罗尔定理

guohuiyuan

目录

1 问题

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导,$0<a<b$, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明:$\exists\xi\in(a,b),f'(\xi)+p(\xi)f(\xi)=0$

2 示例 1

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导,$0<a<b$, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明:

1. 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$;
2. 至少存在一点 $\eta\in(a,b)$, 使得 $2\eta f(\eta)-f'(\eta)=0$.

解答:

1. $f'(\xi)+\frac{2}{\xi}f(\xi)=0$

   $\because y^*=e^{\lambda}f(x)$

   $y^{*\prime}=e^{\lambda}(f'(x)+\lambda' f(x))$

   $\therefore$ 令 $\lambda=\int\frac{2}{x}dx=2\ln x$

   构造 $g(x)=e^{2\ln x}f(x)=x^2f(x)$

   $g(x)'=x^2(f'(x)+f(x)\frac{2}{x})$

   $\because g(a)=0,g(b)=0$

   $\therefore$ 根据罗尔定理 $,\xi\in(a,b),g'(\xi)=0,$ 即 $\xi^2(f'(\xi)+f(\xi)\frac{2}{\xi})=0$

   $\therefore$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

2. 同理构造 $g(x)=e^{-x^2}f(x)$

3 示例 2

设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导, 且$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=1$, 证明 : (I)至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使得$f(\xi)=0$; (II)至少存在一点$\eta\in(0,1)$, 使得$f''(\eta)=f(\eta)$.

解答:

4 结论

遇见 $f'(\xi)+p(\xi)f(\xi)=0$ 类似格式的题目, 构造 $g(x)=e^{\int p(x)\,dx}f(x)$, 然后使用罗尔定理解题