

## *Chapitre 2 : Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires*

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

---

*Septembre 2020*



# Chapitre 2

## Résolution des systèmes linéaires

2.1	Motivations . . . . .	3
2.2	L'élimination de Gauss . . . . .	7
2.3	Calcul direct de la factorisation $A = LU$ . . . . .	25
2.4	Factorisation $LU$ avec recherche de pivots . . . . .	34
2.5	Traitement des matrices symétriques . . . . .	50
2.6	Normes matricielles . . . . .	60
2.7	Conditionnement d'un système linéaire . . . . .	70

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 2.1 Motivations

2.1.1	Discrétisation de l'équation de la chaleur . . . . .	4
-------	--	---

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.1.1 Discrétisation de l'équation de la chaleur

### Exercices :

#### [Exercice C.1.1](#)

Avant de commencer voyons un exemple simple qui montre que l'on peut être amené à résoudre des systèmes linéaires de grande taille. Il s'agit de la résolution de l'équation de la chaleur stationnaire en dimension 1 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\frac{d^2 u}{dx^2}(x) & = & f(x), \quad x \in ]0, 1[, \\ u(0) & = & 0, \\ u(1) & = & 0. \end{array} \right.$$

On peut imaginer  $u(x)$  comme la distribution de température d'une barre de longueur 1 (dont toutes les constantes physiques ont été normalisées), chauffée de l'intérieur par un flux de chaleur  $f(x)$ . Les extrémités de la barre sont maintenues à une température nulle. Dans certaines situations particulières il est possible d'obtenir la solution exacte ; c'est le cas lorsque l'on connaît une double primitive de  $f$ . Dans le cas général, on peut chercher une approximation de  $u(x)$  en certains points  $(x_k)$ , avec  $k = 0 \dots N$ . Pour simplifier, on choisit des points  $x_k$  équidistants, on a donc  $h = \frac{1}{N}$  et  $x_k = kh$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Aux points  $x_k$ , l'équation se réécrit :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2}(x_k) &= f(x_k) \text{ , } k=1, \dots, N-1, \\ u(x_0) &= 0, \\ u(x_N) &= 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

On remarque par cette équation que la valeur de  $u$  est connue sur les bords de l'intervalle  $[0, 1]$ . Les dérivées apparaissant dans l'équation sont approchées par des formules n'utilisant que la valeur de  $u$  sur le réseau de points  $(x_k)$ . On peut approcher la dérivée seconde de  $u$  à l'aide de la formule classique :

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.1.2)$$

Si l'on se donne le droit de négliger le reste  $\mathcal{O}(h^2)$  (on peut penser que ceci est raisonnable si le nombre  $N$  de subdivisions est assez grand), on peut obtenir une approximation  $v_k \approx u(x_k)$  en écrivant les équations suivantes :

$$\begin{cases} -\frac{v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1}}{h^2} &= f(x_k) \text{ , } k=1, \dots, N-1 \\ v_0 &= 0, \\ v_N &= 0, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

## Discretisation de l'équation de la chaleur

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

qui peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

et  $v_0 = v_N = 0$ . On remarque que la matrice obtenue est tridiagonale.

La transformation de l'équation continue (2.1.1) (dont l'inconnue est une fonction  $u$ ), en un système d'équations discrètes approchées (2.1.3) (dont l'inconnue est un vecteur  $v \in \mathbb{R}^{N+1}$ ) est une *discrétisation* de l'équation de la chaleur. La technique utilisée ici est une méthode de *différences finies*. Il existe d'autres méthodes de discrétisation comme les éléments finis ou les volumes finis. L'étude de telles méthodes est l'objet d'autres cours que MT09.

Dans de très nombreuses situations (comme celle présentée ici), la résolution approchée de problèmes physiques conduit à la résolution de systèmes linéaires. L'objet de plusieurs chapitres de ce cours est l'étude de méthodes de résolution des systèmes linéaires, et leur programmation sur ordinateur.

## Discrétisation de l'équation de la chaleur

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.2 L'élimination de Gauss

2.2.1	Résolution d'un système triangulaire . . . . .	8
2.2.2	Principe de la méthode de Gauss et première étape . . . . .	10
2.2.3	Deuxième étape . . . . .	13
2.2.4	Étape générale . . . . .	15
2.2.5	Algorithme d'élimination de Gauss . . . . .	17
2.2.6	Écriture matricielle de l'élimination de Gauss . . . . .	20
2.2.7	Unicité de la factorisation LU . . . . .	23

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.2.1 Résolution d'un système triangulaire

### Exercices :

[Exercice C.1.2](#)

[Exercice C.1.3](#)

Dans tout ce qui suit on considérera une matrice  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  qu'on supposera *inversible*. On cherche à résoudre le système linéaire

$$Ax = b, \quad (2.2.1)$$

où  $b \in \mathbb{R}^n$  est donné. Un cas facile à traiter est le cas où  $A$  est une matrice triangulaire inférieure (pour fixer les idées) : on a alors

$$a_{ij} = 0, \text{ pour } j > i.$$

De plus, comme  $A$  est inversible on a nécessairement  $a_{ii} \neq 0 \forall i$ . La méthode de résolution est immédiate :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

puis

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1).$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



On peut donc écrire la formule générale :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right), \text{ pour } i = 2, 3, \dots, n.$$

On obtient donc les valeurs des inconnues dans l'ordre naturel.

Dans le cas où la matrice  $A$  est triangulaire supérieure, le calcul des inconnues est donné par

$$\begin{cases} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right), \text{ pour } i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases}$$

On notera que l'on obtient dans ce dernier cas les valeurs des inconnues dans l'ordre des indices décroissants.

## Résolution d'un système triangulaire

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.2.2 Principe de la méthode de Gauss et première étape

### Exercices :

[Exercice C.1.4](#)

Le principe de la méthode d'élimination de Gauss consiste alors à mettre le système linéaire  $Ax = b$  sous la forme

$$\hat{A}x = \hat{b} \quad (2.2.2)$$

où la matrice  $\hat{A}$  est triangulaire supérieure, la résolution de ce nouveau système étant assez simple comme on vient de le voir précédemment.

**Attention!** La matrice  $\hat{A}$  n'est pas semblable à  $A$ . Autrement dit, il ne faut pas croire que les matrices  $A$  et  $\hat{A}$  ont les mêmes valeurs propres. C'est dommage, puisque les valeurs propres de  $\hat{A}$  sont ses termes diagonaux. À ce sujet, il est à noter qu'il n'est pas possible de calculer en un nombre fini d'étapes les valeurs propres d'une matrice de rang supérieur à 5.

Le système (2.2.2) est simplement équivalent au système  $Ax = b$  d'où nous sommes partis et la méthode consiste à éliminer successivement des inconnues entre les équations.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Éliminons dans un premier temps la première inconnue, à savoir  $x_1$  : on part de

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On peut alors éliminer l'inconnue  $x_1$  entre les deux premières équations en retranchant de la deuxième ligne de  $A$  la première pré-multipliée par le coefficient  $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ , à condition que  $a_{11}$  soit non nul, ce que l'on supposera pour le moment . Ceci conduit donc à remplacer

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} \longrightarrow a_{2j}^{(2)} = a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n$$

et parallèlement

$$b_2^{(1)} = b_2 \longrightarrow b_2^{(2)} = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1.$$

La matrice et le vecteur second membre du système prennent les formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

## Principe de la méthode de Gauss et première étape

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

où on notera que le coefficient  $a_{21}^{(2)}$  est nul (on a fait ce qu'il fallait pour cela), ce qui signifie que l'inconnue  $x_1$  ne figure plus dans la deuxième équation du système.

On peut recommencer l'opération sur la troisième ligne en retranchant de celle-ci la première pré-multipliée par le coefficient  $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ , et ainsi de suite. Pour la ligne  $i$  cela donne les formules

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} & \longrightarrow & a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} & \text{pour } j = 1, 2, \dots, n \\ b_i^{(1)} = b_i & \longrightarrow & b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1. \end{cases}$$

Lorsqu'on a fait l'élimination jusqu'à la dernière ligne on obtient un système linéaire sous la forme  $A^{(2)}x = b^{(2)}$  avec

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nj}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_i^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

On dit qu'on vient de réaliser la *première étape* de l'élimination de Gauss, ce qui a consisté à faire apparaître des 0 sur la première colonne en dessous de la diagonale.

## Principe de la méthode de Gauss et première étape

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 2.2.3 Deuxième étape

### Exercices :

#### [Exercice C.1.5](#)

La deuxième étape consiste à éliminer la deuxième inconnue  $x_2$  des équations 3, 4, ...,  $n$ . Pour cela on commence par la troisième ligne, en supposant maintenant que  $a_{22}^{(2)}$  est non nul. Ce qui conduit aux formules :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{3j}^{(2)} & \longrightarrow & a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)} \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots, n \\ b_3^{(2)} & \longrightarrow & b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}. \end{array} \right.$$

La formule pour la ligne  $i$  ( $i = 3, \dots, n$ ) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{ij}^{(2)} & \longrightarrow & a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)} \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots, n \\ b_i^{(2)} & \longrightarrow & b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}. \end{array} \right.$$

Ce calcul étant fait jusqu'à la ligne  $n$ , on obtient un système sous la forme

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

$A^{(3)}x = b^{(3)}$  avec

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3j}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nj}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

## Deuxième étape

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.2.4 Étape générale

### Exercices :

#### [Exercice C.1.6](#)

On peut alors définir l'algorithme général en supposant qu'on a effectué  $k - 1$  étapes de l'élimination de Gauss, et on a un système qui s'écrit  $A^{(k)}x = b^{(k)}$ , avec  $A^{(k)}$  et  $b^{(k)}$  donnés par

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3k}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

L'étape  $k$  consiste à faire l'élimination de la variable  $x_k$  dans les équations  $k + 1, k + 2,$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

...,  $n$ . Ceci conduit aux formules suivantes, définies pour  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^{(k)} \longrightarrow a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \text{ pour } j = k, k + 1, \dots, n \\ b_i^{(k)} \longrightarrow b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}. \end{array} \right.$$

- On voit que la ligne  $i$  de la matrice  $A^{(k)}$  et du vecteur  $b^{(k)}$  n'est plus modifiée par l'algorithme dès que  $i \leq k$ .
- À l'étape  $k$  on pratique l'élimination sur une matrice carrée dont la taille est  $n - k + 1$ .
- Les modifications effectuées sur la matrice  $A$  au cours des étapes ne changent pas la valeur du déterminant puisqu'une ligne est toujours remplacée par elle même plus une combinaison de la ligne "pivot". On a donc

$$\det A = \det A^{(k)}, \text{ pour } k = 1, \dots, n.$$

- L'algorithme se termine à l'étape  $k = n$ . La matrice  $A^{(n)}$  ainsi obtenue est la matrice triangulaire supérieure  $\hat{A}$  cherchée et  $b^{(n)}$  est le vecteur  $\hat{b}$  du système  $\hat{A}x = \hat{b}$ , qui est bien équivalent au système  $Ax = b$ .

**Étape  
générale**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



## 2.2.5 Algorithme d'élimination de Gauss

### Exercices :

[Exercice C.1.7](#)

[Exercice C.1.8](#)

En partant de  $A^{(1)} = A$  et  $b^{(1)} = b$  on construit par récurrence, pour  $k = 1, 2, \dots, n$ , des matrices  $A^{(k)}$  et des vecteurs  $b^{(k)}$  tels que le système  $Ax = b$  soit équivalent à

$$A^{(k)}x = b^{(k)},$$

de plus la matrice  $A^{(n)}$  est triangulaire supérieure.

**Définition 2.2.1.** On appelle **pivots** les nombres  $a_{kk}^{(k)}$ .

Comme nous l'avons déjà noté, l'étape  $k$  de l'élimination ne modifie que les lignes et les colonnes  $k+1$  à  $n$ . Cela veut dire que de façon pratique, on n'a pas besoin de conserver les différentes versions de  $A^{(k)}$  et  $b^{(k)}$ . On travaille donc avec la matrice  $A$  et le vecteur  $b$  originaux, dans lesquels on écrase au fur et à mesure les anciens termes.

### Attention !

- On ne peut pas a priori savoir si les pivots seront non nuls, en effet l'étape  $k$  de l'algorithme modifie les valeurs de termes diagonaux des lignes  $k+1, k+2, \dots, n$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

- L'algorithme peut s'arrêter si à une étape quelconque  $k$  on a  $a_{kk}^{(k)} = 0$ . Cette situation peut malheureusement se produire même si la matrice est régulière, comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

où  $a_{11}^{(1)} = 0$  ! En examinant ce petit exemple, on voit qu'en permutant les deux lignes de  $A$  le système est triangulaire et l'élimination de Gauss est toute faite ! On peut donc espérer qu'en *permutant* éventuellement les lignes et/ou les colonnes on puisse toujours trouver un pivot non nul.

### Algorithme d'élimination de GAUSS

```

1: pour  $k = 1$  jusqu'à  $n - 1$  faire
2:   si  $|a_{kk}| < \text{tol}$  alors
3:     Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur
4:   sinon
5:     pour  $i = k + 1$  jusqu'à  $n$  faire
6:        $c \leftarrow a_{ik} / a_{kk}$ 
7:        $b_i \leftarrow b_i - c b_k$ 
8:        $a_{ik} \leftarrow 0$ 
9:     pour  $j = k + 1$  jusqu'à  $n$  faire
10:       $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - c a_{kj}$ 
11:    fin pour
12:  fin pour
13: fin si
```

## Algorithme d'élimination de Gauss

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

```
14: fin pour  
15: si  $|a_{nn}| < \text{tol}$  alors  
16:   Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur  
17: fin si
```

La tolérance  $\text{tol}$  dans l'algorithme est fixée par le programmeur. Il décide ainsi les valeurs des pivots qui ne sont pas acceptables (trop proches de 0). En calculs flottants,  $\text{tol}$  devra être (bien) plus grand que l'épsilon machine ( $\approx 10^{-16}$  en “double précision”) pour éviter les accumulations d'erreurs dûs au calcul flottant.

## Algorithme d'élimination de Gauss

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.2.6 Écriture matricielle de l'élimination de Gauss

### Exercices :

#### Exercice C.1.9

L'élimination de Gauss consiste à construire une suite de matrices  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ . La matrice du système que l'on résout est la matrice triangulaire  $A^{(n)}$ . L'indice  $i$  étant donné, on va exprimer la  $i$ ème ligne de  $A$  à partir des lignes de la matrice  $A^{(n)}$ . Pour une notation lisible, nous noterons la  $i$ ème ligne d'une matrice  $C$  :  $\underline{C}_i$ .

On peut tout d'abord remarquer que, à partir de la matrice  $A^{(i)}$ , la  $i$ ème ligne n'est plus modifiée, c'est-à-dire :

$$\underline{A}_i^{(i)} = \underline{A}_i^{(i+1)} = \dots = \underline{A}_i^{(n)} \quad (2.2.4)$$

Explicitons successivement la  $i$ ème ligne des matrices  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$

$$\underline{A}_i^{(1)} = \underline{A}_i$$

$$\underline{A}_i^{(2)} = \underline{A}_i^{(1)} - m_{i1} \underline{A}_1^{(1)}, \text{ avec } m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

$$\underline{A}_i^{(3)} = \underline{A}_i^{(2)} - m_{i2} \underline{A}_2^{(2)}, \text{ avec } m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

....

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

$$\underline{A}_i^{(i)} = \underline{A}_i^{(i-1)} - m_{i,i-1} \underline{A}_{i-1}^{(i-1)}, \text{ avec } m_{ii-1} = \frac{a_{i,i-1}^{(i-1)}}{a_{i-1,i-1}^{(i-1)}}$$

En ajoutant les égalités précédentes, on obtient :

$$\underline{A}_i = m_{i1} \underline{A}_1^{(1)} + m_{i2} \underline{A}_2^{(2)} + \dots + m_{i,i-1} \underline{A}_{i-1}^{(i-1)} + \underline{A}_i^{(i)}$$

En utilisant l'équation (2.2.4), on a :

$$\underline{A}_i = m_{i1} \underline{A}_1^{(n)} + m_{i2} \underline{A}_2^{(n)} + \dots + m_{i,i-1} \underline{A}_{i-1}^{(n)} + \underline{A}_i^{(n)}.$$

Si l'on pose  $m_{ii} = 1$ ,  $m_{ij} = 0$  pour  $j > i$ , on obtient :

$$\underline{A}_i = m_{i1} \underline{A}_1^{(n)} + \dots + m_{i,i-1} \underline{A}_{i-1}^{(n)} + m_{ii} \underline{A}_i^{(n)} + m_{i,i+1} \underline{A}_{i+1}^{(n)} + \dots + m_{in} \underline{A}_n^{(n)}.$$

En utilisant les propriétés du produit matriciel, cela s'écrit :

$$\underline{A}_i = (m_{i1} \ m_{i2} \ \dots \ m_{in}) A^{(n)}, \text{ donc } A = M A^{(n)}$$

où  $M$  est la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & \dots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

## Écriture matricielle de l'élimination de Gauss

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

La matrice  $M$  est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, cette matrice est souvent notée  $L$ , la matrice  $A^{(n)}$  est triangulaire supérieure, elle est souvent notée  $U$ , on vient d'écrire une factorisation de  $A$  sous la forme  $A = LU$ .

On pourrait montrer de manière similaire que  $A = L^{(k-1)} A^{(k)}$ , avec

$$L^{(k-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ m_{k1} & \dots & m_{kk-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{k+11} & \dots & m_{k+1k-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{n+1k-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Écriture matricielle de l'élimination de Gauss

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 2.2.7 Unicité de la factorisation LU

**Exercices :**

[Exercice C.1.10](#)

**Cours :**

[Élimination de Gauss /  
factorisation  \$A = LU\$](#)

Dans le paragraphe référencé, nous avons montré qu'une matrice  $A$  pouvait se factoriser en un produit d'une matrice triangulaire inférieure  $L$  et d'une matrice triangulaire supérieure  $U$  à condition que l'on puisse appliquer l'élimination de Gauss à la matrice  $A$ , ce qui est possible si les pivots sont non nuls. Nous avons alors le théorème suivant :

**Théorème 2.2.2.** *Si au cours de l'élimination de Gauss les pivots sont non nuls, alors il existe une matrice triangulaire inférieure  $L$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$ , telles que l'on ait*

$$A = LU. \quad (2.2.5)$$

*De plus si on impose à  $L$  d'avoir ses éléments diagonaux égaux à 1 alors la factorisation est unique.*

*Démonstration* - Il reste à démontrer l'unicité. Soit donc une autre factorisation :

$$A = \tilde{L}\tilde{U},$$

$\tilde{L}$  ayant ses éléments diagonaux égaux à 1. On a donc

$$LU = \tilde{L}\tilde{U},$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et comme les matrices  $L$  et  $U$  sont inversibles, on peut écrire

$$\tilde{L}^{-1}L = \tilde{U}U^{-1}$$

or  $\tilde{L}^{-1}L$  est une matrice triangulaire inférieure qui a ses éléments diagonaux égaux à 1, et  $\tilde{U}U^{-1}$  est une matrice triangulaire supérieure. Ces deux matrices ne peuvent être égales que si, d'une part, elles sont diagonales et que, d'autre part, il y a égalité des éléments diagonaux (égaux à 1 pour  $\tilde{L}^{-1}L$ ), d'où

$$\tilde{L}^{-1}L = \tilde{U}U^{-1} = I,$$

et donc  $L = \tilde{L}$  et  $U = \tilde{U}$ .

Dans cette démonstration on a utilisé des résultats sur les matrices triangulaires qui ont été démontrés en exercice dans le chapitre de révision d'algèbre linéaire. En particulier, le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est triangulaire inférieure (resp. supérieure) et l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) est triangulaire inférieure (resp. supérieure) avec ses éléments diagonaux qui sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice originale.

## Unicité de la factorisation LU

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



## 2.3 Calcul direct de la factorisation $A = LU$

2.3.1	Motivations de la factorisation $LU$ . . . . .	26
2.3.2	Principe du calcul direct de la factorisation $LU$ . . . . .	28
2.3.3	Algorithme de Doolittle . . . . .	31

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 2.3.1 Motivations de la factorisation $LU$

**Exercices :**  
[Exercice C.1.11](#)

**Cours :**  
[Elimination de Gauss /  
factorisation  \$A = LU\$](#)

— *Résolution des systèmes linéaires*

Dans certaines situations on a besoin de résoudre plusieurs fois le système linéaire  $Ax = b$  avec la même matrice  $A$  mais pour plusieurs seconds membres différents. Il semble alors inutile de recommencer les opérations d'élimination sur  $A$  qui est inchangée et l'on n'effectue celles-ci que sur le second membre  $b$ . Ces opérations étant *linéaires* on doit pouvoir les mettre sous forme matricielle. Reprenons le système

$$Ax = b. \quad (2.3.1)$$

Si l'on dispose d'une factorisation  $A = LU$ , telle que celle obtenue dans le paragraphe référencé, mais que nous allons calculer directement dans les paragraphes suivants, alors on peut récrire  $Ax = b$  sous la forme

$$LUx = b. \quad (2.3.2)$$

La solution de ce système s'obtient en résolvant successivement les deux systèmes

$$\begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y, \end{cases}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

ce qui correspond à la résolution de deux systèmes triangulaires.

— *Calcul du déterminant*

Comme nous l'avons déjà souligné la matrice  $U$  n'est pas semblable à  $A$ , cependant on a

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \det(U) = \det(U) = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)}.$$

Dans ce cas on n'a pas besoin d'explicitier  $L$  puisque son déterminant vaut a priori 1.

La factorisation  $LU$  qui fournit une méthode économique (par rapport au développement suivant une ligne ou une colonne) de calcul du déterminant de  $A$ . À titre d'exemple dans le cas  $n = 100$ , il faut de l'ordre de  $10^6$  opérations en utilisant la méthode de Gauss et de l'ordre de  $n! \approx 10^{158}$  opérations par un calcul direct.

Pour se donner une idée, les ordinateurs de bureau actuels calculent presque instantanément un déterminant en passant par la factorisation de Gauss pour  $n = 100$ . En revanche, en utilisant les calculateurs les plus puissants actuels (2016) qui atteignent presque les 100 petaFLOPS ( $10^{17}$  opérations flottantes par seconde!), il faudrait  $10^{141}$  secondes pour faire le calcul direct, soit environ  $3 \cdot 10^{134}$  années ! Par comparaison, l'âge de l'univers est d'environ  $13.8 \cdot 10^9$  ans seulement. . .

**Conclusion : en pratique, il ne faut pas calculer un déterminant en passant par le développement en ligne ou en colonne !**

**Motivations  
de la  
factorisation  
 $LU$**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 2.3.2 Principe du calcul direct de la factorisation $LU$

### Exercices :

[Exercice C.1.12](#)

Rappelons la présentation classique de l'algorithme de Doolittle. On oublie l'algorithme d'élimination de Gauss, pour chercher directement une décomposition de  $A$  de la forme  $A = LU$ , où  $L$  est triangulaire inférieure et  $U$  triangulaire supérieure. Pour assurer l'unicité de la décomposition, nous demandons que la diagonale de  $L$  soit unitaire ( $l_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$ ).

Traitons un exemple, soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ,

on cherche  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ \times & \times & 1 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$  telles que  $A = LU$ .

— On identifie la première ligne de  $A$  et la première ligne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la première ligne de  $U$  :

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Principe du  
calcul direct  
de la  
factorisation  
*LU***

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ \times & \times & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On identifie la première colonne de  $A$  avec la première colonne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la première colonne de  $L$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ -\mathbf{1} & \times & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ \mathbf{4} & 5 & -3 \\ -\mathbf{2} & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On identifie la deuxième ligne de  $A$  avec la deuxième ligne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la deuxième ligne de  $U$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \times & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On identifie la deuxième colonne de  $A$  avec la deuxième colonne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la deuxième colonne de  $L$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & \mathbf{5} & 3 \end{pmatrix}.$$

- On identifie la troisième ligne de  $A$  avec la troisième ligne de  $LU$ , cela permet

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

d'obtenir la troisième ligne de  $U$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

Une autre méthode consiste à calculer toujours explicitement une décomposition  $LU$  de la matrice  $A$ , mais cette fois-ci c'est la diagonale de  $U$  qui est formée de 1 mais non plus celle de  $L$ . Cette méthode, vue en exercice, conduit à l'algorithme de Crout.

**Principe du  
calcul direct  
de la  
factorisation  
 $LU$**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 2.3.3 Algorithme de Doolittle

#### Exercices :

#### Exercice C.1.13

En écrivant  $A = LU$  et en se souvenant que les matrices  $L$  et  $U$  sont triangulaires et que les termes diagonaux de  $L$  valent 1, on obtient

$$\underline{A}_i = \underline{L}_i U = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \underline{U}_k + \underline{U}_i. \iff \underline{U}_i = \underline{A}_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \underline{U}_k.$$

Nous voyons que pour calculer les éléments de la  $i$ ème ligne de  $U$ ,  $\underline{U}_i$ , il nous faut connaître préalablement les éléments des lignes 1 à  $i-1$  de  $U$  ainsi que les éléments des colonnes 1 à  $i-1$  de  $L$ . On peut remarquer de plus que, pratiquement, on ne calculera que les termes  $u_{ij}$  pour  $j$  compris entre  $i$  et  $n$ , puisque les autres termes de la ligne sont connus car nuls.

De manière similaire on a :

$$A_i = LU_i = \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} L_k + u_{ii} L_i. \iff L_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( A_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} L_k \right).$$

Nous voyons que, pour calculer les éléments de la  $i$ ème colonne de  $L$ ,  $L_i$ , il nous faut connaître préalablement les éléments des lignes 1 à  $i$  de  $U$  ainsi que les éléments des

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

colonnes 1 à  $i - 1$  de  $L$ . On peut remarquer de plus que, pratiquement, on ne calculera que les termes  $l_{ji}$  pour  $j$  compris entre  $i + 1$  et  $n$ , puisque on sait déjà que  $l_{ii} = 1$  et que les autres termes de la colonne sont nuls.

Nous allons donc calculer :

- la première ligne de  $U$ , puis la première colonne de  $L$ ,
- la deuxième ligne de  $U$ , puis la deuxième colonne de  $L$ ,
- et ainsi de suite...

Cet algorithme est décrit ci-dessous. Au besoin, il faut compléter les matrices  $L$  et  $U$  : pour  $U$  en mettant des zéros pour la partie triangulaire inférieure, pour  $L$  en mettant des zéros pour la partie triangulaire supérieure et des uns sur la diagonale.

En pratique, on stocke souvent la partie supérieure de  $U$  et la partie strictement inférieure de  $L$  (sans les 1 sur la diagonale) dans une seule matrice, afin de réduire le coût mémoire.

### Algorithme de DOOLITTLE

```

1: pour  $i = 1$  jusqu'à  $n - 1$  faire
2:   pour  $j = i$  jusqu'à  $n$  faire
3:      $u_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$ 
4:   fin pour
5:   pour  $j = i + 1$  jusqu'à  $n$  faire
6:      $l_{ji} \leftarrow \frac{1}{u_{ii}} (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki})$ 

```

## Algorithme de Doolittle

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



7: **fin pour**

8: **fin pour**

9:  $u_{nn} \leftarrow a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$

## Algorithme de Doolittle

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.4 Factorisation $LU$ avec recherche de pivots

2.4.1	Faisabilité de la factorisation $A = LU$ . . . . .	35
2.4.2	Pivot nul. Permutation de lignes . . . . .	37
2.4.3	Choix du pivot. Pivot maximal . . . . .	39
2.4.4	La factorisation $PA = LU$ . . . . .	41
2.4.5	Algorithme de la factorisation $PA = LU$ . . . . .	44
2.4.6	Application à la résolution d'un système linéaire . . . . .	46
2.4.7	La méthode du pivot total . . . . .	48

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 2.4.1 Faisabilité de la factorisation $A = LU$

#### Exercices :

[Exercice C.1.14](#)

Tout ce que nous avons fait jusqu'ici suppose qu'à aucun moment on ne rencontre de pivot nul. Nous allons voir ici qu'il existe une condition simple pour garantir la non-nullité de ces pivots. Voici tout d'abord une définition qui va nous servir par la suite :

**Définition 2.4.1.** *On appelle sous-matrice principale d'ordre  $k$  de la matrice  $A$  et on note  $[A]_k$  la matrice*

$$[A]_k = (a_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k}.$$

On a le théorème suivant :

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Théorème 2.4.2.** *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

— *Proposition 1 :*

*Tous les pivots  $a_{kk}^{(k)}$  sont définis et  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ .*

— *Proposition 2 :*

*$A$  admet une factorisation  $A = LU$  avec  $U$  inversible .*

— *Proposition 3 :*

*$[A]_1, [A]_2, \dots, [A]_n$  inversibles.*

Démonstration

**Faisabilité de  
la  
factorisation**  
 $A = LU$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 2.4.2 Pivot nul. Permutation de lignes

On suppose toujours que la matrice  $A$  est inversible, mais cette fois la condition énoncée dans le théorème 2.4.2 n'est plus vérifiée, supposons que l'on a :

$$a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{22}^{(2)} \neq 0, \dots, a_{k-1, k-1}^{(k-1)} \neq 0, a_{kk}^{(k)} = 0.$$

On a donc pu construire la matrice  $A^{(k)}$  comme précédemment :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \times & \dots & \times & \dots & \times \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \times & \dots & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Par contre puisque  $a_{kk}^{(k)} = 0$ , il n'est pas possible de calculer  $A^{(k+1)}$  comme précédemment. Existe-t-il un coefficient  $a_{ik}^{(k)}, i = k+1, \dots, n$  non nul? Si c'est le cas, comme l'ordre des équations composant un système d'équations linéaires ne joue aucun rôle, nous pouvons permuter la  $k^{\text{ème}}$  ligne avec l'une des lignes suivantes, il faut bien sûr permuter les seconds membres en parallèle. On obtiendra un nouveau coefficient  $a_{kk}^{(k)}$  non nul et on pourra poursuivre.

Existe-t-il un coefficient  $a_{ik}^{(k)}, i > k$  non nul? La réponse est oui, montrons-le.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

Si l'on pose

$$S_k = \begin{pmatrix} a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

on montre aisément que

$$\det A^{(k)} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{k-1,k-1}^{(k-1)} \det S_k.$$

Or  $\det A^{(k)} = \det A \neq 0$ , donc  $\det S_k \neq 0$ , donc la première colonne de  $S_k$  n'est pas nulle, donc il existe un coefficient  $a_{ik}^{(k)}$ ,  $i > k$  non nul. Il est donc possible de continuer l'élimination de Gauss à condition d'échanger l'ordre des équations.

**Proposition 2.4.3.** *À toute étape  $k$  de la méthode d'élimination de Gauss il existe au moins un élément non nul dans la colonne  $k$  et situé sur la ligne  $i$  avec  $i \geq k$ .*

**Pivot nul.  
Permutation  
de lignes**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### 2.4.3 Choix du pivot. Pivot maximal

**Exemples :**

[Exemple A.1.1](#)

**Exercices :**

[Exercice C.1.15](#)

En théorie, ce n'est que lorsqu'un pivot est nul que l'on est obligé de permuter les équations donc les lignes de  $A$ . Pratiquement, il y a des cas où le pivot n'est pas nul, mais où l'échange des lignes est souhaitable à cause des erreurs numériques, voir l'exemple référencé. On peut démontrer que l'on a intérêt, au moment de l'élimination de chacune des inconnues  $x_k$ , à rechercher puis choisir, le coefficient  $a_{ik}^{(k)}$  le plus grand en module pour  $k \leq i \leq n$ , puis l'ayant trouvé de permuter les lignes correspondantes. En outre, l'expérience numérique confirme ce résultat mathématique.

En pratique donc, on fera toujours (même si  $a_{kk}^{(k)}$  est non nul) des échanges de lignes de façon à avoir le pivot le plus grand en valeur absolue : à l'étape  $k$  de l'élimination de Gauss, on recherchera dans la colonne  $k$ , pour les indices de ligne  $i$  variant de  $k$  à  $n$ , l'élément  $a_{lk}^{(k)}$  tel que

$$\forall i \in \{k, k+1, \dots, n\}, |a_{ik}^{(k)}| \leq |a_{lk}^{(k)}|$$

et on échangera les lignes  $l$  et  $k$ . Une étape de l'algorithme d'élimination de Gauss avec permutation de lignes peut donc se représenter par

$$A^{(k+1)} = M^{(k)} P^{(k)} A^k,$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

où  $P^{(k)}$  est la matrice de permutation permettant de permuter les lignes  $l$  et  $k$  où  $l \geq k$ . Comme on peut le montrer dans l'exercice référencé, cette matrice a tous ses éléments nuls sauf

$$\begin{cases} p_{ii} &= 1, & i \neq k, i \neq l \\ p_{kl} &= 1, \\ p_{lk} &= 1. \end{cases}$$

Cette matrice étant une matrice de permutation symétrique elle possède la propriété

$$P^{(k)} = P^{(k)\top} = P^{(k)-1}.$$

**Choix du  
pivot. Pivot  
maximal**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



## 2.4.4 La factorisation $PA = LU$

### Exemples :

#### Exemple A.1.2

Vous pouvez commencer par étudier l'exemple référencé. Dans le cas général :

- On commence par une recherche de pivot maximal dans la première colonne de  $A$ , si ce pivot se trouve en ligne numéro  $\ell$ , on échange les lignes 1 et  $\ell$  de  $A$ , c'est-à-dire si  $P^{(1)}$  est la matrice de permutation qui échange la ligne 1 et la ligne  $\ell$ , on calcule

$$\hat{A}^{(1)} = P^{(1)} A.$$

- On effectue la première étape de la méthode de Gauss sur la matrice  $\hat{A}^{(1)}$ , c'est-à-dire on détermine  $L^{(1)}$  et  $A^{(2)}$  telles que

$$P^{(1)} A = L^{(1)} A^{(2)}.$$

- On effectue une recherche de pivot maximal dans la deuxième colonne de  $A^{(2)}$ , si ce pivot se trouve en ligne numéro  $\ell$ , on échange les lignes 2 et  $\ell$  de  $A^{(2)}$ , c'est-à-dire on calcule  $P^{(2)} A^{(2)}$  où  $P^{(2)}$  est la matrice de permutation qui échange les lignes 2 et  $\ell$ .

On peut alors remarquer que  $P^{(2)} P^{(1)} A = P^{(2)} L^{(1)} P^{(2)} A^{(2)}$ , en appliquant la proposition 2.4.5  $P^{(2)} L^{(1)} P^{(2)} = \hat{L}^{(1)}$ , on peut poser  $\hat{A}^{(2)} = P^{(2)} A^{(2)}$ , on a donc

$$P^{(2)} P^{(1)} A = \hat{L}^{(1)} \hat{A}^{(2)}.$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

- On effectue la deuxième étape de la méthode de Gauss sur la matrice  $\hat{A}^{(2)}$ , c'est-à-dire on détermine  $L^{(2)}$  et  $A^{(3)}$  telles que

$$P^{(2)} P^{(1)} A = L^{(2)} A^{(3)}.$$

- De façon générale lorsque l'on a obtenu

$$P^{(k-1)} \dots P^{(1)} A = L^{(k-1)} A^{(k)},$$

- on pivote sur la colonne  $k$  de  $A^{(k)}$ , on obtient

$$P^{(k)} P^{(k-1)} \dots P^{(1)} A = \hat{L}^{(k-1)} \hat{A}^{(k)}$$

- on effectue la  $k$ ème étape de la méthode de Gauss, on obtient

$$P^{(k)} P^{(k-1)} \dots P^{(1)} A = L^{(k)} A^{(k+1)}.$$

- On obtient après  $n - 1$  étapes :

$$P^{(n-1)} P^{(n-2)} \dots P^{(1)} A = L^{(n-1)} A^{(n)},$$

si l'on pose  $P = P^{(n-1)} P^{(n-2)} \dots P^{(1)}$ ,  $L = L^{(n-1)}$ ,  $U = A^{(n)}$ , on a obtenu la factorisation recherchée  $PA = LU$ .

**Théorème 2.4.4.** Soit  $A$  une matrice inversible. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure  $L$ , une matrice triangulaire supérieure  $U$ , et une matrice de permutation  $P$  telles que

$$PA = LU. \quad (2.4.1)$$

## La factorisation

$$PA = LU$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

Remarquons qu'il n'y a pas unicité de la décomposition  $PA = LU$ .

Nous avons utilisé la proposition suivante :

**Proposition 2.4.5.** Soit  $L^{(k-1)}$  une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité vérifiant de plus

$$[L^{(k-1)}]_{ij} = 0, \quad i > j > k-1,$$

et soit  $P^{(k)}$  la matrice de permutation de l'étape  $k$  de l'algorithme de Gauss avec recherche de pivot, permutant les lignes  $k$  et  $l$  où  $l \geq k$ . Alors on a

$$P^{(k)} L^{(k-1)} P^{(k)} = \hat{L}^{(k-1)},$$

où  $\hat{L}^{(k-1)}$  est une matrice triangulaire inférieure obtenue à partir de  $L^{(k-1)}$  en permutant les termes des lignes  $k$  et  $l$  dans les colonnes 1 à  $k-1$ .

[Démonstration](#)

Remarquons que, dans la pratique, il est inutile de stocker toutes les matrices  $P^{(k)}$ , il suffit à chaque échange de mettre à jour un vecteur  $p$ , reprenez l'exemple.

**La  
factorisation**  
 $PA = LU$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 2.4.5 Algorithme de la factorisation $PA = LU$

Comme dans le cas de la factorisation  $A = LU$ , il n'y a pas besoin de conserver les matrices successives  $A^{(k)}$  et  $L^{(k)}$ . En ce qui concerne les permutations, on en garde l'historique en mettant à jour un vecteur  $p$  valant initialement

$$p = [1, 2, \dots, n]^\top,$$

sur lequel on effectuera les permutations successives représentées par les matrices  $P^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

En ce qui concerne la recherche de l'élément pivot, on recherchera le pivot le plus grand en valeur absolue pour les raisons déjà évoquées précédemment.

#### Algorithme de factorisation $PA = LU$

```
1:  $L \leftarrow I$ 
2:  $p \leftarrow [1, 2, \dots, n]^\top$ 
3: pour  $k = 1$  jusqu'à  $n-1$  faire
4:   Trouver  $l$  tel que  $|a_{lk}| \geq |a_{ik}|$ ,  $i = k \dots n$ 
5:   si  $|a_{lk}| < \text{tol}$  alors
6:     Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur
7:   sinon
```

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

```
8:   Appliquer la permutation  $(k, l)$  au vecteur  $p$ , aux lignes de  $A$  et aux lignes de  $L$ 
    dans les colonnes 1 à  $k - 1$ 
9:   pour  $i = k + 1$  jusqu'à  $n$  faire
10:       $l_{ik} \leftarrow a_{ik} / a_{kk}$ 
11:      pour  $j = k$  jusqu'à  $n$  faire
12:          $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - l_{ik} a_{kj}$ 
13:      fin pour
14:   fin pour
15: fin si
16: fin pour
17: si  $|a_{nn}| < \text{tol}$  alors
18:   Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur
19: fin si
```

Le dernier test est important car la valeur de  $a_{nn}$ , qui n'est pas un pivot, n'est pas testée dans la boucle principale. Le message d'erreur à afficher dans les deux cas pourrait être du type «la matrice est singulière à la précision machine».

## Algorithme de la factorisation

$PA = LU$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.4.6 Application à la résolution d'un système linéaire

Comment utilise-t-on cette factorisation pour résoudre un système linéaire? C'est aussi simple que pour la factorisation  $LU$  "classique". On a  $Ax = b$  que l'on multiplie à gauche par la matrice de permutation  $P$ . On a donc

$$PAx = Pb,$$

soit  $LUx = Pb$ . La solution de ce système s'obtient en résolvant successivement les deux systèmes

$$\begin{cases} Ly = Pb, \\ Ux = y, \end{cases}$$

ce qui correspond toujours à la résolution de deux systèmes triangulaires. La seule différence est qu'ici on doit permuter les composantes du vecteur  $b$  avant résolution.

De façon pratique, on n'explicite jamais la matrice de permutation  $P$  mais on dispose (voir algorithme précédent) du vecteur  $p$  défini par

$$p = P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Le vecteur  $c = Pb$  est donc le vecteur

$$c = \begin{pmatrix} b_{p_1} \\ b_{p_2} \\ \vdots \\ b_{p_n} \end{pmatrix}.$$

Pour le calcul du déterminant de  $A$ , on a

$$\det(PA) = \det P \det A = \prod_{k=1}^n u_{kk},$$

avec  $\det P = (-1)^q$  où  $q$  est le nombre de permutations différentes de l'identité qui ont été effectuées sur  $A$ .

## Application à la résolution d'un système linéaire

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.4.7 La méthode du pivot total

Dans certaines situations la permutation des lignes est insuffisante. En effet il est possible que dans une colonne on ne puisse pas trouver d'élément suffisamment grand en valeur absolue (par rapport à un seuil que l'on se fixe). Ceci conduit à rechercher à chaque étape  $k$  de la méthode de Gauss, l'élément de la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} a_{k,k} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,k} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dont la valeur absolue est maximum. Ceci nécessite alors une permutation des lignes *et* des colonnes. Cela correspond à échanger des équations du système, ainsi que des inconnues. En termes de factorisation de type  $A = LU$ , cette approche permet d'obtenir  $L$  et  $U$  respectivement triangulaire inférieure et triangulaire supérieure, telles que

$$LU = PAQ,$$

où  $P$  et  $Q$  sont des matrices de permutation. Cette méthode est rarement utilisée, car la recherche du pivot peut très vite devenir coûteuse (quand la matrice est grande) par rapport au gain de précision éventuellement obtenu.

Ce problème du choix de pivot maximal : ***pivot partiel*** (recherché uniquement sur la  $k^{\text{ème}}$  colonne :  $k \leq i \leq n$ ) ou ***pivot total*** (recherché sur toute la sous-matrice :  $k \leq i, j \leq n$ ) est un exemple typique de situation classique en analyse numérique. Plus

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



précisément, on sait obtenir mathématiquement des majorations d'erreur pour la méthode de pivot total bien meilleures que pour la méthode de pivot partiel. On sait exhiber des matrices pour lesquelles la majoration d'erreur relative au pivot partiel est atteinte. Pourtant, l'expérience numérique montre que dans toutes les situations pratiques, la méthode du pivot partiel suffit.

## La méthode du pivot total

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.5 Traitement des matrices symétriques

2.5.1	La factorisation $LDL^T$ . . . . .	51
2.5.2	La factorisation de Cholesky : existence . . . . .	53
2.5.3	Algorithme de Cholesky . . . . .	56

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.5.1 La factorisation $LDL^\top$

### Exercices :

[Exercice C.1.16](#)

Lorsqu'une matrice  $A$  est symétrique, alors la factorisation  $A = LU$ , lorsque celle-ci est possible, peut prendre une forme particulière tenant compte de cette symétrie :

**Proposition 2.5.1.** *Si  $A$  est symétrique avec toutes ses sous-matrices principales régulières, alors elle admet une unique factorisation sous la forme*

$$A = LDL^\top,$$

*où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et  $D$  une matrice diagonale régulière.*

*Démonstration* - D'après l'hypothèse,  $A$  vérifie les conditions pour avoir une unique factorisation  $LU$ , avec  $L$  triangulaire inférieure à diagonale unité. Par ailleurs, si on note  $D$  la matrice diagonale dont la diagonale est égale à celle de  $U$ , on peut écrire

$$A = LDV,$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

avec  $V = D^{-1}U$  qui est une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité (car  $U$  est une matrice régulière et donc ses éléments diagonaux sont non nuls). Comme  $A$  est symétrique, on a

$$A = LDV = V^{\top}DL^{\top} = A^{\top}.$$

Or, on a démontré l'unicité de la factorisation  $LU$  (dans le cas où  $L$  est à diagonale unité), d'où  $L = V^{\top}$ , puisque  $V^{\top}$  est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et que  $DL^{\top}$  est une matrice triangulaire supérieure. L'unicité de la factorisation  $LDL^{\top}$  découle de l'unicité de la factorisation  $LU$ .

Le résultat précédent est uniquement un résultat d'existence : en pratique on calcule les matrices  $L$  et  $D$  en procédant différemment. L'algorithme consiste à calculer les termes de  $D$  et  $L$  colonne par colonne (ou ligne par ligne) en identifiant les termes de  $A$  dans l'égalité

$$A = LDL^{\top}.$$

Nous allons maintenant voir une méthode de factorisation adaptée aux matrices symétriques définies positives, qui est directement issue de la factorisation  $LDL^{\top}$  pour les matrices symétriques.

## La factorisation $LDL^{\top}$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.5.2 La factorisation de Cholesky : existence

Dans tout ce paragraphe  $A$  désigne une matrice symétrique définie positive. Nous aurons besoin du lemme suivant pour pouvoir faire la démonstration du théorème principal concernant l'existence et l'unicité de la factorisation :

**Lemme 2.5.2.** *Une matrice  $A$  symétrique définie positive a toutes ses sous-matrices principales  $[A]_k$  régulières.*

*Démonstration* - Soit  $k$  fixé et  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^k$  un vecteur quelconque non nul. On définit

$$z = (\tilde{z}^\top, 0, \dots, 0)^\top = (z_1, z_2, \dots, z_k, 0, \dots, 0)^\top.$$

Comme  $A$  est définie positive

$$0 < z^\top A z = \tilde{z}^\top [A]_k \tilde{z},$$

ce qui montre que  $[A]_k$  est définie positive donc inversible.

**Théorème 2.5.3.** *Si  $A$  est une matrice symétrique définie positive elle admet une unique factorisation sous la forme*

$$A = B B^\top,$$

*où  $B$  est une matrice triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux sont positifs.*

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

*Démonstration* - Tout d'abord, comme  $A$  est définie positive toutes ses sous-matrices principales sont régulières (voir le lemme 2.5.2 précédent) et il résulte de la proposition 2.5.1 qu'elle admet une factorisation sous la forme

$$A = LDL^{\top}. \quad (2.5.1)$$

La matrice  $D$  a tous ses éléments diagonaux positifs.

En effet, pour  $i$  fixé ( $1 \leq i \leq n$ ), soit  $z$  tel que  $L^{\top}z = e^i$ . Alors on a

$$0 < z^{\top}Az = (L^{\top}z)^{\top}DL^{\top}z = (e^i)^{\top}De^i = d_{ii},$$

puisque  $A$  est définie positive. En introduisant alors la matrice diagonale  $\Lambda$  telle que

$$\lambda_{ii} = \sqrt{d_{ii}},$$

on peut récrire (2.5.1) sous la forme

$$A = L\Lambda\Lambda L^{\top} = (L\Lambda)(L\Lambda)^{\top} = BB^{\top},$$

obtenue en posant

$$B = L\Lambda.$$

Démontrons l'unicité. Soit donc une autre factorisation

$$A = \tilde{B}\tilde{B}^{\top},$$

où  $\tilde{B}$  est une matrice triangulaire à éléments diagonaux positifs. On peut donc écrire

$$BB^{\top} = \tilde{B}\tilde{B}^{\top} \Rightarrow B^{-1}BB^{\top}[\tilde{B}^{\top}]^{-1} = B^{-1}\tilde{B}\tilde{B}^{\top}[\tilde{B}^{\top}]^{-1} \Rightarrow B^{\top}[\tilde{B}^{\top}]^{-1} = B^{-1}\tilde{B}$$

## La factorisation de Cholesky : existence

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

or, dans cette dernière égalité les matrices sont, à gauche, triangulaires supérieures et, à droite, triangulaires inférieures, ceci n'est possible que si elles sont diagonales et donc

$$B^{\top} [\tilde{B}^{\top}]^{-1} = B^{-1} \tilde{B} = D,$$

ce qui implique que

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \frac{b_{ii}}{\tilde{b}_{ii}} = \frac{\tilde{b}_{ii}}{b_{ii}} = d_{ii} \Rightarrow (b_{ii})^2 = (\tilde{b}_{ii})^2,$$

soit finalement  $b_{ii} = \tilde{b}_{ii}$ , puisque ces nombres sont positifs, et donc

$$d_{ii} = 1.$$

$D$  est donc la matrice identité, donc  $B = \tilde{B}$  d'où l'unicité.

Comme dans le cas de la factorisation  $LDL^{\top}$  le résultat précédent est uniquement un résultat d'existence et en pratique on calcule la matrice  $B$  colonne par colonne (ou ligne par ligne) en identifiant les termes de  $A$  dans l'égalité

$$A = BB^{\top}.$$

## La factorisation de Cholesky : existence

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 2.5.3 Algorithme de Cholesky

**Exercices :**

[Exercice C.1.17](#)

**Cours :**

[Factorisation de Cholesky /  
existence](#)

Il s'agit d'une adaptation de la factorisation  $LU$ , à un système dont la matrice  $A$  est symétrique définie positive. L'algorithme se décompose en trois étapes :

- calcul de la décomposition de la matrice du système,
- résolution du premier système triangulaire,
- résolution du deuxième système triangulaire.

Plus précisément, on cherche une décomposition de la matrice  $A$  du système, de la forme  $A = B B^T$  (voir le paragraphe référencé), où  $B$  est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont positifs ( $B^T$  désigne sa transposée). On obtient cette décomposition par identification :

$$a_{11} = \underline{B}_1 (B^T)_1 = b_{11}^2.$$

Puisque  $b_{11}$  doit être positif, on a

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



## Algorithme de Cholesky

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}.$$

$$A_1 = B(B^\top)_1 = b_{11}B_1 \iff B_1 = \frac{1}{b_{11}}A_1,$$

ce qui permet de déterminer la première colonne de  $B$ .

De façon similaire on définit la deuxième colonne de  $B$ .

$$a_{22} = \underline{B}_2(B^\top)_2 = b_{21}^2 + b_{22}^2.$$

Puisque  $b_{22}$  doit être positif, on a

$$b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2}.$$

$$A_2 = B(B^\top)_2 = b_{21}B_1 + b_{22}B_2 \iff B_2 = \frac{1}{b_{22}}(A_2 - b_{21}B_1),$$

ce qui termine de déterminer la deuxième colonne de  $B$ .

De façon générale, lorsque l'on a déterminé les  $j-1$  premières colonnes de  $B$ , on écrit :

$$a_{jj} = \underline{B}_j(B^\top)_j = \sum_{k=1}^j b_{jk}^2 \iff b_{jj}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2.$$

Puisque  $b_{jj}$  doit être positif, on a

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Algorithme de Cholesky

$$b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2}.$$

$$A_j = B(B^\top)_j = \sum_{k=1}^j b_{jk} B_k \iff B_j = \frac{1}{b_{jj}} \left( A_j - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} B_k \right),$$

ce qui termine de déterminer la  $j$ ème colonne de  $B$ . On déterminera successivement les colonnes  $1, 2, \dots, n-1$ , puis on terminera par le calcul de

$$b_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{nk}^2}.$$

On remarque qu'on pourrait également travailler en ligne, car  $A$  est symétrique.

Comme dans la factorisation de Doolittle, dans chaque colonne  $j$  on ne calcule que les termes  $b_{ij}$  pour  $i$  supérieur ou égal à  $j$ , puisque les autres termes de cette colonne sont connus car nuls.

On a donc l'algorithme :

1: **pour**  $j = 1$  jusqu'à  $n-1$  **faire**

2:  $b_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2};$

3: **pour**  $i = j+1$  jusqu'à  $n$  **faire**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

$$4: \quad b_{ij} \leftarrow \frac{1}{b_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk} \right);$$

5:   **fin pour**

6: **fin pour**

$$7: \quad b_{nn} \leftarrow \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{nk}^2};$$

Si la matrice est définie positive, les nombres dont on prend la racine carrée sont positifs, les nombres par lesquels on divise sont non nuls (puisque l'on a montré que la décomposition existait). Cependant, il est prudent d'inclure dans l'algorithme des tests qui s'assurent que ces propriétés sont vérifiées.

## Algorithme de Cholesky

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.6 Normes matricielles

2.6.1	Normes vectorielles . . . . .	61
2.6.2	Définition de la norme matricielle . . . . .	63
2.6.3	Étude de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne	66
2.6.4	Rayon spectral . . . . .	68

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.6.1 Normes vectorielles

### Exercices :

[Exercice C.1.18](#)

Pour pouvoir écrire que deux vecteurs sont proches ou que deux matrices sont proches, il faut pouvoir mesurer la "distance" entre ces deux objets. Ceci se fait généralement en utilisant une norme qu'elle soit vectorielle ou matricielle. Les normes matricielles sont aussi un outil indispensable pour le calcul du conditionnement d'une matrice, indicateur de la "bonne résolution" d'un système linéaire.

**Définition 2.6.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On appelle norme sur  $E$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  notée

$$x \mapsto \|x\|$$

possédant les propriétés suivantes : quel que soit  $x \in E$ ,  $y \in E$ ,  $\lambda \in K$  :

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (la norme est positivement homogène)
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire)

La notation  $|\lambda|$  représente la valeur absolue ou le module de  $\lambda$  suivant que  $\lambda$  est réel ou complexe.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Normes vectorielles

- $E = \mathbb{R}^n$       $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$
- $E = \mathbb{R}^n$       $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  (norme euclidienne),
- $E = \mathbb{R}^n$       $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$
- $E = \mathbb{C}^n$       $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$  avec  $|x_i|^2 = x_i \bar{x}_i.$

Pour montrer l'inégalité triangulaire de la norme euclidienne, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz (démontrée en exercice) :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 2.6.2 Définition de la norme matricielle

### Exercices :

[Exercice C.1.19](#)

[Exercice C.1.20](#)

[Exercice C.1.21](#)

**Définition 2.6.2.** On appelle **norme matricielle** une application qui à une matrice quelconque, associe un nombre réel positif. On note cette application de  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}_+$  :

$$A \mapsto \|A\|,$$

et elle possède les propriétés suivantes :

- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ,
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ ,
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ .

Les normes matricielles vérifient donc, en plus des propriétés des normes vectorielles, une relation sur le produit des matrices.

**Définition 2.6.3.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ . Étant donnée une norme (vectorielle) sur  $\mathbb{C}^n$ , et une norme (vectorielle) sur  $\mathbb{C}^m$  on appelle **norme matricielle subordonnée**, une norme

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

matricielle définie par

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Quelques remarques :

1. Les normes matricielles subordonnées dépendent de la norme vectorielle associée.
2. On a distingué dans ce chapitre les normes matricielles subordonnées notées  $\|\cdot\|$  des normes matricielles en général notées  $\|\cdot\|$ .
3. La matrice  $A$  n'est pas forcément *carrée*, la norme vectorielle étant celle de  $\mathbb{C}^n$  pour  $\|x\|$  et celle de  $\mathbb{C}^m$  pour  $\|Ax\|$ .
4. La notation "max" laisse supposer qu'il existe effectivement un vecteur  $\tilde{x} \neq 0$  pour lequel la maximum est atteint (ce qui implique que pour  $\tilde{x}$  on a :  $\|A\tilde{x}\| = \|A\| \|\tilde{x}\|$ ), ce qui est vrai mais nullement évident !
5. La définition suppose que l'on prend le maximum pour les vecteurs  $x \in \mathbb{C}^n$ , en fait pour les normes subordonnées aux normes vectorielles que l'on a déjà citées, c'est-à-dire  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ , il suffit de prendre le maximum pour les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .
6. Dans cette définition, on affirme que la norme matricielle subordonnée ainsi définie est bien une norme matricielle. Nous allons le vérifier pour deux des propriétés vous laissant les deux autres à démontrer en exercice.
  - Il est évident que  $A = 0$  implique que  $\|A\| = 0$ . Inversement :

$$\|A\| = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Ax = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A = 0,$$

car  $A$  est alors la matrice de l'application nulle.

## Définition de la norme matricielle

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



— La définition de  $\|A\|$  donne de manière évidente (exercice)

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

d'où, en divisant par  $\|x\|$  et en prenant le max, la quatrième propriété.

Quelques exemples de normes matricielles :

1. On peut montrer que la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle  $\|\cdot\|_1$ , notée  $\|\cdot\|_1$ , vaut

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

2. la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle  $\|\cdot\|_\infty$ , notée  $\|\cdot\|_\infty$ , vaut

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

3. Il existe des normes matricielles qui ne sont pas subordonnées à une norme vectorielle, c'est le cas de la norme de Frobenius :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^\top A)}.$$

## Définition de la norme matricielle

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### 2.6.3 Étude de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne

Le calcul de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne repose sur le théorème suivant :

**Théorème 2.6.1.** *Si  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  est symétrique alors*

$$\max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{x^\top A x}{x^\top x}, \quad (2.6.1)$$

où  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont les valeurs propres (réelles) de  $A$ .

*Démonstration* - Comme  $A$  est symétrique elle admet une base de vecteurs propres orthonormés  $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$  associés aux valeurs propres réelles que l'on ordonne :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n,$$

donc tout vecteur  $x$  peut s'écrire

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i Y_i \text{ avec } \|x\|_2^2 = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i Y_i^\top \right) \left( \sum_{j=1}^n \xi_j Y_j \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

On a

$$x^\top A x = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i Y_i^\top \right) \left( \sum_{j=1}^n \xi_j \lambda_j Y_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2,$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

d'où l'on tire immédiatement la majoration suivante :

$$x^\top Ax \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

soit

$$x^\top Ax \leq \lambda_1 \|x\|_2^2.$$

D'où

$$\frac{x^\top Ax}{x^\top x} \leq \lambda_1$$

et comme cette inégalité est vraie quelque soit  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on a

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^\top Ax}{x^\top x} \leq \lambda_1.$$

Pour obtenir l'égalité il suffit de remarquer que

$$(Y_1)^\top AY_1 = \lambda_1 \|Y_1\|_2^2 = \lambda_1$$

ce qui montre que le maximum est bien atteint.

**Étude de la  
norme  
matricielle  
subordonnée  
à la norme  
euclidienne**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.6.4 Rayon spectral

### Exercices :

[Exercice C.1.22](#)

[Exercice C.1.23](#)

[Exercice C.1.24](#)

**Définition 2.6.4.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ , on appelle *rayon spectral* de  $A$  et on note  $\rho(A)$  le nombre réel

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

où  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont les *valeurs propres (complexes)* de  $A$ .

En effet si  $\lambda_k$  est la plus grande valeur propre (en module) de  $A$ , si on pose  $r = |\lambda_k|$ , alors toutes les valeurs propres sont dans le disque (du plan complexe) de rayon  $r$ , cette quantité s'appelle le *rayon spectral* (l'ensemble des valeurs propres d'une matrice s'appelle aussi le *spectre* de la matrice).

### Théorème 2.6.2.

— Soit  $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ , alors

$$\|A\|_2^2 = \rho(AA^\top) = \rho(A^\top A).$$

— Si la matrice  $C$  est *symétrique*, alors

$$\|C\|_2 = \rho(C). \quad (2.6.2)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

— Soit  $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ , alors

$$\|A\|_2^2 = \|AA^\top\|_2 = \|A^\top A\|_2.$$

*Démonstration -*

—

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^\top (Ax) = x^\top A^\top Ax = x^\top (A^\top A)x = x^\top Bx$$

où l'on a noté matrice  $B = A^\top A$ .

$B$  est symétrique semi-définie positive, donc ses valeurs propres  $\mu_i, i = 1, \dots, n$  sont réelles positives ou nulles (voir le chapitre de révision d'algèbre linéaire), donc  $|\mu_i| = \mu_i$ .

On peut appliquer le théorème 2.6.1 :

$$\|A\|_2^2 = \max_{x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0} \frac{x^\top (A^\top A)x}{x^\top x} = \max_{x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0} \frac{x^\top Bx}{x^\top x} = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i = \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i| = \rho(B) = \rho(A^\top A).$$

De plus puisque toutes les valeurs propres non nulles de  $(A^\top A)$  sont des valeurs propres de  $(AA^\top)$  (voir exercice C.1.22) et réciproquement, on a aussi

$$\rho(A^\top A) = \rho(AA^\top),$$

— Pour la démonstration, voir l'exercice C.1.23.

— Les matrices  $AA^\top$  et  $A^\top A$  sont symétriques, il suffit d'appliquer les deux points précédents.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 2.7 Conditionnement d'un système linéaire

2.7.1	Introduction au conditionnement d'une matrice . . . . .	71
2.7.2	Lien entre le conditionnement et les erreurs . . . . .	74

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.7.1 Introduction au conditionnement d'une matrice

### Exercices :

[Exercice C.1.25](#)

[Exercice C.1.26](#)

Lorsque l'on a résolu numériquement un système linéaire il est possible que la solution trouvée soit très différente de la solution exacte. En effet dans certains cas une petite modification du second membre ou de la matrice du système entraîne une grande modification de la solution. Par exemple la résolution de  $Ax = b$  avec le choix de  $A$  et  $b$  suivant

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \text{donne pour solution } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le choix d'un nouveau second membre  $b + \delta b$

$$b + \delta b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \quad \text{donne pour solution } x + \delta x = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ 1.1 \end{pmatrix}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Une faible erreur relative sur la norme de  $b$  induit une erreur relative sur la norme de  $x$  beaucoup plus importante, par exemple si on prend la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , on a :

$$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 3 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 13.6.$$

Une telle situation est due au fait que la matrice  $A$  a un *conditionnement* grand (on dit également que  $A$  est *mal conditionnée*), au sens de la définition suivante :

**Définition 2.7.1.** On appelle **conditionnement** de  $A$  relatif à une norme subordonnée le nombre

$$\chi(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Il résulte de la définition d'une norme subordonnée que

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Donc on a toujours  $\chi(A) \geq 1$ .

Dans l'exemple précédent on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

et  $\chi_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 4488$ .

## Introduction au condition- nement d'une matrice

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



**Proposition 2.7.1.** *Si la matrice  $A$  est symétrique et si l'on prend la norme subordonnée à la norme euclidienne, on a*

$$\chi_2(A) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}.$$

La démonstration est donnée en exercice et provient directement de l'égalité

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

pour les matrices symétriques. Le résultat montre donc que si le spectre d'une matrice, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres, est très étalée la matrice est mal conditionnée. Par contre si ce spectre (en module) est bien regroupé, la matrice sera bien conditionnée.

## Introduction au condition- nement d'une matrice

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 2.7.2 Lien entre le conditionnement et les erreurs

### Cours :

Conditionnement - exemple et définition

On va démontrer maintenant des inégalités liant le conditionnement de  $A$  et les erreurs relatives sur  $b$  et  $x$  :

**Théorème 2.7.2.** *On suppose que l'on a  $Ax = b$  et*

$$A(x + \delta x) = b + \delta b, \text{ (on perturbe le second membre).}$$

Alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \chi(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \quad (2.7.1)$$

*On suppose que l'on a  $Ax = b$  et*

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b, \text{ (on perturbe la matrice).}$$

Alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \chi(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}. \quad (2.7.2)$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

*Démonstration* - On a

$$\begin{aligned} Ax = b & \implies \|b\| \leq \|A\| \|x\| \implies \frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|b\|} \\ A(x + \delta x) = b + \delta b & \implies A\delta x = \delta b \implies \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|, \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

De même :

$$\begin{aligned} (A + \delta A)(x + \delta x) = b & \implies A\delta x = -\delta A(x + \delta x) \\ & \implies \delta x = -A^{-1}\delta A(x + \delta x) \\ & \implies \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x + \delta x\|, \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Il découle immédiatement de ce théorème que si le conditionnement de  $A$  est faible (très proche de 1), si la variation relative de  $b$  ou de  $A$  est faible alors la variation de  $x$  sera faible elle aussi.

Remarquons que les inégalités démontrées dans le théorème précédent sont optimales en ce sens que la matrice  $A$  étant donnée, il existe  $b$  et  $\delta b$  tels qu'il y ait égalité dans la relation (2.7.1). On peut remarquer, à ce sujet, que l'exemple du paragraphe référencé est révélateur puisque avec un conditionnement de 4488 et une erreur relative

**Lien entre le  
conditionnement et les  
erreurs**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

sur  $b$  de  $3 \times 10^{-3}$  la borne supérieure de l'erreur relative sur  $x$  est de l'ordre de 13.6, ce qui est précisément ce que l'on a trouvé! De même il existe  $\delta A$  et  $b$  tels qu'il y ait égalité dans la relation (2.7.2).

**Lien entre le  
conditionne-  
ment et les  
erreurs**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe A

## Exemples

A.1	Exemples du chapitre 2 . . . . .	78
-----	----------------------------------	----

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## A.1 Exemples du chapitre 2

A.1.1	Influence des arrondis . . . . .	79
A.1.2	Exemple de factorisation $PA = LU$ . . . . .	81

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Exemple A.1.1 Influence des arrondis

Prenons le système linéaire  $Ax = b$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Supposons que l'on travaille sur une machine où les nombres sont représentés avec une mantisse de 4 chiffres significatifs. Cela signifie que chaque nombre est représenté sous la forme

$$\pm 0.d_1 d_2 d_3 d_4 10^e,$$

où  $d_i$  représente un nombre entier positif et  $e$  l'exposant (le nombre de chiffres significatifs pour l'exposant n'intervient pas dans notre exemple). Lorsque l'on effectue la première (et dernière ici) étape de l'élimination de Gauss, on obtient le système équivalent

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & 1 - 10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 10^4 \end{pmatrix}.$$

On a l'addition suivante à effectuer :

$$1 - 10^4 = 0.1 \ 10^1 - 0.1 \ 10^5 = 0.00001 \ 10^5 - 0.1 \ 10^5,$$

mais, comme on ne dispose que de 4 chiffres significatifs, le nombre  $0.00001 \ 10^5$  est représenté en machine par  $0.0000 \ 10^5$ , soit 0. On a donc  $1 - 10^4$  "="  $-10^4$ . Comme le raisonnement est le même pour  $2 - 10^4$ , on a donc, en machine, le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^4 \end{pmatrix}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Lorsque l'on effectue la remontée de ce système, on obtient  $x_2 = 1$ , et la première équation donne  $10^{-4}x_1 = 0$ . On a donc  $x = [0, 1]^\top$ . Voyons maintenant ce qu'il se passe si on échange les lignes 1 et 2 dans la matrice  $A$  et le vecteur  $b$ . On obtient donc le système équivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'élimination de Gauss donne, en respectant les problèmes d'arrondi dûs à la mantisse de 4 chiffres, le système équivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui donne  $x = [1, 1]^\top$ . Si l'on regarde la solution *théorique*, du système, on constate que l'on obtient

$$x_1 = \frac{10000}{9999} \approx 1, \quad x_2 = \frac{9998}{9999} \approx 1.$$

Donc la première méthode sans échange de ligne donne une solution complètement erronée, alors que la deuxième méthode donne une approximation tout à fait raisonnable.

[retour au cours](#)

### Exemple A.1.1

Influence des  
arrondis

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



### Exemple A.1.2 Exemple de factorisation $PA = LU$

On considère la matrice de départ (on omet les numéros des étapes pour  $L$ )

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a initialement  $L = I$  et  $p = \{1, 2, 3\}$ .

- $k = 1$  : on effectue la permutation (1,2) pour avoir un pivot non nul et on effectue l'élimination, ce qui donne

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \{2, 1, 3\}.$$

- $k = 2$  : on effectue la permutation (2,3) pour avoir un pivot maximum. Attention : avant de remplir la 2<sup>ème</sup> colonne de  $L$  on permute ses coefficients des lignes (2,3) dans la colonne 1, ce qui donne

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \{2, 3, 1\}.$$

Si on effectue  $LU$  on a bien

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_1 \end{pmatrix}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

[retour au cours](#)

### **Exemple A.1.2**

Exemple de  
factorisation

$$PA = LU$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe B

## Documents

B.1	Documents du chapitre 2 . . . . .	84
-----	-----------------------------------	----

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## B.1 Documents du chapitre 2

B.1.1	Démonstration du théorème 2.4.2 . . . . .	85
B.1.2	Démonstration de la proposition 2.4.5 . . . . .	87

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Document B.1.1 Démonstration du théorème 2.4.2

Remarquons tout d'abord que l'équivalence entre les deux premières propositions est évidente puisque la factorisation est possible lorsque les pivots sont non nuls et que d'autre part les pivots  $a_{kk}^{(k)}$  sont les termes diagonaux de  $U$ .

Montrons que la proposition 3 implique la proposition 1.

$a_{11}^{(1)} = a_{11}$  est toujours défini, de plus  $[A]_1$  inversible, donc

$$\det[A]_1 = a_{11} = a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

Supposons maintenant que les pivots  $a_{ii}^{(i)}$  ont été définis pour  $i = 1, \dots, k-1$  et qu'ils sont non nuls :  $a_{ii}^{(i)} \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, k-1$ . Il est donc possible de définir  $a_{kk}^{(k)}$ , montrons que  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ .

Nous avons remarqué que le déterminant de  $A$  n'est pas modifié par chaque étape de l'élimination de Gauss et, plus précisément, les déterminants des sous-matrices principales puisque l'on ne fait aucune permutation de lignes ou de colonnes. On a donc

$$\det([A]_k) = \det([A^{(k)}]_k).$$

Or la sous matrice principale  $[A^{(k)}]_k$  est triangulaire supérieure donc

$$\det([A]_k) = \det([A^{(k)}]_k) = \left( \prod_{i=1}^{k-1} a_{ii}^{(i)} \right) a_{kk}^{(k)},$$

et, puisque  $[A]_k$  est inversible, son déterminant est non nul, on en déduit que  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ . On a donc montré par récurrence que la proposition 3 impliquait la proposition 1.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

On peut montrer que la proposition 2 implique la proposition 3 :

$A = LU \Rightarrow [A]_k = [L]_k[U]_k$  : démontrez ce résultat. Donc  $\det[A]_k = 1 \times \det[U]_k$ . Or  $U$  est triangulaire supérieure inversible, donc les termes diagonaux de  $U$  sont non nuls, donc  $[U]_k$  est elle aussi une matrice triangulaire supérieure inversible, donc  $\det[A]_k \neq 0$ , donc les sous matrices principales  $[A]_k$  sont inversibles.

[Retour au théorème 2.4.2 ▲](#)

**Document**  
**B.1.1**  
Démonstration  
du théorème  
2.4.2

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Document B.1.2 Démonstration de la proposition 2.4.5

On peut écrire  $L^{(k-1)}$  sous la forme

$$L^{(k-1)} = I + \sum_{p=1}^{k-1} z^{(p)} (e^p)^\top,$$

où  $z_i^{(p)} = 0$  pour  $i \leq p$ . On a ensuite

$$\begin{aligned} P^{(k)} L^{(k-1)} P^{(k)} &= I + \sum_{p=1}^{k-1} P^{(k)} z^{(p)} (e^p)^\top P^{(k)}, \\ &= I + \sum_{p=1}^{k-1} P^{(k)} z^{(p)} (e^p)^\top, \end{aligned}$$

car  $P^{(k)} P^{(k)} = I$  et  $(e^p)^\top P^{(k)} = (e^p)^\top$  puisque  $p < k \leq l$  (les coefficients permutés de  $e^p$  sont nuls).

[Retour à la proposition 2.4.5 ▲](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe C

## Exercices

C.1	Exercices du chapitre 2 . . . . .	90
C.2	Exercices de TD du chapitre 2 . . . . .	117

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



## C.1 Exercices du chapitre 2

C.1.1	.....	91
C.1.2	.....	92
C.1.3	.....	93
C.1.4	.....	94
C.1.5	.....	95
C.1.6	.....	96
C.1.7	.....	97
C.1.8	.....	98
C.1.9	.....	99
C.1.10	.....	100
C.1.11	.....	101
C.1.12	.....	102
C.1.13	.....	103
C.1.14	.....	104
C.1.15	.....	105
C.1.16	.....	106
C.1.17	.....	107
C.1.18	.....	108
C.1.19	.....	109
C.1.20	.....	110
C.1.21	.....	111
C.1.22	.....	112

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

<a href="#">C.1.23</a>	.....	113
<a href="#">C.1.24</a>	.....	114
<a href="#">C.1.25</a>	.....	115
<a href="#">C.1.26</a>	.....	116

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.1

On définit la matrice  $A$ , à  $n$  lignes et  $n$  colonnes par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On veut résoudre  $Ax = 0$ .

1. Montrer en résolvant les  $n - 1$  premières équations que  $x_i = i x_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
2. Résoudre la dernière équation et en déduire que  $x = 0$ .
3. En déduire que  $A$  est inversible.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice C.1.2

Soit  $A$  une matrice triangulaire inférieure. Écrire l'algorithme permettant de résoudre le système linéaire  $Ax = b$  ( $b$  vecteur donné) en n'oubliant pas de vérifier au départ que ce système a une solution.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.3

Soit  $A$  une matrice triangulaire supérieure, montrer que le calcul du vecteur inconnu est donné par :

$$\begin{cases} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right), \text{ pour } i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases}$$

Écrire alors l'algorithme correspondant.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.4

Soit le système  $Ax = b$ . On considère la première étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la  $i$ ème équation (pour  $i \geq 2$ ) est modifiée de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} & \longrightarrow & a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} & \text{pour } j = 1, 2, \dots, n \\ b_i^{(1)} = b_i & \longrightarrow & b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1. \end{cases}$$

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.5

Soit le système  $Ax = b$ . On considère la deuxième étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la  $i$ ème équation (pour  $i \geq 3$ ) est modifiée de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{ij}^{(2)} & \longrightarrow & a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)} \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots, n \\ b_i^{(2)} & \longrightarrow & b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}. \end{array} \right.$$

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.6

Soit le système  $Ax = b$ . On considère la  $k$ ème étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la  $i$ ème équation (pour  $i \geq k + 1$ ) est modifiée de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{ij}^{(k)} & \longrightarrow a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \text{ pour } j = k, k+1, \dots, n \\ b_i^{(k)} & \longrightarrow b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}. \end{array} \right.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



### Exercice C.1.7

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et le vecteur  $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ , appliquez l'algorithme de Gauss "à la main" pour calculer la solution de  $Ax = b$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice C.1.8

Calculer le nombre d'opérations effectuées pour réaliser l'élimination de Gauss en fonction de  $n$  en séparant multiplications/divisions et additions/ soustractions. Pour cela on pourra utiliser les deux formules

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.9

Soient  $L$  une matrice triangulaire inférieure et  $U$  une matrice triangulaire supérieure et on pose  $A = LU$ . Montrer que, pour la colonne  $j$  de  $A$ , on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} u_{kj}, \text{ pour } i \leq j,$$

et

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} u_{kj}, \text{ pour } i > j.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.10

Soit  $A$  une matrice inversible qui admet une factorisation  $A = LU$  où  $L$  est triangulaire inférieure,  $U$  est triangulaire supérieure et la diagonale de  $U$  ne comporte que des 1, alors cette factorisation est unique.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.11

Résoudre le système  $Ax = b$  dont la factorisation  $LU$  de  $A$  est donnée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.12

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ , en vous inspirant de ce qui a été fait pour l'algorithme de

Doolittle dans le paragraphe "[Factorisation  \$A = LU\$  / calcul direct](#)", effectuez la factorisation de Crout de la matrice  $A$ , c'est-à-dire déterminez  $L$  et  $U$  telles que  $A = LU$  avec les termes diagonaux de  $U$  égaux à 1 (ceux de  $L$  sont quelconques).

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.13

Dans le calcul direct de la factorisation  $LU$ , on suppose maintenant que c'est la matrice  $U$  dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et non pas la matrice  $L$ . Calculer les éléments des matrices  $U$  et  $L$  à partir d'éléments de  $A$  et d'éléments de  $U$  et  $L$  de colonnes ou de lignes précédentes. Comment modifier l'algorithme de Doolittle pour le calcul des éléments  $l_{ij}$  et  $u_{ij}$  des matrices  $L$  et  $U$ . Cet algorithme s'appelle l'algorithme de Crout.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.14

Montrez que si la factorisation  $A = LU$  existe ( $L$  triangulaire inférieure avec une diagonale unitaire et  $U$  triangulaire supérieure inversible), alors les sous-matrices principales de  $A$  sont inversibles.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



### Exercice C.1.15

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$  et soit  $g$  l'application linéaire telle que  $g(\vec{e}_j) = \vec{e}_{\sigma(j)}$  où  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que la matrice  $P$  de l'application  $g$  est telle que

$$p_{ij} = \delta_{i, \sigma(j)}$$

et que  $P^{-1} = P^\top$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.16

1. Soit  $A$  une matrice symétrique admettant une factorisation  $LDL^\top$ . Montrer que pour  $i \geq j$  on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j d_k l_{ik} l_{jk},$$

où on a noté  $d_k$  le  $k^{\text{ème}}$  élément de la diagonale de  $D$ .

2. Dédurre de la question précédente que les coefficients de  $L$  et ceux de  $D$  peuvent être obtenus par les formules (on considère que les sommes ne sont pas effectuées quand  $j = 1$ )

$$d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2,$$

et pour  $i > j$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk}}{d_j}.$$

Indication : ne pas oublier que  $l_{jj} = 1$  par définition.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.17

Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. On considère sa factorisation de Cholesky  $A = BB^\top$ . Montrer que tous les éléments de la diagonale de  $B$  sont non nuls.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.18

En calculant le discriminant du trinôme en  $\theta$  suivant

$$q(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i + \theta y_i)^2$$

montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.19

Montrer, en utilisant les propriétés de la norme vectorielle, que si on définit  $\|A\|$  par

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

on a :

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.20

Montrer que, par définition de la norme matricielle subordonnée, on a

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.21

Montrer que, pour toute norme subordonnée,  $\|I\| = 1$ . Que vaut  $\|I\|_F$  (norme de Frobenius)?

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.22

Soit  $A \in \mathcal{M}_{nm}, B \in \mathcal{M}_{mn}$ , soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $BA$  correspondant à un vecteur propre  $Y$ , montrer que  $AY$  est un vecteur propre (non nul) de  $AB$  correspondant à la valeur propre  $\lambda$ . En déduire que

$$\rho(BA) = \rho(AB).$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



### Exercice C.1.23

Soit  $A$  une matrice symétrique donc diagonalisable,  $A$  peut donc s'écrire  $A = PDP^{-1}$ , avec  $D$  diagonale.

- Quelles sont les valeurs propres de  $A$ ? Quelles sont les valeurs propres de  $A^2$ ?
- En déduire que

$$\rho(A^2) = \rho(A)^2.$$

- Déduire de la question précédente que

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

- Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quel est son rayon spectral? Ce rayon peut-il être considéré comme une norme matricielle lorsque la matrice n'est pas symétrique?

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.24

Montrer que pour toute norme matricielle subordonnée on a

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.25

Soit une matrice diagonale  $D$ . Calculer le conditionnement de  $D$  à l'aide de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne. Dans quel cas ce conditionnement est-il égal à 1 ?

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.26

Soit  $A$  une matrice symétrique inversible dont les valeurs propres sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , on suppose que :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0$$

- Montrer que les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$  et que les valeurs propres vérifient :

$$\frac{1}{|\lambda_n|} \geq \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} \geq \dots \geq \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

- En déduire  $\chi_2(A)$ , le conditionnement pour la norme subordonnée à la norme euclidienne.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## C.2 Exercices de TD du chapitre 2

C.2.1	TD2-Exercice1 : élimination de Gauss et $LU$	118
C.2.2	TD2-Exercice2 : Richtmayer pour matrice tridiagonale	119
C.2.3	TD2-Exercice3 : coût de Doolittle	123
C.2.4	TD2-Exercice4 : Résolution de $A^2x = b$	124
C.2.5	TD2-Exercice5 : matrice à diag. strict. dominante	125
C.2.6	TD2-Exercice6 : Pivot epsilon dans Gauss	126
C.2.7	TD2-Exercice7 : Gauss avec permutation	127
C.2.8	TD2-Exercice8 : $LDL^T$	130
C.2.9	TD2-Exercice9 : Cholesky	131
C.2.10	TD2-Exercice10 : norme matricielle infinie	132
C.2.11	TD2-Exercice11 : norme matricielle $\  \cdot \ _2$ , cas symétrique	134
C.2.12	TD2-Exercice12 : norme matricielle $\  \cdot \ _2$ , cas général	135
C.2.13	TD2-Exercice13 : conditionnement	137
C.2.14	TD2-Exercice14 : complément de Schur	138

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.2.1** TD2-Exercice1 : élimination de Gauss et  $LU$ 

Soit la matrice  $A$  et le vecteur  $b$  suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de *Gauss* le système linéaire  $Ax = b$ .
2. Donner la factorisation  $LU$  de  $A$  et calculer son déterminant (on peut résoudre cette question conjointement avec la première).

Question 1   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)   [Aide 3](#)   [Aide 4](#)

Question 2   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.2 TD2-Exercice2 : Richtmayer pour matrice tridiagonale

On veut résoudre le système  $Ax = y$  où  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  est *tridiagonale* et  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_y$$

1. (a) Montrer, par récurrence sur  $i$ , que l'on peut se ramener au système suivant :

$$\begin{cases} x_i = e_i x_{i+1} + f_i & \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \\ x_n = f_n, \end{cases}$$

où l'on déterminera les  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  et les  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . On suppose que toutes les divisions nécessaires pour déterminer ces coefficients sont possibles.

- (b) La méthode précédente, qui permet de résoudre un système dont la matrice est tridiagonale, s'appelle méthode de Richtmayer. Écrire l'algorithme de cette méthode.
2. On va maintenant montrer que l'algorithme très simple que l'on vient de voir, correspond en fait à la factorisation  $A = LU$  par l'algorithme de Crout, dans le cas particulier d'une matrice  $A$  tridiagonale.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

L'algorithme de Crout consiste à déterminer par identification une factorisation  $A = LU$  avec  $L$  matrice triangulaire inférieure,  $U$  matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux valent 1. On suppose que les matrices  $L$  et  $U$  existent.

- (a) En utilisant le produit matriciel, montrer que la première colonne de  $L$  est égale à :

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } l_1 = b_1,$$

puis que la première ligne de  $U$  est égale à

$$\underline{U}_1 = (1 \quad e'_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0), \text{ avec } e'_1 = \frac{c_1}{l_1}.$$

- (b) En utilisant le produit matriciel, montrer que la deuxième colonne de  $L$  est égale à :

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ a_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } l_2 = b_2 - a_2 e'_1,$$

et que la deuxième ligne de  $U$  est égale à

$$\underline{U}_2 = (0 \quad 1 \quad e'_2 \quad 0 \quad \dots \quad 0), \text{ avec } e'_2 = \frac{c_2}{l_2} = \frac{c_2}{b_2 - a_2 e'_1}.$$

### Exercice C.2.2

TD2-Exercice2 :

Richtmayer  
pour matrice  
tridiagonale

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



(c) Montrer par récurrence que pour  $2 \leq j \leq n-1$ , on a

$$L_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_j \\ a_{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{U}_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & e'_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } l_j = b_j - a_j e'_{j-1}, \quad e'_j = \frac{c_j}{l_j}$$

Montrer que l'on a enfin

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } l_n = b_n - a_n e'_{n-1}.$$

En recollant les morceaux, constater que les matrices  $L$  et  $U$  sont bi-diagonales.

(d) Utiliser ce qui précède pour montrer que  $e'_i = -e_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

(e) On résout  $Lz = y$ , montrer que  $z = f$ .

(f) En déduire que la résolution de  $Ax = y$  par la méthode de Crout est équivalente à la méthode de Richtmayer précédemment décrite.

Remarque : les conditions pour lesquelles la méthode de Richtmayer est ap-

## Exercice C.2.2

TD2-Exercice2 :

Richtmayer  
pour matrice  
tridiagonale

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

plicable (divisions possibles) sont donc les mêmes que les conditions pour lesquelles la factorisation  $A = LU$  existe.

Question 1a [Aide 1](#)  
Question 1b [Aide 1](#)  
Question 2a [Aide 1](#)  
Question 2b [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 2c [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 2d [Aide 1](#)  
Question 2e [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 2f [Aide 1](#)

## Exercice C.2.2

TD2-Exercice3 :  
Richtmayer  
pour matrice  
tridiagonale

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.3 TD2-Exercice3 : coût de Doolittle

Soit  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ . Donner, en fonction de  $n$ , le nombre d'opérations (en distinguant additions, multiplications et divisions) nécessaires pour obtenir la décomposition  $LU$  de  $A$ .

[Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.4 TD2-Exercice4 : Résolution de $A^2x = b$

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  inversible. On désire résoudre le système linéaire

$$A^2x = b.$$

1. On propose une première méthode consistant à enchaîner les étapes suivantes :
  - Calculer  $B = A^2$ .
  - Calculer la factorisation  $LU$  de  $B$ .
  - Résoudre les deux systèmes  $Ly = b$  et  $Ux = y$  pour obtenir  $x$ .Préciser le nombre de multiplications utilisé par cette méthode en fonction de  $n$ .
2. Proposez, en justifiant soigneusement votre réponse, une méthode utilisant moins de multiplications.

Question 1   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)

Question 2   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)   [Aide 3](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.2.5** TD2-Exercice5 : matrice à diag. strict. dominante

Soit  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  une matrice possédant la propriété suivante :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

On dit alors que  $A$  est à diagonale strictement dominante.

1. Donner un exemple de matrice à diagonale strictement dominante.
2. Soit  $x$  une solution de  $Ax = 0$  et un entier  $k$  tel que

$$|x_k| \geq |x_i|, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

En utilisant l'équation correspondant à la ligne  $k$  de  $Ax = 0$ , montrer que  $x_k = 0$ .  
Que peut on en déduire sur l'inversibilité de  $A$ ?

3. En déduire que la factorisation  $LU$  de  $A$  est réalisable sans permutation de lignes ou de colonnes.

Question 2   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)   [Aide 3](#)   [Aide 4](#)   [Aide 5](#)

Question 3   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.6 TD2-Exercice6 : Pivot epsilon dans Gauss

Soit un réel  $\varepsilon > 0$ .

1. Résoudre par la méthode de *Gauss* sans échange de ligne ou de colonne le système :

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

2. On prend  $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$ . On suppose que l'on travaille en virgule flottante, en décimal avec une mantisse de 4 chiffres, c'est-à-dire que tout nombre réel positif est représenté en machine sous la forme

$$0.d_1 d_2 d_3 d_4 \times 10^{e_1 e_2}, \quad \text{où } d_1 \neq 0.$$

- (a) Calculer en arithmétique flottante le résultat de la méthode de *Gauss* sans échange de ligne ou de colonne sur l'exemple ci-dessus.
- (b) Calculer les erreurs relatives sur  $x_2$  puis sur  $x_1$  entre le résultat exact et le résultat flottant. Expliquer pourquoi ce résultat est catastrophique.

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 2b [Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.7 TD2-Exercice7 : Gauss avec permutation

1. On note  $I$  la matrice identité, on définit la matrice  $P^{k\ell}$  de taille  $n, n$  par

$$\underline{P}_k^{k\ell} = \underline{I}_\ell, \underline{P}_\ell^{k\ell} = \underline{I}_k, \underline{P}_i^{k\ell} = \underline{I}_i \quad \forall i, i \neq k, i \neq \ell.$$

- (a) Que vaut  $\det P^{k\ell}$  ?
- (b) Dans le cas  $n = 4$ , écrire les matrices  $P^{13}, P^{23}$ , calculer le produit  $P^{13}P^{23}$ , le produit est-il commutatif ?
- (c) Si on pose  $B = P^{k\ell}A$ , exprimer les lignes de  $B$  en fonction des lignes de  $A$ .
- (d) Si on pose  $C = AP^{k\ell}$ , exprimer les colonnes de  $C$  en fonction des colonnes de  $A$ .
- (e) Que vaut  $P^{k\ell}P^{k\ell}$  ?
- (f)  $k$  étant donné, on suppose que  $M$  est une matrice triangulaire inférieure telle que  $M_j = I_j, \forall j \geq k$ . On suppose que  $\ell > k$ . On pose  $N = MP^{k\ell}$ . Expliciter les termes des lignes  $\underline{N}_k, \underline{N}_\ell$ . En déduire que les termes de la matrice  $M' = P^{k\ell}MP^{k\ell}$  vérifient :

$$\begin{cases} m'_{kp} = m_{\ell p} & \text{pour } 1 \leq p \leq k-1 \\ m'_{\ell p} = m_{kp} & \text{pour } 1 \leq p \leq k-1 \\ m'_{ij} = m_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

Application : si  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & 0 & 1 & 0 \\ m_{51} & m_{52} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , que vaut la matrice  $P^{35}MP^{35}$  ?

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

2. On définit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Constater qu'il n'est pas possible d'appliquer la première étape de la méthode de triangularisation de Gauss à la matrice  $A$ , mais qu'il est possible de l'appliquer à la matrice  $A' = P^{13}A$
- (b) Appliquer la première étape de la méthode de triangularisation de Gauss à la matrice  $A'$ , on a  $A' = L^{(1)}A^{(2)}$ , déterminer les termes des matrices  $L^{(1)}$  et  $A^{(2)}$ .
- (c) Constater qu'il n'est pas possible d'appliquer la deuxième étape de la méthode de triangularisation de Gauss à la matrice  $A^{(2)}$ , mais qu'il est possible de l'appliquer à la matrice  $A'^{(2)} = P^{23}A^{(2)}$ .
- (d) Montrer que  $P^{23}A' = P^{23}L^{(1)}P^{23}P^{23}A^{(2)}$ .  
Quels sont les termes de la matrice  $L'^{(1)} = P^{23}L^{(1)}P^{23}$ .
- (e) Si on pose  $A'' = P^{23}A'$ , on a obtenu  $A'' = L'^{(1)}A'^{(2)}$ , il est donc possible de poursuivre la méthode de triangularisation de Gauss. On obtient  $A'' = L^{(2)}A^{(3)}$ , déterminer la matrice  $L^{(2)}$  et la matrice  $A^{(3)}$ .
- (f) Effectuer la dernière étape de la méthode de triangularisation de Gauss, on obtient  $A'' = L^{(3)}A^{(4)}$ , où  $L^{(3)}$  est une matrice triangulaire inférieure (notée  $L$  habituellement) et où  $A^{(4)}$  est une matrice triangulaire supérieure (notée  $U$  habituellement).
- (g) Dédire de ce qui précède que  $PA = LU$  où  $PA$  est une matrice obtenue à partir de  $A$  en échangeant des lignes. Préciser les lignes de  $PA$  en fonction des lignes de  $A$ .

**Exercice C.2.7**  
 TD2-Exercice7 :  
 Gauss avec  
 permutation

Sommaire  
 Concepts

Exemples  
 Exercices  
 Documents



- (h) Que vaut  $\det A$ ?
- (i) Comment utiliseriez vous ce qui précède pour résoudre  $Ax = b$ ? Explicitiez les systèmes triangulaires à résoudre et en particulier préciser les seconds membres.

**Exercice C.2.7**

TD2-Exercice8 :

Gauss avec  
permutation[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.2.8** TD2-Exercice8 :  $LDL^T$ 

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & -2 \\ 4 & 7 & -6 & -5 \\ -4 & -6 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ , on montre que  $A = LU$  avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Que vaut le déterminant de  $A$ ? Est-il possible de savoir (sans calculs supplémentaires) si la matrice  $A$  est symétrique définie positive?
2. Pourquoi la matrice  $A$  admet-elle une décomposition  $LDL^T$ ? Préciser la matrice  $D$ .
3. La matrice  $A$  est-elle définie positive? Pourquoi?

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.9 TD2-Exercice9 : Cholesky

La méthode de *Cholesky* s'utilise pour la résolution des systèmes linéaires dont la matrice est symétrique, définie positive.

1. Soit la matrice  $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  symétrique et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unique  $C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  triangulaire inférieure avec  $c_{11} > 0$  et  $c_{22} > 0$  telle que  $A = CC^T$ .
2. Soit la matrice  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  symétrique et définie positive. D'après le cours, il existe une matrice unique  $C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$  triangulaire inférieure avec  $c_{ii} > 0$  telle que  $A = CC^T$ .  
(a) Montrer alors que les coefficients  $c_{ij}$  de  $C$  sont donnés par

$$\begin{cases} c_{11} = \sqrt{a_{11}}, \\ c_{i1} = \frac{a_{i1}}{c_{11}}, \quad i > 1, \end{cases} \quad \begin{cases} c_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^2}, \quad j > 1, \\ c_{ij} = \frac{1}{c_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} c_{jk} \right), \quad 1 < j < i. \end{cases}$$

- (b) Donner l'algorithme permettant de calculer  $C$  à partir de  $A$ .
3. Donner le déterminant de  $A$  en fonction des coefficients de  $C$ .

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
 Question 2a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)  
 Question 2b [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.2.10** TD2-Exercice10 : norme matricielle infinie

Le but de cet exercice est de démontrer la propriété énoncée dans le cours :

$$\|A\|_{\infty} = N(A), \quad \text{où } N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right),$$

à partir de la définition de la norme matricielle subordonnée.

1. Déterminer  $\|Ax\|_{\infty}$  à l'aide des termes de la matrice  $A$  et du vecteur  $x$ .
2. Montrer que

$$\|Ax\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty} N(A).$$

En déduire un majorant de  $\|A\|_{\infty}$ .

3. Soit  $\ell$  tel que

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = \sum_{j=1}^n |a_{\ell j}|.$$

On définit le vecteur  $\hat{x}$  de la façon suivante  $\hat{x}_j = 1$  si  $a_{\ell j} \geq 0$ ,  $\hat{x}_j = -1$  sinon.

Que vaut  $\|\hat{x}\|_{\infty}$ ,  $(A\hat{x})_{\ell}$  ? En déduire que  $\|A\hat{x}\|_{\infty} \geq \sum_{j=1}^n |a_{\ell j}|$ .

4. Déduire de tout ce qui précède que

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

5. On rappelle que

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right),$$

calculer  $\|A\|_1$  et  $\|A\|_\infty$  pour la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & -0.6 \\ 0.7 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 4 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 5 [Aide 1](#)

## Exercice

### C.2.10

TD2-

Exercice11 :

norme  
matricielle  
infinie

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.2.11** TD2-Exercice11 : norme matricielle  $\|\cdot\|_2$ , cas symétrique

Soit  $C$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ .

1. Montrer en utilisant les résultats sur la diagonalisation que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres réelles (distinctes ou confondues) de  $C$ , alors  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$  sont les valeurs propres réelles de  $C^2$ .
2. En déduire que  $\rho(C^2) = (\rho(C))^2$ .
3. En déduire que  $\|C\|_2 = \rho(C)$ .
4. Soit  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ , calculer  $\|C\|_2$ .
5. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , calculer  $\|A\|_2$ ,  $\rho(A)$ , est-ce que  $\rho(A)$  est une norme matricielle?

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Exercice C.2.12 TD2-Exercice12 : norme matricielle $\| \cdot \|_2$ , cas général

1. Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times p$  et  $A'$  une matrice de taille  $p \times n$ , montrer que si  $\lambda$  est valeur propre non nulle de  $AA'$  associée au vecteur propre  $y$ , alors  $A'y$  est vecteur propre de  $A'A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

En déduire que  $\rho(A'A) = \rho(AA')$ .

2. Soit  $B$  une matrice de taille  $n \times n$  inversible, on suppose que les  $n$  valeurs propres (complexes) sont ordonnées :

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|.$$

Montrer que  $|\lambda_1| > 0$ , que vaut  $\rho(B)$ ? Quelles sont les valeurs propres de  $B^{-1}$ ? Que vaut  $\rho(B^{-1})$ ?

3. Soit  $E$  une matrice de taille  $n \times n$  inversible.

(a) Montrer que  $\rho((E^\top E)^{-1}) = \rho((E^{-1})^\top E^{-1})$ .

(b) Montrer que toutes les valeurs propres de  $E^\top E$  sont réelles et strictement positives, on ordonne ces valeurs propres  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

(c) Exprimer  $\rho(E^\top E)$  et  $\rho((E^\top E)^{-1})$  à l'aide des  $\lambda_i$ .

(d) On note  $\chi_2(E)$  le conditionnement de  $E$  associé à la norme  $\| \cdot \|_2$ , donner l'expression de  $\chi_2(E)$  à l'aide des  $\lambda_i$ .

(e) Si  $C$  est symétrique inversible, que vaut  $\chi_2(C)$ ?

Calculer  $\chi_2(C)$  dans le cas  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

(f) Comparer  $\chi_2(E)$  et  $\chi_2(E^\top E)$ .

[Solution](#)

## Exercice

**C.2.12**

TD2-

Exercice13 :

norme

matricielle

$\|\cdot\|_2$ , cas

général

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



**Exercice C.2.13** TD2-Exercice13 : conditionnement

On définit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$ ,  $\delta b = \begin{pmatrix} -10^{-4} \\ 10^{-4} \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^{-1}$ ,  $\|A\|_\infty$ ,  $\|A^{-1}\|_\infty$ , en déduire le conditionnement de  $A$  associé à la norme infinie.
2. Montrer que  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est solution de  $Ax = b$ , montrer que l'on a :  $\|A\|_\infty \|x\|_\infty = \|b\|_\infty$ .
3. Montrer que  $\delta x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \frac{10^{-4}}{2} \end{pmatrix}$  est solution de  $A\delta x = \delta b$ .

Quelle est la solution de  $Ay = b + \delta b$ ?

Montrer que l'on a :  $\|A^{-1}\|_\infty \|\delta b\|_\infty = \|\delta x\|_\infty$ .

4. Dans le cas général rappeler l'inégalité entre  $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$  et  $\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ . En utilisant les calculs précédents montrer qu'il n'est pas possible d'obtenir une majoration plus fine.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Exercice C.2.14 TD2-Exercice14 : complément de Schur

On se donne la matrice par blocs  $A$  inversible :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ B^\top & A_2 \end{bmatrix},$$

où  $A_i$  est une matrice carrée dans  $\mathcal{M}_{n_i, n_i}(\mathbb{R})$ , pour  $i = 1, 2$ . On suppose que  $n_1$  et  $n_2$  sont  $\geq 1$ . On pose  $n = n_1 + n_2$ .

1. Donner les dimensions de  $B$ ,  $B^\top$  et  $A$ .
2. Soit une matrice par blocs

$$M = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ M_{21} & I_{n_2} \end{bmatrix},$$

où  $I_p$  est la matrice identité de taille  $p$ . Calculer l'inverse de  $M$ .

3. On suppose dorénavant que  $A_1$  est inversible. On veut effectuer la factorisation par blocs

$$A = LU = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ L_{21} & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}.$$

En identifiant les termes du produit, calculer  $L_{21}$ ,  $U_{11}$ ,  $U_{12}$  et  $U_{22}$ . Pourquoi la factorisation par blocs est-elle différente de la factorisation habituelle de  $A$  ?

4. On appelle complément de Schur la matrice :

$$S = A_2 - B^\top A_1^{-1} B.$$

On suppose dans tout le reste de l'exercice que  $A_1$  et  $A_2$  sont symétriques.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

- (a) Vérifier que  $A$  et  $S$  sont symétriques.
- (b) Montrer que l'on peut mettre  $U$  sous la forme  $U = DL^\top$ , avec  $D$  matrice bloc diagonale. Que vaut  $D$ ?
5. On va montrer dans cette question que
- $$\{A \text{ symétrique définie positive}\} \iff \{A_1 \text{ et } S \text{ symétriques définies positives.}\}$$
- (a) On suppose dans cette question que  $A$  est symétrique définie positive.
- Montrer que  $A_1$  et  $A_2$  sont symétriques définies positives.
  - Soit  $X_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ . Justifier qu'il existe  $\tilde{X}_1$  vérifiant le système  $A_1 \tilde{X}_1 = -BX_2$ . On pose  $\tilde{X}^\top = [\tilde{X}_1^\top X_2^\top]$ . Calculer  $\tilde{X}^\top A \tilde{X}$  en fonction de  $X_2$ .
  - Déduire de la question précédente que  $S$  est symétrique définie positive.
- (b) On suppose dans cette question que  $A_1$  et  $S$  sont symétriques définies positives.
- On se donne  $X^\top = [X_1^\top X_2^\top]$ . Calculer  $X^\top A X$  en utilisant la factorisation  $LDL^\top$  de  $A$ .
  - En déduire que  $A$  est symétrique définie positive.

## Exercice

### C.2.14

TD2-

Exercice14 :  
complément de  
Schur

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## C

Conditionnement - erreurs relatives... **74**  
Conditionnement - exemple et définition **71**,  
**74**

## E

Elimination de Gauss  
    étape générale..... **15**  
    algorithme..... **17**  
    deuxième étape..... **13**  
    première étape..... **10**

Elimination de Gauss  
    factorisation  $A = LU$  ..... **20, 23, 26**

## F

Factorisation  $A = LU$   
    algorithme de Doolittle..... **31**  
    calcul direct..... **28**  
    faisabilité..... **35**  
    motivations..... **26**  
    permutation de lignes..... **37**  
    pivot maximal..... **39**  
    unicité..... **23**  
Factorisation  $LDL^T$ ..... **51**  
Factorisation  $PA = LU$ ..... **41**  
    algorithme..... **44**  
    applications..... **46**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Factorisation $PAQ = LU$ .....	<b>48</b>
Factorisation de Cholesky	
existence .....	<b>53, 56</b>
mise en oeuvre .....	<b>56</b>

## N

Norme matricielle subordonnée à la norme	
euclidienne .....	<b>66</b>
Norme matricielle-définition .....	<b>63</b>
Normes vectorielles .....	<b>61</b>

## R

Rayon spectral .....	<b>68</b>
----------------------	-----------

## S

Système linéaire - motivations .....	<b>4</b>
Système linéaire triangulaire .....	<b>8</b>

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Solution de l'exercice C.1.1

1. On démontre ce résultat par récurrence, c'est trivialement vérifié pour  $i = 1$ . Supposons que  $x_i = ix_1$  pour  $i \leq k$ , on écrit alors la  $k$ ème équation, on obtient :

$$-(k-1)x_1 + 2kx_1 - x_{k+1} = 0 \Leftrightarrow x_{k+1} = (k+1)x_1.$$

Ce qui démontre le résultat.

2. En écrivant la dernière équation, on obtient

$$-(n-1)x_1 + 2nx_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

En utilisant la question précédente on a donc  $x = 0$ .

3. On a vu dans le chapitre de révision d'algèbre linéaire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit inversible est que son noyau soit réduit à 0, c'est ce que l'on vient de montrer.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.2

```
1: pour  $i = 1$  jusqu'à  $n$  faire  
2:   si  $|a_{ii}| < \text{tol}$  alors  
3:     Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur  
4:   fin si  
5: fin pour  
6:  $x_1 \leftarrow \frac{b_1}{a_{11}}$   
7: pour  $i = 2$  jusqu'à  $n$  faire  
8:    $x_i \leftarrow \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k}{a_{ii}}$   
9: fin pour
```

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice C.1.3

Le système linéaire s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & \dots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

On commence donc par calculer l'inconnue  $x_n$ , puis l'inconnue  $x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}$  et on remonte ainsi jusqu'à  $x_1$ . Ainsi, lorsque l'on arrive à la  $i$ ème équation, on a déjà calculé  $x_k$  pour  $k = i+1, \dots, n$ . Or cette équation s'écrit

$$a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}x_n = b_i$$

ce qui permet de tirer  $x_i$  par la formule donnée dans l'énoncé. L'algorithme ne diffère de celui de l'exercice précédent que par les indices. À vous de l'écrire ...

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Solution de l'exercice C.1.4

On élimine le premier élément de la  $i$ ème ligne  $L_i$  en effectuant une combinaison  $L_i - \alpha L_1$ , ce qui donne

$$a_{i1} - \alpha a_{11} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{i1}}{a_{11}}.$$

On a alors

$$L_i^{(2)} = L_i - \alpha L_1$$

soit

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \alpha a_{1j}, \text{ pour } j = 1, \dots, n, i = 2, \dots, n.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(2)} = b_i - \alpha b_1, i = 2, \dots, n.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.5

On élimine le deuxième élément de la  $i$ ème ligne  $L_i^{(2)}$  en effectuant une combinaison  $L_i^{(2)} - \alpha L_2^{(2)}$ , ce qui donne

$$a_{i2}^{(2)} - \alpha a_{22}^{(2)} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}.$$

On a alors

$$L_i^{(3)} = L_i^{(2)} - \alpha L_2^{(2)}$$

soit

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \alpha a_{2j}^{(2)}, \text{ pour } j = 2, \dots, n, i = 3, \dots, n.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \alpha b_2^{(2)}, i = 3, \dots, n.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.6

On élimine le  $k$ ème élément de la  $k$ ème ligne  $L_k^{(k)}$  en effectuant une combinaison  $L_i^{(k)} - \alpha L_k^{(k)}$ , ce qui donne

$$a_{ik}^{(k)} - \alpha a_{kk}^{(k)} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

On a alors

$$L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \alpha L_k^{(k)}$$

soit

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha a_{kj}^{(k)}, \text{ pour } j = k, \dots, n, i = k+1, \dots, n.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha b_k^{(k)}, i = k+1, \dots, n.$$

Pour  $j = k$  le coefficient  $\alpha$  a été déterminé pour que  $a_{ik}^{(k+1)} = 0$ , donc dans la pratique on affecte directement 0 à ce coefficient sans effectuer le calcul. Les calculs sont donc faits pour  $i$  et  $j$  variant de  $k+1$  à  $n$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.7

L'algorithme procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La résolution de ce système triangulaire donne :

$$x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.8

La démarche est de compter le nombre d'opérations à partir de la boucle la plus intérieure. Nous allons évaluer le nombre de multiplications/divisions, vous laissant le soin d'évaluer le nombre d'additions algébriques. On a ainsi :

- pour  $j = k + 1 \rightarrow n$ ,  $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - ca_{kj}$  : on effectue  $n - k$  multiplications,
- calcul de  $b_i$  ET  $c$  : on effectue 1 multiplication et 1 division.
- On effectue les opérations précédentes pour  $i = k + 1 \rightarrow n$  : on effectue donc  $(n - k)(n - k + 2)$  multiplications/divisions.
- On effectue ce qui précède pour  $k = 1 \rightarrow n - 1$  : on effectue donc  $\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + 2)$  multiplications/divisions.

soit

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + 2) = \sum_{p=1}^{n-1} p(p + 2) = \sum_{p=1}^{n-1} p^2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6} + 2 \frac{(n - 1)n}{2} \simeq \frac{1}{3}n^3.$$

Dans le résultat, on n'a gardé que les termes de plus haut degré.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.9

L'élément du produit des matrices  $L$  et  $U$  est donné par :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj}.$$

Or  $l_{ik} = 0$  pour  $i < k$  et  $u_{kj} = 0$  pour  $j < k$ . Le produit des éléments sera donc nul lorsque  $k$  sera supérieur au plus petit des deux entiers  $i$  et  $j$ , d'où le résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.10

On suppose qu'il y a deux décompositions possibles :

$$A = LU = \hat{L}\hat{U}.$$

Puisque  $A$  est inversible,  $L$ ,  $U$ ,  $\hat{L}$ ,  $\hat{U}$  sont inversibles. On a alors

$$(\hat{L})^{-1}L = \hat{U}U^{-1}.$$

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). Il en résulte que l'égalité précédente donne une matrice diagonale (car triangulaire inférieure et supérieure). D'autre part, la diagonale de  $\hat{U}U^{-1}$  ne comportant que des 1, la matrice produit est nécessairement la matrice identité. Ainsi

$$(\hat{L})^{-1}L = \hat{U}U^{-1} = I,$$

soit

$$L = \hat{L}, U = \hat{U}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.11

La résolution de  $Ly = b$  donne

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

puis celle de  $Ux = y$  donne

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)



# Solution de l'exercice C.1.12

On cherche  $L = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  telles que  $A = LU$ .

— On identifie la première colonne de  $A$  et la première colonne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la première colonne de  $L$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \times & 0 \\ -2 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

— On identifie la première ligne de  $A$  avec la première ligne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la première ligne de  $U$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \times & 0 \\ -2 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

— On identifie la deuxième colonne de  $A$  avec la deuxième colonne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la deuxième colonne de  $L$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

— On identifie la deuxième ligne de  $A$  avec la deuxième ligne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la deuxième ligne de  $U$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On identifie la troisième colonne de  $A$  avec la troisième colonne de  $LU$ , cela permet d'obtenir la troisième colonne de  $L$  :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice C.1.13

Le raisonnement s'obtient en échangeant des lignes et les colonnes dans le raisonnement de l'algorithme de Doolittle et les matrices  $L$  et  $U$ . Ainsi, cela commence par :

En écrivant  $A = LU$  et en se souvenant que les matrices  $L$  et  $U$  sont triangulaires, on obtient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ij} \text{ pour } i = j, j+1, \dots, n.$$

Ce qui est équivalent à

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \text{ pour } i = j, j+1, \dots, n.$$

Nous voyons que pour calculer les éléments  $l_{ij}$  de la  $j$ ème colonne de  $L$ , il nous faut connaître préalablement les éléments des colonnes 1 à  $j-1$  de  $L$  ainsi que les éléments des lignes 1 à  $j-1$  de  $U$ .  
etc. À vous de continuer.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.14

On découpe les matrices  $A$ ,  $L$  et  $U$  :

$$\begin{pmatrix} [A]_k & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L]_k & 0 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U]_k & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit par blocs, on obtient alors

$$[A]_k = [L]_k [U]_k.$$

Les deux matrices triangulaires  $[L]_k$  et  $[U]_k$  sont inversibles car les éléments des diagonales des matrices  $L$  et  $U$  sont non nuls, donc la matrice  $[A]_k$  est inversible.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.15

On rappelle que l'élément  $p_{ij}$  correspond à la  $i$ ème composante de  $g(\vec{e}_j)$ . On a donc

$$p_{ij} = (\vec{e}_{\sigma(j)})_i = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

Pour montrer que  $P^{-1} = P^\top$ , il suffit de calculer le produit  $PP^\top$  :

$$(PP^\top)_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ik}p_{jk} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{j,\sigma(k)}.$$

Le produit  $\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{j,\sigma(k)}$  est nul sauf si

$$i = j = \sigma(k)$$

et dans ce cas le produit vaut 1, ce qui montre le résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.16

1. Le produit de matrices donne

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n (LD)_{ik} l_{jk},$$

soit, puisque la matrice  $D$  est diagonale

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} d_k l_{jk}.$$

Or, puisque la matrice  $L$  est triangulaire inférieure, le produit  $l_{ik} l_{jk}$  est nul pour  $k > \inf(i, j)$ , soit  $k > j$ , ce qui donne le résultat.

2. En détaillant la somme de la première question, on obtient ( $l_{jj} = 1$ ) :

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j l_{jj}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j,$$

soit

$$d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2.$$

Et pour  $i > j$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk} + d_j l_{ij} l_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk} + d_j l_{ij},$$

soit

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk}}{d_j}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.17

Un raisonnement simple est basé sur le calcul de déterminant. En effet, puisque la matrice  $B$  est triangulaire, son déterminant est le produit des éléments de sa diagonale.

$$\det A = \det(BB^\top) = \det B \det(B^\top) = \prod_{i=1}^n (b_{ii})^2.$$

La matrice  $A$  est inversible puisque elle est définie positive (voir les rappels du chapitre de révision d'algèbre linéaire). Le déterminant de  $A$  est donc non nul, d'où l'on déduit que les éléments  $b_{ii}$  sont non nuls.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.18

Il suffit de considérer  $q(\theta)$  comme un trinôme en  $\theta$  qui est toujours positif ou nul, c'est-à-dire qui n'a pas de racines réelles distinctes. Dans ce cas le trinôme

$$q(\theta) = \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \theta^2 + \left( 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \theta + \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

a un discriminant négatif ou nul

$$\left( 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \leq 0,$$

soit

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right).$$

Le résultat s'obtient en prenant la racine carrée de cette inégalité, puisque la fonction racine carrée est croissante de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Solution de l'exercice C.1.19

Les propriétés de la norme vectorielle donnent :

$$\|\lambda Ax\| = |\lambda| \|Ax\|.$$

On a donc

$$\|\lambda A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} |\lambda| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \|A\|.$$

De même

$$\|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|,$$

ce qui donne pour tout  $x \neq 0$

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|},$$

soit

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout  $x \neq 0$ , le terme de gauche est donc un majorant indépendant de  $x \neq 0$ . L'inégalité est donc encore vraie pour le max qui est le plus petit des majorants, soit

$$\max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.20

Rappelons la définition de la norme subordonnée

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Ceci implique que pour tout  $x \neq 0$ , on a

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

soit

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Cette inégalité étant trivialement vérifiée pour  $x = 0$ , elle est donc vraie pour tout  $x \in \mathbb{C}^n$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.21

Par définition de la norme subordonnée, on a

$$\|I\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Par définition de la norme de Frobenius, on a

$$\|I\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |I_{ij}|^2} = \sqrt{n}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.22

Par définition de la valeur propre, on a

$$BAY = \lambda Y.$$

Multiplions à gauche par  $A$ , il vient

$$ABAY = \lambda AY.$$

Ceci correspond à la définition d'une valeur propre de  $AB$  à condition que le vecteur propre associé soit non nul. Supposons que  $AY = 0$ , alors en multipliant par  $B$  à gauche, on obtiendrait

$$BAY = 0, (= \lambda Y),$$

ce qui est impossible puisque  $\lambda$  est non nul et  $Y$  non nul (vecteur propre).

On vient de montrer que toute valeur propre non nulle de  $BA$  est une valeur propre de  $AB$ . Le raisonnement est évidemment valable en échangeant les rôles de  $A$  et de  $B$ . Les deux matrices  $BA$  et  $AB$  ont donc les mêmes valeurs propres non nulles et donc le même rayon spectral.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice C.1.23

- Puisque la matrice  $A$  est symétrique, elle est diagonalisable (voir les rappels du chapitre de révision d'algèbre linéaire). Elle s'écrit, donc

$$A = PDP^{-1},$$

où  $D$  est une matrice diagonale. Les éléments de la diagonale de  $D$  sont les valeurs propres de  $A$ . On a donc

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

ce qui montre que les valeurs propres de  $A^2$  sont les éléments de la diagonale de  $D^2$ , c'est à dire les valeurs propres de  $A$  au carré.

- Si l'on range les valeurs propres de  $A$  de la manière suivante :

$$|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \dots \leq |\lambda_1|,$$

on a

$$|\lambda_n|^2 \leq |\lambda_{n-1}|^2 \leq \dots \leq |\lambda_1|^2.$$

Il en résulte que

$$\rho(A^2) = |\lambda_1|^2 = \rho(A)^2.$$

- Dans le cours il est démontré (rechercher le résultat si vous l'avez oublié) que

$$\|A\|_2^2 = \rho(AA^\top).$$

La matrice étant symétrique ( $A = A^\top$ ) et en appliquant la question précédente, on a

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^2) = \rho(A)^2,$$

soit (les deux quantités étant positives)

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

- Les valeurs propres de  $A$  sont évidemment nulles, ce qui donne un rayon spectral nul. Si ce rayon spectral était une norme matricielle, on devrait avoir une matrice nulle par la première propriété d'une norme matricielle. La matrice  $A$  n'est évidemment pas la matrice nulle, le rayon spectral n'est donc pas une norme matricielle pour les matrices non symétriques.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.24

Considérons une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  :

$$AY = \lambda Y.$$

On a déjà montré (exercice C.1.20) que

$$\|AY\| \leq \|A\| \|Y\|,$$

ce qui donne

$$\|\lambda Y\| \leq \|A\| \|Y\|$$

donc

$$|\lambda| \|Y\| \leq \|A\| \|Y\|$$

or ( $\|Y\| \neq 0$  puisque  $Y$  est un vecteur non nul), donc après simplification

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Cette inégalité étant valable pour toute valeur propre, elle est évidemment valable pour la plus grande en module, soit

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.25

Une matrice diagonale étant une matrice symétrique, sa norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne est égale à son rayon spectral. Il en est de même de l'inverse de  $D$ . D'autre part, les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux. Si l'on appelle  $d_i$  les éléments diagonaux de  $D$ , on a

$$\|D\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|, \quad \|D^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} |d_i|}.$$

Le conditionnement de  $D$  est donc donné par

$$\chi_2(D) = \|D\|_2 \|D^{-1}\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i| \times \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} |d_i|}.$$

Ce conditionnement est égal à 1 si et seulement si

$$\max_{1 \leq i \leq n} |d_i| = \min_{1 \leq i \leq n} |d_i|$$

ce qui est équivalent à tous les éléments diagonaux de  $D$  sont égaux, c'est-à-dire  $D = \alpha I$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Solution de l'exercice C.1.26

- Puisque la matrice  $A$  est symétrique, elle est diagonalisable (voir les rappels du chapitre de révision d'algèbre linéaire). Elle s'écrit donc

$$A = PDP^{-1},$$

où  $D$  est une matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de  $A$ . On a donc

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1},$$

ce qui montre que les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont les éléments de la diagonale de  $D^{-1}$ , c'est-à-dire l'inverse des valeurs propres de  $A$ . Puisque les valeurs propres de  $A$  sont rangées de la manière suivante :

$$0 < |\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|,$$

les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont données par :

$$0 < \frac{1}{|\lambda_1|} \leq \frac{1}{|\lambda_2|} \leq \dots \leq \frac{1}{|\lambda_n|}.$$

- Par définition, on a

$$\chi_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice C.2.1

Il faut faire l'élimination de Gauss telle qu'elle est décrite dans le cours, sans permutation de lignes, ni "simplification". Par exemple, après la première étape, il ne faut **pas** diviser les lignes 2,3,4 de  $A^{(2)}$  et de  $b^{(2)}$  par 2 (on pourrait simplifier car les coefficients sont tous multiples de 2).

De plus, il faut écrire à chaque étape les modifications opérées sur les lignes. Cela servira pour la question 2...

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice C.2.1

On doit faire :

$$\underline{A}_i^{(2)} = \underline{A}_i^{(1)} - m_{i,1} \underline{A}_1^{(1)}, \quad \text{pour } i = 2, 3, 4,$$

puis

$$\underline{A}_i^{(3)} = \underline{A}_i^{(2)} - m_{i,2} \underline{A}_2^{(2)}, \quad \text{pour } i = 3, 4,$$

et enfin

$$\underline{A}_4^{(4)} = \underline{A}_4^{(3)} - m_{4,3} \underline{A}_3^{(3)}.$$

Déterminer  $A^{(k)}$  pour  $k = 2, 3, 4$  et les  $m_{i,k}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1, Exercice C.2.1

On trouve

$$Ax = b \iff A^{(4)}x = b^{(4)}, \quad \text{avec } A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \quad b^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Déterminer  $x$  en résolvant le système triangulaire supérieur.

[Retour à l'exercice ▲](#)

On trouve

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.1

Revoyez le cours : que sont les  $m_{i,k}$  de la question 1) par rapport à  $L$ ? Quel est le lien entre  $A^{(n)}$  et  $U$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice C.2.1

D'après le cours, les  $m_{i,k}$  sont les termes sous la diagonale de  $L$  et  $U = A^{(n)}$ . On obtient donc sans calculs

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $LU = A$  (si vous êtes pressé, vérifiez au moins que  $A_{4,4} = \underline{L}_4 U_4$ ).

On aurait aussi pu chercher  $L$  et  $U$  en travaillant par identification comme dans le cours (cf. algorithme de Doolittle).

En notant que  $U = A^{(n)}$ , on aurait aussi pu se limiter à chercher les valeurs de  $L$  en travaillant par identification (moins de calculs).

Le plus simple reste de connaître son cours et de ne faire *aucun calcul*...

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1a, Exercice C.2.2

On obtient

$$\begin{aligned}e_1 &= -\frac{c_1}{b_1}, \quad f_1 = \frac{y_1}{b_1} \\e_i &= -\frac{c_i}{a_i e_{i-1} + b_i}, \quad f_i = \frac{y_i - a_i f_{i-1}}{a_i e_{i-1} + b_i} \quad \text{pour } i = 2, \dots, n-1 \\f_n &= \frac{y_n - a_n f_{n-1}}{a_n e_{n-1} + b_n}.\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Aide 1, Question 1b, Exercice C.2.2

On doit déterminer dans l'ordre  $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_{n-1}, f_{n-1}, f_n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2a, Exercice C.2.2

On a

$$A_1 = LU_1 = L_1, \text{ d'où } L_1 = A_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } l_1 = b_1.$$

$$\underline{A}_1 = \underline{L}_1 U = l_1 \underline{U}_1, \text{ d'où } \underline{U}_1 = \frac{1}{l_1} \underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & e'_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } e'_1 = \frac{c_1}{l_1}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2b, Exercice C.2.2

On identifie cette fois la deuxième colonne de  $A$ , puis la deuxième ligne de  $A$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2b, Exercice C.2.2

On a

$$A_2 = LU_2 = L \begin{pmatrix} e'_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e'_1 L_1 + L_2 \text{ d'où } L_2 = A_2 - e'_1 L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ a_3 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ avec } l_2 = b_2 - e'_1 a_2.$$

$$\underline{A}_2 = \underline{L}_2 U = \begin{pmatrix} a_2 & l_2 & 0 & \dots \end{pmatrix} U = a_2 \underline{U}_1 + l_2 \underline{U}_2,$$

d'où

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{l_2} (\underline{A}_2 - a_2 \underline{U}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & e'_2 & 0 & \dots \end{pmatrix} \text{ avec } e'_2 = \frac{c_2}{l_2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2c, Exercice C.2.2

On suppose que les formules ont été démontrées pour  $2, 3, \dots, j-1$ , on va les démontrer pour  $j$ , pour cela on identifie la colonne  $j$  et la ligne  $j$  de  $A$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

On a

$$A_j = LU_j = L \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ e'_{j-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e'_{j-1} L_{j-1} + L_j \text{ d'où } L_j = A_j - e'_{j-1} L_{j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ l_j \\ a_{j+1} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ avec } l_j = b_j - e'_{j-1} a_j.$$

$$\underline{A}_j = \underline{L}_j U = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_j & l_j & 0 & \dots \end{pmatrix} U = a_j \underline{U}_{j-1} + l_j \underline{U}_j,$$

d'où

$$\underline{U}_j = \frac{1}{l_j} (\underline{A}_j - a_j \underline{U}_{j-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & e'_j & 0 & \dots \end{pmatrix} \text{ avec } e'_j = \frac{c_j}{l_j} = \frac{c_j}{b_j - e'_{j-1} a_j}.$$

En construisant la matrice  $U$  à partir des lignes que l'on vient de déterminer et la matrice  $L$  à partir des colonnes que l'on vient de déterminer, on obtient :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -e_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -e_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -e_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & l_2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a_{n-1} & l_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n & l_n \end{pmatrix}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2d, Exercice C.2.2

C'est vrai pour  $i = 1$ , il suffit de regarder les 2 expressions, supposons que ce soit vrai pour  $1, 2, \dots, j-1$ , on a donc

$$e'_j = \frac{c_j}{b_j - e'_{j-1} a_j} = \frac{c_j}{b_j + e_{j-1} a_j} = -e_j$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2e, Exercice C.2.2

Résolvez le système, trouvez l'expression des  $z_i$ , et comparez avec les  $f_i$

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Aide 2, Question 2e, Exercice C.2.2

La première équation est

$$l_1 z_1 = y_1 \Leftrightarrow z_1 = \frac{y_1}{b_1} = f_1.$$

On suppose que  $f_{i-1} = z_{i-1}$ , montrez que  $f_i = z_i$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2e, Exercice C.2.2

Si  $z_{i-1} = f_{i-1}$ , pour montrer que  $z_i = f_i$ , on écrit l'équation  $i$

$$a_i z_{i-1} + l_i z_i = y_i \Leftrightarrow z_i = \frac{y_i - a_i z_{i-1}}{l_i} = \frac{y_i - a_i f_{i-1}}{b_i + e_{i-1} a_i} = f_i$$

Et c'est tout !

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2f, Exercice C.2.2

$$Ax = y \Leftrightarrow LUx = y \Leftrightarrow \begin{cases} Lz = y \\ Ux = z \end{cases}$$

Puisque  $z = f$  on résout donc  $Ux = f$ , ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & -e_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -e_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -e_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = e_1 x_2 + f_1 \\ \vdots \\ x_i = e_i x_{i+1} + f_i \\ \vdots \\ x_n = f_n \end{cases}$$

On retrouve bien la méthode de Richtmayer. Les conditions pour lesquelles cette méthode est applicable sont donc les conditions pour lesquelles la factorisation de Crout est faisable, et conduit à des matrices  $L$  et  $U$  inversibles. Cette condition est : toutes les sous-matrices principales de  $A$  sont inversibles.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice C.2.3

Pour la méthode, voir l'exercice [C.1.8](#).

On utilisera aussi les résultats  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice C.2.3

Le nombre asymptotique de multiplications est le même que pour l'élimination de Gauss :  $\sim \frac{n^3}{3}$  (en négligeant les termes d'ordre  $n^2$  et inférieurs).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice C.2.4

Il suffit de regarder le nombre de multiplications nécessaires pour chaque terme de la matrice  $B$ , puis de sommer sur tous les coefficients de  $B$ .

Pour les systèmes triangulaires, il suffit de regarder les algorithmes et d'utiliser la méthodologie de l'exercice C.1.8.

Le coût de la factorisation  $LU$  est donnée dans le cours.

Il reste à sommer ces coûts et à conserver le terme dominant.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice C.2.4

On trouve  $\sim \frac{4n^3}{3}$  multiplications.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.4

Essayer de factoriser  $A$  au lieu de  $B$ ...

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Aide 2, Question 2, Exercice C.2.4

On résout 4 systèmes linéaires triangulaires, sans multiplication de matrices. Écrivez les.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2, Exercice C.2.4

On trouve dans ce cas  $\sim \frac{n^3}{3}$  multiplications.

Conclure.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.5

On a :

$$a_{kk}x_k = -a_{k1}x_1 - \dots - a_{kk-1}x_{k-1} - a_{kk+1}x_{k+1} - \dots - a_{kn}x_n.$$

Utiliser l'inégalité triangulaire.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice C.2.5

$$\begin{aligned} |a_{kk}||x_k| &\leq |a_{k1}||x_1| + \dots + |a_{kk-1}||x_{k-1}| + |a_{kk+1}||x_{k+1}| + \dots + |a_{kn}||x_n| \\ &\leq (|a_{k1}| + \dots + |a_{kk-1}| + |a_{kk+1}| + \dots + |a_{kn}|)|x_k|. \end{aligned}$$

Qu'obtient-on si  $x_k \neq 0$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2, Exercice C.2.5

Si  $x_k \neq 0$ , on pourrait simplifier ce qui donnerait :

$$|a_{kk}| \leq (|a_{k1}| + \dots + |a_{kk-1}| + |a_{kk+1}| \dots + |a_{kn}|).$$

Ce qui est impossible car  $A$  est à diagonale strictement dominante.

Donc  $x_k = 0$ .

En déduire que  $A$  est inversible.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 2, Exercice C.2.5

Si  $x_k = 0$  alors  $\forall i \ x_i = 0$  et donc  $x = 0$ . Donc

$$\ker(A) = \{0\}.$$

Revoir le chapitre de révision d'algèbre linéaire.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Question 2, Exercice C.2.5

Si  $A$  est carrée :

$$\ker(A) = \{0\} \iff A \text{ est inversible .}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice C.2.5

Revoir le paragraphe “[Factorisation  \$A = LU\$  / faisabilité](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Aide 2, Question 3, Exercice C.2.5

Montrer que les sous-matrices principales sont à diagonale strictement dominante, donc inversibles.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Sans permutation, on trouve

$$Ax = b \iff \begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1, \\ -(1 + \frac{1}{\varepsilon})x_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \end{cases},$$

ce qui donne  $x_1 = x_2 = \frac{1}{1+\varepsilon}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2a, Exercice C.2.6

Dans ce cas, sans permutation, on trouve

$$A\tilde{x} = b \iff \begin{cases} \varepsilon\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 1, \\ -(1 \oplus \frac{1}{\varepsilon})\tilde{x}_2 = -\frac{1}{\varepsilon}, \end{cases},$$

mais il faut cette fois-ci calculer le résultat de l'opération flottante  $1 \oplus \frac{1}{\varepsilon}$ .  
Revoyez le Chapitre 1.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2a, Exercice C.2.6

On obtient :  $1 \oplus \frac{1}{\varepsilon} = \text{fl}(1 + 2 \times 10^4) = \text{fl}((0.2000 + 0.00001)10^5) = \text{fl}(0.20001 \times 10^5) = 0.2000 \times 10^5 = 2 \times 10^4$ , car on arrondit au flottants à 4 chiffres le plus proche.

Finir les calculs avec  $1 \oplus \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2a, Exercice C.2.6

On trouve  $\tilde{x}_2 = 1$  et donc  $\varepsilon \tilde{x}_1 = 1 \ominus \tilde{x}_2 = 0$ , soit  $\tilde{x}_1 = 0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2b, Exercice C.2.6

L'erreur relative sur  $x_2$  se définit comme  $\frac{|\tilde{x}_2 - x_2|}{x_2}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2b, Exercice C.2.6

L'erreur relative sur  $x_2$  est petite :  $\frac{|\tilde{x}_2 - x_2|}{x_2} = \varepsilon$ . C'est inférieur à  $\varepsilon_{\text{mach},10} = \frac{1}{2}10^{-t+1} = 0.5 \times 10^{-3}$ , avec les notations du Chapitre 1.

En revanche, l'erreur sur  $x_1$  est énorme :  $\frac{|\tilde{x}_1 - x_1|}{x_1} = 1$ , soit 100% d'erreur : dans  $\tilde{x}_1$ , il n'y a aucune information sur  $x_1$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice C.2.8

Le produit des valeurs propres est positif.

Les termes diagonaux de  $A$  sont positifs.

Les conditions nécessaires pour que la matrice  $A$  soit définie positive sont satisfaites.

*A priori* on ne peut pas dire si  $A$  est définie positive ou non.

[Retour à l'exercice ▲](#)



Voir le paragraphe “[Factorisation  \$LDL^T\$](#) ”.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice C.2.8

Revoir également le paragraphe “[Factorisation  \$A = LU\$  / faisabilité](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2, Exercice C.2.8

Pour obtenir  $D$ , on écrit  $U = DU'$ , avec  $U'$  matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Que vaut  $U'$  ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 2, Exercice C.2.8

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, U' = L^{\top}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3, Exercice C.2.8

Revoir la définition de matrice symétrique définie positive dans le chapitre de révision d'algèbre linéaire.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3, Exercice C.2.8

$$x^\top Ax = x^\top LDL^\top x = y^\top Dy \text{ avec } y = L^\top x$$

Or  $d_{22} = -1$ , on peut choisir  $y$  judicieusement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

On peut choisir

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}^\top D \hat{y} = -1.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 3, Exercice C.2.8

Existe-t-il  $\hat{x}$  tel que  $\hat{y} = L^\top \hat{x}$  ?

[Retour à l'exercice ▲](#)



Puisque  $L^\top$  est inversible,

$$\exists \hat{x}, \hat{y} = L^\top \hat{x}$$

et on a

$$\hat{x}^\top A \hat{x} = \hat{y}^\top D \hat{y} = -1.$$

Ce qui permet de conclure que la matrice  $A$  n'est pas définie positive puisque l'on n'a pas

$$\forall x, x^\top A x \geq 0.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice C.2.9

Faire les calculs et montrer que l'on ne débouche pas sur une impossibilité : montrer que les termes dont on doit prendre la racine carrée sont positifs, montrer que les termes par lesquels on doit diviser sont non nuls.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice C.2.9

Les propriétés de  $A$  qui peuvent nous servir sont

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0.$$

Les deux valeurs propres de  $A$  sont strictement positives donc  $\det A > 0$ .

Faites les calculs pour obtenir  $C$ , et montrez que tout se passe bien.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2a, Exercice C.2.9

ICI on admet que  $C$  existe, donc que tous les calculs se passent bien.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2a, Exercice C.2.9

Utiliser les propriétés du produit matriciel.

Que vaut  $a_{11}$  ? En déduire  $c_{11}$  (qui doit être positif).

Que vaut  $A_1$  ? En déduire  $C_1$ .

Faites de même pour les colonnes suivantes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 2a, Exercice C.2.9

$$c_{11} = \sqrt{a_{11}}.$$

$$C_1 = \frac{1}{c_{11}} A_1.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 2a, Exercice C.2.9

On suppose que l'on a déterminé les  $j - 1$  premières colonnes.

Que vaut  $a_{jj}$ ?

Constater que dans l'expression de  $a_{jj}$  tous les termes sont connus sauf  $c_{jj}$ .

En déduire  $c_{jj}$  (qui doit être positif).

Que vaut  $A_j$ ?

Là encore, constater que seule la colonne  $C_j$  est inconnue.

En déduire  $C_j$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 2a, Exercice C.2.9

$$c_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^2}.$$

$$C_j = \frac{1}{c_{jj}} \left( A_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk} C_k \right).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Aide 1, Question 2b, Exercice C.2.9

Voir le paragraphe “[Factorisation de Cholesky / mise en oeuvre](#)”.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1, Exercice C.2.10

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |(Ax)_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.10

Utiliser l'inégalité triangulaire.

N'oubliez pas que

$$\forall j \quad |x_j| \leq \|x\|_\infty.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice C.2.10

On obtient

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|_{\infty} = \|x\|_{\infty} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Donc :

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \|x\|_{\infty} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

Donc

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq N(A).$$

On obtient le résultat :

$$\|A\|_{\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq N(A). \quad (\text{C.2.1})$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3, Exercice C.2.10

$$\|\hat{x}\|_{\infty} = 1.$$

D'après la définition de  $\hat{x}$ , on a

$$(A\hat{x})_l = a_{l1}\hat{x}_1 + a_{l2}\hat{x}_2 + \dots + a_{ln}\hat{x}_n = |a_{l1}| + |a_{l2}| + \dots + |a_{ln}| = \sum_{j=1}^n |a_{lj}|$$

Car

$$\text{si } \begin{cases} a_{li} \geq 0, & \hat{x}_i a_{li} = a_{li} = |a_{li}| \\ a_{li} < 0, & \hat{x}_i a_{li} = -a_{li} = |a_{li}| \end{cases} \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

On en déduit un minorant de  $\|A\hat{x}\|_{\infty}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice C.2.10

En utilisant la définition de la norme infinie d'un vecteur, on obtient :

$$\|A\hat{x}\|_{\infty} \geq |(A\hat{x})_l| = (A\hat{x})_l = \sum_{j=1}^n |a_{lj}|.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Dans la question 2), on a montré

$$\|A\|_{\infty} \leq N(A) = \sum_{j=1}^n |a_{lj}|.$$

Montrer que la question 3) permet d'écrire l'autre inégalité.

[Retour à l'exercice ▲](#)

En utilisant la question **3**

$$\frac{\|A\hat{x}\|_\infty}{\|\hat{x}\|_\infty} \geq \sum_{j=1}^n |a_{lj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Reprenez la définition de  $\|A\|_\infty$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)



D'après la définition :

$$\|A\|_{\infty} \geq \frac{\|A\hat{x}\|_{\infty}}{\|\hat{x}\|_{\infty}} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

On retrouve l'"autre" inégalité.

D'où l'égalité :

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 5, Exercice C.2.10

$$\|A\|_1 = \max(1; 0.3; 1.1) = 1.1$$

$$\|A\|_\infty = \max(0.7; 0.9; 0.8) = 0.9$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.2.12

1. Soit  $y$  vecteur propre de  $AA'$  associé à la valeur propre  $\lambda \neq 0$ ,

$$y \text{ vecteur propre de } AA' \Leftrightarrow \begin{cases} AA'y = \lambda y \\ y \neq 0 \end{cases}$$

On a donc  $A'AA'y = \lambda A'y$ , pour montrer que  $A'y$  est vecteur propre de  $A'A$ , il reste à prouver que  $A'y \neq 0$ .

Cela se démontre par l'absurde

$$A'y = 0 \Rightarrow AA'y = 0 \Rightarrow \lambda y = 0,$$

or  $\lambda \neq 0, y \neq 0$  donc  $\lambda y \neq 0$ , ce qui prouve que  $A'y \neq 0$ .

Toutes les valeurs propres non nulles de  $AA'$  sont donc valeurs propres (non nulles) de  $A'A$ , on montrerait de même que les valeurs propres non nulles de  $A'A$  sont valeurs propres de  $AA'$ .

On va montrer que  $\rho(A'A) = \rho(AA')$ .

Ce résultat peut se démontrer par l'absurde si on suppose que  $\rho(A'A) > \rho(AA')$ , alors  $\rho(A'A) > 0$ , donc il existe  $\lambda$  valeur propre de  $A'A$  vérifiant  $|\lambda| = \rho(A'A) > 0$ , donc  $\lambda$  est valeur propre de  $AA'$ , donc  $\rho(AA') \geq |\lambda| = \rho(A'A)$ , ce qui conduit à une contradiction. On montrerait de même que  $\rho(AA') > \rho(A'A)$  conduit à une contradiction, donc  $\rho(A'A) = \rho(AA')$ .

2.  $B$  est inversible donc ses valeurs propres sont non nulles, donc  $|\lambda_1| > 0$ .

Par définition du rayon spectral  $\rho(B) = |\lambda_n|$ .

$$By_i = \lambda_i y_i \Leftrightarrow B^{-1}y_i = \frac{1}{\lambda_i} y_i$$

Les valeurs propres de  $B^{-1}$  sont donc  $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ , les vecteurs propres correspondants sont les mêmes que ceux de  $B$ .

Si on ordonne les valeurs propres de  $B^{-1}$ , on obtient  $\frac{1}{|\lambda_1|} \geq \frac{1}{|\lambda_2|} \geq \dots \geq \frac{1}{|\lambda_n|}$ , donc

$$\rho(B^{-1}) = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

3. (a) On rappelle que si  $E$  et  $E'$  sont des matrices carrées inversibles, on a  $(E^\top)^{-1} = (E^{-1})^\top$ ,  $(EE')^{-1} = E'^{-1}E^{-1}$ , en utilisant ces résultats et la question 1., on obtient

$$\rho((E^{-1})^\top E^{-1}) = \rho(E^{-1}(E^{-1})^\top) = \rho(E^{-1}(E^\top)^{-1}) = \rho((E^\top E)^{-1}).$$

(b)  $E^\top E$  est symétrique définie positive (car  $E$  est inversible), donc toutes les valeurs propres de  $E^\top E$  sont strictement positives.

(c) On utilise 2.

$$\rho(E^\top E) = \lambda_n, \quad \rho((E^\top E)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1}$$

(d)

$$\chi_2(E) = \|E\|_2 \|E^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(E^\top E)} \sqrt{\rho((E^{-1})^\top E^{-1})} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}}$$

(e) Si  $C$  est symétrique  $\|C\|_2 = \rho(C)$ ,  $\|C^{-1}\|_2 = \rho(C^{-1})$ .

Si on note  $\mu_i$  les valeurs propres ordonnées de  $C$  :  $0 < |\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \dots \leq |\mu_n|$ , alors

$$\chi_2(C) = \|C\|_2 \|C^{-1}\|_2 = \rho(C) \rho(C^{-1}) = \frac{|\mu_n|}{|\mu_1|}$$

On calcule  $\det(sI - C) = (s+5)(s+2)(s-4)$ , on a donc dans l'ordre  $\mu_1 = -2, \mu_2 = 4, \mu_3 = -5$ , donc  $\chi_2(C) = \frac{5}{2}$ .

(f)  $E^\top E$  est une matrice symétrique (définie positive), ses valeurs propres sont  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , donc en utilisant la question (d)

$$\chi_2(E^\top E) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} = (\chi_2(E))^2.$$

On sait que le conditionnement d'une matrice est toujours supérieur à un, donc la matrice  $E^T E$  a un conditionnement supérieur à la matrice  $E$ . On utilisera cette propriété dans le chapitre sur les moindres carrés en préférant résoudre un système dont la matrice est  $E$ , plutôt qu'un système dont la matrice est  $E^T E$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)