

目录

1	代数基本概念	3
1.1	代数运算	3
1.2	群的定义和简单性质	3
1.3	群的例子	5
1.4	子群, 陪集	7
1.5	群的同构	10
1.6	同构, 正规子群	11
1.7	商群	12
1.8	环, 子环	17
1.9	各种特殊类型的环	19
1.10	环的同态, 理想	20
1.11	商环	21
1.12	特征	23
1.13	CHAPTER1 习题	25
2	群	39
2.1	群的同态定理	39
2.2	循环群	48
2.3	单群与 A_n 单性	51

2.4	可解群	52
2.5	群的自同构群	53
2.6	群作用	55
2.7	Sylow 定理	60
2.8	群的直和	67
2.9	么半群	73
2.10	CHAPTER2 习题	73

Chapter 1

代数基本概念

1.1 代数运算

定义 1.1.1 (代数运算). 设 A 是一个非空集合, 任意一个由 $A \times A \longrightarrow A$ 的映射就称为定义在 A 上的代数运算.

1.2 群的定义和简单性质

定义 1.2.1 (群). 设 G 是一个非空集合, 在 G 上定义了一个称之为乘法的代数运算, 记作 ab , 若该代数运算满足如下性质, 就称 G 为一个群

[结合律](1) $(ab)c = a(bc)$;

[左幺元](2) $\exists e \in G$ s.t. $\forall a \in G$, 有 $ea = a$;

[左逆元](3) $\forall a \in G, \exists b \in G$ s.t. $ba = e$.

1. 若 $ba = e$, 则 $ab = e$.

证. 任取 $b \in G$, 存在 $c \in G$, 使得 $cb = e$, 于是

$$a = ea = (cb)a = c(ba) = ce, \quad (1.2.1)$$

在等式(1.2.1)两侧同时右乘 b , 就有

$$ab = (ce)b = c(eb) = cb = e,$$

问题证毕. □

2. 若对所有的 $a \in G$, 有 $ea = a$, 那么也有 $ae = a$, 对所有的 $a \in G$.

证. 取 $b \in G$, 使得 $ba = e$, 同时 $ab = e$, 于是

$$ae = a(ba) = (ab)a = ea = a,$$

问题证毕. □

3. 群 G 中有惟一的元素 e 具有性质

$$\forall a \in G, ea = ae = a.$$

证. 假设 G 中有元素 e_1, e_2 满足此性质, 则

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2,$$

可见惟一性得证. □

4. 对群 G 中任意元素 a , 有惟一元素 b , 使 $ab = ba = e$.

证. 假设在 G 中还有元素 c 满足 $ac = ca = e$, 则

$$c = ec = ce = c(ab) = (ca)b = eb = b,$$

这就证明了惟一性. □

5. 对于群 G 中任意元素 a, b , 方程

$$ax = b$$

在 G 中有惟一解.

证. 在题设方程两侧同时左乘 $a^{-1} \in G$, 有

$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b$$

亦即 $x = a^{-1}b \in G$, 解的存在性得证.

假设还有元素 $c \in G$ 满足 $ac = b$, 则

$$ax = b = ac, \quad (1.2.2)$$

在等式(1.2.2)两侧同时左乘 a^{-1} , 就有

$$(a^{-1}a)x = (a^{-1}a)c \iff x = c,$$

解的惟一性得证.

综上所述, 问题得证. □

定义 1.2.2 (Abel 群 (或交换群)). 若群 G 的运算适合交换律, 则称群 G 为 Abel 群 (或交换群).

定义 1.2.3 (阶). 群 G 中所含元素的个数称为群 G 的阶, 记作 $|G|$.

定义 1.2.4 (有限群与无限群). 若 $|G|$ 是一个有限数 (无限数), 则称群 G 为有限群 (无限群).

1.3 群的例子

本节将不加证明地给出一些常见的群的例子和性质.

定义 1.3.1 (图形 F 对称群, 二面体群). 已知 F 是平面上的一个图形. 令 G_F 为全体保持 F 不变的平面正交变换所成的集合, 则 G_F 在变换的称发下成群, 称为图形 F 的对称群.

若用 T 表示绕 O 旋转 90° , S 表示对于直线 l 的镜面反射, 则不难看出

$$G_F = \{T, T^2, T^3, T^4, ST, ST^2, ST^3, ST^4\},$$

其中 $T^4 = I, S^2 = I, ST = T^{-1}S$ (I 表示恒等映射).

类似地, 若 F 是平面上正 n 边形, 则 F 的对称群 G_F 由 $2n$ 个元素组成. 令 T 为绕中心转 $\frac{2\pi}{n}$, S 为对于某一对称轴的镜面反射, 则有

$$G_F = \{T, T^2, \dots, T^n, ST, ST^2, \dots, ST^n\},$$

其中 $T^n = I, S^2 = I, ST = T^{-1}S$. 称这些群为二面体群记作 D_n .

定义 1.3.2 (对称群 S_n 集合 M 全变换群, n 置换, n 对称群, 不相交的). 若 M 为非空集合, 则 M 到自身的全体可逆变换关于变换的乘法成群, 称该群为集合 M 的全变换群, 记作 $S(M)$. 当 M 是无限集, $S(M)$ 为无限群.

当 M 含有 n 个元素时, M 的可逆变换称为 M 的 n 元置换, $S(M)$ 称为 n 元对称群, 简记为 S_n .

若 M 中的元素用 $1, 2, \dots, n$ 编号后, 则 S 中的元素表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_i = \sigma(i), i = 1, 2, \dots, n$. 易见 n 元置换与 n 阶排列之间存在一一对应, 亦即 $|S| = n!$.

若一个 n 元置换 σ 将 $1, 2, \dots, n$ 中某 m 个数 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 轮换, 即

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha_1) &= \alpha_2, \sigma(\alpha_2) = \alpha_3, \dots \\ \sigma(\alpha_{m-1}) &= \alpha_m, \sigma(\alpha_m) = \alpha_1, \end{aligned}$$

其余的数保持不变, 则称 σ 为轮换, 表示为

$$\sigma = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m).$$

当 $m = 2$ 时, 也称 σ 为对换.

若 S_n 中的两个轮换 $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ 与 $(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_l)$ 满足

$$\alpha_i \neq \beta_j, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, l,$$

则称这两个对换为不相交的.

命题 1.3.1. 非单位的置换能惟一地表成一些不相交的轮换的乘积. \square

1.4 子群, 陪集

定义 1.4.1 (子群). 若群 G 的非空子集合 H 对 G 的运算也成群, 则称群 H 是群 G 的子群, 记作 $H < G$.

定理 1.4.1. 群 G 的非空子集合 H 是群 G 的子群的充分必要条件是

$$\forall a, b \in H \implies ab^{-1} \in H.$$

证. 必要性显然, 接下来证明充分性.

(1) 结合律: 显然满足;

(2) 幺元的存在性: $\forall a \in H$, 取 $b = a$, 则 $e = aa^{-1} \in H$;

(3) 逆元的存在性: $\forall b \in H$, 取 $a = e$, 则 $b^{-1} = eb^{-1} \in H$.

结合 (1), (2), (3) 可得 H 成为群, 进而是群 G 的子群. \square

定义 1.4.2 (左陪集, 右陪集). 设群 H 是群 G 的一个子群, 对 G 中的任意一个元素 a , 称 $aH = \{ah : h \in H\}$ 是 H 的一个左陪集; 称 $Ha = \{ha : h \in H\}$ 是 H 的一个右陪集.

定义 1.4.3 (基数). 若两集合之前存在一个一一对应, 则称这两个集合有相同的基数. 对任意集合 X , 记 X 的基数为 $|X|$.

当 X 为无限集时, 记 $|X| = \infty$; 当 X 为有限集时, 记 $|X|$ 为 X 所含元素的个数.

定义 1.4.4 (商集, 指数). 称群 G 关于子群 H 的所有左陪集 (或右陪集) 组成的集合为群 G 关于子群 H 的左商集 (或右商集), 称它的基数为 H 在 G 中的指数, 记作 $[G:H]$.

定理 1.4.2. 设 G 是群, $H < G$, 则 H 的任意一个左陪集 gH 与 H 含有同样多的元素. 该定理对于右陪集同样成立.

证. 易见 $h \mapsto ah$ 是子群 H 到左陪集 aH 的一个一一对应, $h \mapsto ha$ 是子群 H 到右陪集 Ha 的一个一一对应, 因此定理得证. \square

定理 1.4.3. 设群 H 是群 G 的子群. H 的任意两个左 (右) 陪集要么相等, 要么无公共元素. 群 G 可以表示为若干个不相交的左 (右) 陪集之并.

证. 利用相互包含证明第一个论断: 取 H 的两个左陪集 aH, bH 并假设它们有公共元素, 即有 $ah_1 \in aH, bh_2 \in bH$ 满足

$$ah_1 = bh_2, \quad (1.4.3)$$

等式(1.4.3)两端同时右乘 h_1^{-1} , 有

$$a = bh_2h_1^{-1} \in bH,$$

可见 $aH \subset bH$. 同理可证 $aH \supset bH$, 进而 $aH = bH$. 第一个论断证毕.

第二个论断的证明: 由于 $a \in aH$, 所以

$$G = \bigcup_{a \in G} aH,$$

去掉其中的重复项, 就有

$$G = \bigcup_{\alpha} a_{\alpha}H,$$

其中 $a_\alpha H$ 两两无交. \square

推论 1.4.1 (Lagrange 定理). 设 G 是有限群, H 是它的子群, 则 $|H|$ 是 $|G|$ 的因子.

证. 设 $|G| = n, |H| = t$, 由定理1.4.3可得

$$G = a_1 H \cup a_2 H \cup \cdots \cup a_r H, \quad (1.4.4)$$

其中 $a_i H \cap a_j H = \emptyset (i, j = 1, 2, \cdots, r \text{ 且 } i \neq j)$, 在等式(1.4.4)两侧同时取因子, 并利用定理1.4.2就有

$$|G| = r|H|,$$

从而 $|H|$ 是 $|G|$ 的因子. \square

定义 1.4.5 (由 a 生成的子群). 在群 G 中, 任意一个元素 a 的全体方幂组成的集合 $\{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$ 显然成 G 的子群, 称为由 a 生成的子群.

注 1.4.1. (1) 元素 a 的方幂要么两两不同要么存在 $l \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $a^l = e$;
(2) 在 (1) 的后一种情形中, 一定有最小的正整数 d 满足 $a^d = e$. 此时将 d 称为元素 a 的阶.

推论 1.4.2. 设 G 为一有限群, 则 G 中每一个元素的阶一定是 $|G|$ 的因子.

证. 设 H 是由 G 中的元素 a 生成的子群, 则

$$(i) |a| = |\langle a \rangle| = |H|;$$

$$(ii) H \text{ 是 } G \text{ 的子群} \implies |H| \text{ 整除 } |G|,$$

可见 G 中每一个元素的阶一定是 G 的因子. \square

1.5 群的同构

定义 1.5.1 (群的同构). 若 G, G' 是两个群, $\varphi: g \mapsto g', G \longrightarrow G'$ 是一一对应, 并且满足 $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g'_1) \varphi(g'_2), \quad (1.5.5)$$

则称群 G 同构于群 G' , 记作 $G \cong G'$. 适合等式(1.5.5)的一一对应称为同构映射, 简称同构.

引理 1.5.1. 任意非空集合上的全体可逆变换构成的集合关于变换的乘法成群. \square

定理 1.5.1 (Cayley 定理). 任何一个群都同构于某一集合上的变换群.

证. 设 G 是群. 对每一个 $a \in G$, 定义 G 上的变换 φ_a 如下

$$\varphi_a(x) = ax, x \in G,$$

可见 $\forall x \in G$

$$(i) \varphi_{a^{-1}} \varphi_a(x) = \varphi_{a^{-1}}(ax) = a^{-1}ax = x;$$

$$(ii) \varphi_a \varphi_{a^{-1}}(x) = \varphi_a(a^{-1}x) = aa^{-1}x = x,$$

可见 $\forall a \in G, \varphi_a$ 均是可逆变换. 记 $G_l = \{\varphi_a : a \in G\}$, 于是 $\forall a, b \in G_l$

$$\varphi_a \varphi_{b^{-1}}(x) = \varphi_a(b^{-1}x) = ab^{-1}x = \varphi_{ab^{-1}}(x),$$

即 $\varphi_a \varphi_{b^{-1}} = \varphi_{ab^{-1}} \in G_l$, 根据引理1.5.1与定理1.4.1可得 G_l 成群, 亦即 G_l 是一变换群.

根据 G_l 定义易知映射 $a \mapsto \varphi_a$ 为满映射.

由于

$$\varphi_a(e) = a,$$

所以当 $a \neq b$ 时, $\varphi_a \neq \varphi_b$, 亦即映射 $a \mapsto \varphi_a$ 是单映射. 进而映射 $a \mapsto \varphi_a$ 是一一对应. 再由 $\varphi_a \varphi_b = \varphi_{ab}$ 可知所述映射为同构映射, 从而 $G \cong G_l$, 定理得证. \square

1.6 同构, 正规子群

定义 1.6.1 (同态映射). 若 φ 是群 G 到群 G' 的映射, 满足 $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$$

则称 φ 是群 G 到 G' 的同态映射, 或同态.

注 1.6.1. 在同态映射的定义中, 既不要求它是映上的, 也不要求它是单射.

当 φ 是 G 到 G' 的同态映射时, 常常简记为

$$\varphi : G \mapsto G'.$$

定义 1.6.2 (象). 若 $\varphi : G \mapsto G'$, 定义

$$\varphi G = \{\varphi(a) : a \in G\}$$

为同态映射 φ 的象.

注 1.6.2. (1) 易见 φG 是 G' 的子群;

(2) 若 φ 是映上的, 即 $\varphi G = G'$, 称 φ 为满同态;

(3) 若 φ 是单射, 即 G 与 φG 同构, 亦即 G 与 G' 的一个子群同构, 则称 φ 为单一同态, 或嵌入映射.

定义 1.6.3 (完全反象, 核). 对于同态映射 $\varphi : G \mapsto G'$, 定义

$$\varphi^{-1}(a') = \{a : \varphi(a) = a'\}$$

为元素 a' 的完全反象. 特别地, 定义 $\varphi^{-1}(e')$ 为同态映射 φ 的核, 记作 $\ker \varphi$.

命题 1.6.1. 记 $\varphi(a) = a'$, 则 $\varphi^{-1}(a') = \begin{cases} a \ker(\varphi); \\ \ker(\varphi)a. \end{cases}$

证. (1) 任取 $h \in \ker \varphi$, 有

$$\varphi(ah) \xrightarrow{\text{同态映射}} \varphi(a)\varphi(h) = a'e' = a',$$

这说明 $a \ker \varphi$ 中的元素在映射 φ 下的象均为 a' , 亦即 $a \ker \varphi \subset \varphi^{-1}(a')$;

(2) 反之, 任取 $a \in \varphi^{-1}(a')$, 即 $\varphi(a) = a'$. 又 $e \in \ker \varphi$, 从而

$$a = ae \in a \ker \varphi,$$

这说明在映射 φ 下的象为 a' 的元素在 $a \ker \varphi$ 中, 亦即 $a \ker \varphi \supset \varphi^{-1}(a')$.

由 (1),(2) 可知 $\varphi^{-1}(a) = a \ker(\varphi)$.

同理可证 $\varphi^{-1}(a') = \ker(\varphi)a$. □

定义 1.6.4 (正规子群). 设群 H 是群 G 的子群, 若对任意 $g \in G$, 都有 $gH = Hg$, 则称 H 是 G 的正规子群, 记作 $H \triangleleft G$.

注 1.6.3. (1) 由命题 1.6.1 可知, 同态的核都是正规子群;

(2) 正规子群的定义可以改写为

$$\forall g \in G, gHg^{-1} = H.$$

正规子群的定义换个说法就是子群 H 的左右陪集相等;

(3) 在 *Abel* 群中, 每个子群都正规.

1.7 商群

定义 1.7.1 (群子集合的运算).

1. 定义

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\},$$

子集乘积满足结合律: $(AB)C = A(BC)$;

2. 定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

利用集合运算, 定理1.4.1可改写为

$$\text{群 } G \text{ 的非空子集 } H \text{ 是子群} \iff HH^{-1} \subset H.$$

定理 1.7.1. 设 H 是群 G 的一个子群. H 是正规子群 $\iff H$ 的任意两个左 (右陪集) 之积还是左 (右陪集).

证. (1) 必要性

任取正规子群 H 的两个左陪集 aH 与 bH , 有

$$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = abH,$$

必要性得证;

(2) 充分性

任取 H 的两个左陪集 aH 与 bH , 根据已知条件可设 $(aH)(bH) = cH$, 由于 $ab \in (aH)(bH)$, 所以 $ab \in cH$, 再由 $ab \in abH$ 与定理1.4.3可得

$$abH = cH = (aH)(bH), \quad (1.7.6)$$

等式两端同时左乘 a^{-1} , 有

$$bH = HbH \supset Hbe = Hb,$$

由于 b 具有任意性, 故可以将其改成 b^{-1} , 得到

$$b^{-1}H \supset Hb^{-1},$$

等式两边同时左乘 b , 右乘 b , 得到

$$Hb \supset bH,$$

亦即 $bH = Hb$, 可见 H 是正规子群. □

令 G/H 代表正规子群 H 的全部不同的右陪集组成的集合.

命题 1.7.1. G/H 在陪集的运算下成群.

证. (1) 结合律

由 $(Ha)(Hb) = Hab$ 可见, 陪集之间的乘法可归结为陪集代表的乘法, 故结合律显然成立;

(2) 左幺元

$\forall Ha \in G/H$, 有

$$H \cdot Ha = Ha,$$

可见左幺元存在, 为 H ;

(3) 左逆元

$\forall Ha \in G/H$, 有

$$(Ha^{-1})(Ha) = H(a^{-1}H)a = H(Ha^{-1})a = (HH)(a^{-1}a) = H,$$

可见 G/H 中的任一元都有左逆元.

(1),(2),(3) 说明 G/H 成群, 问题得证. \square

定义 1.7.2 (商群). G/H 在陪集的乘法下所成的群称为群 G 对正规子群 H 的商群, 仍记作 G/H .

命题 1.7.2. 设群 H 是群 G 的正规子群, 定义映射

$$\begin{aligned}\varphi: G &\rightarrow G/H \\ g &\mapsto Hg,\end{aligned}$$

则 φ 是满同态且 $\ker \varphi = H$.

证. (1) $\forall a, b \in G$, 有

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= Hab \\ &= HabH\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=Ha(bH) \\
&=Ha(Hb) \\
&=HaHb \\
&=\varphi(a)\varphi(b) \\
&\implies \varphi \text{ 是同态映射};
\end{aligned}$$

(2) 根据商群的定义, φ 显然是映上的;

(3) 对 $\forall h \in H$, 注意到

$$\begin{aligned}
&\varphi(h) \\
&=hH \\
&=H \\
&=eH,
\end{aligned}$$

可见 $h \in H$, 于是 $\ker \varphi \supset H$. 同时对 $\forall k \in \ker \varphi$, 有

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &=kH \\
&=H,
\end{aligned}$$

所以对任意 $h \in H$, 都有 $kh \in H$, 现取 $h = e$, 所以

$$k = ke \in H,$$

即 $k \in H$, 所以 $\ker \varphi \subset H$.

(1),(2) 说明 $\varphi : G \rightarrow G/H$ 为满同态;(3) 说明 $\ker \varphi = H$. □

注 1.7.1. 由于 $H \triangleleft G$, 所以若定义

$$\begin{aligned}
\varphi : G &\rightarrow G/H \\
g &\mapsto gH,
\end{aligned}$$

则命题1.7.2也成立.

定义 1.7.3 (自然同态). 称命题1.7.2中的 φ 为 $G \rightarrow G/H$ 的自然同态.

注 1.7.2. 由命题1.6.1可知, 同态的核都是正规子群; 自然同态的构造说明每个正规子群也都是某一同态的核.

引理 1.7.1. 若 H 为群 G 的子群, $a, b \in G$, 则

$$b^{-1}a \in H \iff aH = bH;$$

$$ab^{-1} \in H \iff Ha = Hb.$$

证. 只要证明第一条即可, 第二条同理可证.

(1) 必要性

可设 $h \in H$ 满足 $b^{-1}a = h$, 从而 $a = bh \in bH$, 又 $e \in H$ 且 $a = ae$, 故

$$a = ae \in aH$$

$$a \in bH,$$

可见 $aH \cap bH \neq \emptyset$, 进而 $aH = bH$, 必要性得证;

(2) 充分性

等式 $aH = bH$ 两端同时左乘 b^{-1} 有

$$b^{-1}aH = H \implies b^{-1}a \cdot e \in H \iff b^{-1}a \in H,$$

充分性得证. □

定理 1.7.2 (群同态基本定理). 若 $\sigma : G \rightarrow G'$, 则 $G/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$. 进一步, 若 σ 是满同态, 则 $G/\ker \sigma \cong G'$.

证. 设 $\varphi : G \rightarrow G/\ker \sigma$ 是自然同态, 则得到两个满同态 σ 和 φ , 交换图如下:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma} & \text{im } \sigma \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ G/\ker \sigma & & \end{array}$$

其中虚线部分的 ψ 表示我们要找的同构. 定义映射

$$\psi_0(\ker \sigma \cdot a) = \sigma(a),$$

显然 ψ_0 是良定义的.

由于

$$\psi_0(\ker \sigma \cdot a \ker \sigma \cdot b) \stackrel{\ker \sigma \text{ 是正规子群}}{=} \psi_0(\ker \sigma \cdot ab) = \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

所以 ψ_0 是同态映射.

当 $\sigma(a) = \sigma(b)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sigma(a)(\sigma(b))^{-1} &= e' \\ \sigma(ab^{-1}) &= e',\end{aligned}$$

根据引理1.7.1,

$$ab^{-1} \in \ker \sigma \iff b^{-1} \ker \sigma = a^{-1} \ker \sigma,$$

即 $a \ker \sigma = b \ker \sigma$, 亦即 $\ker \sigma \cdot a = \ker \sigma \cdot b$. 可见 ψ_0 为单射.

显然 ψ_0 是满射.

综上所述, ψ_0 是同构映射. 取 $\psi = \psi_0$ 即证明了 $G/\ker \sigma \cong \sigma$.

进一步, 若 σ 是满同态, 则 $G' \cong \text{im } \sigma$, 从而 $G/\ker \sigma \cong G'$. \square

1.8 环, 子环

定义 1.8.1 (环). 设 L 是一个非空集合, 在 L 上定义了两个代数运算, 一个叫加法, 记为 $a + b$, 一个叫乘法, 记为 ab . 若这两种运算具有性质

- (1) L 对于加法构成 *Abel* 群;
- (2) L 对于乘法满足结合律;
- (3) L 满足乘法对加法的分配律,

则称 L 为环.

定义 1.8.2 (子环). 设 S 是环 L 的非空子集合, 若 S 对于 L 的两种运算也成环, 则称环 S 是环 L 的子环.

命题 1.8.1. 环 L 的非空子集合 S 成环的充分必要条件为 S 对于加法是子群且对于乘法封闭.

证. 必要性是显然的, 下面证明充分性.

(1) S 对于加法构成 Abel 群: 任取 $a, b \in S$, 于是 $a, b \in L$, 所以

$$ab \xrightarrow{\text{L对于乘法构成 Abel 群}} ba,$$

可见 S 关于加法构成的子群满足交换律, 所以 S 为 Abel 群;

(2) S 对于乘法满足结合律: 任取 $a, b, c \in S$, 有 $a, b, c \in L$, 所以

$$a(bc) = (ab)c = abc \in S,$$

可见 S 对于乘法满足结合律;

(3) S 满足乘法对于加法的分配律: 任取 $a, b, c \in S$, 有 $a, b, c \in L$, 所以

$$a(b+c) \xrightarrow{\text{L满足乘法对加法的分配律}} ab+ac \in S,$$

可见 S 满足乘法对于加法的分配律. □

定义 1.8.3 (同构映射). 设 L 与 L' 是两个环, 若有 L 到 L' 的一一对应 σ 满足如下性质

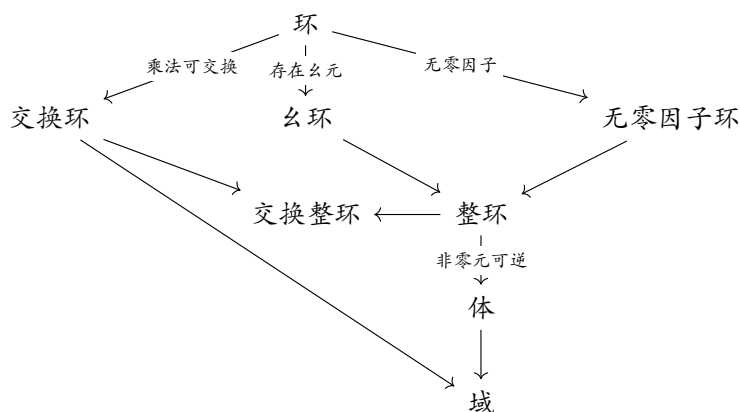
$$(1) \sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b);$$

$$(2) \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

其中 $a, b \in L$, 则称 L 与 L' 同构, 称具有以上性质的 σ 为一个同构映射 (简称同构).

1.9 各种特殊类型的环

命题 1.9.1.



注 1.9.1. 幺元: 设 L 是环. 若 $e \in L$ 满足

$$\forall a \in L, ae = ea = a,$$

则称 e 为环 L 的幺元 (幺元), 简记为 1 ;

用 0 表示环中加法群的幺元 (即零元素);

零因子: 设 L 是环. 若有 $0 \neq a \in L, 0 \neq b \in L$ 满足 $ab = 0$, 则称 a 为一个左零因子, 称 b 为一个右零因子.

引理 1.9.1. 非零元可逆 \Leftrightarrow 无零因子.

证. (1) 非零元可逆 \Rightarrow 无零因子:

设 L 是环且非零元可逆. 假设 $a \in L$ 是 L 的左零因子 (右零因子同理), 则有

$$ab = 0 \text{ 且 } a \neq 0, b \neq 0.$$

设 $c \in L$ 是 a 的逆元, 即

$$ac = ca = 1,$$

于是

$$\begin{aligned}(ca)b &= c(ab) \\ (ca)b &= 1b = b \neq 0 \\ c(ab) &= c0 = 0,\end{aligned}$$

得到矛盾, 从而 L 无零因子, 问题得证.

(2) 无零因子 \nRightarrow 非零元可逆:

如整数环. □

定义 1.9.1 (子域). 若域 F 的子环 S 是域, 则称 S 是域 F 的子域.

1.10 环的同态, 理想

定义 1.10.1 (同态). 设 L, L' 是两个环, σ 是 L 到 L' 的映射. 若对 $\forall a, b \in L, \sigma$ 具有性质

$$\begin{aligned}(1) \sigma(a+b) &= \sigma(a) + \sigma(b); \\ (2) \sigma(ab) &= \sigma(a)\sigma(b),\end{aligned}$$

就称 σ 为环 L 到环 L' 的一个同态映射 (简称同态), 简记为 $\sigma: L \rightarrow L'$.

注 1.10.1. (1) 由同态的定义可以看出 $\sigma(L)$ 是 L' 的子环;

(2) 若 $\sigma(L) = \{0\}$, 称 σ 为零同态;

(3) 若 $\sigma(L) = L'$, 称 σ 为满同态, 称 L' 为 L 的同态象.

定义 1.10.2 (理想). 设 L 成环, $I \subset L$ 为 L 的一个加法子群. 若 $\forall r \in L, \forall a \in I$, 都有

$$ra \in I, ar \in I,$$

就称 I 是 L 的理想 (或双边理想). 若只满足 $ra \in I$ (或 $ar \in I$), 则称 I 是 L 的右 (或左) 理想.

注 1.10.2. 显然 $\{0\}$ 与 L 都是 L 的理想, 称它们为平凡的理想.

1.11 商环

定义 1.11.1 (陪集). 设环 I 是环 L 的理想, I 作为 L 的加法群的子群, 按如下方式定义陪集

$$r + I (\forall r \in L) \text{ 为左陪集}; \quad I + r (\forall r \in L) \text{ 为右陪集},$$

按如下方式定义陪集加法与乘法

$$\begin{aligned} (r_1 + I) + (r_2 + I) &= r_1 + r_2 + I & (\forall r_1, r_2 \in L); \\ (r_1 + I)(r_2 + I) &= r_1 r_2 + I & (\forall r_1, r_2 \in L), \end{aligned}$$

全体陪集所成的集合在这样规定的运算下成环.

定义 1.11.2 (商环). 设环 I 是环 L 的理想. L 对于 I 的陪集在定义 1.11.1 的运算下所成的环称为 L 对于 I 的商环, 记作 L/I .

设环 I 是环 L 的理想. 不难发现 $\sigma(a) = a + I, a \in L$ 是环 L 到商环 L/I 的满同态, 且该同态的核为理想 I . 可见每个理想都是某一同态的核.

引理 1.11.1. 设 $\sigma : L \rightarrow L'$, 则 $\ker \sigma$ 是 L 的理想.

证. 对 $\forall a \in \ker \sigma, \forall b \in L$, 有

$$\begin{aligned} \sigma(ab) &\stackrel{\sigma \text{ 是同态}}{=} \sigma(a)\sigma(b) = 0\sigma(b) = 0 \implies ab \in \ker \sigma; \\ \sigma(ba) &\stackrel{\sigma \text{ 是同态}}{=} \sigma(b)\sigma(a) = \sigma(b)0 = 0 \implies ba \in \ker \sigma, \end{aligned}$$

可见 $\ker \sigma$ 是 L 的理想. □

定理 1.11.1 (环同态基本定理). 若 $\sigma : L \rightarrow L'$, 则 $L/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$. 进一步, 若 σ 是满同态, 则 $L/\ker \sigma \cong L'$.

证. 设 $\varphi : L \rightarrow L/\ker \sigma$ 是自然同态, 则得到两个满同态 σ 和 φ , 交换图如下:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\sigma} & \text{im } \sigma \\
 \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\
 L/\ker \sigma & &
 \end{array}$$

其中虚线部分的 ψ 表示我们要找的同构. 定义映射

$$\psi_0(\ker \sigma + a) = \sigma(a),$$

显然 ψ_0 是良定义的.

对 $\forall a, b \in L$, 有

$$\begin{aligned}
 \psi_0[(\ker \sigma + a) + (\ker \sigma + b)] &\stackrel{\ker \sigma \text{ 是理想}}{=} \psi_0(\ker \sigma + a + b) \\
 &= \sigma(a + b) \\
 &\stackrel{\sigma \text{ 是同态}}{=} \sigma(a) + \sigma(b) \\
 &= \psi_0(\ker \sigma + a) + \psi_0(\ker \sigma + b),
 \end{aligned}$$

由此可见 ψ_0 保持加法;

$$\begin{aligned}
 \psi_0[(\ker \sigma + a)(\ker \sigma + b)] &\stackrel{\ker \sigma \text{ 是理想}}{=} \psi_0(\ker \sigma + ab) \\
 &= \sigma(ab) \\
 &\stackrel{\sigma \text{ 是同态}}{=} \sigma(a)\sigma(b) \\
 &= \psi_0(\ker \sigma + a)\psi_0(\ker \sigma + b),
 \end{aligned}$$

由此可见 ψ_0 保持乘法, 于是 $\psi_0 : L/\ker \sigma \rightarrow \text{im } \sigma$.

对 $\forall \sigma(a) = \sigma(b)$, 有

$$\begin{aligned}
 \sigma(a) - \sigma(b) &= 0 \\
 \stackrel{\sigma \text{ 是同态}}{\implies} \sigma(a - b) &= 0 \\
 \implies a - b &\in \ker \sigma \\
 \stackrel{\text{引理1.7.1}}{\implies} \ker \sigma + a &= \ker \sigma + b
 \end{aligned}$$

$\implies \psi_0$ 是单射.

ψ_0 显然是满射.

综上所述, ψ_0 是同构映射. 取 $\psi = \psi_0$ 即证明了 $L/\ker \sigma \cong \text{im } \sigma$.

进一步, 若 σ 是满同态, 则 $L' \cong \text{im } \sigma$, 从而 $L/\ker I \cong L'$. \square

1.12 特征

设 F 是域, e 是 F 中的么元. 若 e 是有限阶元素, 即存在正整数 m 使得 $me = 0$, 则将 m 定义为 F 的么元在 F 的加法群中的阶. 显然 m 一定是素数.

定义 1.12.1 (特征). 设 F 是域. 若 F 的么元 e 在 F 的加法群中是有限阶元素, 阶为 p , 就称域 F 的特征为 p . 若么元是无限阶元素, 就称域 F 的特征为 0. 域 F 的特征记为 $\chi(F)$.

命题 1.12.1. 在域的加法群中, 任一非零元素都与么元有相同的阶.

证. 设 a 是域 F 的任一非零元, 由

$$ma = mae \xrightarrow{\text{ae乘法可交换}} a(me)$$

可知, $ma = 0$ 当且仅当 $me = 0$, 问题得证. \square

定理 1.12.1. 设 F 为域. 若 $\chi(F) = p \neq 0$, 则 F 包含与 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 同构的子域; 若 $\chi(F) = 0$, 则 F 包含与有理数域同构的子域.

证. 首先按如下方式定义整数环到 F 的映射 σ

$$\sigma(n) = ne.$$

注意到 $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(n+m) = (n+m)e = ne + me;$$

$$\sigma(nm) = (nm)e = (ne)(me) = \sigma(n)\sigma(m),$$

于是 $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow F$.

(1) 若 $\chi(F) = p \neq 0$, 令 $\sigma(n) = 0$, 有

$$0 = \sigma(n) = ne \iff n \in p\mathbb{Z},$$

可见 $\ker \sigma = p\mathbb{Z}$. 易见

$$\operatorname{im} \sigma = \{e, 2e, \dots, (p-1)e, 0\} \subset F,$$

不难验证 $\operatorname{im} \sigma$ 构成域 F 的子域. 根据环同态基本定理 (定理1.11.1), 有

$$F/p\mathbb{Z} \cong \operatorname{im} \sigma.$$

(2) 若 $\chi(F) = 0$, 令 $\sigma(n) = e$ 可推出 $n = 0$, 即 $\ker \sigma = \{0\}$, 所以 σ 是单射. 易见

$$\operatorname{im} \sigma = \{ne \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

与整数环 \mathbb{Z} 同构. 按如下方式扩充 σ 的定义

$$\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = (ne)^{-1}(me),$$

由于当 $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ 时

$$(ne)^{-1}(me)^{-1} = (n'e)^{-1}(m'e)^{-1} \iff \sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \sigma\left(\frac{m'}{n'}\right),$$

所以这是良定义的. 易见

$$\operatorname{im} \sigma = \{(ne)^{-1}me : n \in \mathbb{Z} \text{ 且 } n \neq 0; m \in \mathbb{Z}\} \subset F$$

构成 F 的子域, 而 $\operatorname{im} \sigma \cong \mathbb{Q}$, 亦即 F 有一个同构于有理数域 \mathbb{Q} 的子域.

综上所述, 问题得证. \square

1.13 CHAPTER1 习题

问题 1.1 (P54T7). 设 G 是群, $a, b \in G$. 若 $a^{-1}ba = b^r (r \in \mathbb{N}_+)$, 证明 $a^{-i}ba^i = b^{r^i} (1, 2, \dots)$.

证. 使用数学归纳法.

(1) 题设条件已经说明, 当 $i = 1$ 时结论成立;

(2) 假设当 $i = n$ 时结论成立即 $a^{-n}ba^n = b^{r^n}$, 于是

$$\begin{aligned} a^{-(n+1)}ba^{n+1} &= a^{-1}(a^{-n}ba^n)a \\ &= a^{-1}b^{r^n}a \\ &= (a^{-1}ba)^{r^n} \\ &= (b^r)^{r^n} \\ &= b^{r^{n+1}}, \end{aligned}$$

可见当 $i = n + 1$ 时结论也成立.

综上所述, 问题得证. □

问题 1.2 (P54T8). 证明: 群 G 为交换群 \iff 映射 $x \mapsto x^{-1}$ 为同构映射.

证. 设 $\varphi: G \rightarrow G', x \mapsto x^{-1}$, 不难发现 $G = G'$.

(1) 必要性:

令 $\varphi(x) = e$, 有 $x^{-1} = e \implies x = e \implies \ker \varphi = \{e\}$, 可见 φ 是单射;

$\forall x \in G' = G, \exists x^{-1} \in G$ 满足 $\varphi(x^{-1}) = x$, 可见 φ 是满射;

$\forall x, y \in G$, 有

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \\ &\stackrel{G \text{ 是交换群}}{=} x^{-1}y^{-1} \\ &= \varphi(x)\varphi(y), \end{aligned}$$

于是 φ 是同态.

必要性得证.

(2) 充分性:

$\forall x, y \in G$, 有 $x^{-1}, y^{-1} \in G$, 并且

$$\begin{aligned}\varphi(x^{-1}y^{-1}) &\stackrel{\varphi \text{是同态}}{=} \varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1}) \\ \implies yx &= xy \\ \implies G &\text{是交换群.}\end{aligned}$$

充分性得证.

综上所述, 问题得证. □

问题 1.3 (P54T9). 设 S 为群 G 的非空子集合, 在 G 中定义关系 $a \sim b$ 当且仅当 $ab^{-1} \in S$. 证明这是等价关系的充要条件为 S 为 G 的子群.

证. 先给出等价关系的定义.

称满足如下三条性质的关系 \sim 为等价关系

- (i) 反身性: $a \sim a$;
- (ii) 对称性: 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$;
- (iii) 传递性: 若 $a \sim b, b \sim c$, 则 $a \sim c$.

(1) 必要性:

对 $\forall a, b \in S$ 亦即 $ae^{-1}, be^{-1} \in S$, 有

$$ae^{-1}(be^{-1})^{-1} \in S,$$

即 $ab^{-1} \in S$, 可见 $S < G$.

必要性得证.

(2) 充分性:

由于 S 非空, 所以 $\forall s \in S$, 有

$$ss^{-1} \in S,$$

即 $s \sim s$, 反身性得证;

任取 $a \in S$, 由于 S 成群, 所以 $a^{-1} \in S$, 进而若 $a \sim b$ 即 $ab^{-1} \in S$ 即 $a \sim b$, 有

$$ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in S,$$

即 $b \sim a$, 对称性得证;

设 $a \sim b, b \sim c$ 即 $ab^{-1} \in S, bc^{-1} \in S$, 由 S 成群可知

$$(ab^{-1})(bc^{-1}) \in S,$$

即 $a \sim c$, 传递性得证.

充分性得证.

综上所述, 问题证毕. □

问题 1.4 (P55T20). 设群 H, K 为群 G 的子群, 证明 HK 为 G 的子群当且仅当 $HK = KH$.

证. (1) 必要性

按以下方式定义从 HK 到 HK 的一一对应 φ_1

$$\varphi_1(hk) = (hk)^{-1}, \forall hk \in HK.$$

注意到 $\text{im } \varphi_1 = HK$, 并且

$$(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH,$$

即 $HK = \text{im } \varphi_1 \subset KH$. 同理, 按以下方式定义 KH 到 KH 的一一对应 φ_2 可证 $KH \subset HK$

$$\varphi_2(kh) = k^{-1}h^{-1}, \forall kh \in KH.$$

由 $HK \subset KH$ 及 $KH \subset HK$ 可得 $HK = KH$, 必要性得证.

(2) 充分性

对任意 $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$, 有

$$\begin{aligned} h_1k_1(h_2k_2)^{-1} &= h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1(k_1k_2^{-1}h_2^{-1}), \end{aligned}$$

而

$$k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH = HK,$$

所以 $h_1k_1(h_2k_2)^{-1} \in HK$, 亦即

$$\forall a, b \in HK \implies ab^{-1} \in HK,$$

可见 $HK < G$, 充分性得证.

综上所述, 问题证毕. □

问题 1.5 (P56T28). 在整数集 \mathbb{Z} 上重新定义加法与乘法为

$$a \oplus b = ab, \quad a \odot b = a + b.$$

试问 \mathbb{Z} 在新定义的运算下是否成环.

解. 不能成环, 理由如下.

假设 \mathbb{Z} 在新定义的运算下成环, 则 \mathbb{Z} 关于加法成交换群. 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$1 \oplus n = 1 \cdot n = n,$$

所以 \mathbb{Z} 在新定义的运算下, 关于加法的所成的交换群中的么元是 1. 注意到 $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$0 \oplus m = 0 \cdot m = 0 \neq 1,$$

所以在此加法群中, 0 无逆元, 这与 \mathbb{Z} 关于加法成交换群矛盾, 所以 \mathbb{Z} 在新定义的运算下不成环. □

问题 1.6 (P56T29). 设 L 为有么元的交换环, 在 L 中定义

$$a \oplus b = a + b - 1,$$

$$a \odot b = a + b - ab.$$

证明在新定义的运算下, L 仍为有么元的交换环, 并且与原来的环同构.

证. (1) 对任意 $a, b, c \in L$

$$\begin{aligned} & (a \oplus b) \oplus c \\ &= (a + b - 1) \oplus c \\ &= (a + b - 1) + c - 1 \\ &= a + b + c - 2 \\ &= a + (b + c - 1) - 1 \\ &= a + (b \oplus c) - 1 \\ &= a \oplus (b \oplus c), \end{aligned}$$

L 关于 \oplus 满足结合律;

(2) 对任意 $a \in L$

$$\begin{aligned} & 1 \oplus a \\ &= 1 + a - 1 \\ &= a, \end{aligned}$$

L 关于 \oplus 有么元;

(3) 对任意 $a \in L$

$$\begin{aligned} & (-a) \oplus a \\ &= -a + a - 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

L 中的元素关于 \oplus 有逆元;

(4) 对任意 $a, b \in L$

$$\begin{aligned} & a \oplus b \\ &= a + b - 1 \\ &= b + a - 1 \\ &= b \oplus a, \end{aligned}$$

L 关于 \oplus 可交换;

(5) 对任意 $a, b, c \in L$

$$\begin{aligned} & (a \oplus b) \odot c \\ &= (a + b - 1) \odot c \\ &= (a + b - 1) + c - (a + b - 1)c \\ &= a + b + 2c - ac - bc - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a \odot c) \oplus (b \odot c) \\ &= (a \odot c) + (b \odot c) - 1 \\ &= (a + c - ac) + (b + c - bc) - 1 \\ &= a + b + 2c - ac - bc - 1, \end{aligned}$$

L 满足 \odot 对于 \oplus 的分配律;

(6) 对任意 $a, b \in L$

$$\begin{aligned} & a \odot b \\ &= a + b - ab \\ &= b + a - ba \\ &= b \odot a, \end{aligned}$$

L 关于 \odot 满足交换律;

(7) 对任意 $a \in L$, 存在 $0 \in L$ 满足

$$\begin{aligned} & 0 \odot a \\ &= 0 + a - 0a \\ &= a, \end{aligned}$$

L 关于 \odot 有么元.

(1)~(7) 说明 L 成有么元的交换环, 其中零元为 1, 么元为 0.

定义 φ 为 $(L; +, \cdot) \rightarrow (L; \oplus, \odot)$ 的映射

$$\varphi(x) = 1 - x,$$

显然 φ 为双射.

注意到

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= 1 - x - y, \\ \varphi(x) \oplus \varphi(y) &= (1 - x) \oplus (1 - y) \\ &= (1 - x) + (1 - y) - 1 = 1 - x - y, \end{aligned}$$

即 $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$;

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= 1 - xy, \\ \varphi(x) \odot \varphi(y) &= (1 - x) \odot (1 - y) \\ &= (1 - x) + (1 - y) - (1 - x)(1 - y) \\ &= 2 - x - y - (1 - y - x + xy) \\ &= 1 - xy, \end{aligned}$$

即 $\varphi(xy) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$. 可见 φ 是同态映射.

综上所述, $\varphi: (L; +, \cdot) \rightarrow (L; \oplus, \odot)$ 为同构映射, 问题得证.

□

问题 1.7 (P56T30). 给环出 L 与它的子环 S 的例子, 它们分别具有下列性质

- (1) L 有幺元, S 无幺元;
- (2) L 无幺元, S 有幺元;
- (3) L, S 均有幺元, 但不相同;
- (4) L 不交换, S 交换.

解. (1) $L = (\mathbb{Z}; +, \cdot), S = (2\mathbb{Z}; +, \cdot)$.

(1.1) 对于 L :

$$(1.1.1) \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$(a + b) + c = a + b + c = a + (b + c),$$

可见 $(\mathbb{Z}; +)$ 满足结合律;

$$(1.1.2) \forall a \in \mathbb{Z}, \exists 0 \in \mathbb{Z} \text{ 满足}$$

$$0 + a = a,$$

可见 $(\mathbb{Z}; +)$ 存在左幺元;

$$(1.1.3) \forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z} \text{ 满足}$$

$$-a + a = 0,$$

可见 $(\mathbb{Z}; +)$ 中的任意元素都有左逆元;

$$(1.1.4) \forall a, b \in \mathbb{Z}, \text{ 有}$$

$$a + b = b + a \in \mathbb{Z},$$

可见 $(\mathbb{Z}; +)$ 满足交换律;

$$(1.1.5) \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ 有}$$

$$a(b + c) = ab + ac,$$

可见 $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ 满足乘法对于加法的分配律.

(1.1.1)~(1.1.5) 说明 $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ 成环. 注意到 $\forall a \in \mathbb{Z}$, 有 $1 \in \mathbb{Z}$ 满足

$$1 \cdot a = a,$$

所以 $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ 有么元 1.

(1.2) 对于 S :

同理可证 S 成环. 假设 S 有么元 e , 则 $\forall s \in S$

$$es = s,$$

现取 $n \in \mathbb{Z}$ 且 $m \neq 0$, 则 $2n \in 2\mathbb{Z}$ 且

$$e(2n) = 2n \xrightarrow{\text{等式两端同时除以 } 2n} e = 1 \notin 2\mathbb{Z},$$

这与 $e \in S$ 矛盾, 所以 S 没有么元.

(2)

$$L = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

(2.1) 对于 L :

(2.1) 容易验证 L 成环. 令 $e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ 满足

$$\begin{cases} e \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \text{对任意 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 均成立}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 = a \\ bx_1 = b \\ ax_3 = 0 \\ bx_4 = 0 \\ ax_1 + bx_3 = a \\ ax_2 + bx_4 = b \\ ax_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \end{cases} \quad \text{对任意 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 均成立,}$$

解之可得

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin L,$$

亦即 L 没有幺元.

容易验证 S 成环. 注意到 $\forall s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S, \exists e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ 满足

$$es = se = s,$$

所以 S 有幺元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3)

$$L = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

取 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 验证它们分别是 L 与 S 中的幺元即可.

(4)

$$L = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right), S = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}; +, \cdot \right).$$

(4.1) 对于 L :

$$\text{令 } l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in L, \text{ 易见}$$

$$l_1 l_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = l_2 l_1,$$

于是 L 不交换.

(4.2) 对于 S :

$$\text{任取 } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S, \text{ 注意到}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以 S 交换. □

问题 1.8 (P56T31). 环 L 中元素 e_L 称为左么元, 若对 $\forall a \in L$

$$e_L a = a;$$

元素 e_R 称为右么元, 若对 $\forall a \in L$

$$e_R a = a;$$

证明

- (1) 若 L 既有左单位又有右单位, 则 L 有么元;
 (2) 若 L 有左单位, 无零因子, 则 L 有么元;
 (3) 若 L 有左单位, 无右单位, 则 L 至少有两个左单位.

证. (1) 由

$$e_L e_R = \begin{cases} e_R (e_L \text{ 是左么元}); \\ e_L (e_R \text{ 是右么元}) \end{cases}$$

可知 $e_L = e_R$, 所以 L 有么元;

(2) 在等式 $e_L a = a$ 两端同时左乘 a 可得

$$\begin{aligned} a e_L a &= a^2 \\ \implies (a e_L - a) a &= 0 \\ \implies a e_L - a &= 0 \\ \implies a e_L &= a, \end{aligned}$$

可见 L 有么元;

(3) 设 e_L 为 L 的一个左单位, 由于 L 无右单位, 所以 $\exists x \in L$, 满足

$$\begin{aligned} x e_L &\neq x \\ \implies x e_L - x + e_L &\neq e_L. \end{aligned}$$

注意到 $\forall a \in L$

$$(x e_L - x + e_L) a = a,$$

所以 $x e_L - x + e_L$ 是异于 e_L 的左单位, 所以 L 至少有两个左单位. □

问题 1.9 (P56T32). 设 F 为域. 证明 F 无非平凡的理想.

证. 设 $I \neq \emptyset$ 是 F 的理想. 首先证明 I 一定含有零元.

对 $\forall a \in I$, 若 a 是零元, 则显然 I 含有零元; 若 a 不是零元, 由

$$a \in I \subset F$$

可知 a 在 F 中存在逆元 $-a$, 于是由理想的定义可知

$$0 = a + (-a) \in I,$$

所以 I 有零元.

由理想的定义有 $\forall f \in F$

$$f = 0 + f \in I,$$

所以 $F \subset I$, 从而 $F = I$. 可见域 F 没有非平凡的理想. \square

问题 1.10 (P57T35). 设 L 为有么元的交换环. 若 L 无非平凡的理想, 则 L 为域.

证. 由命题1.9.1与引理1.9.1可知, 若能证明 L 的非零元可逆, 便能推出 L 为域.

任取 $0 \neq a \in L$, 令

$$La = \{la : l \in L\},$$

首先证明 La 是 L 的加法子群.

对 $\forall l_1 a, l_2 a \in La$, 有

$$l_1 a - l_2 a = (l_1 - l_2)a,$$

注意到 $l_1 - l_2 \in L$, 于是

$$(l_1 - l_2)a \in La \implies l_1 a - l_2 a \in La,$$

所以 La 是 L 的加法子群.

然后证明 La 是 L 的理想. 对 $\forall la \in La, b \in L$, 注意到 $bl, lb \in L, ab = ba$, 所以

$$lab = l(ab) = l(ba) = lba \in La$$

$$bla \in La,$$

所以 La 是 L 的理想. 因为 $La \neq \emptyset$ 且 L 没有非平凡的理想, 所以 $La = L$.

最后证明 L 即 La 是域. 由于 $1 \in L = La$, 所以

$$\exists b \in L \text{ s.t. } ba = 1,$$

所以 a 有逆元 b , 亦即 L 的非零元均有逆元, 从而 L 是域. 问题证毕. \square

Chapter 2

群

2.1 群的同态定理

定理 2.1.1 (群的第一同构定理). 设 G 是群, $H < G$, $N \triangleleft G$, 则

$$(1) HN < G$$

$$(2) H \cap N \triangleleft H \text{ 且 } H/H \cap N \cong HN/N.$$

证. (1) 的证明

$$HN < G \iff$$

$$(i) HN \text{非空}$$

$$(ii) \forall a, b \in HN \implies ab^{-1} \in HN.$$

HN 显然非空. 对任意 $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$ 注意到

$$\begin{aligned} & h_1n_1(h_2n_2)^{-1} \\ &= h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1h_2^{-1}(h_2n_1n_2^{-1}h_2^{-1}). \end{aligned}$$

由于 $N \triangleleft G$, 所以 $\forall g \in G, gNg^{-1} \in N$, 又 $h_2 \in H \subset G$, 所以

$$h_1 h_2^{-1} (h_2 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1}) \in N,$$

从而

$$h_1 n_1 (h_2 n_2)^{-1} \in N,$$

于是 $HN < G$.

(2) 的证明

定义映射

$$\varphi : H \rightarrow HN/N$$

$$h \mapsto hN,$$

显然这是良定义的. 对 $\forall h_1, h_2 \in H$

$$\begin{aligned} \varphi(h_1 h_2) &= h_1 h_2 N \\ &= h_1 N h_2 N \\ &= \varphi(h_1) \varphi(h_2), \end{aligned}$$

可见 φ 是同态映射, 所以由群同态基本定理 (定理1.7.2)

$$H/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi.$$

注意到

$$\begin{aligned} h &\in \ker \varphi \\ \iff hN &= N \\ \iff h &\in N \\ \stackrel{h \in H}{\iff} h &\in H \cap N, \end{aligned}$$

所以 $\ker \varphi = H \cap N$, 从而

$$\begin{aligned} H \cap N &\triangleleft H \\ H/H \cap N &\cong \operatorname{im} \varphi. \end{aligned}$$

对 $\forall hnN \in HN/N$, 有

$$hnN = hN,$$

所以 $\exists h \in H$ s.t.

$$\varphi(h) = hnN,$$

所以 φ 是满同态, 从而

$$\operatorname{im} \varphi = HN/N,$$

所以

$$H/H \cap N \cong HN/N.$$

□

注 2.1.1. 类似可以证明: 若 $H < G, N \triangleleft G$, 有

- (1) $NH < G$
- (2) $H \cap N \triangleleft H$ 且 $H/H \cap N \cong NH/N$.

定理 2.1.2 (群的第二同构定理). 设 G 是群. 若 $N \triangleleft G, H \triangleleft G$ 并且 $N \subset H$, 则

- (1) $H/N \triangleleft G/N$
- (2) $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

证. (1) 的证明

定义映射

$$\begin{aligned}\varphi : G/N &\rightarrow G/H \\ gN &\mapsto gH,\end{aligned}$$

显然 φ 是良定义的. 对 $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned}\varphi(g_1Ng_2N) & \\ \stackrel{N \triangleleft G}{=} \varphi(g_1g_2N) & \\ = g_1g_2H & \\ \stackrel{H \triangleleft G}{=} g_1Hg_2H & \\ = \varphi(g_1N)\varphi(g_2N), &\end{aligned}$$

可见 φ 是同态映射, 所以由群同态基本定理 (定理1.7.2)

$$(G/N)/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi.$$

注意到

$$\begin{aligned}gN &\in \ker \varphi \\ \iff gH &= H \\ \iff g &\in H \\ \iff gN &\in H/N,\end{aligned}$$

可见 $\ker \varphi = H/N$, 所以

$$\begin{aligned}H/N &\triangleleft G/N \\ (G/N)/(H/N) &\cong \text{im } \varphi.\end{aligned}$$

(2) 的证明

对 $\forall gH \in G/H, \exists g \in G$ s.t.

$$\varphi(gN) = gH,$$

可见 φ 是满同态, 进而

$$\text{im } \varphi = G/H,$$

所以

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

□

注 2.1.2. 习惯上将群同态基本定理 (定理1.7.2), 群的第一同构定理 (定理2.1.1), 群的第二同构定理 (定理2.1.2) 统称为群的同态定理.

定理 2.1.3. 若 G 是群, $N \triangleleft G$, 则 G 的所有包含 N 的子群与 G/N 的所有子群之间存在一一对应.

证. 取自然同态

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow G/N \\ g &\mapsto gN, \end{aligned}$$

则问题转化为证明在集合 A 与 B 之间存在一一对应, 其中

$$\begin{aligned} A &= \{H : H < G, H \supset \ker \pi\} \\ B &= \{H' : H' < \text{im } \pi\}. \end{aligned}$$

设 $H \in A$, π_H 为映射 π 在子群 H 上的限制, 容易验证 $\text{im } \pi_H \in B$. 定义映射

$$\varphi : A \rightarrow B$$

$$H \mapsto \text{im } \pi_H,$$

容易验证 φ 是良定义. 若能证明 φ 是一一对应, 则问题证毕.

(1) φ 是满射

$\forall H' < \text{im } \pi$ 即

$$H' = \{\pi(k) : k \in K \subset G\}.$$

注意到

H' 成群

$$\iff \forall \pi(k_1), \pi(k_2) \in H' \implies \pi(k_1)[\pi(k_2)]^{-1} \in H'$$

$$\iff \forall \pi(k_1), \pi(k_2) \in H' \implies \pi(k_1 k_2^{-1}) \in H'$$

$$\iff \forall k_1, k_2 \in K \implies k_1 k_2^{-1} \in K$$

$$\iff K < G,$$

所以

$$H' = \{\pi(k) : k \in K < G\}. \quad (2.1.1)$$

注意到

$$\forall t \in \ker \pi \implies \pi(t) = e \in H',$$

因此不妨让式(2.1.1)中的 K 包含 $\ker \pi$, 即

$$\begin{aligned} H' &= \{\pi(k) : k \in K < G, K \supset \ker \pi\} \\ &= \text{im } \pi_K(K < G, K \supset \ker \pi), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} B &= \{\text{im } \pi_K : K < G, K \supset \ker \pi\} \\ &= \{\text{im } \pi_H : H < G, H \supset \ker \pi\} \end{aligned}$$

$$= \{ \text{im } \pi_H : H \in A \},$$

由此可见 $\text{im } \varphi = B$, 即 φ 是满同态;

(2) φ 是单射

$$\begin{aligned} &\iff \forall x_1, x_2 \in A, \text{若 } x_1 \neq x_2, \text{则 } \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) \\ &\iff |\{x \in A : \varphi(x) = \varphi(x_0), x_0 \in A\}| = 1 \\ &\iff |\{H \supset N : \text{im } \pi|_H = \text{im } \pi|_{H_0}, H_0 \supset A\}| = 1 \\ &\iff \{H \supset N : \text{im } \pi|_H = \text{im } \pi|_{H_0}, H_0 \supset A\} = \{H_0\} \\ &\iff \text{若 } H_0 \supset N, H \supset N \text{ 且 } \text{im } \pi|_H = \text{im } \pi|_{H_0}, \text{ 则 } H = H_0, \quad (2.1.2) \end{aligned}$$

注意到在(2.1.2)的题设条件下, 显然有 $H \supset H_0$, 故只需证明 $H \subset H_0$ 便可得到 $H = H_0$.

在(2.1.2)的题设条件下

$$\begin{aligned} &\forall h \in H, \exists h_0 \in H_0 \text{ s.t. } \pi(h) = \pi(h_0) \\ &\iff \forall h \in H, \exists h_0 \in H_0 \text{ s.t. } hN = h_0N \\ &\iff \forall h \in H, \exists h_0 \in H_0 \text{ s.t. } h \in h_0N \subset H_0 \\ &\implies H \subset H_0. \end{aligned}$$

所以 φ 是单射.

由 (1),(2) 便知

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightarrow B \\ H &\mapsto \text{im } \pi_H \end{aligned}$$

为一一对应, 问题得证. □

定义 2.1.1 (由 S 生成的群). 设 G 是群, S 是 G 的非空子集合. G 的包含 S 的最小的子群, 称为由 S 生成的群, 记作 $\langle S \rangle$, 即

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H \leq G} H.$$

命题 2.1.1. 设 (G, \cdot) 是群. 若 S 是 G 的非空子集合, 则

$$\langle S \rangle = \left(\left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}, \cdot \right),$$

即集合 $S \cup S^{-1}$ 中任意多个元素的乘积组成的集合关于 \cdot 构成 $\langle S \rangle$.

证. 容易验证群 G 的子集合 $\left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}$ 关于群 G 的乘法成群, 记此群为 A . 注意到 A 包含 S , 所以 A 包含: 包含 S 的最小的子群, 即 $A \supset \langle S \rangle$.

反之, 对 $\forall a \in A$ 有

$$a = \left(\prod_{\alpha \in \Lambda_1} s_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \Lambda_2} s_\beta \right),$$

其中

$$s_\alpha \in S \subset \langle S \rangle, \alpha \in \Lambda_1$$

$$s_\beta \in S^{-1}, \beta \in \Lambda_2,$$

注意到 $s_\beta^{-1} \in S \subset \langle S \rangle, \beta \in \Lambda_2$, 而 $\langle S \rangle$ 成群, 从而

$$\begin{aligned} s_\beta &= (s_\beta^{-1})^{-1} \in \langle S \rangle, \beta \in \Lambda_2 \\ \Rightarrow a &= \left(\prod_{\alpha \in \Lambda_1} s_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \Lambda_2} s_\beta \right), \end{aligned}$$

可见 $A \subset \langle S \rangle$.

综上, $A = \langle S \rangle$, 即

$$\langle S \rangle = \left(\left\{ \prod_{k=1}^m x_k : x_1, \dots, x_m \in S \cup S^{-1}, m \in \mathbb{N}_+ \right\}, \cdot \right).$$

□

定义 2.1.2 (有限生成的, 循环群). 设 G 是群. 若 $\langle S \rangle = G$, 则称 S 为 G 的一组生成元. 若 G 中存在一有限集合 S 使得 $\langle S \rangle = G$, 则称 G 为有限生成的. 由一个元素生成的群称为循环群.

命题 2.1.2. 有限群一定是有限生成的, 反之未必成立.

证. 设 G 是有限群, $m = |G| \in \mathbb{N}_+$, 则 G 所含元素的个数为 m . 取

$$S = \{g_1, g_2, \dots, g_m : g_k \text{ 是 } G \text{ 中两两不同的元素}, k = 1, 2, \dots, m\},$$

则

$$G = \langle S \rangle,$$

第一个论断证毕;

注意到

$$\begin{aligned} |(\mathbb{Z}, +)| &= \infty \\ (\mathbb{Z}, +) &= \langle \{1\} \rangle, \end{aligned}$$

所以第二个论断证必. □

定义 2.1.3 (换位子, 换位子群). 对 $\forall a, b \in G$, 元素 $a^{-1}b^{-1}ab$ 称为群 G 中元素 a, b 的换位子, 简记为 $[a, b]$. 由所有换位子生成的群称为 G 的换位子群, 记作 $G^{(1)}$.

命题 2.1.3. 已知 $\varphi : G \rightarrow G'$ 是同态映射, 有以下结论成立

- (1) 若 G 是 Abel 群, 则 $\text{im } \varphi$ 是 Abel 群;
- (2) 虽 $\text{im } \varphi$ 是 Abel 群, 但 G 未必是 Abel 群;
- (3) $\text{im } \varphi$ 是 Abel 群 $\iff G^{(1)} \subset \ker \varphi$.

证. (1)

对 $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\overline{\varphi \text{ 是同态映射}}} \varphi(g_1 g_2) \\
& \overline{\overline{G \text{ 是 Abel 群}}} \varphi(g_2 g_1) \\
& = \varphi(g_2) \varphi(g_1),
\end{aligned}$$

可见 $\text{im } \varphi$ 是 Abel 群.

(2)

令

$$G = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ 且 } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right\}, \cdot \right)$$

$$\varphi : G \rightarrow G'$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

不难得到上述定义的 G 与 φ 证明了 (2).

(3)

$\text{im } \varphi$ 是 Abel 群

$$\begin{aligned}
& \Longleftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1) \varphi(g_2) = \varphi(g_2) \varphi(g_1) \\
& \Longleftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G, [\varphi(g_2) \varphi(g_1)]^{-1} \varphi(g_1) \varphi(g_2) = e \\
& \Longleftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2) = e \\
& \Longleftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G, g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 \in \ker \varphi \\
& \Longleftrightarrow G^{(1)} \subset \ker \varphi,
\end{aligned}$$

问题得证. □

2.2 循环群

循环群的定义见定义2.1.2.

定理 2.2.1. 整数加群 \mathbb{Z} 的子群都是由某一非负整数 m 生成的循环群.
且 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$

$$n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z} \iff n|m.$$

证. 设 H 是 $(\mathbb{Z}, +)$ 的一个子群.

(1)(i) 若 $H = (\{0\}, +)$, 取 $m = 0$ 即可.

(ii) 若 $H \neq (\{0\}, +)$, 则 H 中含有非零数, 因而含有正整数. 设 m 是 H 中最小的正整数, 我们来证明 $H = m\mathbb{Z}$. 任取 $x \in H$, 由整数的除法算式有

$$x = qm + r, \text{ 其中 } q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < m,$$

从而

$$r = x - qm \in H.$$

若 $r \neq 0$, 则 r 是 H 中小于 m 的正整数, 矛盾, 所以 $r = 0$, 即

$$x = qm,$$

这说明 H 中的任意元素都是 m 的倍数. 反之, 由群对运算的封闭性不难得到 m 的倍数也在 H 中. 综上可得

$$H = m\mathbb{Z},$$

第一个论断证毕.

(2) 由 $n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z}$ 可知 $m \in n\mathbb{Z}$, 所以 $n|m$;

由 $n|m$ 可知, m 的倍数都是 n 的倍数, 所以 $n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z}$.

综上可得

$$n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z} \iff n|m,$$

第二个论断证毕. □

定义 2.2.1 (无限循环群). 设群 $G = \langle g \rangle$, 若 G 是无限群, 则称 G 为无限循环群, 此时记 $|G| = \infty$.

定理 2.2.2. 已知群 $G = \langle g \rangle$, $|G| = m$, 则有以下结论成立

(1) 若 $m = \infty$, 则 $G \cong \mathbb{Z}$, 它的子群与非负整数成一一对应 (见定理 2.2.1);

(2) 若 $m \in \mathbb{N}_+$, 则 $G \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, 它的子群与 m 的因子一一对应.

证. 定义映射

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{Z} &\rightarrow G \\ n &\mapsto g^n,\end{aligned}$$

显然 φ 是良定义的满同态.

(1) 若 $m = \infty$, 则

$$\begin{aligned}\forall n, m \in \mathbb{N}_+, n \neq m, &\implies g^n \neq g^m \\ \iff \varphi \text{ 是单射} \\ \iff \varphi \text{ 是同构映射} \\ \iff G \cong \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(2) 若 $m \in \mathbb{N}_+$, 不难得到

$$\ker \varphi = m\mathbb{Z},$$

于是根据群同态基本定理 (定理 1.7.2) 有

$$G = \operatorname{im} \varphi \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$$

□

引理 2.2.1. 设交换群 G 中元素 g, h 的阶为 m, n 且 $(m, n) = 1$, 则元素 gh 的阶为 mn .

证. ***** □

定理 2.2.3. 若 G 是有限交换群, 则在 G 中存在一个元素, 它的阶是 G 中所有元素阶的倍数.

证. ***** □

定理 2.2.4. 若 G 是有限交换群, 则 G 是循环群的充分必要条件是对 $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 在 G 中适合方程 $x^m = e$ 的元素的个数不超过 m .

证. ***** □

2.3 单群与 A_n 单性

定义 2.3.1 (单群). 若群 G 没有非平凡的子群, 则称群 G 为单群.

定理 2.3.1. 设 G 为交换群, $G \neq \{e\}$, 则 G 为单群的充分必要条件是 G 为素数阶的循环群.

证. ***** □

定义 2.3.2 (置换). 设 Ω 为有限集合, 由 Ω 到自身的一个双射叫作 Ω 的一个置换.

定义 2.3.3 (轮换). 若一个 n 元置换 σ 把 i_1 映成 i_2 , 把 i_2 映成 i_3, \dots , 把 i_{r-1} 映成 i_r , 把 i_r 映成 i_1 , 其余的元素保持不变, 则称 σ 为一个 r -轮换, 简称轮换. 2-轮换也称为对换.

引理 2.3.1. 每个置换都可以表示成一些对换的乘积; 每个偶置换 (置换 σ 为偶置换当且仅当 σ 的对换分解式中对换的个数为偶数) 都可以表示成一些长度为 3 的轮换 (简称 3-轮换) 的乘积.

证. ***** □

定义 2.3.4 (全变换群). 非空集合 Ω 到自身的所有双射组成的集合, 对于映射的乘法成群, 称它为集合 Ω 的全变换群, 记作 S_Ω .

定义 2.3.5 (n 元交错群). S_n 中所有偶置换组成的集合, 对于映射的乘法成群, 称它为 n 元交错群, 记作 A_n .

定理 2.3.2. 交错群 $A_n, n \geq 5$ 是单群.

证. ***** □

2.4 可解群

对任意群 G 而言, 它的换位子群 $G^{(1)}$ 是 G 的正规子群, 即

$$G^{(1)} \triangleleft G,$$

再做 $G^{(1)}$ 的换位子群 $(G^{(1)})^{(1)}$, 记作 $G^{(2)}$, 就有

$$G^{(2)} \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G,$$

以此类推可得

$$\dots \triangleleft G^{(k)} \triangleleft G^{(k-1)} \triangleleft \dots \triangleleft G^{(2)} \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G.$$

若 G 是有限群, 这样的群列只有以下两种可能

$$(1) \exists k \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } G^{(k)} = G^{(k+1)} = \dots \neq \{e\}$$

$$(2) \exists k \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } G^{(k)} = \{e\}.$$

定义 2.4.1 (可解群). 设 G 是群. 若

$$\exists k \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } G^{(k)} = \{e\},$$

则称 G 为可解群.

定理 2.4.1. 群 G 是可解的当且仅当存在一递降的子群列

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_s = \{e\},$$

其中每个 G_i 是前一个 G_{i-1} 的正规子群, 且商群 G_{i-1}/G_i 交换 ($i = 1, \cdots, s$).

证. ***** □

由群的第二同构定理 (定理2.1.2) 可知, 当群 N 是群 G 的正规子群时, 商群 G/N 的正规子群与 G 中包含 N 的正规子群是一一对应的. 因此, 商群 G/N 是单群的充要条件为正规子群 N 不包含在另一个非平凡的正规子群中, 即不存在 G 的正规子群 $N_1, N_1 \neq G, N_1 \neq N$, 且

$$N < N_1 \triangleleft G,$$

具有此性质的正规子群 N 称为极大的.

定理 2.4.2. 有限群 G 是可解的充分必要条件为存在递降的子群列

$$G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright \cdots \triangleright H_t = \{e\},$$

其中商群 H_{i-1}/H_i ($i = 1, \cdots, t$) 都是素数阶的循环群.

证. ***** □

2.5 群的自同构群

定义 2.5.1 (自同构与自同构群). 一个群到它自身的同构映射称为自同构映射, 简称为自同构. 群的全部自同构在变换下的乘法下成群, 称为自同构群. 群 G 的自同构群记作 $\text{Aut}(G)$.

设 G 为群, $a \in G$ 为固定元素. 定义

$$\sigma_a : G \rightarrow G$$

$$g \mapsto aga^{-1},$$

不难验证 $\sigma_a \in \text{Aut}(G)$.

定义 2.5.2 (内自同构与内自同构群). 称 σ_a 这种由 G 中元素引起的自同构为内自同构. $a \mapsto \sigma_a$ 给出了群 G 到 $\text{Aut}(G)$ 的同态, G 的同态像就是 G 的全体内自同构, 它们组成 $\text{Aut}(G)$ 的子群, 记作 $\text{In}(G)$, 称为 G 的内自同构群.

定义 2.5.3 (中心). 对任意群 G , 与 G 的全体元素可交换的元素组成的集合称为 G 的中心, 记作 $Z(G)$.

定理 2.5.1. 定义映射

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow \text{In}(G) \\ a &\mapsto \sigma_a, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \ker f &= Z(G) \\ G/Z(G) &\cong \text{In}(G). \end{aligned}$$

证. ***** □

定理 2.5.2. 对任意群 G , 有

$$\text{In}(G) \triangleleft \text{Aut}(G).$$

证. ***** □

定义 2.5.4 (外自同构群). 对任意群 G , 称自同构群对于内自同构群的商群

$$\text{Aut}(G)/\text{In}(G)$$

为 G 的外自同构群.

定理 2.5.3. 对任意群 G , 若 $Z(G) = \{e\}$, 则

$$G \cong \text{In}(G).$$

此时我们可以认为 $G < \text{In}(G)$.

证. ***** □

定义 2.5.5 (完全群). 一个中心为单位且自同构全是内自同构的群称为完全群.

2.6 群作用

定义 2.6.1 (群 G 在集合 X 上的作用). 设 G 是群, X 是非空集合. 若映射 $f: G \times X \rightarrow X$ 适合以下条件

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X:$$

$$(1) f(e, x) = x$$

$$(2) f(g_1 g_2, x) = f(g_1, f(g_2, x)),$$

就称 f 决定了群 G 在集合 X 上的作用.

注 2.6.1. 在不需要明确指出映射 f 情况下, 通常把 $f(g, x)$ 简写成 $g(x)$. 按此写法, 定义 2.6.1 中的条件就可以写成

$$(1) e(x) = x$$

$$(2) g_1(g_2(x)) = g_1 g_2(x).$$

例 2.6.1. 设 G 是群, 取 $X = G$. 定义

$$g(x) = gx, \text{ 对 } g, x \in G.$$

这就给出了一个群在集合 G 上的作用. 此即以前所谓的左平移.

例 2.6.2 (共轭变换). 设 G 是群, 取 $X = G$. 定义

$$g(x) = gxg^{-1}, \quad \text{对 } g, x \in G.$$

此即群 G 上的共轭变换. 称元素 x 与元素 gxg^{-1} 共轭; 称子群 H 与子群 gHg^{-1} 共轭, 它们都是等价关系; 称群 G 共轭作用在集合 G 上.

例 2.6.3. 设 G 是群, $H < G$, 令 $X = \{xH : x \in G\}$, 定义

$$g(xH) = gxH, \quad g, x \in G.$$

这就决定了群 G 在集合 X 上的左右.

定义 2.6.2 (齐性空间). 设 G 是群, $H < G$, 称

$$X = \{xH : x \in G\}$$

是群 G 的一个齐性空间.

当群 G 作用在集合 X 上时, 有可能 G 中的不同的元素在 X 上引起相同的映射, 亦即 $g \mapsto \sigma_g$ 不一定是单射. 比如在例2.6.2中, $Z(G)$ 中的元素都对应 G 上的恒同映射.

定义 2.6.3 (如实的). 若映射

$$f : G \rightarrow \text{In}(G)$$

$$a \mapsto \sigma_a$$

是单射, 就称群 G 在集合 X 上的作用是如实的, 或称群 G 如实地作用在集合 X 上. 其中

$$\sigma_a : G \rightarrow G$$

$$g \mapsto aga^{-1}.$$

注 2.6.2. 例2.6.1中的作用是如实的; 例2.6.2, 例2.6.3不一定是如实的.

定义 2.6.4 (等价的). 设 G 是群, X 与 X' 是非空集合, G 作用在 X 与 X' 上. 若有一个一一对应 $\varphi: X \rightarrow X'$ 使得

$$\varphi(g(x)) = g(\varphi(x)),$$

则称 G 在集合 X 与 X' 上的作用是等价的.

从抽象的观点来看, 两个等价的作用可以不加区别.

定义 2.6.5 (集合 X 上的等价关系). 对 $\forall x, y \in X$, 若

$$\exists g \in G \text{ s.t. } y = g(x),$$

则称 x 等价于 y , 记作 $x \sim y$.

注 2.6.3. 定义 2.6.5 中的关系 \sim 是等价关系的证明如下.

证. ***** □

定义 2.6.6 (G -轨道). 在定义 2.6.5 中的等价关系下, 集合 X 中的元素被分成等价类, 称这样分成的等价类为 x 的 G -轨道, 简称轨道, 记作 O_x . 称 x 为该轨道的代表.

注 2.6.4. 由于轨道就是等价类, 所以任意两条轨道要么相等, 要么无交, 即

$$X = \bigcup_{i \in I} O_{x_i},$$

其中当 $x_i \neq x_j$ 时 $O_{x_i} \cap O_{x_j} = \emptyset$. 进而

$$|X| = \sum_{i \in I} |O_{x_i}|.$$

定义 2.6.7 (完全代表系). 称集合

$$\{x_i : i \in I\}$$

为 x 的 G -轨道的完全代表系.

定义 2.6.8 (不动元素). 当轨道 O_x 只含有一个元素 x 即

$$\forall g \in G, g(x) = x$$

时, 称 x 为 G 的不动元素.

在例2.6.2中, 若 $x \in Z(G)$, 则显然 $O_x = \{x\}$; 反之, 由 $O_x = \{x\}$ 可知 $x \in Z(G)$.

定义 2.6.9 (传递的). 设群 G 作用在集合 X 上, 当 X 是一个轨道即

$$\forall x, y \in X, \exists g \in G \text{ s.t. } g(x) = g(y)$$

时, 称群 G 在集合 X 上的作用是传递的.

不难发现, 例2.6.1与例2.6.3都是传递的的情形.

定义 2.6.10 (稳定子与稳定子群). 设群 G 作用在集合 X 上, 对 $\forall x \in X$, 称集合

$$H_x = \{g \in G : g(x) = x\}$$

是 x 的稳定子. 容易验证, H_x 是 G 的子群, 因此也称为元素 x 的稳定子群.

当群 G 在集合 G 上的作用是共轭作用 (参考例2.6.2) 时

$$\begin{aligned} H_x &= \{g \in G : gxg^{-1} = x\} \\ &= \{g \in G : gx = xg\}. \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

定义 2.6.11 (中心化子). 称等式(2.6.3)右端的集合为 x 在 G 里的中心化子, 记作 $Z(x)$, 它就是在群 G 的共轭作用下 x 的稳定子群 H_x .

定理 2.6.1 (轨道-稳定子定理). 设群 G 作用在集合 X 上, $x \in X$, O_x 是包含 x 的轨道, H_x 是 x 的稳定子群, 则群 G 在集合 O_x 上的作用与群 G 在齐性空间 G/H_x 上的作用等价, 也可写作

$$|O_x| = [G : H_x],$$

即 x 的轨道的长度 (x 的轨道所含元素的个数) 等于 x 的稳定子在 G 中的指数.

证. ***** □

推论 2.6.1. 设群 G 在集合 X 上的作用是传递的, $x \in X$, H_x 是元素 x 的稳定子群. 则 G 在 X 上的作用与 G 在齐性空间 G/H_x 上的作用等价.

证. ***** □

推论 2.6.2. 设有限群 G 作用在集合 X 上. 则任意一个轨道 O_x 包含有限多个元素, 并且包含的元素的个数是 $|G|$ 的因子.

证. ***** □

定义 2.6.12 (p -群). 设 G 是有限群, 若 $|G|$ 是素数 p 的方幂, 即

$$|G| = p^k, \quad k \geq 1,$$

则称 G 为 p -群 (p 是素数).

推论 2.6.3. 设有限群 G 作用在有限集合 X 上. 若 G 是 p -群, $|X| = n$, $(n, p) = 1$, 则 X 中一定有不动元素.

证. ***** □

推论 2.6.4. 设 p -群作用在有限集合 X 上, $|X| = n$. 若 t 为 X 中不动元素的个数, 则

$$t \equiv n \pmod{p}.$$

证. ***** □

推论 2.6.5. p -群有非平凡的中心.

证. ***** □

定义 2.6.13 (共轭类). 当群 G 在集合 G 上的作用是共轭变换 (例 2.6.2) 时, 称轨道 O_x 为 x 所在的共轭类, 记作 $C(x)$.

定理 2.6.2. 设群 G 作用在集合 X 上, $x, y \in X$. 若存在 $g_0 \in G$ 使得 $y = g_0x$, 则 $H_y = g_0H_xg_0^{-1}$.

证. ***** □

2.7 Sylow 定理

Lagrange 定理 (推论 1.4.1) 指出, 有限群 G 的任意子群的阶是 $|G|$ 的因子. 反之, 对于 $|G|$ 的任意正因子 d , 是否存在一个 d 阶子群? 本节介绍的 Sylow 定理将回答这一问题.

在此之前我们需要以下引理.

引理 2.7.1. 若 $n = p^l m, (p, m) = 1, k \leq l, C_n^{p^k}$ 是组合数, 则

$$p^{l-k} | C_n^{p^k}, p^{l-k+1} \nmid C_n^{p^k}.$$

证. ***** □

定理 2.7.1 (Sylow 第一定理). 若群 G 的阶为 $n = p^l m$, 其中 p 为素数, $(p, m) = 1, l \geq 1$, 则对于 $0 \leq k \leq l, G$ 有 p^k 阶子群. 特别地, 称 p^l 阶子群为 G 的 Sylow p -子群.

证. 令

$$X = \{A : A \subset G, |A| = p^k\},$$

易见 $|X| = C_n^{p^k}$. 对 $\forall A \in X$, 对 $\forall g \in G$ 定义映射

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ A &\mapsto gA, \end{aligned}$$

不难验证这是良定义的. 该映射给出了群 G 在集合 X 上的作用.

由注2.6.4可知

$$|X| = \sum_{i \in I} |O_{A_i}|.$$

由引理2.7.1可知

$$p^{l-k+1} \nmid C_n^{p^k} = |X|,$$

所以至少有一个轨道, 不妨设为 O_{A_j} , 满足

$$p^{l-k+1} \nmid |O_{A_j}|,$$

此即 $|O_{A_j}|$ 含有的 p 因子至多为 p^{l-k} .

对于 A_j 的稳定子群 H_{A_j} , 由轨道-稳定子定理 (定理2.6.1) 可知

$$|O_{A_j}| = [G : H_{A_j}] = \frac{|G|}{|H_{A_j}|},$$

注意到

$$|G| \text{ 含有的 } p \text{ 因子恰好为 } p^l$$

$$|O_{A_j}| \text{ 含有的 } p \text{ 因子至多为 } p^{l-k},$$

所以

$$H_{A_j} \text{ 含有的 } p \text{ 因子至少为 } p^k,$$

亦即

$$\exists q \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } |H_{A_j}| = p^k q,$$

可见

$$|H_{A_j}| \geq p^k. \quad (2.7.4)$$

反之, 对 $\forall g \in H_{A_j}$, 有 $g(A_j) = A_j$, 所以对 $\forall a \in A_j$, 有 $ga \in A_j$, 从而

$$H_{A_j}a = \{ga : g \in H_{A_j}\} \subset A_j,$$

于是

$$|H_{A_j}| = |H_{A_j}a| \leq |A_j| = p^k. \quad (2.7.5)$$

由式(2.7.4)与式(2.7.5)可知, H_{A_j} 是 G 的 p^k 阶子群. 定理得证. \square

定理 2.7.2 (Sylow 第二定理). 若有限群 G 的阶为 $p^l m$, 其中 p 为素数且 $(p, m) = 1$, 记 P 为 G 的 Sylow p -子群. 则 G 的任意一个阶为 p^k ($k \leq l$) 的子群 H 包含在一个与 P 共轭的 Sylow p -子群中.

证. 令

$$X = \{gP : g \in G\},$$

对 $\forall h \in H$, 定义映射

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow X \\ gP &\mapsto hgP, \end{aligned}$$

容易验证该定义是良定义的, h 确定了群 H 在集合 X 上的作用. 由 Lagrange 定理 (推论1.4.1) 的证明过程可知

$$|G| = |X| \cdot |P|,$$

所以 $|X| = m$. 注意到有限 p -群 H 作用在集合 X 上, 并且 $(p, m) = 1$, 所以由推论2.6.3可知 X 有不动元素, 不妨设其中的一个为 $g_j P$, 即

$$\begin{aligned} \forall h \in H, hg_j P &= g_j P \\ \iff \forall h \in H, g_j^{-1} h g_j P &= P \\ \iff \forall h \in H, g_j^{-1} h g_j &\in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \forall h \in H, h \in g_j P g_j^{-1} \\ &\Longleftrightarrow H \subset g_j P g_j^{-1}, \end{aligned}$$

注意到 H, P 均成群, 所以 $H < g_j P g_j^{-1}$, 即 H 包含在一个与 P 共轭的 Sylow p -子群中, 定理得证. \square

推论 2.7.1. 对有限群而言, 任意两个 Sylow p -子群都互相共轭.

证. ***** \square

推论 2.7.2. 有限群 G 的 Sylow p -子群是惟一的当且仅当 G 的 Sylow p -子群是正规子群.

证. G 的子群 P 是正规子群即 P 的所有共轭子群都与 P 自身.

任取 G 的两个 Sylow p -子群 P_0, P , 由推论 2.7.1 可知 P_0, P 互相共轭, 又由于 P_0, P 互相共轭可知 $P_0 = P$, 推论得证. \square

定义 2.7.1 (正规化子). 对群 G 的任意子群 H , 定义

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\},$$

则 $N_G(H) < G$ 且 $H \subset N_G(H)$. 称 $N_G(H)$ 为子群 H 在 G 中的正规化子, 简记为 $N(H)$.

注 2.7.1. 由定义 2.7.1 可立即推出 $H \triangleleft N_G(H)$, 这也是引出正规化子的意义.

推论 2.7.3. 若 G 是有限群, P 是 G 的 Sylow p -子群, 则

- (1) $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$
- (2) $N_G(P)$ 不包含 G 的另一个 Sylow p -子群.

证. ***** \square

推论 2.7.4. 若 G 是有限群, p 是素数且 $p \nmid |G|$, 则 G 的 Sylow p -子群的个数是 $|G|$ 的因子.

证. ***** □

定理 2.7.3 (Sylow 第三定理). 若 $|G| = p^l m$, p 是素数且 $(p, m) = 1, l \geq 1$, 记 G 的 Sylow p -子群的个数为 k , 则 $k \equiv 1 \pmod{p}$.

分析. 注意到该定理的结论与推论 2.6.4 十分相似, 这引诱我们构造某 p -群 P , 使其作用在某 k 元集合 X 后所得不动元素的个数为 1.

证. 令

$$X = \{P : P < G, |P| = p^l\},$$

于是 $|X| = k$.

任取 $P \in X$, 考虑 P 在 X 上的共轭作用. 对 $\forall a \in P$, 定义映射

$$\begin{aligned} a : X &\rightarrow X \\ Q &\mapsto aQa^{-1}, \end{aligned}$$

容易验证这是良定义的, a 给出了群 P 在集合 X 上的作用. 设 X_0 为 P 作用在 X 上的不动点集, 即

$$X_0 = \{Q \in X : a(Q) = Q\},$$

则

$$\begin{aligned} Q \in X_0 &\iff \forall a \in P, a(Q) = Q \\ &\iff \forall a \in P, aQa^{-1} = Q \\ &\iff \forall a \in P, a \in N(Q) \\ &\iff P \subset N(Q), \end{aligned}$$

又 $Q \subset N(Q)$ 且 P, Q 都是 G 的 Sylow p -子群, 所以由推论2.7.3可知 $P = Q$, 进而 $|X_0| = 1$. 由推论2.6.4可知

$$|X_0| \equiv |X| \pmod{p},$$

即

$$\begin{aligned} 1 &\equiv k \pmod{p} \\ \iff k &\equiv 1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

定理得证. □

推论 2.7.5. 若群 G 的阶为 $p^l m$, 其中 p 是素数且 $(p, m) = 1$, 则 G 的 Sylow p -子群的个数是 m 的因子.

证. 设 G 的 Sylow p -子群的个数为 k .

由推论2.7.4可知 $k \mid |G|$, 由 $|G| = p^l m, p$ 是素数且 $(p, m) = 1$

$$k \mid p \text{ 或 } k \mid m. \quad (2.7.6)$$

由 Sylow 第三定理 (定理2.7.3) 可知

$$k \nmid p. \quad (2.7.7)$$

由式(2.7.6)与(2.7.7)可知 $k \mid m$, 推论得证. □

作为本节的结束, 我们来看一个例子来说明如何利用上面的结果来解决群论的问题.

例 2.7.1. 已知有限群 G 的阶为 72, 证明 G 不是单群.

证. 注意到

$$72 = 2^3 \cdot 3^2,$$

所以利用 Sylow 第三定理 (定理2.7.3), 可设 G 的 Sylow 3-子群的个数为

$$1 + 3t, t \in \mathbb{N},$$

再利用推论2.7.5可知

$$(1 + 3t) | 2^3,$$

所以 $t = 0$ 或 $t = 1$.

(1) 若 $t = 0$, 即 G 有惟一的 Sylow 3-子群, 设为 P , 由推论2.7.2可知

$$P \triangleleft G,$$

所以此时 G 有非平凡的正规子群 P , 从而不是单群.

(2) 若 $t = 1$, 即 G 有 4 个 Sylow 3-子群, 设为 P_1, P_2, P_3, P_4 . 考虑 G 在集合

$$X = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

上的共轭变换 (例2.6.2). 由推论2.7.1可知 G 任意两个 Sylow 3-子群都互相共轭, 所以 G 的每个元素都在 X 上诱导出一个 4 次置换, 从而诱导出同态

$$\varphi : G \rightarrow S_4,$$

由群同态基本定理 (定理1.7.2) 可知

$$G / \ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi,$$

所以

$$\begin{aligned} |\ker \varphi| &= \frac{|G|}{|\operatorname{im} \varphi|} \geq \frac{|G|}{|S_4|} = 3 \\ \implies \ker \varphi &\neq \{e\}. \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

由 G 的 Sylow 3-子群不惟一可知

$$\operatorname{im} \varphi > 1$$

$$\begin{aligned}
&\implies \ker \varphi \neq \{e\} \\
&\implies \ker \varphi \neq G.
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

由式(2.7.8)与(2.7.9)可知, 此时 $\ker \varphi$ 是 G 的非平凡的正规子群.

综上, G 不是单群. \square

注 2.7.2. 在证明例2.7.1时所构造的群同态 φ 是十分重要的, 通常将其称为传递置换表示, 下面严格地给出它的定义.

定义 2.7.2 (传递置换表示). 若 H 是群 G 的子群, H 的全体左陪集构成集合

$$P = \{a_i H : a_i \in G, i = 1, \dots, r\},$$

则称群作用

$$\begin{aligned}
g &: P \rightarrow P \\
a_i H &\mapsto ga_i H
\end{aligned}$$

所诱导出的群同态

$$\varphi : G \rightarrow S_r$$

为群 G 在子群 H 上的传递置换表示.

2.8 群的直和

现在来介绍一种由已知群来构造新群的方法. 先看两个群的情形.

设 G_1, G_2 成群, 考虑集合

$$G_1 \times G_2,$$

对 $\forall G_1 \times G_2$ 中的两个元素 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$, 定义乘法为

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2), \quad (2.8.10)$$

其中第一个分量为作 G_1 的乘法, 第二个分量为作 G_2 的乘法.

若 e_1, e_2 分别为 G_1, G_2 中的幺元, 则可验证 $G_1 \times G_2$ 在新定义的乘法下成群, 幺元为 (e_1, e_2) .

定义 2.8.1 (群的直和). 已知 G_1, G_2 成群, 则将集合 $G_1 \times G_2$ 在乘法(2.8.10)下所成的群称为 G_1 与 G_2 的直和, 记作

$$G_1 \oplus G_2.$$

容易验证有以下 3 个命题成立.

命题 2.8.1. 当群 G_1, G_2 是有限群时, $G_1 \oplus G_2$ 也是有限群, 并且

$$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|.$$

□

命题 2.8.2. 在 $G_1 \oplus G_2$ 中令

$$\overline{G_1} = \{a, e_2 : a \in G_1\}, \text{ 其中 } e_2 \text{ 为 } G_2 \text{ 中的幺元}$$

$$\overline{G_2} = \{e_1, b : b \in G_2\}, \text{ 其中 } e_1 \text{ 为 } G_1 \text{ 中的幺元,}$$

则

$$\overline{G_1} \triangleleft G_1 \times G_2, \overline{G_2} \triangleleft G_1 \times G_2$$

$$\overline{G_1} \cong G_1, \overline{G_2} \cong G_2.$$

□

命题 2.8.3. $G_1 \oplus G_2$ 中的每个元素都可以分解成 $\overline{G_1}$ 与 $\overline{G_2}$ 中的元素的乘积, 并且该分解是唯一的. □

定义2.8.1与命题2.8.1,2.8.2,2.8.3均可以推广到多个群的情形.

经过上述讨论我们已经知道, 直和 $\bigoplus_{i=1}^s G_i$ 的结构完全被群 G_i 的结构决定. 因此如果一个群能够分解成一些群的直和, 那么该群的研究就可以归结为另一些群 (一般比原来的群简单) 的研究. 下面将讨论在什么情况下, 一个群能够分解成一些群的直和.

定理 2.8.1. 设群 N_i 是群 G 的正规子群, $i = 1, \dots, s$, 若

$$(1) G = \prod_{i=1}^s N_i$$

$$(2) \text{ 对 } \forall g \in G, \text{ 表示式 } g = \prod_{i=1}^s g_i, \text{ 是唯一的, 其中 } g_i \in N_i,$$

则

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^s N_i.$$

证. 由表示式 $g = \prod_{i=1}^s$ 的唯一性可知映射

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \prod_{i=1}^s \\ g_1 g_2 \cdots g_s &\mapsto (g_1, g_2, \dots, g_s) \end{aligned}$$

是一一对应. 若能证明 φ 是同态映射, 便能得到 φ 是同构映射, 进而 $G \cong \prod_{i=1}^s N_i$.

注意到

φ 是同态映射

$$\iff \forall x, y \in G, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, \varphi \left[\left(\prod_{i=1}^s x_i \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^s y_i \right) \right] = \varphi \left(\prod_{i=1}^s x_i \right) \cdot \varphi \left(\prod_{i=1}^s y_i \right) \\
&\iff \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, \varphi [(x_1 x_2) \cdots (x_s y_1) \cdots (y_{s-1} y_s)] = \\
&\quad \varphi \left(\prod_{i=1}^s x_i \right) \cdot \varphi \left(\prod_{i=1}^s y_i \right) \\
&\iff \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, (x_1 x_2, \cdots, x_s y_1, \cdots x_s y_s) = (x_1, \cdots x_s)(y_1, \cdots y_s) \\
&\iff \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, (x_1 x_2, \cdots, x_s y_1, \cdots x_s y_s) = (x_1 y_1, \cdots, x_s y_s) \\
&\iff \forall \prod_{i=1}^s x_i, \prod_{i=1}^s y_i \in G, x_1 x_2 \cdots x_s y_1 \cdots y_{s-1} y_s = x_1 y_1 \cdots x_s y_s \\
&\iff \forall g_i, g_j \in G, g_i g_j = g_j g_i, \tag{2.8.11}
\end{aligned}$$

可见, 问题转化成了证明(2.8.11).

对 $\forall g \in N_i \cap N_j, i \neq j$, 假设 $g \neq e$, 则 g 有两种不同的表示方式

$$\begin{array}{ccc}
g = e \cdots e g e \cdots e = e \cdots e g e \cdots e \\
\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
\quad \quad \quad \text{第 } i \text{ 位} \quad \quad \quad \text{第 } j \text{ 位}
\end{array}$$

亦即 G 中的元素 g 有两种不同的分解方式, 这与题设条件 (2) 矛盾, 所以假设不成立, 即

$$N_i \cap N_j = \{e\}, i \neq j.$$

对 $\forall g_i \in N_i, g_j \in N_j \triangleleft G, i \neq j$

$$N_i \text{ 成群} \implies g_i^{-1} \in N_i$$

$$g_i^{-1} \in N_i \triangleleft G, g_j \in N_j \triangleleft G \xrightarrow{\text{定义1.6.4}} g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \in N_i,$$

从而

$$g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \in N_i, \quad (2.8.12)$$

同理可证

$$g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \in N_j. \quad (2.8.13)$$

由(2.8.12)与(2.8.13)可知

$$\begin{aligned} g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} &\in N_i \cap N_j = \{e\} \\ \iff g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} &= e. \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

注意到当 $i = j$ 时(2.8.14)也成立, 从而 $\forall g_i, g_j \in G$

$$\begin{aligned} g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} &= e \\ \iff g_i g_j &= g_j g_i, \end{aligned}$$

可见(2.8.11)成立, 从而定理得证. \square

定义 2.8.2 (内直和). 若群 G 同构于其正规子群 N_1, \dots, N_s 的直和, 则称群 G 分解成正规子群 N_1, \dots, N_s 的直和, 也称 G 等于 N_1, \dots, N_s 的内直和.

命题 2.8.4. 与线性空间分解成子空间的直和的情况类似, 不难证明定理2.8.1的条件 (2) 有以下两种等价描述

(2') 么元的表示方式唯一, 即

$$\text{若 } e = \prod_{i=1}^s x_i, \text{ 则 } x_i = e$$

(2'')

$$N_j \cap \prod_{i=1, i \neq j}^s N_i = \{e\}.$$

定义 2.8.3 (不可分解的). 若群 G 不能被分解成两个非平凡的正规子群的直和, 则称 G 是不可分解的.

事实上, 任意一个有限群总能分解成一些不可分解的群的直和. 群的直和是群论中的重要问题, 这里不再细说.

下面给出一个例子, 来看看有限交换群的分解.

例 2.8.1. 有限交换群能被分解成 p -群的直和.

证. 设 G 是有限交换群, $|G| = n$ 的标准分解式为

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{r_i},$$

其中 p_i 是不同的素数, $r_i > 0$.

由 Sylow 第一定理 (定理2.7.1) 可知 G 存在 Sylow p_i -子群, 记为 G_i . 注意到 G 是交换群, 所以 G_i 是正规的, 从而由推论2.7.2可知 G_i 是 G 的惟一一个 Sylow p_i 子群, 结合2.7.1不难看出 G_i 恰由 G 中所有阶为 p_i 的幂的元素组成.

令 $H = \prod_{i=1}^s G_i$, 由

G_i 中的元素的阶为 p_i 的方幂

子群 $\prod_{i=1, i \neq j}^s G_i$ 元素的阶为 $\prod_{i=1, i \neq j}^s p_i^{r_i}$ 的因子 (引理2.2.1),

可知

$$G_j \cap \prod_{i=1, i \neq j}^s G_i = \{e\},$$

结合定理2.8.1与命题2.8.4可得

$$H \cong \bigoplus_{i=1}^s G_i.$$

由上述讨论可知

$$\begin{aligned} H &< G \\ |H| &= |G|, \end{aligned}$$

所以 $H = G$, 进而

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^s G_i,$$

问题得证. □

注 2.8.1. 有时交换 p -群还能被分解. 以后将证明 p -群不能被分解的充要条件为它是循环群.

2.9 么半群

2.10 CHAPTER2 习题

问题 2.1 (P97T1). 已知 G 是有限群, $N \triangleleft G, (|N|, [G : N]) = 1$. 证明: 若元素 a 的阶整除 $|N|$, 则 $a \in N$.

证. 考虑自然同态

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow G/N \\ g &\mapsto gN, \end{aligned}$$

于是

$$[\pi(a)]^{o(a)} = (aN)^{o(a)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{N \trianglelefteq G}{=} a^{o(a)} N^{o(a)} \\ & = N, \end{aligned}$$

又 N 是 G/N 的幺元, 所以

$$|\pi(a)| \mid |o(a)| \mid |N|. \quad (2.10.15)$$

注意到

$$aN \in G/N,$$

所以

$$|aN| \mid [G : N],$$

即

$$|\pi(a)| \mid [G : N]. \quad (2.10.16)$$

由式(2.10.15)与(2.10.16)结合 $(|N|, [G : N]) = 1$ 可知

$$\begin{aligned} & |\pi(a)| = 1 \\ \implies & \pi(a) = N \\ \implies & aN = N \\ \implies & a \in N, \end{aligned}$$

问题得证. □

问题 2.2 (P97T2). 设 c 是群 G 中阶为 rs 的元素, 其中 $(r, s) = 1$. 证明 c 可以表示成 $c = ab$, 其中 a 的阶为 r , b 的阶为 s , 且 a, b 都是 c 的方幂.

证. 由 $(r, s) = 1$ 可知

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } ur + vs = 1,$$

不难验证

$$a = c^{vs}$$

$$b = c^{ur}$$

满足题设要求. □

问题 2.3 (P97T3). 已知群 G 中元素 a 的阶与正整数 k 互素, 证明方程 $x^k = a$ 在 $\langle a \rangle$ 内恰有一解.

证. 由 $(o(a), k) = 1$ 可知

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } uo(a) + vk = 1,$$

所以

$$a^{uo(a)+vk} = a,$$

即

$$a^{vk} = a,$$

由此可见 $x = a^v$ 是 $x^k = a$ 在 $\langle a \rangle$ 内的解.

现设 $x = a_0^v$ 也是 $x^k = a$ 在 $\langle a \rangle$ 内的解, 其中 $0 \leq v - v_0 \leq o(a) - 1$, 于是

$$a^{vk} = a$$

$$a^{v_0k} = a,$$

即

$$vk \equiv 1 \pmod{o(a)}$$

$$v_0k \equiv 1 \pmod{o(a)},$$

所以

$$o(a)|(v - v_0)k,$$

由此可见 $v - v_0 = 0$ 即 $v = v_0$.

综上, 问题证毕. □

问题 2.4 (P97T4). 证明在群中, ab 与 ba 有相同的阶.

证. 注意到 $ab = b^{-1} \cdot ba \cdot b$, 所以

$$\begin{aligned} ab &= e \\ \iff b^{-1} \cdot ba \cdot b &= e \\ \iff ba &= e, \end{aligned}$$

可见问题得证. □

问题 2.5 (P97T10). 证明 S_n 中的任意一个置换能由 $n - 1$ 个对换 $(12), (13), \dots, (1n)$ 生成, 也能由 $n - 1$ 个对换 $(12), (23), \dots, (n - 1 \ n)$ 生成.

证. 由引理2.3.1可知 S_n 中的任意一个置换都可以拆成若干个对换 (ij) 的复合, 注意到

$$(1i)(1j)(1i) = (ij),$$

所以任意一个置换都能由 $(n - 1)$ 个对换

$$(12), (13), \dots, (1n)$$

生成, 第一个论断证毕.

注意到

$$(1i)(i \ i + 1)(1i) = (1 \ i + 1),$$

故可用归纳法证明

$$(12), (23), \dots, (n-1 \ n)$$

能生成

$$(12)(13), \dots, (1n),$$

再结合第一个论断可知它能生成 S_n 中的任意一个置换, 第二个论断证毕. \square

问题 2.6 (P97T16). 设 H_1, H_2 是群 G 的两个子群, 证明 $H_1 \cap H_2$ 的任一左陪集是 H_1 的一个左陪集与 H_2 的一个左陪集的交.

证. 若能证明对 $\forall g \in G$ 都有 $g(H_1 \cap H_2) = gH_1 \cap gH_2$, 则问题得证. 证明思路为两者互相包含.

(1) 对 \forall 给定的 $g \in G$, 在 $g(H_1 \cap H_2)$ 中任取 gh_0 , 有

$$\begin{aligned} h_0 &\in H_1 \cap H_2 \\ \implies gh_0 &\in gH_1, gh_0 \in gH_2 \\ \implies gh_0 &\in gH_1 \cap gH_2 \\ \implies g(H_1 \cap H_2) &\subset gH_1 \cap gH_2. \end{aligned}$$

(2) 反之, 对任意给定的 $g \in G$, 在 $gH_1 \cap gH_2$ 中任取 gh_0 , 有

$$\begin{aligned} gh_0 &\in gH_1, gh_0 \in gH_2 \\ \xrightarrow{\text{g的任意性}} h_0 &\in H_1, h_0 \in H_2 \\ \implies h_0 &\in H_1 \cap H_2 \\ \implies gh_0 &\in g(H_1 \cap H_2) \\ \implies gH_1 \cap gH_2 &\subset g(H_1 \cap H_2). \end{aligned}$$

由 (1), (2) 便知 $g(H_1 \cap H_2) = gH_1 \cap gH_2$, 综上, 问题得证. \square

问题 2.7 (P98T18). 设 G 为有限群, $H < G$ 且 $[G : H] = n > 1$. 证明 G 或者含有指数能整除 $n!$ 的非平凡正规子群, 或者 G 同构于 S_n 的一个子群.

证. 设群 G 在子群 H 上的传递置换表示 (定义2.7.2) 为

$$\varphi : G \rightarrow S_n.$$

由 $[G : H] > 1$ 可知

$$\begin{aligned} \operatorname{im} \varphi &> 1 \\ \implies \operatorname{im} \varphi &\neq \{e\} \\ \implies \ker \varphi &\neq G. \end{aligned} \tag{2.10.17}$$

(1) 若 $\ker \varphi \neq \{e\}$, 结合(2.10.17)可知

$$\ker \varphi \text{ 是 } G \text{ 的非平凡正规子群.} \tag{2.10.18}$$

注意到

$$|\ker \varphi| \cdot [G : H] \stackrel{\text{群同态基本定理 (定理1.7.2)}}{=} |\operatorname{im} \varphi| \cdot |S_n| = n!, \tag{2.10.19}$$

所以由(2.10.18)与(2.10.19)可知 $\ker \varphi$ 是 G 的指数能够整除 $n!$ 的非平凡的正规子群.

(2) 若 $\ker \varphi = \{e\}$, 则

$$\begin{aligned} G / \ker \varphi &\cong \operatorname{im} \varphi \\ \iff G &\cong \operatorname{im} \varphi < S_n, \end{aligned}$$

即 G 同构于 S_n 的子群 $\operatorname{im} \varphi$.

由 (1),(2) 便知问题证毕. \square

问题 2.8 (P98T19). 设 G 为有限群, p 是 $|G|$ 的最小素因子. 证明指数 (定义1.4.4) 为 p 的子群 (若存在) 必正规.

证. 设 H 是群 G 的指数为 p 的子群, 即 $[G : H] = p$, φ 是 G 在 H 上的传递置换表示 (定义2.7.2).

(1) 若 $\ker \varphi = \{e\}$, 则由群同态基本定理 (定理1.7.2) 可知

$$\begin{aligned} G/\ker \varphi &\cong \operatorname{im} \varphi \\ \iff G &\cong \operatorname{im} \varphi < S_p, \end{aligned}$$

于是

$$|G| = |\operatorname{im} \varphi| |S_p| = p!,$$

结合 p 是 $|G|$ 的最小素因子便知 $|G| = p$, 于是

$$\begin{aligned} |H| &= \frac{|G|}{[G : H]} = \frac{p}{p} = 1 \\ \iff H &= \{e\} \\ \implies H &\text{是 } G \text{ 的正规子群.} \end{aligned}$$

(2) 若 $\ker \varphi \neq \{e\}$, 则

$$\begin{aligned} g &\in \ker \varphi \\ \iff \forall a_i \in G, &ga_iH = a_iH \\ \xrightarrow{\text{当 } a_i = e \text{ 时}} &gH = H \\ \iff g &\in H, \end{aligned}$$

由此可见 $\ker \varphi \subset H$, 从而 $\ker \varphi \triangleleft H$. 注意到

$$\begin{aligned} [G : \ker \varphi] &= |\operatorname{im} \varphi| |S_p| = p! \\ \xrightarrow{p \text{ 是 } |G| \text{ 的最小素因子}} &[G : \ker \varphi] = p \\ \xrightarrow{\ker \varphi \triangleleft H, [G:H]=p} &H = \ker \varphi \text{ 是 } G \text{ 的指数为 } p \text{ 的正规子群.} \end{aligned}$$

由 (1),(2) 可知问题证毕.

□

问题 2.9 (P98T21). 证明任一非交换的 6 阶群同构于 S_3 .

证明该问题需要用到以下引理.

引理 2.10.1. 素数阶群都是循环群.

证. 任取阶为素数 p 的有限群 $G, e \neq g \in G$, 于是由 Lagrange 定理 (推论 1.4.1) 可知

$$\begin{aligned} & \exists k \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } |G| = k | \langle g \rangle | \\ & \xrightarrow{p \text{ 是素数, } g \neq e} |G| = | \langle g \rangle | \\ & \implies G = \langle g \rangle, \end{aligned}$$

亦即 G 是循环群, 由 G 的任意性可知问题得证. \square

证. 设 G 是非交换的 6 阶群. 注意到

$$6 = 2 \times 3,$$

所以由 Syl 第一定理 (定理 2.7.1) 可知 G 有阶为 2 的 Sylow 2-子群 A , 阶为 3 的 Sylow 3-子群 B , 由引理 2.10.1 可知 A, B 都是循环群, 故可设

$$A = \langle \alpha \rangle, B = \langle \beta \rangle, \text{ 其中 } o(\alpha) = 2, o(\beta) = 3.$$

由于 G 不交换, 故可用反证法证明

$$\begin{aligned} & \alpha, \beta \text{ 不交换} \\ & \implies \alpha \neq \beta, \alpha \neq \beta^2 \\ & \xrightarrow{\beta \cdot \beta^2 = \beta^3 = e} \alpha \neq \beta^{-1} \\ & \implies \alpha \notin B, \end{aligned}$$

所以 B 的左陪集 $B, \alpha B$ 满足

$$B \cap \alpha B = \emptyset, |B| + |\alpha B| = |B| + |B| = 3 + 3 = 6 = |G|$$

$$\implies G = B \cup \alpha B = \{e, \beta, \beta^2, \alpha, \alpha\beta, \alpha\beta^2\}.$$

定义

$$\begin{aligned}\varphi : G &\rightarrow S_6 \\ \alpha &\mapsto (12) \\ \beta &\mapsto (123),\end{aligned}$$

利用上述讨论不难验证这是良定义的同构映射, 从而

$$G \cong S_6.$$

□

问题 2.10 (P98T29). 已知 A, B 是有限群 G 的两个非空子集. 若 $|A| + |B| > |G|$, 则 $AB = G$.

证. 反设 $AB \neq G$, 由于 $AB \subset G$, 所以

$$\begin{aligned}G/AB &\supset \{AB\} \\ \implies [G : AB] &> 1 \\ \implies \exists g \in G \text{ s.t. } g &\notin AB \\ \implies \exists g \in G \text{ s.t. } \{g\} \cap AB &= \emptyset \\ \implies \exists g \in G \text{ s.t. } gB^{-1} \cap A &= \emptyset \\ \xRightarrow{|gB^{-1}|=|B^{-1}|=|B|} G \text{ 中至少有 } |B| \text{ 个元素不在 } A \text{ 中} \\ \xRightarrow{|G| \neq \infty} |G| - |A| &\geq |B|,\end{aligned}$$

矛盾, 假设不成立, 从而 $AB = G$.

□

问题 2.11 (P98T33). 已知 G 是有限群, $N \triangleleft G$, P 为 N 的 Sylow p -子群. 证明 $G = N \cdot N_G(P)$.

证. 对 P 在 G 中的任意一个共轭子群 Q , 存在 $g \in G$ 使得

$$Q = gPg^{-1} \stackrel{P \leq N}{<} gNg^{-1} \stackrel{N \trianglelefteq G}{=} N,$$

可见 P 在 G 的共轭子群都在 N 中, 所以对 $\forall g \in G, gPg^{-1}$ 是 N 的 Sylow p -子群, 并且

(1) 若 $gPg^{-1} = P$, 则

$$\begin{aligned} g &\in N_G(P) \subset N \cdot N_G(P) \\ \implies G &\subset N \cdot N_G(P). \end{aligned}$$

(2) 若 $gPg^{-1} \neq P$, 注意到

gPg^{-1} 是 P 在 G 中的共轭子群

P 在 G 中的共轭子群也在 N 中,

所以由 P 是 N 的 Sylow p -子群与推论2.7.1可知

$$\begin{aligned} \exists n \in N \text{ s.t. } gPg^{-1} &= nPn^{-1} \\ \iff (n^{-1}g)P(g^{-1}n) &= P \\ \iff n^{-1}g &\in N_G(P), \end{aligned}$$

记 $t \in N_G(P)$ s.t. $n^{-1}g = t$, 就有

$$\begin{aligned} g &= nt \in N \cdot N_G(P) \\ \xrightarrow{\text{g的任意性}} G &\subset N \cdot N_G(P). \end{aligned}$$

由 $N \cdot N_G(P) < G$ 与 (1),(2) 便知 $G = N \cdot N_G(P)$. □

问题 2.12 (P98T35). 已知 G 是有限群, $H < G$, P 是 G 的 Sylow p -子群

证. ***** □