $b \in G$, 使得 $ba = e$, 同时 $ab = e$, 于是

$$ae = a(ba) = (ab)a = ea = a,$$

问题证毕. □

3. 群 G 中有惟一的元素 e 具有性质

$$\forall a \in G, ea = ae = a.$$

证. 假设 G 中有元素 e_1, e_2 满足此性质, 则

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2,$$

可见惟一性得证. □

4. 对群 G 中任意元素 a , 有惟一元素 b , 使 $ab = ba = e$.

证. 假设在 G 中还有元素 c 满足 $ac = ca = e$, 则

$$c = ec = ce = c(ab) = (ca)b = eb = b,$$

这就证明了惟一性. □

5. 对于群 G 中任意元素 a, b , 方程

$$ax = b$$

在 G 中有惟一解.

证. 在题设方程两侧同时左乘 $a^{-1} \in G$, 有

$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b$$

亦即 $x = a^{-1}b \in G$, 解的存在性得证.

假设还有元素 $c \in G$ 满足 $ac = b$, 则

$$ax = b = ac, \quad (1.2.2)$$

在等式(1.2.2)两侧同时左乘 a^{-1} , 就有

$$(a^{-1}a)x = (a^{-1}a)c \iff x = c,$$

解的惟一性得证.

综上所述, 问题得证. □

定义 1.2.2 (Abel 群 (或交换群)). 若群 G 的运算适合交换律, 则称群 G 为 Abel 群 (或交换群).

定义 1.2.3 (阶). 群 G 中所含元素的个数称为群 G 的阶, 记作 $|G|$.

定义 1.2.4 (有限群与无限群). 若 $|G|$ 是一个有限数 (无限数), 则称群 G 为有限群 (无限群).

1.3 群的例子

1.4 子群, 陪集

定义 1.4.1 (子群). 若群 G 的非空子集合 H 对 G 的运算也成群, 则称群 H 是群 G 的子群, 记作 $H < G$.

定理 1.4.1. 群 G 的非空子集合 H 是群 G 的子群的充分必要条件是

$$\forall a, b \in H \implies ab^{-1} \in H.$$

证. 必要性显然, 接下来证明充分性.

(1) 结合律: 显然满足;

(2) 幺元的存在性: $\forall a \in H$, 取 $b = a$, 则 $e = aa^{-1} \in H$;

(3) 逆元的存在性: $\forall b \in H$, 取 $a = e$, 则 $b^{-1} = eb^{-1} \in H$.

结合 (1), (2), (3) 可得 H 成为群, 进而是群 G 的子群. \square

定义 1.4.2 (左陪集, 右陪集). 设群 H 是群 G 的一个子群, 对 G 中的任意一个元素 a , 称 $aH = \{ah : h \in H\}$ 是 H 的一个左陪集; 称 $Ha = \{ha : h \in H\}$ 是 H 的一个右陪集.

定理 1.4.2. 设 G 是群, $H < G$, 则 H 的任意一个左陪集 gH 与 H 含有同样多的元素. 该定理对于右陪集同样成立.

证. 易见 $h \mapsto ah$ 是子群 H 到左陪集 aH 的一个一一对应, $h \mapsto ha$ 是子群 H 到右陪集 Ha 的一个一一对应, 因此定理得证. \square

定理 1.4.3. 设群 H 是群 G 的子群. H 的任意两个左 (右) 陪集要么相等, 要么无公共元素. 群 G 可以表示为若干个不相交的左 (右) 陪集之并.

证. 利用相互包含证明第一个论断: 取 H 的两个左陪集 aH, bH 并假设它们有公共元素, 即有 $ah_1 \in aH, bh_2 \in bH$ 满足

$$ah_1 = bh_2, \tag{1.4.3}$$

等式(1.4.3)两端同时右乘 h_1^{-1} , 有

$$a = bh_2h_1^{-1} \in bH,$$

可见 $aH \subset bH$. 同理可证 $aH \supset bH$, 进而 $aH = bH$. 第一个论断证毕.

第二个论断的证明: 由于 $a \in aH$, 所以

$$G = \bigcup_{a \in G} aH,$$

去掉其中的重复项, 就有

$$G = \bigcup_{\alpha} a_{\alpha}H,$$

其中 $a_{\alpha}H$ 两两无交. □

推论 1.4.1 (Lagrange 定理). 设 G 是有限群, H 是它的子群, 则 $|H|$ 是 $|G|$ 的因子.

证. 设 $|G| = n, |H| = t$, 由定理1.4.3可得

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_rH, \quad (1.4.4)$$

其中 $a_iH \cap a_jH = \emptyset (i, j = 1, 2, \cdots, r \text{ 且 } i \neq j)$, 在等式(1.4.4)两侧同时取因子, 并利用定理1.4.2就有

$$|G| = r|H|,$$

从而 $|H|$ 是 $|G|$ 的因子. □

定义 1.4.3 (由 a 生成的子群). 在群 G 中, 任意一个元素 a 的全体方幂组成的集合 $\{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$ 显然成 G 的子群, 称为由 a 生成的子群.

注 1.4.1. (1) 元素 a 的方幂要么两两不同要么存在 $l \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $a^l = e$;
(2) 在 (1) 的后一种情形中, 一定有最小的正整数 d 满足 $a^d = e$. 此时将 d 称为元素 a 的阶.

推论 1.4.2. 设 G 为一有限群, 则 G 中每一个元素的阶一定是 $|G|$ 的因子.

证. 设 H 是由 G 中的元素 a 生成的子群, 则

$$(i) |a| = |\langle a \rangle| = |H|;$$

$$(ii) H \text{ 是 } G \text{ 的子群} \implies |H| \text{ 整除 } |G|,$$

可见 G 中每一个元素的阶一定是 G 的因子. □

1.5 群的同构

定义 1.5.1 (群的同构). 若 G, G' 是两个群, $\varphi: g \mapsto g', G \longrightarrow G'$ 是一一对应, 并且满足 $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g'_1) \varphi(g'_2), \quad (1.5.5)$$

则称群 G 同构于群 G' , 记作 $G \cong G'$. 适合等式(1.5.5)的一一对应称为同构映射, 简称同构.

引理 1.5.1. 任意非空集合上的全体可逆变换构成的集合关于变换的乘法成群.

定理 1.5.1 (Cayley 定理). 任何一个群都同构于某一集合上的变换群.

证. 设 G 是群. 对每一个 $a \in G$, 定义 G 上的变换 φ_a 如下

$$\varphi_a(x) = ax, x \in G,$$

可见 $\forall x \in G$

$$(i) \varphi_{a^{-1}} \varphi_a(x) = \varphi_{a^{-1}}(ax) = a^{-1}ax = x;$$

$$(ii) \varphi_a \varphi_{a^{-1}}(x) = \varphi_a(a^{-1}x) = aa^{-1}x = x,$$

可见 $\forall a \in G, \varphi_a$ 均是可逆变换. 记 $G_l = \{\varphi_a : a \in G\}$, 于是 $\forall a, b \in G_l$

$$\varphi_a \varphi_{b^{-1}}(x) = \varphi_a(b^{-1}x) = ab^{-1}x = \varphi_{ab^{-1}}(x),$$

即 $\varphi_a \varphi_{b^{-1}} = \varphi_{ab^{-1}} \in G_l$, 根据引理1.5.1与定理1.4.1可得 G_l 成群, 亦即 G_l 是一变换群.

根据 G_l 定义易知映射 $a \mapsto \varphi_a$ 为满映射.

由于

$$\varphi_a(e) = a,$$

所以当 $a \neq b$ 时, $\varphi_a \neq \varphi_b$, 亦即映射 $a \mapsto \varphi_a$ 是单映射. 进而映射 $a \mapsto \varphi_a$ 是一一对应. 再由 $\varphi_a \varphi_b = \varphi_{ab}$ 可知所述映射为同构映射, 从而 $G \cong G_l$, 定理得证. \square

1.6 同构, 正规子群

定义 1.6.1 (同态映射). 若 φ 是群 G 到群 G' 的映射, 满足 $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$$

则称 φ 是群 G 到 G' 的同态映射, 或同态.

注 1.6.1. 在同态映射的定义中, 既不要求它是映上的, 也不要求它是单射.

当 φ 是 G 到 G' 的同态映射时, 常常简记为

$$\varphi : G \mapsto G'.$$

定义 1.6.2 (象). 若 $\varphi : G \mapsto G'$, 定义

$$\varphi G = \{\varphi(a) : a \in G\}$$

为同态映射 φ 的象.

注 1.6.2. (1) 易见 φG 是 G' 的子群;

(2) 若 φ 是映上的, 即 $\varphi G = G'$, 称 φ 为满同态;

(3) 若 φ 是单射, 即 G 与 φG 同构, 亦即 G 与 G' 的一个子群同构, 则称 φ 为单一同态, 或嵌入映射.

定义 1.6.3 (完全反象, 核). 对于同态映射 $\varphi: G \mapsto G'$, 定义

$$\varphi^{-1}(a') = \{a : \varphi(a) = a'\}$$

为元素 a' 的完全反象. 特别地, 定义 $\varphi^{-1}(e')$ 为同态映射 φ 的核, 记作 $\ker \varphi$.

命题 1.6.1. 记 $\varphi(a) = a'$, 则 $\varphi^{-1}(a') = \begin{cases} a \ker(\varphi); \\ \ker(\varphi)a. \end{cases}$

证. (1) 任取 $h \in \ker \varphi$, 有

$$\varphi(ah) \stackrel{\text{同态映射}}{=} \varphi(a)\varphi(h) = a'e' = a',$$

这说明 $a \ker \varphi$ 中的元素在映射 φ 下的象均为 a' , 亦即 $a \ker \varphi \subset \varphi^{-1}(a')$;

(2) 反之, 任取 $a \in \varphi^{-1}(a')$, 即 $\varphi(a) = a'$. 又 $e \in \ker \varphi$, 从而

$$a = ae \in a \ker \varphi,$$

这说明在映射 φ 下的象为 a' 的元素在 $a \ker \varphi$ 中, 亦即 $a \ker \varphi \supset \varphi^{-1}(a')$.

由 (1),(2) 可知 $\varphi^{-1}(a) = a \ker(\varphi)$.

同理可证 $\varphi^{-1}(a') = \ker(\varphi)a$. □

定义 1.6.4 (正规子群). 设群 H 是群 G 的子群, 若对任意 $g \in G$, 都有 $gH = Hg$, 则称 H 是 G 的正规子群, 记作 $H \triangleleft G$.

注 1.6.3. (1) 由命题 1.6.1 可知, 同态的核都是正规子群;

(2) 正规子群的定义可以改写为

$$\forall g \in G, gHg^{-1} = H.$$

正规子群的定义换个说法就是子群 H 的左右陪集相等;

(3) 在 *Abel* 群中, 每个子群都正规.

1.7 商群

定义 1.7.1 (群的子集合的运算).

1. 定义

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\},$$

子集乘积满足结合律: $(AB)C = A(BC)$;

2. 定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

利用集合运算, 定理1.4.1可改写为

$$\text{群 } G \text{ 的非空子集合 } H \text{ 是子群} \iff HH^{-1} \subset H.$$

定理 1.7.1. 设 H 是群 G 的一个子群. H 是正规子群 $\iff H$ 的任意两个左 (右陪集) 之积还是左 (右陪集).

证. (1) 必要性

任取正规子群 H 的两个左陪集 aH 与 bH , 有

$$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = abH,$$

必要性得证;

(2) 充分性

任取 H 的两个左陪集 aH 与 bH , 根据已知条件可设 $(aH)(bH) = cH$, 由于 $ab \in (aH)(bH)$, 所以 $ab \in cH$, 再由 $ab \in abH$ 与定理1.4.3可得

$$abH = cH = (aH)(bH), \quad (1.7.6)$$

等式两端同时左乘 a^{-1} , 有

$$bH = HbH \supset Hbe = Hb,$$

由于 b 具有任意性, 故可以将其改成 b^{-1} , 得到

$$b^{-1}H \supset Hb^{-1},$$

等式两边同时左乘 b , 右乘 b , 得到

$$Hb \supset bH,$$

亦即 $bH = Hb$, 可见 H 是正规子群. □

令 G/H 代表正规子群 H 的全部不同的右陪集组成的集合.

命题 1.7.1. G/H 在陪集的运算下成群.

证. (1) 结合律

由 $(Ha)(Hb) = Hab$ 可见, 陪集之间的乘法可归结为陪集代表的乘法, 故结合律显然成立;

(2) 左幺元

$\forall Ha \in G/H$, 有

$$H \cdot Ha = Ha,$$

可见左幺元存在, 为 H ;

(3) 左逆元

$\forall Ha \in G/H$, 有

$$(Ha^{-1})(Ha) = H(a^{-1}H)a = H(Ha^{-1})a = (HH)(a^{-1}a) = H,$$

可见 G/H 中的任一元都有左逆元.

(1),(2),(3) 说明 G/H 成群, 问题得证. □

定义 1.7.2 (商群). G/H 在陪集的乘法下所成的群称为群 G 对正规子群 H 的商群, 仍记作 G/H .

命题 1.7.2. 设群 H 是群 G 的正规子群, 定义映射

$$\begin{aligned}\varphi: G &\rightarrow G/H \\ g &\mapsto Hg,\end{aligned}$$

则 φ 是满同态且 $\ker \varphi = H$.

证. (1) $\forall a, b \in G$, 有

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= Hab \\ &= HabH \\ &= Ha(bH) \\ &= Ha(Hb) \\ &= HaHb \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \\ \implies \varphi &\text{是同态映射};\end{aligned}$$

(2) 根据商群的定义, φ 显然是映上的;

(3) 对 $\forall h \in H$, 注意到

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= hH \\ &= H \\ &= eH,\end{aligned}$$

可见 $h \in H$, 于是 $\ker \varphi \supset H$. 同时对 $\forall k \in \ker \varphi$, 有

$$\begin{aligned}\varphi(k) &= kH \\ &= H,\end{aligned}$$

所以对任意 $h \in H$, 都有 $kh \in H$, 现取 $h = e$, 所以

$$k = ke \in H,$$

即 $k \in H$, 所以 $\ker \varphi \subset H$.

(1),(2) 说明 $\varphi: G \rightarrow G/H$ 为满同态;(3) 说明 $\ker \varphi = H$. □

注 1.7.1. 由于 $H \triangleleft G$, 所以若定义

$$\begin{aligned}\varphi: G &\rightarrow G/H \\ g &\mapsto gH,\end{aligned}$$

则命题 1.7.2 也成立.

定义 1.7.3 (自然同态). 称命题 1.7.2 中的 φ 为 $G \rightarrow G/H$ 的自然同态.

注 1.7.2. 由命题 1.6.1 可知, 同态的核都是正规子群; 自然同态的构造说明每个正规子群也都是某一同态的核.

引理 1.7.1. 若 H 为群 G 的子群, $a, b \in G$, 则

$$\begin{aligned}b^{-1}a \in H &\iff aH = bH; \\ ab^{-1} \in H &\iff Ha = Hb.\end{aligned}$$

证. 只要证明第一条即可, 第二条同理可证.

(1) 必要性

可设 $h \in H$ 满足 $b^{-1}a = h$, 从而 $a = bh \in bH$, 又 $e \in H$ 且 $a = ae$, 故

$$\begin{aligned}a = ae &\in aH \\ a &\in bH,\end{aligned}$$

可见 $aH \cap bH \neq \emptyset$, 进而 $aH = bH$, 必要性得证;

(2) 充分性

等式 $aH = bH$ 两端同时左乘 b^{-1} 有

$$b^{-1}aH = H \implies b^{-1}a \cdot e \in H \iff b^{-1}a \in H,$$

充分性得证. □

定理 1.7.2 (群同态基本定理). 若 $\sigma : G \rightarrow G'$, 则 $G/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$. 进一步, 若 σ 是满同态, 则 $G/\ker \sigma \cong G'$.

证. 设 $\varphi : G \rightarrow G/\ker \sigma$ 是自然同态, 则得到两个满同态 σ 和 φ , 交换图如下:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma} & \text{im } \sigma \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ G/\ker \sigma & & \end{array}$$

其中虚线部分的 ψ 表示我们要找的同构. 定义映射

$$\psi_0(\ker \sigma \cdot a) = \sigma(a),$$

显然 ψ_0 是良定义的.

由于

$$\psi_0(\ker \sigma \cdot a \ker \sigma \cdot b) \xrightarrow{\text{ker } \sigma \text{ 是正规子群}} \psi_0(\ker \sigma \cdot ab) = \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

所以 ψ_0 是同态映射.

当 $\sigma(a) = \sigma(b)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sigma(a)(\sigma(b))^{-1} &= e' \\ \sigma(ab^{-1}) &= e', \end{aligned}$$

根据引理1.7.1,

$$ab^{-1} \in \ker \sigma \iff b^{-1} \ker \sigma = a^{-1} \ker \sigma,$$

即 $a \ker \sigma = b \ker \sigma$, 亦即 $\ker \sigma \cdot a = \ker \sigma \cdot b$. 可见 ψ_0 为单射.

显然 ψ_0 是满射.

综上所述, ψ_0 是同构映射. 取 $\psi = \psi_0$ 即证明了 $G/\ker \sigma \cong \sigma$.

进一步, 若 σ 是满同态, 则 $G' \cong \text{im } \sigma$, 从而 $G/\ker \sigma \cong G'$. \square

1.8 环, 子环

定义 1.8.1 (环). 设 L 是一个非空集合, 在 L 上定义了两个代数运算, 一个叫加法, 记为 $a + b$, 一个叫乘法, 记为 ab . 若这两种运算具有性质

- (1) L 对于加法构成 *Abel* 群;
- (2) L 对于乘法满足结合律;
- (3) L 满足乘法对加法的分配律,

则称 L 为环.

定义 1.8.2 (子环). 设 S 是环 L 的非空子集合, 若 S 对于 L 的两种运算也成环, 则称环 S 是环 L 的子环.

命题 1.8.1. 环 L 的非空子集合 S 成环的充分必要条件为 S 对于加法是子群且对于乘法封闭.

证. 必要性是显然的, 下面证明充分性.

(1) S 对于加法构成 *Abel* 群: 任取 $a, b \in S$, 于是 $a, b \in L$, 所以

$$ab \xrightarrow{\text{L对于乘法构成 Abel 群}} ba,$$

可见 S 关于加法构成的子群满足交换律, 所以 S 为 *Abel* 群;

(2) S 对于乘法满足结合律: 任取 $a, b, c \in S$, 有 $a, b, c \in L$, 所以

$$a(bc) = (ab)c = abc \in S,$$

可见 S 对于乘法满足结合律;

(3) S 满足乘法对于加法的分配律: 任取 $a, b, c \in S$, 有 $a, b, c \in L$, 所以

$$a(b+c) \xrightarrow{L \text{ 满足乘法对加法的分配律}} ab+ac \in S,$$

可见 S 满足乘法对于加法的分配律. \square

定义 1.8.3 (同构映射). 设 L 与 L' 是两个环, 若有 L 到 L' 的一一对应 σ 满足如下性质

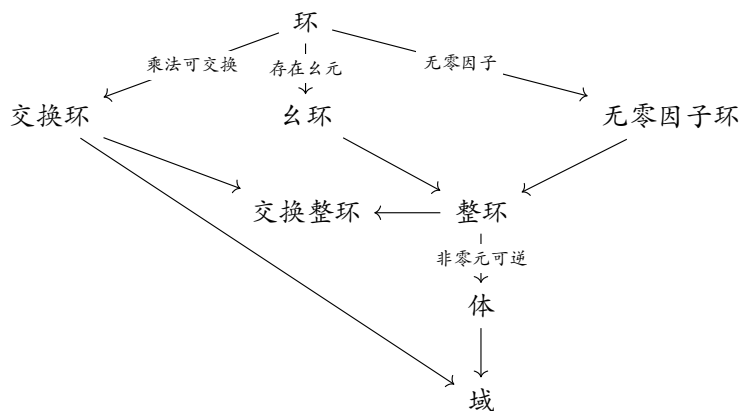
$$(1) \sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b);$$

$$(2) \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

其中 $a, b \in L$, 则称 L 与 L' 同构, 称具有以上性质的 σ 为一个同构映射 (简称同构).

1.9 各种特殊类型的环

命题 1.9.1.



注 1.9.1. 幺元: 设 L 是环. 若 $e \in L$ 满足

$$\forall a \in L, ae = ea = a,$$

则称 e 为环 L 的单位元素 (幺元), 简记为 1 ;

用 0 表示环中加法群的单位元 (即零元素);

零因子: 设 L 是环. 若有 $0 \neq a \in L, 0 \neq b \in L$ 满足 $ab = 0$, 则称 a 为一个左零因子, 称 b 为一个右零因子.

引理 1.9.1. 非零元可逆 \Leftrightarrow 无零因子.

证. (1) 非零元可逆 \Rightarrow 无零因子:

设 L 是环且非零元可逆. 假设 $a \in L$ 是 L 的左零因子 (右零因子同理), 则有

$$ab = 0 \text{ 且 } a \neq 0, b \neq 0.$$

设 $c \in L$ 是 a 的逆元, 即

$$ac = ca = 1,$$

于是

$$(ca)b = c(ab)$$

$$(ca)b = 1b = b \neq 0$$

$$c(ab) = c0 = 0,$$

得到矛盾, 从而 L 无零因子, 问题得证.

(2) 无零因子 \nRightarrow 非零元可逆:

如整数环. □

定义 1.9.1 (子域). 若域 F 的子环 S 是域, 则称 S 是域 F 的子域.

1.10 环的同态, 理想

定义 1.10.1 (同态). 设 L, L' 是两个环, σ 是 L 到 L' 的映射. 若对 $\forall a, b \in L, \sigma$ 具有性质

$$(1) \sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b);$$

$$(2)\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

就称 σ 为环 L 到环 L' 的一个同态映射 (简称同态), 简记为 $\sigma: L \rightarrow L'$.

注 1.10.1. (1) 由同态的定义可以看出 $\sigma(L)$ 是 L' 的子环;

(2) 若 $\sigma(L) = \{0\}$, 称 σ 为零同态;

(3) 若 $\sigma(L) = L'$, 称 σ 为满同态, 称 L' 为 L 的同态象.

定义 1.10.2 (理想). 设 L 成环, $I \subset L$ 为 L 的一个加法子群. 若 $\forall r \in L, \forall a \in I$, 都有

$$ra \in I, ar \in I,$$

就称 I 是 L 的理想 (或双边理想). 若只满足 $ra \in I$ (或 $ar \in I$), 则称 I 是 L 的右 (或左) 理想.

注 1.10.2. 显然 $\{0\}$ 与 L 都是 L 的理想, 称它们为平凡的理想.

1.11 商环

定义 1.11.1 (陪集). 设环 I 是环 L 的理想, I 作为 L 的加法群的子群, 按如下方式定义陪集

$$r + I (\forall r \in L) \text{ 为左陪集; } \quad I + r (\forall r \in L) \text{ 为右陪集,}$$

按如下方式定义陪集的加法与乘法

$$\begin{aligned} (r_1 + I) + (r_2 + I) &= r_1 + r_2 + I & (\forall r_1, r_2 \in L); \\ (r_1 + I)(r_2 + I) &= r_1 r_2 + I & (\forall r_1, r_2 \in L), \end{aligned}$$

全体陪集所成的集合在这样规定的运算下成环.

定义 1.11.2 (商环). 设环 I 是环 L 的理想. L 对于 I 的陪集在定义 1.11.1 的运算下所成的环称为 L 对于 I 的商环, 记作 L/I .

设环 I 是环 L 的理想. 不难发现 $\sigma(a) = a + I, a \in L$ 是环 L 到商环 L/I 的满同态, 且该同态的核为理想 I . 可见每个理想都是某一同态的核.

引理 1.11.1. 设 $\sigma : L \rightarrow L'$, 则 $\ker \sigma$ 是 L 的理想.

证. 对 $\forall a \in \ker \sigma, \forall b \in L$, 有

$$\sigma(ab) \stackrel{\sigma \text{是同态}}{=} \sigma(a)\sigma(b) = 0\sigma(b) = 0 \implies ab \in \ker \sigma;$$

$$\sigma(ba) \stackrel{\sigma \text{是同态}}{=} \sigma(b)\sigma(a) = \sigma(b)0 = 0 \implies ba \in \ker \sigma,$$

可见 $\ker \sigma$ 是 L 的理想. □

定理 1.11.1 (环同态基本定理). 若 $\sigma : L \rightarrow L'$, 则 $L/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$. 进一步, 若 σ 是满同态, 则 $L/\ker \sigma \cong L'$.

证. 设 $\varphi : L \rightarrow L/\ker \sigma$ 是自然同态, 则得到两个满同态 σ 和 φ , 交换图如下:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma} & \text{im } \sigma \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ L/\ker \sigma & & \end{array}$$

其中虚线部分的 ψ 表示我们要找的同构. 定义映射

$$\psi_0(\ker \sigma + a) = \sigma(a),$$

显然 ψ_0 是良定义的.

对 $\forall a, b \in L$, 有

$$\begin{aligned} \psi_0[(\ker \sigma + a) + (\ker \sigma + b)] &\stackrel{\ker \sigma \text{是理想}}{=} \psi_0(\ker \sigma + a + b) \\ &= \sigma(a + b) \\ &\stackrel{\sigma \text{是同态}}{=} \sigma(a) + \sigma(b) \\ &= \psi_0(\ker \sigma + a) + \psi_0(\ker \sigma + b), \end{aligned}$$

由此可见 ψ_0 保持加法;

$$\begin{aligned}
 \psi_0[(\ker \sigma + a)(\ker \sigma + b)] &\stackrel{\ker \sigma \text{ 是理想}}{=} \psi_0(\ker \sigma + ab) \\
 &= \sigma(ab) \\
 &\stackrel{\sigma \text{ 是同态}}{=} \sigma(a)\sigma(b) \\
 &= \psi_0(\ker \sigma + a)\psi_0(\ker \sigma + b),
 \end{aligned}$$

由此可见 ψ_0 保持乘法, 于是 $\psi_0 : L/\ker \sigma \rightarrow \text{im } \sigma$.

对 $\forall \sigma(a) = \sigma(b)$, 有

$$\begin{aligned}
 \sigma(a) - \sigma(b) &= 0 \\
 \sigma \stackrel{\sigma \text{ 是同态}}{\implies} \sigma(a - b) &= 0 \\
 \implies a - b &\in \ker \sigma \\
 \stackrel{\text{引理 1.7.1}}{\implies} \ker \sigma + a &= \ker \sigma + b \\
 \implies \psi_0 &\text{ 是单射.}
 \end{aligned}$$

ψ_0 显然是满射.

综上所述, ψ_0 是同构映射. 取 $\psi = \psi_0$ 即证明了 $L/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$.

进一步, 若 σ 是满同态, 则 $L' \cong \text{im } \sigma$, 从而 $L/\ker I \cong L'$. \square

1.12 特征

设 F 是域, e 是 F 中的单位元素. 若 e 是有限阶元素, 即存在正整数 m 使得 $me = 0$, 则将 m 定义为 F 的单位元素在 F 的加法群中的阶. 显然 m 一定是素数.

定义 1.12.1 (特征). 设 F 是域. 若 F 的单位元素 e 在 F 的加法群中是有限阶元素, 阶为 p , 就称域 F 的特征为 p . 若单位元素是无限阶元素, 就称域 F 的特征为 0. 域 F 的特征记为 $\chi(F)$.

命题 1.12.1. 在域的加法群中, 任一非零元素都与单位元素有相同的阶.

证. 设 a 是域 F 的任一非零元, 由

$$ma = mae \xrightarrow{ae \text{乘法可交换}} a(me)$$

可知, $ma = 0$ 当且仅当 $me = 0$, 问题得证. \square

定理 1.12.1. 设 F 为域. 若 $\chi(F) = p \neq 0$, 则 F 包含与 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 同构的子域; 若 $\chi(F) = 0$, 则 F 包含与有理数域同构的子域.

证. 首先按如下方式定义整数环到 F 的映射 σ

$$\sigma(n) = ne.$$

注意到 $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(n+m) = (n+m)e = ne + me;$$

$$\sigma(nm) = (nm)e = (ne)(me) = \sigma(n)\sigma(m),$$

于是 $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow F$.

(1) 若 $\chi(F) = p \neq 0$, 令 $\sigma(n) = 0$, 有

$$0 = \sigma(n) = ne \iff n \in p\mathbb{Z},$$

可见 $\ker \sigma = p\mathbb{Z}$. 易见

$$\text{im } \sigma = \{e, 2e, \dots, (p-1)e, 0\} \subset F,$$

不难验证 $\text{im } \sigma$ 构成域 F 的子域. 根据环同态基本定理, 有

$$F/p\mathbb{Z} \cong \text{im } \sigma.$$

(2) 若 $\chi(F) = 0$, 令 $\sigma(n) = e$ 可推出 $n = 0$, 即 $\ker \sigma = \{0\}$, 所以 σ 是单射. 易见

$$\operatorname{im} \sigma = \{ne \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

与整数环 \mathbb{Z} 同构. 按如下方式扩充 σ 的定义

$$\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = (ne)^{-1}(me),$$

由于当 $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ 时

$$(ne)^{-1}(me)^{-1} = (n'e)^{-1}(m'e)^{-1} \iff \sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \sigma\left(\frac{m'}{n'}\right),$$

所以这是良定义的. 易见

$$\operatorname{im} \sigma = \{(ne)^{-1}me : n \in \mathbb{Z} \text{ 且 } n \neq 0; m \in \mathbb{Z}\} \subset F$$

构成 F 的子域, 而 $\operatorname{im} \sigma \cong \mathbb{Q}$, 亦即 F 有一个同构于有理数域 \mathbb{Q} 的子域.

综上所述, 问题得证. \square

1.13 CHAPTER1 习题

问题 1.1 (P54T7). 设 G 是群, $a, b \in G$. 若 $a^{-1}ba = b^r$ ($r \in \mathbb{N}_+$), 证明 $a^{-i}ba^i = b^{r^i}$ ($i = 1, 2, \dots$).

证. 使用数学归纳法.

(1) 题设条件已经说明, 当 $i = 1$ 时结论成立;

(2) 假设当 $i = n$ 时结论成立即 $a^{-n}ba^n = b^{r^n}$, 于是

$$\begin{aligned} a^{-(n+1)}ba^{n+1} &= a^{-1}(a^{-n}ba^n)a \\ &= a^{-1}b^{r^n}a \\ &= (a^{-1}ba)^{r^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (b^r)^{r^n} \\
 &= b^{r^{n+1}},
 \end{aligned}$$

可见当 $i = n + 1$ 时结论也成立.

综上所述, 问题得证. \square

问题 1.2 (P54T8). 证明: 群 G 为交换群 \iff 映射 $x \mapsto x^{-1}$ 为同构映射.

证. 设 $\varphi: G \rightarrow G', x \mapsto x^{-1}$, 不难发现 $G = G'$.

(1) 必要性:

令 $\varphi(x) = e$, 有 $x^{-1} = e \implies x = e \implies \ker \varphi = \{e\}$, 可见 φ 是单射;

$\forall x \in G' = G, \exists x^{-1} \in G$ 满足 $\varphi(x^{-1}) = x$, 可见 φ 是满射;

$\forall x, y \in G$, 有

$$\begin{aligned}
 \varphi(xy) &= (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \\
 &\stackrel{G \text{ 是交换群}}{=} x^{-1}y^{-1} \\
 &= \varphi(x)\varphi(y),
 \end{aligned}$$

于是 φ 是同态.

必要性得证.

(2) 充分性:

$\forall x, y \in G$, 有 $x^{-1}, y^{-1} \in G$, 并且

$$\begin{aligned}
 \varphi(x^{-1}y^{-1}) &\stackrel{\varphi \text{ 是同态}}{=} \varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1}) \\
 &\implies yx = xy \\
 &\implies G \text{ 是交换群}.
 \end{aligned}$$

充分性得证.

综上所述, 问题得证. \square

问题 1.3 (P54T9). 设 S 为群 G 的非空子集合, 在 G 中定义关系 $a \sim b$ 当且仅当 $ab^{-1} \in S$. 证明这是等价关系的充要条件为 S 为 G 的子群.

证. 先给出等价关系的定义.

称满足如下三条性质的关系 \sim 为等价关系

(i)反身性: $a \sim a$;

(ii)对称性: 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$;

(iii)传递性: 若 $a \sim b, b \sim c$, 则 $a \sim c$.

(1) 必要性:

对 $\forall a, b \in S$ 亦即 $ae^{-1}, be^{-1} \in S$, 有

$$ae^{-1}(be^{-1})^{-1} \in S,$$

即 $ab^{-1} \in S$, 可见 $S < G$.

必要性得证.

(2) 充分性:

由于 S 非空, 所以 $\forall s \in S$, 有

$$ss^{-1} \in S,$$

即 $s \sim s$, 反身性得证;

任取 $a \in S$, 由于 S 成群, 所以 $a^{-1} \in S$, 进而若 $a \sim b$ 即 $ab^{-1} \in S$ 即 $a \sim b$, 有

$$ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in S,$$

即 $b \sim a$, 对称性得证;

设 $a \sim b, b \sim c$ 即 $ab^{-1} \in S, bc^{-1} \in S$, 由 S 成群可知

$$(ab^{-1})(bc^{-1}) \in S,$$

即 $a \sim c$, 传递性得证.

充分性得证.

综上所述, 问题证毕. □

问题 1.4 (P55T20). 设群 H, K 为群 G 的子群, 证明 HK 为 G 的子群当且仅当 $HK = KH$.

证. (1) 必要性

按以下方式定义从 HK 到 HK 的一一对应 φ_1

$$\varphi_1(hk) = (hk)^{-1}, \forall hk \in HK.$$

注意到 $\text{im } \varphi_1 = HK$, 并且

$$(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH,$$

即 $HK = \text{im } \varphi_1 \subset KH$. 同理, 按以下方式定义 KH 到 KH 的一一对应 φ_2 可证 $KH \subset HK$

$$\varphi_2(kh) = k^{-1}h^{-1}, \forall kh \in KH.$$

由 $HK \subset KH$ 及 $KH \subset HK$ 可得 $HK = KH$, 必要性得证.

(2) 充分性

对任意 $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$, 有

$$\begin{aligned} h_1k_1(h_2k_2)^{-1} &= h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1(k_1k_2^{-1}h_2^{-1}), \end{aligned}$$

而

$$k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH = HK,$$

所以 $h_1k_1(h_2k_2)^{-1} \in HK$, 亦即

$$\forall a, b \in HK \implies ab^{-1} \in HK,$$

可见 $HK < G$, 充分性得证.

综上所述, 问题证毕. \square

问题 1.5 (P56T28). 在整数集 \mathbb{Z} 上重新定义加法与乘法为

$$a \oplus b = ab, \quad a \odot b = a + b.$$

试问 \mathbb{Z} 在新定义的运算下是否成环.

解. 不能成环, 理由如下.

假设 \mathbb{Z} 在新定义的运算下成环, 则 \mathbb{Z} 关于加法成交换群. 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$1 \oplus n = 1 \cdot n = n,$$

所以 \mathbb{Z} 在新定义的运算下, 关于加法的所成的交换群中的单位元是 1. 注意到 $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$0 \oplus m = 0 \cdot m = 0 \neq 1,$$

所以在此加法群中, 0 无逆元, 这与 \mathbb{Z} 关于加法成交换群矛盾, 所以 \mathbb{Z} 在新定义的运算下不成环. \square

问题 1.6 (P56T29). 设 L 为有单位元素的交换环, 在 L 中定义

$$a \oplus b = a + b - 1,$$

$$a \odot b = a + b - ab.$$

证明在新定义的运算下, L 仍为有单位元素的交换环, 并且与原来的环同构.

证. (1) 对任意 $a, b, c \in L$

$$\begin{aligned} & (a \oplus b) \oplus c \\ &= (a + b - 1) \oplus c \\ &= (a + b - 1) + c - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=a+b+c-2 \\
&=a+(b+c-1)-1 \\
&=a+(b\oplus c)-1 \\
&=a\oplus(b\oplus c),
\end{aligned}$$

L 关于 \oplus 满足结合律;

(2) 对任意 $a \in L$

$$\begin{aligned}
&1\oplus a \\
&=1+a-1 \\
&=a,
\end{aligned}$$

L 关于 \oplus 有单位元素;

(3) 对任意 $a \in L$

$$\begin{aligned}
&(-a)\oplus a \\
&=-a+a-1 \\
&=1,
\end{aligned}$$

L 中的元素关于 \oplus 有逆元;

(4) 对任意 $a, b \in L$

$$\begin{aligned}
&a\oplus b \\
&=a+b-1 \\
&=b+a-1 \\
&=b\oplus a,
\end{aligned}$$

L 关于 \oplus 可交换;

(5) 对任意 $a, b, c \in L$

$$(a\oplus b)\odot c$$

$$\begin{aligned}
&=(a+b-1) \odot c \\
&=(a+b-1) + c - (a+b-1)c \\
&=a+b+2c-ac-bc-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a \odot c) \oplus (b \odot c) \\
&=(a \odot c) + (b \odot c) - 1 \\
&=(a+c-ac) + (b+c-bc) - 1 \\
&=a+b+2c-ac-bc-1,
\end{aligned}$$

L 满足 \odot 对于 \oplus 的分配律;

(6) 对任意 $a, b \in L$

$$\begin{aligned}
&a \odot b \\
&=a+b-ab \\
&=b+a-ba \\
&=b \odot a,
\end{aligned}$$

L 关于 \odot 满足交换律;

(7) 对任意 $a \in L$, 存在 $0 \in L$ 满足

$$\begin{aligned}
&0 \odot a \\
&=0+a-0a \\
&=a,
\end{aligned}$$

L 关于 \odot 有单位元素.

(1)~(7) 说明 L 成有单位元素的交换环, 其中零元为 1, 单位元为 0.

定义 φ 为 $(L; +, \cdot) \rightarrow (L; \oplus, \odot)$ 的映射

$$\varphi(x) = 1 - x,$$

显然 φ 为双射.

注意到

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= 1-x-y, \\ \varphi(x) \oplus \varphi(y) &= (1-x) \oplus (1-y) \\ &= (1-x) + (1-y) - 1 = 1-x-y,\end{aligned}$$

即 $\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$;

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= 1-xy, \\ \varphi(x) \odot \varphi(y) &= (1-x) \odot (1-y) \\ &= (1-x) + (1-y) - (1-x)(1-y) \\ &= 2-x-y-(1-y-x+xy) \\ &= 1-xy,\end{aligned}$$

即 $\varphi(xy) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$. 可见 φ 是同态映射.

综上所述, $\varphi: (L; +, \cdot) \rightarrow (L; \oplus, \odot)$ 为同构映射, 问题得证. \square

问题 1.7 (P56T30). 给环出 L 与它的子环 S 的例子, 它们分别具有下列性质

- (1) L 有单位元素, S 无单位元素;
- (2) L 无单位元素, S 有单位元素;
- (3) L, S 均有单位元素, 但不相同;
- (4) L 不交换, S 交换.

解. (1) $L = (\mathbb{Z}; +, \cdot), S = (2\mathbb{Z}; +, \cdot)$.

(1.1) 对于 L :

$$(1.1.1) \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$(a+b)+c = a+b+c = a+(b+c),$$

可见 $(\mathbb{Z}; +)$ 满足结合律;

(1.1.2) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists 0 \in \mathbb{Z}$ 满足

$$0 + a = a,$$

可见 $(\mathbb{Z}; +)$ 存在左单位元;

(1.1.3) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}$ 满足

$$-a + a = 0,$$

可见 $(\mathbb{Z}; +)$ 中的任意元素都有左逆元;

(1.1.4) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, 有

$$a + b = b + a \in \mathbb{Z},$$

可见 $(\mathbb{Z}; +)$ 满足交换律;

(1.1.5) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, 有

$$a(b + c) = ab + ac,$$

可见 $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ 满足乘法对于加法的分配律.

(1.1.1)~(1.1.5) 说明 $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ 成环. 注意到 $\forall a \in \mathbb{Z}$, 有 $1 \in \mathbb{Z}$ 满足

$$1 \cdot a = a,$$

所以 $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ 有单位元素 1.

(1.2) 对于 S :

同理可证 S 成环. 假设 S 有单位元素 e , 则 $\forall s \in S$

$$es = s,$$

现取 $n \in \mathbb{Z}$ 且 $m \neq 0$, 则 $2n \in 2\mathbb{Z}$ 且

$$e(2n) = 2n \xrightarrow{\text{等式两端同时除以 } 2n} e = 1 \notin 2\mathbb{Z},$$

这与 $e \in S$ 矛盾, 所以 S 没有单位元素.

(2)

$$L = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

(2.1) 对于 L :

(2.1) 容易验证 L 成环. 令 $e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ 满足

$$\begin{cases} e \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \text{对任意 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 均成立}$$

$$\iff \begin{cases} ax_1 = a \\ bx_1 = b \\ ax_3 = 0 \\ bx_4 = 0 \\ ax_1 + bx_3 = a \\ ax_2 + bx_4 = b \\ ax_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \end{cases} \text{对任意 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 均成立,}$$

解之可得

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin L,$$

亦即 L 没有单位元素.

容易验证 S 成环. 注意到 $\forall s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S, \exists e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ 满足

$$es = se = s,$$

所以 S 有单位元素 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3)

$$L = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

取 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 验证它们分别是 L 与 S 中的单位元素即可.

(4)

$$L = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

(4.1) 对于 L :

令 $l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in L$, 易见

$$l_1 l_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = l_2 l_1,$$

于是 L 不交换.

(4.2) 对于 S :

任取 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$, 注意到

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

所以 S 交换. □

问题 1.8 (P56T31). 环 L 中元素 e_L 称为左单位元, 若对 $\forall a \in L$

$$e_L a = a;$$

元素 e_R 称为右单位元, 若对 $\forall a \in L$

$$e_R a = a;$$

证明

- (1) 若 L 既有左单位又有右单位, 则 L 有单位元素;
- (2) 若 L 有左单位, 无零因子, 则 L 有单位元素;
- (3) 若 L 有左单位, 无右单位, 则 L 至少有两个左单位.

证. (1) 由

$$e_L e_R = \begin{cases} e_R (e_L \text{ 是左单位元}); \\ e_L (e_R \text{ 是右单位元}) \end{cases}$$

可知 $e_L = e_R$, 所以 L 有单位元素;

- (2) 在等式 $e_L a = a$ 两端同时左乘 a 可得

$$\begin{aligned}
&a e_L a = a^2 \\
&\implies (a e_L - a) a = 0 \\
&\implies a e_L - a = 0
\end{aligned}$$

$$\implies ae_L = a,$$

可见 L 有单位元素;

(3) 设 e_L 为 L 的一个左单位, 由于 L 无右单位, 所以 $\exists x \in L$, 满足

$$\begin{aligned} xe_L &\neq x \\ \implies xe_L - x + e_L &\neq e_L. \end{aligned}$$

注意到 $\forall a \in L$

$$(xe_L - x + e_L)a = a,$$

所以 $xe_L - x + e_L$ 是异于 e_L 的左单位, 所以 L 至少有两个左单位. \square

问题 1.9 (P56T32). 设 F 为域. 证明 F 无非平凡的理想.

证. 设 $I \neq \emptyset$ 是 F 的理想. 首先证明 I 一定含有零元.

对 $\forall a \in I$, 若 a 是零元, 则显然 I 含有零元; 若 a 不是零元, 由

$$a \in I \subset F$$

可知 a 在 F 中存在逆元 $-a$, 于是由理想的定义可知

$$0 = a + (-a) \in I,$$

所以 I 有零元.

由理想的定义有 $\forall f \in F$

$$f = 0 + f \in I,$$

所以 $F \subset I$, 从而 $F = I$. 可见域 F 没有非平凡的理想. \square

问题 1.10 (P57T35). 设 L 为有单位元素的交换环. 若 L 无非平凡的理想, 则 L 为域.

证. 由命题1.9.1与引理1.9.1可知, 若能证明 L 的非零元可逆, 便能推出 L 为域.

任取 $0 \neq a \in L$, 令

$$La = \{la : l \in L\},$$

首先证明 La 是 L 的加法子群.

对 $\forall l_1a, l_2a \in La$, 有

$$l_1a - l_2a = (l_1 - l_2)a,$$

注意到 $l_1 - l_2 \in L$, 于是

$$(l_1 - l_2)a \in La \implies l_1a - l_2a \in La,$$

所以 La 是 L 的加法子群.

然后证明 La 是 L 的理想. 对 $\forall la \in La, b \in L$, 注意到 $bl, lb \in L, ab = ba$, 所以

$$lab = l(ab) = l(ba) = lba \in La$$

$$bla \in La,$$

所以 La 是 L 的理想. 因为 $La \neq \emptyset$ 且 L 没有非平凡的理想, 所以 $La = L$.

最后证明 L 即 La 是域. 由于 $1 \in L = La$, 所以

$$\exists b \in L \text{ s.t. } ba = 1,$$

所以 a 有逆元 b , 亦即 L 的非零元均有逆元, 从而 L 是域. 问题证毕. \square

Chapter 2

群

2.1 群的同态定理

定理 2.1.1 (群的第一同构定理). 设 G 是群, $H < G$, $N \triangleleft G$, 则

$$(1) HN < G$$

$$(2) H \cap N \triangleleft H \text{ 且 } H/H \cap N \cong HN/N.$$

证. (1) 的证明

$$HN < G \iff$$

$$(i) HN \text{非空}$$

$$(ii) \forall a, b \in HN \implies ab^{-1} \in HN.$$

HN 显然非空. 对任意 $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$ 注意到

$$\begin{aligned} & h_1n_1(h_2n_2)^{-1} \\ &= h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1h_2^{-1}(h_2n_1n_2^{-1}h_2^{-1}). \end{aligned}$$

由于 $N \triangleleft G$, 所以 $\forall g \in G, gNg^{-1} \in N$, 又 $h_2 \in H \subset G$, 所以

$$h_1 h_2^{-1} (h_2 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1}) \in N,$$

从而

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} \in N,$$

于是 $HN < G$.

(2) 的证明

定义映射

$$\varphi : H \rightarrow HN/N$$

$$h \mapsto hN,$$

显然这是良定义的. 对 $\forall h_1, h_2 \in H$

$$\begin{aligned} \varphi(h_1 h_2) &= h_1 h_2 N \\ &= h_1 N h_2 N \\ &= \varphi(h_1) \varphi(h_2), \end{aligned}$$

可见 φ 是同态映射, 所以由群同态基本定理 (定理1.7.2)

$$H / \ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi.$$

注意到

$$\begin{aligned} h &\in \ker \varphi \\ \iff hN &= N \\ \iff h &\in N \\ \stackrel{h \in H}{\iff} h &\in H \cap N, \end{aligned}$$

所以 $\ker \varphi = H \cap N$, 从而

$$\begin{aligned} H \cap N &\triangleleft H \\ H/H \cap N &\cong \operatorname{im} \varphi. \end{aligned}$$

对 $\forall hnN \in HN/N$, 有

$$hnN = hN,$$

所以 $\exists h \in H$ s.t.

$$\varphi(h) = hnN,$$

所以 φ 是满同态, 从而

$$\operatorname{im} \varphi = HN/N,$$

所以

$$H/H \cap N \cong HN/N.$$

□

注 2.1.1. 类似可以证明: 若 $H < G, N \triangleleft G$, 有

- (1) $NH < G$
- (2) $H \cap N \triangleleft H$ 且 $H/H \cap N \cong NH/N$.

定理 2.1.2 (群的第二同构定理). 设 G 是群. 若 $N \triangleleft G, H \triangleleft G$ 并且 $N \subset H$, 则

- (1) $H/N \triangleleft G/N$
- (2) $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

证. (1) 的证明
定义映射

$$\begin{aligned}\varphi : G/N &\rightarrow G/H \\ gN &\mapsto gH,\end{aligned}$$

显然 φ 是良定义的. 对 $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned}&\varphi(g_1Ng_2N) \\&\stackrel{N \triangleleft G}{=} \varphi(g_1g_2N) \\&= g_1g_2H \\&\stackrel{H \triangleleft G}{=} g_1Hg_2H \\&= \varphi(g_1N)\varphi(g_2N),\end{aligned}$$

可见 φ 是同态映射, 所以由群同态基本定理 (定理1.7.2)

$$(G/N)/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi.$$

注意到

$$\begin{aligned}gN &\in \ker \varphi \\&\iff gH = H \\&\iff g \in H \\&\iff gN \in H/N,\end{aligned}$$

可见 $\ker \varphi = H/N$, 所以

$$\begin{aligned}H/N &\triangleleft G/N \\(G/N)/(H/N) &\cong \text{im } \varphi.\end{aligned}$$

(2) 的证明

对 $\forall gH \in G/H, \exists g \in G$ s.t.

$$\varphi(gN) = gH,$$

可见 φ 是满同态, 进而

$$\text{im } \varphi = G/H,$$

所以

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

□

注 2.1.2. 习惯上将群同态基本定理 (定理1.7.2), 群的第一同构定理 (定理2.1.1), 群的第二同构定理 (定理2.1.2) 统称为群的同态定理.

定理 2.1.3. 若 G 是群, $N \triangleleft G$, 则 G 的所有包含 N 的子群与 G/N 的所有子群之间存在一一对应.

证. 取自然同态

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow G/N \\ g &\mapsto gN, \end{aligned}$$

则问题转化为证明在集合 A 与 B 之间存在一一对应, 其中

$$\begin{aligned} A &= \{H : H < G, H \supset \ker \pi\} \\ B &= \{H' : H' < \text{im } \pi\}. \end{aligned}$$

设 $H \in A$, π_H 为映射 π 在子群 H 上的限制, 容易验证 $\text{im } \pi_H \in B$. 定义映射

$$\varphi : A \rightarrow B$$

$$H \mapsto \text{im } \pi_H,$$

容易验证 φ 是良定义的同态映射, 若能证明 φ 是一一对应, 则问题证毕.

(1) φ 是满同态

$\forall H' < \text{im } \pi$ 即

$$H' = \{\pi(k) : k \in K \subset G\}.$$

注意到

H' 成群

$$\Longleftrightarrow \forall \pi(k_1), \pi(k_2) \in H' \Longrightarrow \pi(k_1)[\pi(k_2)]^{-1} \in H'$$

$$\Longleftrightarrow \forall \pi(k_1), \pi(k_2) \in H' \Longrightarrow \pi(k_1 k_2^{-1}) \in H'$$

$$\Longleftrightarrow \forall k_1, k_2 \in K \Longrightarrow k_1 k_2^{-1} \in K$$

$$\Longleftrightarrow K < G,$$

所以

$$H' = \{\pi(k) : k \in K < G\}. \quad (2.1.1)$$

注意到

$$\forall t \in \ker \pi \Longrightarrow \pi(t) = e \in H',$$

因此不妨让式(2.1.1)中的 K 包含 $\ker \pi$, 即

$$\begin{aligned} H' &= \{\pi(k) : k \in K < G, K \supset \ker \pi\} \\ &= \text{im } \pi_K(K < G, K \supset \ker \pi), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} B &= \{\text{im } \pi_K : K < G, K \supset \ker \pi\} \\ &= \{\text{im } \pi_H : H < G, H \supset \ker \pi\} \end{aligned}$$

$$= \{\operatorname{im} \pi_H : H \in A\},$$

由此可见 $\operatorname{im} \varphi = B$, 即 φ 是满同态;

(2) φ 是单同态

由 (1),(2) 便知

$$\varphi : A \rightarrow B$$

$$H \mapsto \operatorname{im} \pi_H$$

为一一对应, 问题得证. □

定义 2.1.1 (由 S 生成的群). 设 G 是群, S 是 G 的非空子集合. G 的包含 S 的最小的子群, 称为由 S 生成的群, 记作 $\langle S \rangle$, 即

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H < G} H.$$

命题 2.1.1. 设 (G, \cdot) 是群. 若 S 是 G 的非空子集合, 则

$$\langle S \rangle = \left(\left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}, \cdot \right),$$

即集合 $S \cup S^{-1}$ 中任意多个元素的乘积组成的集合关于 \cdot 构成 $\langle S \rangle$.

证. 容易验证群 G 的子集合 $\left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}$ 关于群 G 的乘法成群, 记此群为 A . 注意到 A 包含 S , 所以 A 包含: 包含 S 的最小的子群, 即 $A \supset \langle S \rangle$.

反之, 对 $\forall a \in A$ 有

$$a = \left(\prod_{\alpha \in \Lambda_1} s_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \Lambda_2} s_\beta \right),$$

其中

$$\begin{aligned}s_\alpha &\in S \subset \langle S \rangle, \alpha \in \Lambda_1 \\ s_\beta &\in S^{-1}, \beta \in \Lambda_2,\end{aligned}$$

注意到 $s_\beta^{-1} \in S \subset \langle S \rangle, \beta \in \Lambda_2$, 而 $\langle S \rangle$ 成群, 从而

$$\begin{aligned}s_\beta &= (s_\beta^{-1})^{-1} \in \langle S \rangle, \beta \in \Lambda_2 \\ \Rightarrow a &= \left(\prod_{\alpha \in \Lambda_1} s_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \Lambda_2} s_\beta \right),\end{aligned}$$

可见 $A \subset \langle S \rangle$.

综上, $A = \langle S \rangle$, 即

$$\langle S \rangle = \left(\left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}, \cdot \right).$$

□

定义 2.1.2 (有限生成的, 循环群). 设 G 是群. 若 $\langle S \rangle = G$, 则称 S 为 G 的一组生成元. 若 G 中存在一有限集合 S 使得 $\langle S \rangle = G$, 则称 G 为有限生成的. 由一个元素生成的群称为循环群.

命题 2.1.2. 有限群 (定义1.2.4) 一定是有限生成的, 反之未必成立.

证. 设 G 是有限群, $m = |G| \in \mathbb{N}_+$, 则 G 所含元素的个数为 m . 取

$$S = \{g_1, g_2, \dots, g_m : g_k \text{ 是 } G \text{ 中两两不同的元素}, k = 1, 2, \dots, m\},$$

则

$$G = \langle S \rangle,$$

第一个论断证毕;

注意到

$$\begin{aligned} |(\mathbb{Z}, +)| &= \infty \\ (\mathbb{Z}, +) &= \langle \{1\} \rangle, \end{aligned}$$

所以第二个论断证必. \square

定义 2.1.3 (换位子, 换位子群). 对 $\forall a, b \in G$, 元素 $a^{-1}b^{-1}ab$ 称为群 G 中元素 a, b 的换位子, 简记为 $[a, b]$. 由所有换位子生成的群称为 G 的换位子群, 记作 $G^{(1)}$.

命题 2.1.3. 已知 $\varphi: G \rightarrow G'$ 是同态映射, 有以下结论成立

- (1) 若 G 是 *Abel* 群, 则 $\text{im } \varphi$ 是 *Abel* 群;
- (2) 虽 $\text{im } \varphi$ 是 *Abel* 群, 但 G 未必是 *Abel* 群;
- (3) $\text{im } \varphi$ 是 *Abel* 群 $\iff G^{(1)} \subset \ker \varphi$.

证. (1)

对 $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned} & \varphi(g_1)\varphi(g_2) \\ & \xlongequal[\varphi \text{ 是同态映射}]{\varphi(g_1g_2)} \\ & \xlongequal[G \text{ 是 Abel 群}]{\varphi(g_2g_1)} \\ & = \varphi(g_2)\varphi(g_1), \end{aligned}$$

可见 $\text{im } \varphi$ 是 *Abel* 群.

(2)

令

$$G = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ 且 } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right\}, \cdot \right)$$

$$\varphi: G \rightarrow G'$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

不难得到上述定义的 G 与 φ 证明了 (2).

(3)

$\text{im } \varphi$ 是 Abel 群

$$\begin{aligned} &\iff \forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_2)\varphi(g_1) \\ &\iff \forall g_1, g_2 \in G, [\varphi(g_2)\varphi(g_1)]^{-1} \varphi(g_1)\varphi(g_2) = e \\ &\iff \forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2) = e \\ &\iff \forall g_1, g_2 \in G, g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \in \ker \varphi \\ &\iff G^{(1)} \subset \ker \varphi, \end{aligned}$$

问题得证. □

2.2 循环群

循环群的定义见定义2.1.2.

定理 2.2.1. 整数加群 \mathbb{Z} 的子群都是由某一非负整数 m 生成的循环群.
且 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$

$$n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z} \iff n|m.$$

证. 设 H 是 $(\mathbb{Z}, +)$ 的一个子群.

(1)(i) 若 $H = (\{0\}, +)$, 取 $m = 0$ 即可.

(ii) 若 $H \neq (\{0\}, +)$, 则 H 中含有非零数, 因而含有正整数. 设 m 是 H 中最小的正整数, 我们来证明 $H = m\mathbb{Z}$. 任取 $x \in H$, 由整数的除法算式有

$$x = qm + r, \text{ 其中 } q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < m,$$

从而

$$r = x - qm \in H.$$

若 $r \neq 0$, 则 r 是 H 中小于 m 的正整数, 矛盾, 所以 $r = 0$, 即

$$x = qm,$$

这说明 H 中的任意元素都是 m 的倍数. 反之, 由群对运算的封闭性不难得到 m 的倍数也在 H 中. 综上可得

$$H = m\mathbb{Z},$$

第一个论断证毕.

(2) 由 $n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z}$ 可知 $m \in n\mathbb{Z}$, 所以 $n|m$;

由 $n|m$ 可知, m 的倍数都是 n 的倍数, 所以 $n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z}$.

综上可得

$$n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z} \iff n|m,$$

第二个论断证毕. □

定义 2.2.1 (无限循环群). 设群 $G = \langle g \rangle$, 若 G 是无限群, 则称 G 为无限循环群, 此时记 $|G| = \infty$.

定理 2.2.2. 已知群 $G = \langle g \rangle$, $|G| = m$, 则有以下结论成立:

(1) 若 $m = \infty$, 则 $G \cong \mathbb{Z}$, 它的子群与非负整数成一一对应 (见定理 2.2.1);

(2) 若 $m \in \mathbb{N}_+$, 则 $G \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, 它的子群与 m 的因子成一一对应.

证. 定义映射

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z} &\rightarrow G \\ n &\mapsto g^n, \end{aligned}$$

显然 φ 是良定义的满同态.

(1) 若 $m = \infty$, 则

$$\begin{aligned} & \forall n, m \in \mathbb{N}_+, n \neq m, \implies g^n \neq g^m \\ \iff & \varphi \text{ 是单射} \\ \iff & \varphi \text{ 是同构映射} \\ \iff & G \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(2) 若 $m \in \mathbb{N}_+$, 不难得到

$$\ker \varphi = m\mathbb{Z},$$

于是根据群同态基本定理 (定理1.7.2) 有

$$G = \text{im } \varphi \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$$

□

2.3 单群与 A_n 单性

定义 2.3.1 (单群). 若群 G 没有非平凡的子群, 则称群 G 为单群.

定理 2.3.1. 设 G 为交换群, $G \neq \{e\}$, 则 G 为单群的充分必要条件是 G 为素数阶的循环群.

证. ***** □

定义 2.3.2 (置换). 设 Ω 为有限集合, 由 Ω 到自身的一个双射叫作 Ω 的一个置换.

定义 2.3.3 (轮换). 若一个 n 元置换 σ 把 i_1 映成 i_2 , 把 i_2 映成 i_3, \dots , 把 i_{r-1} 映成 i_r , 把 i_r 映成 i_1 , 其余的元素保持不变, 则称 σ 为一个 r -轮换, 简称轮换. 2-轮换也称为对换.

引理 2.3.1. 每个置换都可以表示成一些对换的乘积; 每个偶置换 (置换 σ 为偶置换当且仅当 σ 的对换分解式中对换的个数为偶数) 都可以表示成一些长度为 3 的轮换 (简称 3-轮换) 的乘积.

证. ***** □

定义 2.3.4 (全变换群). 非空集合 Ω 到自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法成群, 称它为集合 Ω 的全变换群, 记作 S_n .

定义 2.3.5 (n 元交错群). S_n 中所有偶置换组成的集合, 对于映射的乘法成群, 称它为 n 元交错群, 记作 A_n .

定理 2.3.2. 交错群 $A_n, n \geq 5$ 是单群.

证. ***** □

2.4 可解群

对任意群 G 而言, 它的换位子群 $G^{(1)}$ 是 G 的正规子群, 即

$$G^{(1)} \triangleleft G,$$

再做 $G^{(1)}$ 的换位子群 $(G^{(1)})^{(1)}$, 记作 $G^{(2)}$, 就有

$$G^{(2)} \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G,$$

以此类推可得

$$\dots \triangleleft G^{(k)} \triangleleft G^{(k-1)} \triangleleft \dots \triangleleft G^{(2)} \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G.$$

若 G 是有限群, 这样的群列只有以下两种可能

- (1) $\exists k \in \mathbb{N}_+$ s.t. $G^{(k)} = G^{(k+1)} = \dots \neq \{e\}$
- (2) $\exists k \in \mathbb{N}_+$ s.t. $G^{(k)} = \{e\}$.

定义 2.4.1 (可解群). 设 G 是群. 若

$$\exists k \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } G^{(k)} = \{e\},$$

则称 G 为可解群.

定理 2.4.1. 群 G 是可解的当且仅当存在一递降的子群列

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_s = \{e\},$$

其中每个 G_i 是前一个 G_{i-1} 的正规子群, 且商群 G_{i-1}/G_i 交换 ($i = 1, \cdots, s$).

证. ***** □

由群的第二同构定理 (定理2.1.2) 可知, 当群 N 是群 G 的正规子群时, 商群 G/N 的正规子群与 G 中包含 N 的正规子群是一一对应的. 因此, 商群 G/N 是单群的充要条件为正规子群 N 不包含在另一个非平凡的正规子群中, 即不存在 G 的正规子群 $N_1, N_1 \neq G, N_1 \neq N$, 且

$$N < N_1 \triangleleft G,$$

具有此性质的正规子群 N 称为极大的.

定理 2.4.2. 有限群 G 是可解的的充分必要条件为存在递降的子群列

$$G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright \cdots \triangleright H_t = \{e\},$$

其中商群 $H_{i-1}/H_i (i = 1, \cdots, t)$ 都是素数阶的循环群.

证. ***** □

2.5 群的同构群

定义 2.5.1 (自同构与自同构群). 一个群到它自身的同构映射称为自同构映射, 简称为自同构. 群的全部自同构在变换下的乘法下成群, 称为自同构群. 群 G 的自同构群记作 $\text{Aut}(G)$.

设 G 为群, $a \in G$ 为固定元素. 定义

$$\begin{aligned}\sigma_a : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto aga^{-1},\end{aligned}$$

不难验证 $\sigma_a \in \text{Aut}(G)$.

定义 2.5.2 (内自同构与内自同构群). 称 σ_a 这种由 G 中元素引起的自同构为内自同构. $a \mapsto \sigma_a$ 给出了群 G 到 $\text{Aut}(G)$ 的同态, G 的同态像就是 G 的全体内自同构, 它们组成 $\text{Aut}(G)$ 的子群, 记作 $\text{In}(G)$, 称为 G 的内自同构群.

定义 2.5.3 (中心). 对任意群 G , 与 G 的全体元素可交换的元素组成的集合称为 G 的中心, 记作 $Z(G)$.

定理 2.5.1. 定义映射

$$\begin{aligned}f : G &\rightarrow \text{In}(G) \\ a &\mapsto \sigma_a,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\ker f &= Z(G) \\ G/Z(G) &\cong \text{In}(G).\end{aligned}$$

证. *****

□

定理 2.5.2. 对任意群 G , 有

$$\text{In}(G) \triangleleft \text{Aut}(G).$$

证. *****

□

定义 2.5.4 (外自同构群). 对任意群 G , 称自同构群对于内自同构群的商群

$$\text{Aut}(G)/\text{In}(G)$$

为 G 的外自同构群.

定理 2.5.3. 对任意群 G , 若 $Z(G) = \{e\}$, 则

$$G \cong \text{In}(G).$$

此时我们可以认为 $G < \text{In}(G)$.

证. ***** □

定义 2.5.5 (完全群). 一个中心为单位且自同构全是内自同构的群称为完全群.

2.6 群作用

定义 2.6.1 (群 G 在集合 X 上的作用). 设 G 是群, X 是非空集合. 若映射 $f: G \times X \rightarrow X$ 适合以下条件

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X :$$

$$(1) f(e, x) = x$$

$$(2) f(g_1 g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x)),$$

就称 f 决定了群 G 在集合 X 上的作用.

注 2.6.1. 在不需要明确指出映射 f 情况下, 通常把 $f(g, x)$ 简写成 $g(x)$. 按此写法, 定义 2.6.1 中的条件就可以写成

$$(1) e(x) = x$$

$$(2) g_1(g_2(x)) = g_1 g_2(x).$$

例 2.6.1. 设 G 是群, 取 $X = G$. 定义

$$g(x) = gx, \quad \text{对 } g, x \in G.$$

这就给出了一个群在集合 G 上的作用. 此即以前所谓的左平移.

例 2.6.2 (共轭变换). 设 G 是群, 取 $X = G$. 定义

$$g(x) = gxg^{-1}, \quad \text{对 } g, x \in G.$$

此即群 G 上的共轭变换. 称元素 x 与元素 gxg^{-1} 共轭; 称子群 H 与子群 gHg^{-1} 共轭, 它们都是等价关系; 称群 G 共轭作用在集合 G 上.

例 2.6.3. 设 G 是群, $H < G$, 令 $X = \{xH : x \in G\}$, 定义

$$g(xH) = gxH, \quad g, x \in G.$$

这就决定了群 G 在集合 X 上的左右.

定义 2.6.2 (齐性空间). 设 G 是群, $H < G$, 称

$$X = \{xH : x \in G\}$$

是群 G 的一个齐性空间.

当群 G 作用在集合 X 上时, 有可能 G 中的不同的元素在 X 上引起相同的映射, 亦即 $g \mapsto \sigma_g$ 不一定是单射. 比如在例2.6.2中, $Z(G)$ 中的元素都对应 G 上的恒同映射.

定义 2.6.3 (如实的). 若映射

$$f : G \rightarrow \text{In}(G)$$

$$a \mapsto \sigma_a$$

是单射, 就称群 G 在集合 X 上的作用是如实的, 或称群 G 如实地作用在集合 X 上. 其中

$$\sigma_a : G \rightarrow G$$

$$g \mapsto aga^{-1}.$$

注 2.6.2. 例2.6.1中的作用是如实的; 例2.6.2, 例2.6.3不一定是如实的.

定义 2.6.4 (等价的). 设 G 是群, X 与 X' 是非空集合, G 作用在 X 与 X' 上. 若有一个一一对应 $\varphi: X \rightarrow X'$ 使得

$$\varphi(g(x)) = g(\varphi(x)),$$

则称 G 在集合 X 与 X' 上的作用是等价的.

从抽象的观点来看, 两个等价的作用可以不加区别.

定义 2.6.5 (集合 X 上的等价关系). 对 $\forall x, y \in X$, 若

$$\exists g \in G \text{ s.t. } y = g(x),$$

则称 x 等价于 y , 记作 $x \sim y$.

注 2.6.3. 定义2.6.5中的关系 \sim 是等价关系的证明如下.

证. ***** □

定义 2.6.6 (G -轨道). 在定义2.6.5中的等价关系下, 集合 X 中的元素被分成等价类, 称这样分成的等价类为 x 的 G -轨道, 简称轨道, 记作 O_x . 称 x 为该轨道的代表.

注 2.6.4. 由于轨道就是等价类, 所以任意两条轨道要么相等, 要么无交, 即

$$X = \bigcup_{i \in I} O_{x_i},$$

其中当 $x_i \neq x_j$ 时 $O_{x_i} \cap O_{x_j} = \emptyset$. 进而

$$|X| = \sum_{i \in I} |O_{x_i}|.$$

定义 2.6.7 (完全代表系). 称集合

$$\{x_i : i \in I\}$$

为 x 的 G -轨道的完全代表系.

定义 2.6.8 (不动元素). 当轨道 O_x 只含有一个元素 x 即

$$\forall g \in G, g(x) = x$$

时, 称 x 为 G 的不动元素.

在例2.6.2中, 若 $x \in Z(G)$, 则显然 $O_x = \{x\}$; 反之, 由 $O_x = \{x\}$ 可知 $x \in Z(G)$.

定义 2.6.9 (传递的). 设群 G 作用在集合 X 上, 当 X 是一个轨道即

$$\forall x, y \in X, \exists g \in G \text{ s.t. } g(x) = y$$

时, 称群 G 在集合 X 上的作用是传递的.

不难发现, 例2.6.1与例2.6.3都是传递的的情形.

定义 2.6.10 (稳定子与稳定子群). 设群 G 作用在集合 X 上, 对 $\forall x \in X$, 称集合

$$H_x = \{g \in G : g(x) = x\}$$

是 x 的稳定子. 容易验证, H_x 是 G 的子群, 因此也称为元素 x 的稳定子群.

当群 G 在集合 G 上的作用是共轭作用 (参考例2.6.2) 时

$$\begin{aligned} H_x &= \{g \in G : gxg^{-1} = x\} \\ &= \{g \in G : gx = xg\}. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

定义 2.6.11 (中心化子). 称等式(2.6.2)右端的集合为 x 在 G 里的中心化子, 记作 $Z(x)$, 它就是在群 G 的共轭作用下 x 的稳定子群 H_x .

定理 2.6.1 (轨道-稳定子定理). 设群 G 作用在集合 X 上, $x \in X$, O_x 是包含 x 的轨道, H_x 是 x 的稳定子群, 则群 G 在集合 O_x 上的作用与群 G 在齐性空间 G/H_x 上的作用等价, 也可写作

$$|O_x| = |G/H_x|,$$

即 x 的轨道的长度 (x 的轨道所含元素的个数) 等于 x 的稳定子在 G 中的指数.

证. ***** □

推论 2.6.1. 设群 G 在集合 X 上的作用是传递的, $x \in X$, H_x 是元素 x 的稳定子群. 则 G 在 X 上的作用与 G 在齐性空间 G/H_x 上的作用等价.

证. ***** □

推论 2.6.2. 设有限群 G 作用在集合 X 上. 则任意一个轨道 O_x 包含有限多个元素, 并且包含的元素的个数是 $|G|$ 的因子.

证. ***** □

定义 2.6.12 (p -群). 设 G 是有限群, 若 $|G|$ 是素数 p 的方幂, 即

$$|G| = p^k, \quad k \geq 1,$$

则称 G 为 p -群 (p 是素数).

推论 2.6.3. 设有限群 G 作用在有限集合 X 上. 若 G 是 p -群, $|X| = n$, $(n, p) = 1$, 则 X 中一定有不动元素.

证. ***** □

推论 2.6.4. 设 p -群作用在有限集合 X 上, $|X| = n$. 若 t 为 X 中不动元素的个数, 则

$$t \equiv n \pmod{p}.$$

证. ***** □

推论 2.6.5. p -群有非平凡的中心.

证. ***** □

定义 2.6.13 (共轭类). 当群 G 在集合 G 上的作用是共轭变换 (见例 2.6.2) 时, 称轨道 O_x 为 x 所在的共轭类, 记作 $C(x)$.

定理 2.6.2. 设群 G 作用在集合 X 上, $x, y \in X$. 若存在 $g_0 \in G$ 使得 $y = g_0x$, 则 $H_y = g_0H_xg_0^{-1}$.

证. ***** □

2.7 Sylow 定理

Lagrange 定理 (推论 1.4.1) 指出, 有限群 G 的任意子群的阶是 $|G|$ 的因子. 反之, 对于 $|G|$ 的任意正因子 d , 是否存在一个 d 阶子群? 本节介绍的 Sylow 定理将回答这一问题.

在此之前我们需要以下引理.

引理 2.7.1. 若 $n = p^l m$, $(p, m) = 1$, $k \leq l$, $C_n^{p^k}$ 是组合数, 则

$$p^{l-k} | C_n^{p^k}, p^{l-k+1} \nmid C_n^{p^k}.$$

证. ***** □

定理 2.7.1 (Sylow 第一定理). 若群 G 的阶为 $n = p^l m$, 其中 p 为素数, $(p, m) = 1$, $l \geq 1$, 则对于 $0 \leq k \leq l$, G 有 p^k 阶子群. 特别地, 称 p^l 阶子群为 G 的 Sylow p -子群.

证. 令

$$X = \{A : A \subset G, |A| = p^k\},$$

易见 $|X| = C_n^{p^k}$. 对 $\forall A \in X$, 对 $\forall g \in G$ 定义映射

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ A &\mapsto gA, \end{aligned}$$

不难验证这是良定义的. 该映射给出了群 G 在集合 X 上的作用.

由注2.6.4可知

$$|X| = \sum_{i \in I} |O_{A_i}|.$$

由引理2.7.1可知

$$p^{l-k+1} \nmid C_n^{p^k} = |X|,$$

所以至少有一个轨道, 不妨设为 O_{A_j} , 满足

$$p^{l-k+1} \nmid |O_{A_j}|,$$

此即 $|O_{A_j}|$ 含有的 p 因子至多为 p^{l-k} .

对于 A_j 的稳定子群 H_{A_j} , 由轨道-稳定子定理 (定理2.6.1) 可知

$$|O_{A_j}| = |G/H_{A_j}| = \frac{|G|}{|H_{A_j}|},$$

注意到

$$\begin{aligned} |G| &\text{ 含有的 } p \text{ 因子恰好为 } p^l \\ |O_{A_j}| &\text{ 含有的 } p \text{ 因子至多为 } p^{l-k}, \end{aligned}$$

所以

$$H_{A_j} \text{ 含有的 } p \text{ 因子至少为 } p^k,$$

亦即

$$\exists q \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } |H_{A_j}| = p^k q,$$

可见

$$|H_{A_j}| \geq p^k. \quad (2.7.3)$$

反之, 对 $\forall g \in H_{A_j}$, 有 $g(A_j) = A_j$, 所以对 $\forall a \in A_j$, 有 $ga \in A_j$, 从而

$$H_{A_j}a = \{ga : g \in H_{A_j}\} \subset A_j,$$

于是

$$|H_{A_j}| = |H_{A_j}a| \leq |A_j| = p^k. \quad (2.7.4)$$

由式(2.7.3)与式(2.7.4)可知, H_{A_j} 是 G 的 p^k 阶子群. 定理得证. \square

定理 2.7.2 (Sylow 第二定理). 若有限群 G 的阶为 $p^l m$, 其中 p 为素数且 $(p, m) = 1$, 记 P 为 G 的 Sylow p -子群. 则 G 的任意一个阶为 p^k ($k \leq l$) 的子群 H 包含在一个与 P 共轭的 Sylow p -子群中.

证. 令

$$X = \{gP : g \in G\},$$

对 $\forall h \in H$, 定义映射

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow X \\ gP &\mapsto hgP, \end{aligned}$$

容易验证该定义是良定义的, h 确定了群 H 在集合 X 上的作用. 由 Lagrange 定理 (1.4.1) 的证明过程可知

$$|G| = |X| \cdot |P|,$$

所以 $|X| = m$. 注意到有限 p -群 H 作用在集合 X 上, 并且 $(p, m) = 1$, 所以由推论 2.6.3 可知 X 有不动元素, 不妨设其中的一个为 $g_j P$, 即

$$\forall h \in H, hg_j P = g_j P$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \forall h \in H, g_j^{-1} h g_j P = P \\
&\Longleftrightarrow \forall h \in H, g_j^{-1} h g_j \in P \\
&\Longleftrightarrow \forall h \in H, h \in g_j P g_j^{-1} \\
&\Longleftrightarrow H \subset g_j P g_j^{-1},
\end{aligned}$$

注意到 H, P 均成群, 所以 $H < g_j P g_j^{-1}$, 即 H 包含在一个与 P 共轭的 Sylow p -子群中, 定理得证. \square

推论 2.7.1. 对有限群而言, 任意两个 Sylow p -子群都互相共轭.

证. ***** \square

推论 2.7.2. 有限群 G 的 Sylow p -子群是惟一的当且仅当 G 的 Sylow p -子群是正规子群.

证. G 的子群 P 是正规子群即 P 的所有共轭子群都与 P 自身.

任取 G 的两个 Sylow p -子群 P_0, P , 由推论2.7.1可知 P_0, P 互相共轭, 又由于 P_0, P 互相共轭可知 $P_0 = P$, 推论得证. \square

定义 2.7.1 (正规化子). 对群 G 的任意子群 H , 定义

$$N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\},$$

则 $N(H) < G$ 且 $H \subset N(H)$. 称 $N(H)$ 为子群 H 的正规化子.

由定义2.7.1可立即推出 $H \triangleleft N(H)$.

推论 2.7.3. 若 G 是有限群, P 是 G 的 Sylow p -子群, 则

$$(1) N(N(P)) = N(P)$$

$$(2) N(P) \text{ 不包含 } G \text{ 的另一个 Sylow } p\text{-子群.}$$

证. ***** \square

推论 2.7.4. 若 G 是有限群, p 是素数且 $p \mid |G|$, 则 G 的 Sylow p -子群的个数是 $|G|$ 的因子.

证. ***** □

定理 2.7.3 (Sylow 第三定理). 若 $|G| = p^l m$, p 是素数且 $(p, m) = 1, l \geq 1$, 记 G 的 Sylow p -子群的个数为 k , 则 $k \equiv 1 \pmod{p}$.

分析. 注意到该定理的结论与推论 2.6.4 十分相似, 这引诱我们构造某 p -群 P , 使其作用在某 k 元集合 X 后所得不动元素的个数为 1.

证. 令

$$X = \{P : P < G, |P| = p^l\},$$

于是 $|X| = k$.

任取 $P \in X$, 考虑 P 在 X 上的共轭作用. 对 $\forall a \in P$, 定义映射

$$\begin{aligned} a : X &\rightarrow X \\ Q &\mapsto aQa^{-1}, \end{aligned}$$

容易验证这是良定义的, a 给出了群 P 在集合 X 上的作用. 设 X_0 为 P 作用在 X 上的不动点集, 即

$$X_0 = \{Q \in X : a(Q) = Q\},$$

则

$$\begin{aligned} Q \in X_0 &\iff \forall a \in P, a(Q) = Q \\ &\iff \forall a \in P, aQa^{-1} = Q \\ &\iff \forall a \in P, a \in N(Q) \\ &\iff P \subset N(Q), \end{aligned}$$

又 $Q \subset N(Q)$ 且 P, Q 都是 G 的 Sylow p -子群, 所以由推论2.7.3可知 $P = Q$, 进而 $|X_0| = 1$. 由推论2.6.4可知

$$|X_0| \equiv |X| \pmod{p},$$

即

$$\begin{aligned} 1 &\equiv k \pmod{p} \\ \iff k &\equiv 1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

定理得证. □

推论 2.7.5. 若群 G 的阶为 $p^l m$, 其中 p 是素数且 $(p, m) = 1$, 则 G 的 Sylow p -子群的个数是 m 的因子.

证. 设 G 的 Sylow p -子群的个数为 k .

由推论2.7.4可知 $k \mid |G|$, 由 $|G| = p^l m$, p 是素数且 $(p, m) = 1$

$$k \mid p \text{ 或 } k \mid m. \tag{2.7.5}$$

由定理2.7.3可知

$$k \nmid p. \tag{2.7.6}$$

由式(2.7.5)与(2.7.6)可知 $k \mid m$, 推论得证. □

作为本节的结束, 我们来看一个例子来说明如何利用上面的结果来解决群论的问题.

例 2.7.1. 已知有限群 G 的阶为 72, 证明 G 不是单群.

证. 注意到

$$72 = 2^3 \cdot 3^2,$$

所以利用 Sylow 第三定理 (定理2.7.3), 可设 G 的 Sylow 3-子群的个数为

$$1 + 3t, t \in \mathbb{N},$$

再利用推论2.7.5可知

$$(1 + 3t) | 2^3,$$

所以 $t = 0$ 或 $t = 1$.

(1) 若 $t = 0$, 即 G 有惟一的 Sylow 3-子群, 设为 P , 由推论2.7.2可知

$$P \triangleleft G,$$

所以此时 G 有非平凡的正规子群 P , 从而不是单群.

(2) 若 $t = 1$, 即 G 有 4 个 Sylow 3-子群, 设为 P_1, P_2, P_3, P_4 . 考虑 G 在集合

$$X = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

上的共轭变换 (参考例2.6.2). 由推论2.7.1可知 G 任意两个 Sylow 3-子群都互相共轭, 所以 G 的每个元素都在 X 上诱导出一个 4 次置换, 从而诱导出同态

$$\varphi : G \rightarrow S_4,$$

由群同态基本定理可知

$$G / \ker \varphi \cong \varphi(G),$$

所以

$$\begin{aligned} |\ker \varphi| &= \frac{|G|}{|\varphi(G)|} \geq \frac{|G|}{|S_4|} = 3 \\ \implies \ker \varphi &\neq \{e\}. \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

由 G 的 Sylow 3-子群不惟一可知

$$\begin{aligned}\varphi(G) &> 1 \\ \implies \ker \varphi &\neq \{e\} \\ \implies \ker \varphi &\neq G.\end{aligned}\tag{2.7.8}$$

由式(2.7.7)与(2.7.8)可知, 此时 $\ker \varphi$ 是 G 的非平凡的正规子群.

综上, G 不是单群. \square

2.8 CHAPTER2 习题

问题 2.1 (P97T1). 已知 G 是有限群, $N \triangleleft G, (|N|, |G/N|) = 1$. 证明: 若元素 a 的阶整除 $|N|$, 则 $a \in N$.

证. 考虑自然同态

$$\begin{aligned}\pi : G &\rightarrow G/N \\ g &\mapsto gN,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}[\pi(a)]^{o(a)} &= (aN)^{o(a)} \\ &\stackrel{N \triangleleft G}{=} a^{o(a)} N^{o(a)} \\ &= N,\end{aligned}$$

又 N 是 G/N 的单位元素, 所以

$$|\pi(a)| \mid |o(a)| \mid |N|. \tag{2.8.9}$$

注意到

$$aN \in G/N,$$

所以

$$|aN| \mid |G/N|,$$

即

$$|\pi(a)| \mid |G/N|. \quad (2.8.10)$$

由式(2.8.9)与(2.8.10)结合 $(|N|, |G/N|) = 1$ 可知

$$\begin{aligned} |\pi(a)| &= 1 \\ \implies \pi(a) &= N \\ \implies aN &= N \\ \implies a &\in N, \end{aligned}$$

问题得证. □

问题 2.2 (P97T2). 设 c 是群 G 中阶为 rs 的元素, 其中 $(r, s) = 1$. 证明 c 可以表示成 $c = ab$, 其中 a 的阶为 r , b 的阶为 s , 且 a, b 都是 c 的方幂.

证. 由 $(r, s) = 1$ 可知

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } ur + vs = 1,$$

不难验证

$$\begin{aligned} a &= c^{vs} \\ b &= c^{ur} \end{aligned}$$

满足题设要求. □

问题 2.3 (P97T3). 已知群 G 中元素 a 的阶与正整数 k 互素, 证明方程 $x^k = a$ 在 $\langle a \rangle$ 内恰有一解.

证. 由 $(o(a), k) = 1$ 可知

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } uo(a) + vk = 1,$$

所以

$$a^{uo(a)+vk} = a,$$

即

$$a^{vk} = a,$$

由此可见 $x = a^v$ 是 $x^k = a$ 在 $\langle a \rangle$ 内的解.

现设 $x = a_0^v$ 也是 $x^k = a$ 在 $\langle a \rangle$ 内的解, 其中 $0 \leq v - v_0 \leq o(a) - 1$, 于是

$$\begin{aligned} a^{vk} &= a \\ a^{v_0k} &= a, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} vk &\equiv 1 \pmod{o(a)} \\ v_0k &\equiv 1 \pmod{o(a)}, \end{aligned}$$

所以

$$o(a) | (v - v_0)k,$$

由此可见 $v - v_0 = 0$ 即 $v = v_0$.

综上, 问题证毕. □

问题 2.4 (P97T4). 证明在群中, ab 与 ba 有相同的阶.

证. 注意到 $ab = b^{-1} \cdot ba \cdot b$, 所以

$$\begin{aligned} ab &= e \\ \iff b^{-1} \cdot ba \cdot b &= e \\ \iff ba &= e, \end{aligned}$$

可见问题得证. \square

问题 2.5 (P97T10). 证明 S_n 由 $n-1$ 个对换 $(12), (13), \dots, (1n)$ 生成, S_n 也可由 $n-1$ 个对换 $(12), (23), \dots, (n-1\ n)$ 生成.

证. ***** \square

问题 2.6 (P97T16). 设 H_1, H_2 是群 G 的两个子群, 证明 $H_1 \cap H_2$ 的任一左陪集是 H_1 的一个左陪集与 H_2 的一个左陪集的交.

证. 若能证明对 $\forall g \in G$ 都有 $g(H_1 \cap H_2) = gH_1 \cap gH_2$, 则问题得证. 证明思路为两者互相包含.

(1) 对 \forall 给定的 $g \in G$, 在 $g(H_1 \cap H_2)$ 中任取 gh_0 , 有

$$\begin{aligned} h_0 &\in H_1 \cap H_2 \\ \implies gh_0 &\in gH_1, gh_0 \in gH_2 \\ \implies gh_0 &\in gH_1 \cap gH_2 \\ \implies g(H_1 \cap H_2) &\subset gH_1 \cap gH_2. \end{aligned}$$

(2) 反之, 对任意给定的 $g \in G$, 在 $gH_1 \cap gH_2$ 中任取 gh_0 , 有

$$\begin{aligned} gh_0 &\in gH_1, gh_0 \in gH_2 \\ \xRightarrow{g \text{ 的任意性}} h_0 &\in H_1, h_0 \in H_2 \\ \implies h_0 &\in H_1 \cap H_2 \\ \implies gh_0 &\in g(H_1 \cap H_2) \end{aligned}$$

$$\implies gH_1 \cap gH_2 \subset g(H_1 \cap H_2).$$

由 (1),(2) 便知 $g(H_1 \cap H_2) = gH_1 \cap gH_2$, 综上, 问题得证. \square

问题 2.7 (P98T18). 设 G 为有限群, $H < G$ 且 $|G/H| = n > 1$. 证明 G 含有指数整除 $n!$ 的非平凡正规子群或者 G 同构于 S_n 的一个子群.

证. ***** \square

问题 2.8 (P98T19). 设 G 为有限群, p 是 $|G|$ 的最小素因子. 证明指数为 p 的子群 (若存在) 必正规.

证. ***** \square

问题 2.9 (P98T21). 证明任一非交换的 6 阶群同构于 S_3 .

证. ***** \square

问题 2.10 (P98T29). 设 G 为有限群, A, B 是 G 的两个非空子集, 如果 $|A| + |B| > |G|$, 则 $AB = G$.

证. ***** \square

问题 2.11 (P98T33). 设 G 是有限群, $N \triangleleft G$, P 为 N 的一个 Sylow 子群, T 为 P 在 G 中的正规化子. 证明 $G = NT$.

证. ***** \square

问题 2.12 (P98T35). 设 G 为有限群, $H < G$, P 是 G 的 Sylow p -子群, $N \triangleleft G$. 证明 $P \cap N$ 是 N 的一个 Sylow p -子群, 同时 PN/N 是 G/N 的一个 Sylow p -子群.

证. ***** \square