罗尔定理

guohuiyuan

2023 年 7 月 21 日

1 问题

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导,$0<a<b$, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明:$\exists\xi\in(a,b), f'(\xi)+p(\xi)f(\xi)=0$

2 示例

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导,$0<a<b$, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明:

1. 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$;
2. 至少存在一点 $\eta\in(a,b)$, 使得 $2\eta f(\eta)-f'(\eta)=0$.

解答:

1. $f'(\xi)+\frac{2}{\xi}f(\xi)=0$

   $\because y^*=e^{\lambda}f(x)$

   $y^{*\prime}=e^{\lambda}(f'(x)+\lambda' f(x))$

   $\therefore$ 令 $\lambda=\int\frac{2}{x}dx=2\ln x$

   构造 $g(x)=e^{2\ln x}f(x)=x^2f(x)$

   $g(x)'=x^2(f'(x)+f(x)\frac{2}{x})$

   $\because g(a)=0, g(b)=0$

   $\therefore$ 根据罗尔定理 ,$\xi\in(a,b), g'(\xi)=0$, 即 $\xi^2(f'(\xi)+f(\xi)\frac{2}{\xi})=0$

   $\therefore$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

2. 同理构造 $g(x) = e^{-x^2} f(x)$

3 结论

遇见 $f'(\xi) + p(\xi) f(\xi) = 0$ 类似格式的题目, 构造 $g(x) = e^{\int p(x)\,dx} f(x)$, 然后使用罗尔定理解题