Systèmes Multi-agents

Logique modale et Agents

Claude Moulin

Université de Technologie de Compiègne

IA04

Sommaire

Sommaire

Propositions et prédicats

- Propositions
  - p_1 = "la porte est ouverte" ; p_2 = "j'étudie le cours et prépare l'examen" ;
    p_3 = "si l'eau bout alors je mets les pâtes"
- Prédicats
  - p_1 = "ouvre(Jean, porte)" ;
  - p_2 = "$\exists x\ porte(x) \wedge ouverte(x)$" ;

Objet

- La logique propositionnelle et la logique des prédicats (logique du premier ordre) utilisent des formules en décidant si elles sont vraies ou fausses.
- Dans un modèle, on a soit p, soit $\neg p$.

Implication

- $p \rightarrow q$ est vrai soit lorsque p est faux soit lorsque q est vrai
- $p \rightarrow q$ est faux lorsque p est vrai et q est faux.
- p_3 = "si l'eau bout alors je mets les pâtes"
  - p_3 ne dit rien si l'eau ne bout pas ; si les pâtes sont dans l'eau p_3 est confirmée dans les deux cas.

$p \rightarrow q$		q = V	q = F
p	V	V	F
	F	V	V

Logique des Propositions

- La syntaxe de la Logique des Propositions combine des propositions atomiques (éléments d'un ensemble P) en utilisant les opérateurs logiques habituels ($\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$).
- Sa sémantique est donnée par une fonction d'interprétation $(\cdot)^{\mathcal{I}} : P \longrightarrow \{vrai, faux\}$ donnant la valeur de vérité de chaque proposition atomique : $(p)^{\mathcal{I}} = vrai$
- Un modèle de la Logique des Propositions est défini par :
  - Un modèle $\mathfrak{M}$ est un sous-ensemble de P contenant toutes les propositions atomiques qui sont vraies.
    si $|P| = n$, il y a 2^n modèles possibles.
  - $\mathfrak{M} \models \varphi$: φ est vrai dans le modèle $\mathfrak{M}$.

Sommaire

Origine

- Dans la réflexion quotidienne ou philosophique sur la réalité, la notion de validité d'une proposition est plus nuancée :
    - "Il se peut qu'il pleuve aujourd'hui" : Possibilité
    - "Un étudiant peut avoir 18 à son examen" : Capacité
    - "L'étudiant doit rendre son rapport" : Obligation
    - "Je sais qu'il est en vacance" : Connaissance
    - "Un pompier est nécessairement grand" : Nécessité

Origine

- Développées pour étudier différentes modalités et en particulier la distinction entre le vrai nécessaire et le vrai possible.
- Modalité : forme particulière d'une action, d'un fait, d'une pensée, d'un être ou d'un objet.
- Adverbe de modalité : ce qui modifie le sens d'une phrase entière et non pas seulement celui d'un mot isolé.

Exemple

- "La porte est ouverte" :
  - peut être vrai à un endroit précis et à un instant particulier ;
  - peut aussi être faux.
- "Il est possible que la porte soit ouverte" peut être vrai :
  - sans savoir si la porte est effectivement ouverte,
  - même si elle est fermée.
  - "la porte est ouverte" est possible.
- "$\sqrt{2}$ est nécessairement un nombre irrationnel".
  - "$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel" est nécessaire.

Principe

- Créer de nouveaux types de propositions.
- On utilise pour cela des opérateurs modaux. Les plus courants sont :
  - $\Box$: nécessaire
  - $\Diamond$: possible
  - **K** : sait que
  - **B** : croit que
  - **O** : obligatoire
  - **A** : permis
- $\Diamond$ "La porte est ouverte" ($\Diamond p$)
- **K** "Pierre est en vacance" ($\mathbf{K}p$)

Formules bien formées

- La Logique modale classique est une extension de la logique des propositions dont la syntaxe permet d'écrire des propositions bien formées (formules).
- Soit P un ensemble dénombrable de propositions : $P = \{p_i | 0 \leq i \leq n\}$.
- L'ensemble des propositions bien formées (pbf) est le plus petit ensemble qui contient P et tel que si φ et ψ sont des pbf, alors :
  - $\neg\varphi$ est une pbf
  - $\varphi \vee \psi$ est une pbf
  - $\Box\varphi$ est une pbf
  - $\Diamond\varphi$ est une pbf

Logique modale classique

- On note $\mathcal{L}_M$ l'ensemble des formules bien formées de la logique modale classique.
- $\varphi \wedge \psi$
  $\varphi \rightarrow \psi$
  $\varphi \leftrightarrow \psi$
  sont aussi des pbf qui peuvent se définir à partir des opérateurs $\neg$ et $\vee$

Modèle

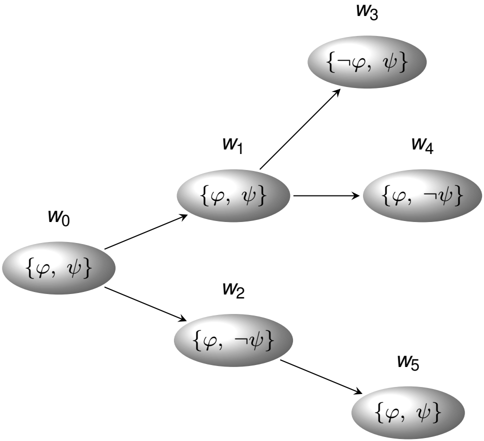
- Il faut donner un sens aux propositions : $\Box\varphi$ et $\Diamond\varphi$
- En logique des propositions, on considère un seul monde où les propositions sont vraies ou fausses et un modèle décrit l'état de ce monde.
- En logique modale, on a défini la théorie des mondes possibles.
- Un monde reste caractérisé par les propositions qui y sont vraies ou fausses, mais un modèle peut comporter plusieurs mondes.
- En se référant à des agents, un monde peut être vu comme un état de l'environnement.

Modèle

- Un modèle est un ensemble de mondes et une fonction d'interprétation qui pour chaque proposition donne les mondes où elle est vraie (fausse dans les autres).
- Pour les pbf sans symbole modal, la validité (être vraie) est donnée monde par monde, sans tenir compte des autres.
- Une même proposition peut être vraie dans un monde et fausse dans un autre.

Exemple

φ et ψ sont des pbf sans symbole modal.



$\mathfrak{M} \models_{w_0} \varphi$

$\mathfrak{M} \models_{w_4} \neg\psi$

$\mathfrak{M} \models_{w_5} \psi$

Question : $\mathfrak{M} \models_{w_?} \Box\psi$?

Nécessité : définition triviale

- Définition : Une proposition φ est nécessairement vraie ("φ nécessaire" est vrai, $\Box\varphi$) dans le modèle si elle (φ) est vraie (valide) dans tous les mondes de ce modèle.
- Première conséquence :
  - La valeur de vérité de $\Box\varphi$ est la même dans tous les mondes du modèle.

Conséquences formelles

- Si φ vrai dans tous les mondes donc :
  - $\Box\varphi$ est vrai dans tous les mondes et donc
  - $\Box\Box\varphi$ est vrai dans tous les mondes.
- Si φ faux dans un monde donc :
  - $\Box\varphi$ est faux dans tous les mondes et
  - $\neg\Box\varphi$ vrai dans tous les mondes
  - donc $\neg\Box\varphi$ est nécessaire ($\Box\neg\Box\varphi$).

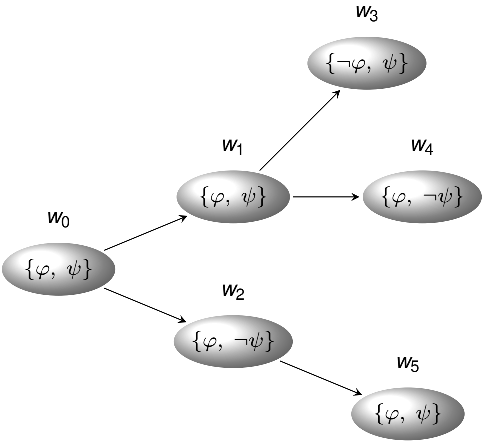
Nécessité : version trop simple

- Le modèle se comporte pour les formules sous l'opérateur modal $\Box$ comme un modèle classique pour les formules non modales.
- Chaque monde a l'information sur tout le modèle
- Dès qu'une formule est gouvernée par une modalité, elle est évaluée de la même façon dans tous les mondes.
- On devrait pouvoir avoir $\Box\varphi$ valide dans un monde et pas dans un autre.

Accessibilité

- Un monde n'a d'information que sur certaines parties du modèle, sur les mondes qui lui sont accessibles.
- Un monde représente un état de l'environnement d'un agent.
- Depuis le monde où il se tient, l'agent en voit d'autres, ceux qui lui paraissent possibles (accessibles).
- Ce qui parait nécessaire à un agent est ce qu'il voit partout.
- Un agent ne voit pas nécessairement tout ce qui existe.

Exemple



$\mathfrak{M} \models_{w_0} \varphi$

$\mathfrak{M} \models_{w_4} \neg\psi$

$\mathfrak{M} \models_{w_5} \psi$

Question : $\mathfrak{M} \models_{w_?} \Box\psi$?

Modèle standard : modèle de Kripke

Soit P un ensemble de propositions atomiques de la Logique Propositionelle. Un modèle $\mathfrak{M}$ de la logique modale classique est un triplet : $\mathfrak{M} = (\mathcal{W}, L, \mathcal{R})$ où :

- $\mathcal{W} = \{w_0, w_1, \ldots\}$ est un ensemble dénombrable de mondes ;
- $L : \mathcal{W} \longrightarrow 2^P$ est une fonction qui donne l'ensemble des propositions atomiques qui sont vraies dans un monde donné (2^P est l'ensemble des parties de P) ;
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ est une relation d'accessibilité entre deux mondes.

On peut aussi définir la fonction qui à chaque proposition associe les mondes où elle est vraie.

Validité dans un monde

Pour toute pbf φ, pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et tout monde w, A est valide dans w ($\mathfrak{M} \models_w A$) si et seulement si :

- $A = p, p \in P$ et $p \in L(w)$
- $A = \neg\varphi$ et $\mathfrak{M} \not\models_w \varphi$
- $A = \varphi \vee \psi$ et soit $\mathfrak{M} \models_w \varphi$ soit $\mathfrak{M} \models_w \psi$
- $A = \varphi \wedge \psi$ et $\mathfrak{M} \models_w \varphi$ et $\mathfrak{M} \models_w \psi$
- $A = \varphi \rightarrow \psi$ et soit $\mathfrak{M} \not\models_w \varphi$ soit $\mathfrak{M} \models_w \psi$

Validité dans un monde

Pour toute pbf φ, pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et tout monde w, A est valide dans w ($\mathfrak{M} \models_w A$) si et seulement si :

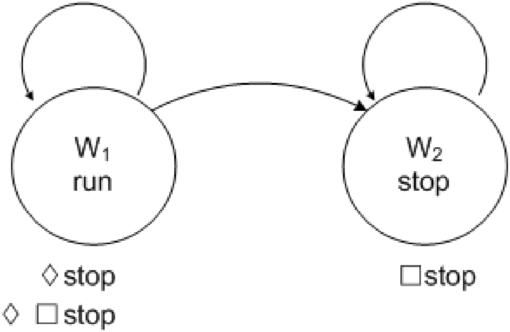
- $A = \Box\varphi$ et $\forall w' \in \mathcal{W}\ ((w, w') \in \mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{M} \models_{w'} \varphi)$
  Dans tout monde w' qui vérifie $\mathcal{R}(w, w')$ $\mathfrak{M} \models_{w'} \varphi$.
  $\Box\varphi$ est valide dans un monde w si φ est valide dans tous les mondes accessibles à partir de w.

Validité dans un monde

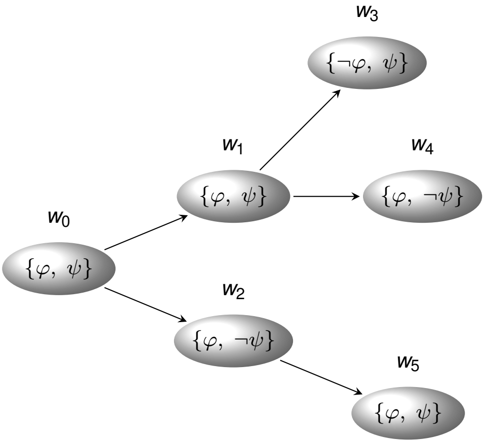
Pour toute pbf φ, pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et tout monde w, A est valide dans w ($\mathfrak{M} \models_w A$) si et seulement si :

- $A = \Diamond\varphi$ et $\exists w' \in \mathcal{W}\ \big((w, w') \in \mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{M} \models_{w'} \varphi\big)$.
  Il existe un monde w' qui vérifie $\mathcal{R}(w, w')$ tel que $\mathfrak{M} \models_{w'} \varphi$.
  $\Diamond\varphi$ est valide dans un monde w si φ est valide dans un monde accessible à partir de w.

Exemple



Exemple



$$\mathfrak{M} \models_{w_0} \Box\varphi$$

$$\mathfrak{M} \models_{w_0} \Diamond\psi$$

$$\mathfrak{M} \models_{w_2} \Diamond\psi \ ; \ \mathfrak{M} \models_{w_2} \Box\psi$$

$$\mathfrak{M} \models_{w_1} \neg\Box\psi \ ; \ \mathfrak{M} \models_{w_1} \Diamond\psi$$

$$\mathfrak{M} \models_{w_5} \Box\varphi \ ; \ \mathfrak{M} \models_{w_5} \neg\Diamond\varphi$$

Validité dans un modèle

- La validité dans un modèle est simplement la validité dans tous les mondes de ce modèle.
- La fbf A est valide dans le modèle $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \models A$) si et seulement si A est valide dans tout monde w de $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \models_w A$)
- une formule est universellement valide, ou est une tautologie, si elle est valide dans tous les modèles.

Propriétés - 1

- Une formule peut être nécessaire dans un monde sans être valide dans tous les mondes :
  - il suffit qu'elle ne soit pas valide dans le monde où elle est nécessaire.
- Une formule valide dans le modèle est nécessaire dans tous ses mondes :
  - pour chaque monde, elle est valide dans tous les mondes accessibles à partir de celui-ci.

Propriétés - 2

- Les logiques modales dénotent la nécessité avec l'opérateur $\Box$, et la possibilité avec l'opérateur $\Diamond$.
- Les deux opérateurs $\Box$ et $\Diamond$ sont duals :
  - (def$_\Diamond$) $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$:
    quelque chose est possible ssi sa négation n'est pas nécessaire.
    φ est possible ssi $\neg\varphi$ n'est pas nécessaire.
  - $\Box\varphi \equiv \neg\Diamond\neg\varphi$:
    quelque chose est nécessaire ssi sa négation est impossible (n'est pas possible) ;
    φ est nécessaire ssi $\neg\varphi$ n'est pas possible.

Démonstration

$\mathfrak{M} \models_w \neg\Box\neg\varphi$

- ssi $\mathfrak{M} \not\models_w \Box\neg\varphi$
- ssi $\exists w' \ \mathcal{R}(w, w') \ \mathfrak{M} \not\models_{w'} \neg\varphi$
- ssi $\exists w' \ \mathcal{R}(w, w') \ \mathfrak{M} \models_{w'} \varphi$
- ssi $\mathfrak{M} \models_w \Diamond\varphi$

Propriété K

$(K) : \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

- La propriété (K) dit que si les formules $\varphi \rightarrow \psi$ et φ sont toutes les deux nécessaires, alors la formule ψ est aussi nécessaire.

Propriété Nec

(Nécessitation) : si φ est valide dans un modèle, alors $\Box\varphi$ est valide dans ce modèle : $\varphi \rightarrow \Box\varphi$

- L'axiome de nécessitation $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$ exprime le fait qu'une formule valide (vraie dans tous les mondes possibles) est aussi nécessaire.

Logique K

- Dans tous les modèles standard
  (def$_\Diamond$) : $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$
  (N) : $\Box\top$
  et (K) sont valides.
- L'ensemble des formules valides dans tous les modèles standard s'appelle la logique K.

Autres propriétés

Certaines formules ne sont pas valides dans la logique K parce que cette logique n'impose aucune condition sur la relation d'accessibilité.

- (T) : $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
- (D) : $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
- (B) : $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
- (4) : $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
- (5) : $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Relation d'accessibilité

- Si tout monde w est accessible depuis lui même
  - alors $\mathcal{R}$ est réflexive ($\forall w,\ \mathcal{R}(w, w)$)
- Si, lorsque w' est accessible à partir de w, w est accessible à partir de w'
  - alors $\mathcal{R}$ est symétrique ($\forall w, w', \mathcal{R}(w, w') \rightarrow \mathcal{R}(w', w)$).
- Si lorsque w' est accessible à partir de w et que w'' est accessible à partir de w', alors w'' est accessible à partir de w
  - alors $\mathcal{R}$ est transitive ($\forall w, w', w'', (\mathcal{R}(w, w') \wedge \mathcal{R}(w', w'')) \rightarrow \mathcal{R}(w, w'')$).

Relation d'accessibilité

- si pour tout w il existe un monde w' accessible
  - alors $\mathcal{R}$ est sérielle $(\forall w, \exists w', \mathcal{R}(w, w'))$.
- Si lorsque deux mondes w' et w'' sont accessibles à partir de w, ils sont accessible entre eux
  - alors $\mathcal{R}$ est euclidienne $(\forall w, w', w'', (\mathcal{R}(w, w') \wedge \mathcal{R}(w, w'')) \rightarrow \mathcal{R}(w', w''))$.

Opérateurs

Les logiques modales peuvent aussi être complétées par d'autres axiomes, qui correspondent à certaines propriétés que doit posséder la relation d'accessibilité entre les mondes $\mathcal{R}$:

- (T) : $\Box\varphi \rightarrow \varphi$, $\mathcal{R}$ est réflexive
- (D) : $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$, $\mathcal{R}$ est sérielle
- (B) : $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$, $\mathcal{R}$ est symétrique
- (4) : $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$, $\mathcal{R}$ est transitive
- (5) : $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$, $\mathcal{R}$ est euclidienne

Sommaire

Sommaire

Définition

- La logique modale epistémique est la logique de la connaissance et de la croyance.
- L'opérateur modal $\Box$, plus souvent noté K est interprété comme la connaissance ou la croyance.
- La logique modale epistémique est souvent utilisée pour étudier le comportement des Agents Intelligents.
- $K\varphi$ signifie l'Agent sait φ ou l'Agent croit φ.
- La sémantique de l'opérateur $\Diamond$ est plus claire en pensant à la forme duale de K : $\Diamond\varphi \equiv \neg K \neg\varphi$
  - φ est possible : L'agent ne croit pas que φ soit faux.

Définition

- Connaissance et croyance sont différentes ("on connait le théorème de Pythagore" ; "on croit qu'il va surenchérir").
- Il est indésirable qu'un Agent sache quelque chose qui soit faux, tandis qu'il est acceptable qu'un Agent croit en quelque chose de faux.
- Il faut donc ajouter des axiomes à la logique K pour modéliser la connaissance et la croyance
- Une logique modale qui modélise la connaissance a habituellement une relation d'accessibilité qui est réflexive, sérielle, transitive, et euclidienne.
- Elle est donc complétée par les axiomes (T), (D), (4), et (5).

Signification des axiomes

- (T) : $K\varphi \rightarrow \varphi$:
  - si l'Agent connait φ, alors φ est valide (ce que l'Agent connait est vrai).
- (D) : $K\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$:
  - si l'Agent connaît φ, alors φ est possible (la connaissance de l'agent n'est pas contradictoire).
- (4) : $K\varphi \rightarrow KK\varphi$:
  - si l'Agent connait φ, alors il sait qu'il connaît φ.
- (5) : $\Diamond\varphi \rightarrow K\Diamond\varphi$:
  - $\Diamond\varphi \rightarrow K\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg K\neg\varphi \rightarrow K\neg K\neg\varphi$
    et en renommant $\neg K\psi \rightarrow K\neg K\psi$
  - si l'Agent ne connaît pas ψ, alors il sait qu'il ne connait pas ψ (introspection négative)

Sommaire

Définition

- PDL est au départ une logique des programmes, qui peut se voir aussi comme une logique modale de l'action.
- On raisonne au niveau modal sur les instructions et leur combinaison dans des programmes.
- On raisonne sur des combinaisons de transformations de l'état du monde ; il s'agit de combinaisons d'actions (de plans).

Version PDL standard ("regular PDL")

- Soit $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ un ensemble de propositions atomiques.
- Soit $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ un ensemble d'actions atomiques.
- L'ensemble $\mathcal{L}_R$ contient les programmes réguliers, définis par les règles de formation (avec les opérateurs ; + * ?)

$$a \qquad r; s \qquad r + s \qquad r* \qquad \varphi?$$

où $a \in A$, $r, s \in \mathcal{L}_R$, et φ appartient à l'ensemble $\mathcal{L}_D$ des fbf de la Logique Propositionnelle Dynamique.

Composition d'Actions

$$a_i \qquad r;s \qquad r+s \qquad r* \qquad \varphi?$$

- a_i est une action atomique
- " ;" est l'exécution séquentielle : $r; s$ est l'exécution du programme r suivi de l'exécution du programme s.
- "+" est le choix non déterministe : $r+s$ est l'exécution soit du programme r soit du programme s
- "$*$" est l'itération : $r*$ est l'exécution de zéro ou plusieurs itérations du programme r.

Test - 1

$$a_i \mid r; s \mid r + s \mid r* \mid \varphi?$$

- " ?" est le test : φ? est un test qui correspond à l'action de confirmer la valeur de vérité de la fbf φ
  - si φ est vrai, alors l'action réussit, et correspond physiquement à une non-opération ;
  - si φ est faux, l'action échoue, et correspond physiquement à la terminaison d'une branche entière d'actions dont elle fait partie (comme si la branche n'avait pas existé).

Test - 2

- $\varphi?$ est une action
- $\varphi?; r$ est l'action : si φ faire r
- $\varphi?; \psi?; r$ est l'action : si φ alors si ψ faire r
- $\varphi? + r$ est l'action : tester φ ou appliquer r
- $\varphi?*$ n'a pas d'intérêt.

Test - 3 : traduction du si

```
si case en (xpos + 1, ypos) libre
  faire avancer
sinon
  faire tourner
fin si
```

```
si p
  faire a
sinon
  faire b
fin si
```

- $(p?; a) + (\neg p?; b)$

Version PDL standard : fbf

- l'ensemble $\mathcal{L}_D$ des fbf de PDL est formé à partir de constructeurs de formules et de constructeurs de programmes par les règles récursives suivantes :

$$p_j \mid \varphi \vee \psi \mid \neg\varphi \mid [r]\varphi \mid \langle r \rangle \varphi$$

où $p_j \in P$ est une proposition atomique, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_D$, et $r \in \mathcal{L}_R$ est un programme régulier.

Opérateurs modaux

- Les opérateurs modaux $\Box$ et $\Diamond$ sont étendus pour considérer l'exécution d'un programme régulier :
- $[r]\varphi$ signifie : il est nécessaire que l'exécution de r se termine dans un monde où φ est vrai.
    - $[r]\varphi$ est vraie si φ est vraie après toutes les exécutions du programme r
- $\langle r \rangle \varphi$ signifie : il est possible que l'exécution de r se termine dans un monde où φ est vrai.
    - $\langle r \rangle \varphi$ est vraie si φ est vraie après au moins une exécution du programme r

Opérateurs modaux

- si φ est vrai dans le monde *w* alors φ? se termine dans *w* et $(w, w) \in \mathcal{R}_{\varphi?}$;
- si φ est faux dans le monde *w* alors il n'y a pas de monde où elle se finit : $\mathcal{R}_{\varphi?} = \emptyset$
- $\langle\varphi?\rangle\,\psi$
  - si φ est faux il n'y a pas de monde où l'action φ? se termine et $\langle\varphi?\rangle\,\psi$ est faux
  - si φ est vrai il existe un monde dans lequel l'action se termine et il faut que ψ soit vrai pour que $\langle\varphi?\rangle\,\psi$ soit vrai
  - $\langle\varphi?\rangle\,\psi \leftrightarrow \varphi \wedge \psi$

Opérateurs modaux

- $[\varphi?]\psi$
  - si φ est vrai il existe un monde dans lequel l'action $\varphi?$ se termine et ψ doit être vrai pour que $[\varphi?]\psi$ le soit
  - si φ est faux, il n'existe pas de monde où $\varphi?$ se termine et donc "dans tous les mondes où elle se termine ... " est toujours vrai puisque l'ensemble des mondes est vide.
  - $[\varphi?]\psi \leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi$
- En pratique on n'utilise pas ces cas : $[\varphi?]\psi$ et $\langle\varphi?\rangle\,\psi$

Modèle PDL

Soit P l'ensemble des propositions atomiques de la Logique Propositionnelle, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des actions atomiques. Un modèle $\mathfrak{M}$ pour la Logique Propositionnelle Dynamique est un triplet $\mathfrak{M} = (\mathcal{W}, L, \mathcal{R})$ où :

- $\mathcal{W} = \{w_0, w_1, \ldots\}$ est un ensemble dénombrable de mondes ;
- $L : \mathcal{W} \longrightarrow 2^P$ est une fonction donnant l'ensemble des propositions atomiques qui sont vraies dans un monde donné ;
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{A} \times \mathcal{W}$ est une relation d'accessibilité. $\square$

Sémantique

La relation d'accessibilité $\mathcal{R}_r$ de la Logique Propositionnelle Dynamique indique les mondes accessibles à travers l'exécution de l'action atomique r à partir d'un monde donné. Les relations d'accessibilité $\mathcal{R}_{r;s}, \mathcal{R}_{r+s}, \mathcal{R}_{r*}, \mathcal{R}_{\varphi?}$ doivent respecter certaines contraintes pour que les programmes correspondants soient possibles.

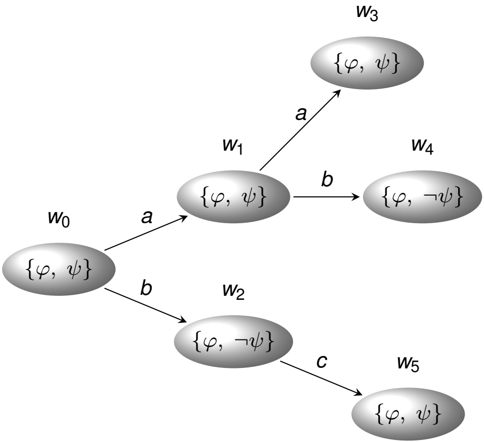
- $(w, w') \in \mathcal{R}_a$ iff $(w, a, w') \in \mathcal{R}$
- $(w, w') \in \mathcal{R}_{r;s}$ iff $\exists w'' \in \mathcal{W}\big((w, w'') \in \mathcal{R}_r \wedge (w'', w') \in \mathcal{R}_s\big)$
- $(w, w') \in \mathcal{R}_{r+s}$ iff $(w, w') \in \mathcal{R}_r \vee (w, w') \in \mathcal{R}_s$
- $(w, w') \in \mathcal{R}_{s*}$ iff $\exists w_0 \dots w_n \in \mathcal{W}$ $\Big((w = w_0) \wedge (w' = w_n) \wedge \big(\forall i (0 \leqslant i < n) \rightarrow (w_i, w_{i+1}) \in \mathcal{R}_s\big)\Big)$
- $(w, w) \in \mathcal{R}_{\varphi?}$ iff $\mathfrak{M} \models_w \varphi$

Sémantique

La sémantique de la PDL est donnée par :

- $\mathfrak{M} \models_w p$ iff $p \in L(w)$
- $\mathfrak{M} \models_w \varphi \vee \psi$ iff $\mathfrak{M} \models_w \varphi \vee \mathfrak{M} \models_w \psi$
- $\mathfrak{M} \models_w \neg\varphi$ iff $\mathfrak{M} \not\models_w \varphi$
- $\mathfrak{M} \models_w [r]\varphi$ iff $\forall w' \in \mathcal{W}\big((w, w') \in \mathcal{R}_r \rightarrow \mathfrak{M} \models_{w'} \varphi\big)$
- $\mathfrak{M} \models_w \langle r \rangle \varphi$ iff $\exists w' \in \mathcal{W}\big((w, w') \in \mathcal{R}_r \wedge \mathfrak{M} \models_{w'} \varphi\big)$

Exemple



$$\mathfrak{M} \models_{w_0} [a; b]\varphi$$

$$\mathfrak{M} \models_{w_0} \langle a + b \rangle \neg\psi$$