

# MT09-Analyse numérique élémentaire

---

## *Chapitre 6 : Intégration numérique*

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

---

*Septembre 2016*



# Chapitre 6

## Intégration numérique

6.1	Motivations et principe des méthodes numériques d'intégration .	3
6.1	Méthodes utilisant le polynôme d'interpolation . . . . .	5
6.2	Quadrature de <i>Gauss-Legendre</i> . . . . .	18

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 6.1 Motivations et principe des méthodes numériques d'intégration

### Documents :

[Document B.1.1](#)

Il existe deux situations où l'on a besoin de formules pour approcher l'intégrale d'une fonction  $f$  :

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt$$

- On ne connaît la valeur de  $f$  qu'en certains points  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , et il n'est pas possible d'avoir d'autres valeurs que celles-ci (c'est le cas quand la fonction  $f$  est tabulée).
- Il est possible de calculer  $f(t)$  pour un  $t$  quelconque, mais la primitive de  $f$  n'est pas connue, ou bien l'expression analytique de  $f$  est trop compliquée pour être explicitée ( $f(t)$  est par exemple le résultat d'un code de calcul trop complexe).

Dans ces deux situations, on doit donc chercher à approcher  $I(f)$  à l'aide d'un nombre fini de valeurs de  $f$  en certains points  $t_0, t_1, \dots, t_n$  qui sont soit imposés, soit à choisir de façon optimale pour que l'approximation soit la meilleure possible. Plus précisément on aura recours à des combinaisons linéaires de valeurs de la fonction à intégrer en des points de l'intervalle d'intégration, soit

$$\int_a^b f(t) dt \simeq \sum_{i=0}^n w_i f(t_i). \quad (6.1)$$

Les points  $t_i$  sont appelés les **nœuds** de la formule, les  $w_i$  sont les **poids** (weights, en anglais), parfois aussi dénommés **coefficients** de la formule. L'application

$$f \mapsto \sum_{i=0}^n w_i f(t_i)$$

qui à  $f$  fait correspondre une valeur “approchée” de son intégrale sur l'intervalle considéré définit une **formule** (ou **méthode**) **d'intégration numérique**. On dit aussi formule ou méthode de **quadrature**. Quelques commentaires sont donnés en document.

**Motivations  
et principe  
des méthodes  
numériques  
d'intégration**

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 6.1 Méthodes utilisant le polynôme d'interpolation

6.1.1	Principe de la méthode . . . . .	6
6.1.2	Intervalle de référence . . . . .	9
6.1.3	Majoration de l'erreur de quadrature - ordre . . . . .	11
6.1.4	Formules de Newton-Cotes . . . . .	13
6.1.5	Intégration numérique composée . . . . .	16

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1.1 Principe de la méthode

**Exercices :**

[Exercice C.1.1](#)

**Exemples :**

[Exemple A.1.1](#)

Pour approcher l'intégrale  $I(f)$  par une combinaison linéaire des valeurs de  $f$  en des points  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , une première méthode consiste à approcher  $I(f)$  par

$$I(f) = \int_a^b p_f(t) dt,$$

où  $p_f(t)$  est le polynôme qui interpole  $f$  aux points distincts  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . Ces points sont choisis le plus souvent dans l'intervalle  $[a, b]$ . Nous rencontrerons cependant, dans le chapitre sur les équations différentielles, des formules de quadrature utilisant des nœuds extérieurs à l'intervalle d'intégration. La justification en est très simple : cela permet d'utiliser les valeurs de la fonction à intégrer en des points où ces valeurs ont déjà été calculées.

Nous avons vu au chapitre précédent que le polynôme d'interpolation s'exprime dans la base de Lagrange par

$$p_f(t) = \sum_{i=0}^n f(t_i) \mathcal{L}_i(t).$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Nous obtenons alors directement

$$J(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i), \text{ avec } w_i = \int_a^b \mathcal{L}_i(t) dt. \quad (6.1.1)$$

La formule (6.1.1) est appelée **formule de quadrature**.

De manière équivalente, nous pouvons aussi obtenir les coefficients  $w_i$  en écrivant que la formule doit être exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , soit de façon équivalente pour chacun des monômes de la base canonique de  $\mathcal{P}_n$ . Cette équivalence se démontre facilement, voir l'exercice référencé.

On peut donc calculer les coefficients  $w_0, \dots, w_n$ , en écrivant que  $I(p) = J(p)$  pour  $p \in \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  où  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  est la base canonique de  $\mathcal{P}_n$ . On obtient le système linéaire

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \\ t_0^2 & t_1^2 & \dots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \dots & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad (6.1.2)$$

où

$$v_k = \int_a^b t^k dt.$$

La matrice de ce système est une matrice de **Vandermonde**. Son déterminant est non nul si et seulement si les points  $t_i$  sont deux à deux distincts. Le système (6.1.2) admet donc effectivement une solution et une seule.

## Principe de la méthode

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

L'exemple référencé vous permet de voir sur un cas particulier les deux méthodes pour calculer les  $w_i$ .

## Principe de la méthode

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



## 6.1.2 Intervalle de référence

**Exercices :**

[Exercice C.1.2](#)

**Exemples :**

[Exemple A.1.2](#)

Une fois les nœuds  $t_i$  choisis, les poids  $w_i$  ne dépendent pas de la fonction  $f$  à intégrer. Par contre, ils dépendent de  $a$  et  $b$ . Nous allons voir maintenant, qu'il est possible de se ramener sans restriction aucune à approcher des intégrales sur un unique intervalle dit **intervalle de référence**. Nous choisirons l'intervalle  $[-1, 1]$ , car sa symétrie par rapport à 0 simplifie les calculs. Par contre, on aurait pu choisir tout autre intervalle, comme par exemple  $[0, 1]$ .

Nous allons donc ramener le calcul d'une intégrale sur un intervalle  $[a, b]$  à celui d'une intégrale sur  $[-1, 1]$ , en utilisant un changement de variable affine. En effet si on pose

$$t = \frac{a + b + (b - a)u}{2},$$

on peut écrire que

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b - a}{2} \int_{-1}^1 g(u) du,$$

avec

$$g(u) = f\left(\frac{a + b + (b - a)u}{2}\right).$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Nous pouvons ainsi définir des formules de quadrature sur  $[-1, 1]$ , où ni les nœuds, ni les poids ne dépendent de  $a$  ou  $b$ . Ce sont ces formules que l'on retrouve dans les tables des livres consacrés à l'intégration numérique.

On ne retrouve pas une situation aussi simple quand on doit calculer des intégrales doubles ou triples. En effet, il n'existe pas de transformation de coordonnées *simple* permettant de passer d'un domaine bi ou tri-dimensionnel quelconque à un domaine de référence. On a alors des familles de formes de domaines (triangles, quadrangles, tétraèdres...) et pour chacune de ces familles, un domaine de référence. Le passage de la dimension 1 à la dimension 2 ou 3 change le niveau de complexité du problème de la quadrature.

## Intervalle de référence

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.1.3 Majoration de l'erreur de quadrature - ordre

**Exercices :**[Exercice C.1.3](#)[Exercice C.1.4](#)[Exercice C.1.5](#)**Exemples :**[Exemple A.1.3](#)

L'erreur de quadrature est donnée par

$$E(f) = I(f) - J(f) = \int_a^b (f(t) - p_f(t)) dt.$$

Or si  $f$  est une fonction  $(n+1)$  fois continûment dérivable et si  $p_f$  est son polynôme d'interpolation de degré  $n$ , nous avons vu dans le chapitre consacré à l'interpolation, que :

$$f(t) - p_f(t) = (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!} = \pi_n(t) \frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!},$$

où  $\xi(t) \in \text{Int}(t, t_0, \dots, t_n)$ . On a donc

$$|E(f)| \leq \int_a^b |\pi_n(t)| \frac{|f^{(n+1)}(\xi(t))|}{(n+1)!} dt = \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_n(t)| dt,$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

où  $\eta \in \text{Int}(a, b, t_0, \dots, t_n)$  (on a appliqué le deuxième théorème de la moyenne<sup>1</sup>). On peut encore majorer :

$$|E(f)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_n(t)| dt,$$

où  $M > 0$  est un majorant de  $|f^{(n+1)}|$  sur  $\text{Int}(a, b, t_0, \dots, t_n)$ .

On retrouve bien que si  $f$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , alors  $E(f) = 0$ , c'est à dire que l'approximation est exacte. Nous verrons plus loin, en particulier dans l'exemple et un exercice référencés ci-dessus, que l'on peut obtenir des estimations plus fines de l'erreur.

**Définition 6.1.1.** *Une formule de quadrature exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  ( $n$  maximum) est dite **d'ordre**  $n$  ou de degré d'exactitude  $n$ .*

---

1. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b]$  et que  $g$  ne change pas de signe sur  $[a, b]$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$ .

## Majoration de l'erreur de quadrature - ordre

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 6.1.4 Formules de Newton-Cotes

### Exercices :

#### Exercice C.1.6

Nous allons énumérer maintenant quelques formules classiques construites avec des  $t_i$  fixés équidistants. On suppose que  $t_0 = a, t_n = b$  et que les points  $t_i$  sont équidistants :

$$t_{j+1} - t_j = h = \frac{b-a}{n}, \forall j = 0, 1, \dots, n-1. \text{ On a alors } t_i = a + ih, \text{ pour } i = 0, \dots, n.$$

On généralise à un nombre quelconque de points l'idée utilisée pour la méthode des trapèzes : on approche  $I(f)$  par  $J(f) = \int_a^b p_f(t) dt = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i)$ , où  $p_f$  interpole  $f$  aux points  $t_0, \dots, t_n$ .

Donnons maintenant les formules obtenues pour diverses valeurs de  $n$ . Nous donnerons en même temps, pour chacune d'elles, une estimation de l'erreur  $E$  correspondante. Formules de Newton-Cotes pour  $n = 1, 2, 3$  :

—  $n = 1$  : formule des trapèzes ( $h = b - a$ ) :

$$J(f) = \frac{h}{2} (f(t_0) + f(t_1)); \exists \eta \in [a, b], E(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta).$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

—  $n = 2$  : formule de *Simpson* ( $h = (b - a)/2$ ) :

$$J(f) = \frac{h}{3} (f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2)); \exists \eta \in [a, b], E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta).$$

—  $n = 3$  : formule de *Simpson 3/8* ( $h = (b - a)/3$ ) :

$$J(f) = \frac{3h}{8} (f(t_0) + 3f(t_1) + 3f(t_2) + f(t_3)); \exists \eta \in [a, b], E(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\eta).$$

On a le résultat général suivant :

**Théorème 6.1.1** (Formules de Newton-Cotes avec reste).

*Si  $n$  est pair et si  $f$  est  $n + 2$  fois continûment dérivable, il existe  $\eta \in [a, b]$  tel que*

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1) \dots (t-n) dt,$$

*Si  $n$  est impair et si  $f$  est  $n + 1$  fois continûment dérivable, il existe  $\eta \in [a, b]$  tel que*

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1) \dots (t-n) dt,.$$

Les coefficients  $w_i$  sont obtenus par résolution du système (6.1.2) ou par le calcul de  $\int_a^b p_f(t) dt$ , où  $p_f$  est le polynôme d'interpolation.

## Formules de Newton-Cotes

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

On peut remarquer que pour  $n$  pair (donc un nombre impair de points) les formules de Newton-Cotes sont exactes pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n+1$ , alors que pour  $n$  impair, ces formules sont exactes pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Le cas  $n$  pair donne donc des formules d'ordre plus élevé que prévu. Ceci a une conséquence directe : lorsque  $n$  est pair, ajouter un seul point n'améliore pas l'approximation de l'intégrale, il faut ajouter 2 points.

## Formules de Newton-Cotes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1.5 Intégration numérique composée

**Exercices :**[Exercice C.1.7](#)**Documents :**[Document B.1.2](#)

Dans la pratique on dépasse rarement  $n = 2$ , pour les mêmes raisons qui font préférer les splines au polynôme d'interpolation qui a tendance à osciller fortement quand  $n$  devient grand. Pour traiter de grands intervalles on utilise une approche locale : on découpe d'abord l'intervalle  $[a, b]$  et on applique des formules d'ordre faible sur les sous-intervalles. Par exemple pour la méthode des trapèzes :

1. On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $N$  sous-intervalles à l'aide de points de subdivision  $t_i = a + ih$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , avec  $h = (b - a)/N$ ,
2. puis sur chaque sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , on applique la méthode des trapèzes.

On obtient ainsi la formule composée suivante :

$$\begin{aligned} J(f) &= h \left( \frac{f(t_0) + f(t_1)}{2} + \frac{f(t_1) + f(t_2)}{2} + \dots + \frac{f(t_{N-1}) + f(t_N)}{2} \right) \\ &= h \left( \frac{1}{2} f(t_0) + \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i) + \frac{1}{2} f(t_N) \right). \end{aligned}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



Pour le calcul de l'erreur, on somme les erreurs commises sur chacun des sous-intervalles, soit

$$E(f) = \sum_{i=0}^{N-1} E_i(f), \text{ avec } E_i(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i),$$

où  $\eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$ . On applique alors le théorème de la valeur intermédiaire<sup>2</sup> pour invoquer l'existence d'un nombre  $\eta \in [a, b]$  tel que

$$f''(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f''(\eta_i),$$

l'erreur globale s'écrit

$$E(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta).$$

De même pour la méthode de Simpson : on suppose que  $N$  est pair, soit  $N = 2M$ . La formule obtenue est la suivante (à montrer en exercice) :

$$J(f) = \frac{h}{3} \left( f(t_0) + 4 \sum_{i=0}^{M-1} f(t_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f(t_{2i}) + f(t_{2M}) \right),$$

où on a toujours posé  $h = (b-a)/N$ , et par la même technique que précédemment, on obtient l'estimation d'erreur :

$$E(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b].$$

Dans le document référencé, on trouve un calcul d'estimation *a posteriori* de l'erreur et une technique d'utilisation de ces estimations pour construire des méthodes de quadrature **adaptatives**.

2. Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = [f(a) + f(b)]/2$ .

## Intégration numérique composée

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2 Quadrature de *Gauss-Legendre*

6.2.1	Les polynômes de Legendre . . . . .	19
6.2.2	La méthode de Gauss-Legendre . . . . .	23

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.1 Les polynômes de Legendre

### Exercices :

#### [Exercice C.1.8](#)

Le problème considéré est toujours le même, à savoir trouver une formule

$$J(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i),$$

faisant intervenir  $n+1$  valeurs de  $f$ , permettant d'approcher

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Les formules de Newton-Cotes consistent à choisir les  $t_i$  équidistants sur l'intervalle  $[a, b]$ . On a vu au théorème [6.1.1](#) que ces formules sont au mieux d'ordre  $n+1$ . Lorsqu'il est possible de connaître  $f(t)$  pour  $t$  quelconque, on peut imaginer choisir non seulement les poids  $w_i$ , mais aussi les points  $t_i$ , de manière à obtenir une formule d'ordre plus élevé. On dispose alors de  $2n+2$  degrés de liberté, et on peut espérer obtenir ainsi une formule à  $n+1$  points d'ordre  $2n+1$ . Nous allons voir maintenant comment choisir ces  $2n+2$  paramètres.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Définition 6.2.1.** On appelle **polynôme de Legendre** d'ordre  $k$  le polynôme

$$g_k(t) = \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- On a  $g_0(t) = 1$ ,  $g_1(t) = 2t$ ,  $g_2(t) = 12t^2 - 4$ ,  $g_3(t) = 120t^3 - 72t$ , etc.
- Le terme de plus haut degré de  $g_k$  est  $\frac{(2k)!}{k!} t^k$ .
- Le polynôme  $g_k$  est de degré  $k$ , donc  $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$  forme une base de  $\mathcal{P}_n$ .

**Lemme 6.2.2.** Quel que soit l'entier  $k \geq 1$  et  $0 \leq i \leq k - 1$ , le polynôme

$$\frac{d^i}{dt^i} (t^2 - 1)^k,$$

admet 1 et -1 comme racines.

*Démonstration* - Il suffit de remarquer que si l'on note  $p$  le polynôme tel que :

$$p(t) = (t^2 - 1)^k = (t - 1)^k (t + 1)^k,$$

alors 1 et -1 sont racines d'ordre  $k$  de  $p$ , donc 1 et -1 sont racines d'ordre  $k - 1$  de  $p'$ , ..., 1 et -1 sont racines d'ordre 1 de  $p^{(k-1)}$ . Ce qui démontre le résultat.

Ce lemme permet de démontrer un théorème fondamental sur lequel repose la particularité des formules de Gauss-Legendre.

## Les polynômes de Legendre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Théorème 6.2.3.** *Les polynômes de Legendre, sont orthogonaux sur  $[-1, 1]$ , ce qui veut dire que pour  $i \neq k$  on a :*

$$\langle g_i, g_k \rangle = \int_{-1}^1 g_i(t) g_k(t) dt = 0. \quad (6.2.1)$$

Démonstration

Comme  $g_0 = 1$  on a, pour  $k \geq 1$  :

$$0 = \int_{-1}^1 g_0(t) g_k(t) dt = \int_{-1}^1 g_k(t) dt = 0. \quad (6.2.2)$$

**Corollaire 6.2.4.** *Quel que soit  $n \geq 1$ , le polynôme  $g_n$  est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à  $n-1$ , soit*

$$\int_{-1}^1 g_n(t) p(t) dt = 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

*Démonstration* - Puisque  $\{g_0, \dots, g_{n-1}\}$  est une base de  $\mathcal{P}_{n-1}$ , il existe  $a_0, \dots, a_{n-1}$  tels que

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i g_i(t),$$

donc

$$\int_{-1}^1 g_n(t) p(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \int_{-1}^1 g_n(t) g_i(t) dt = 0,$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

puisque  $i < n$  et  $\langle g_i, g_n \rangle = 0$ .

**Théorème 6.2.5.** *Quel que soit  $n \geq 1$ , le polynôme  $g_n$  possède, dans l'intervalle  $] -1, 1[$ ,  $n$  racines distinctes de multiplicité 1.*

[Démonstration](#)

## Les polynômes de Legendre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.2 La méthode de Gauss-Legendre

**Exercices :**

[Exercice C.1.9](#)

**Exemples :**

[Exemple A.1.4](#)

Soit  $n$  entier supérieur ou égal à 1 fixé. On va grâce, aux polynômes de Legendre, obtenir une formule de quadrature sur  $n$  points qui est exacte pour les polynômes de degré  $\leq 2n - 1$ . Soit  $g_n$  le  $n^{\text{ème}}$  polynôme de Legendre et soient  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  ses  $n$  racines dans l'intervalle  $] -1, 1[$ . On va approcher

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt,$$

par la formule

$$J(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i).$$

**Théorème 6.2.6.** *Le système linéaire*

$$\begin{bmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) & \dots & g_0(\xi_n) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) & \dots & g_1(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1}(\xi_1) & g_{n-1}(\xi_2) & \dots & g_{n-1}(\xi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2.3)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

admet une solution unique. Si les poids  $\{w_i\}_{i=1,\dots,n}$  sont solutions de ce système linéaire alors quel que soit le polynôme  $p$  de degré inférieur ou égal à  $2n-1$ , on a

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = \sum_{i=1}^n w_i p(\xi_i). \quad (6.2.4)$$

La formule de Gauss-Legendre à  $n$  points  $J(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$  est donc d'ordre  $2n-1$ . On pourrait montrer de plus que l'erreur s'écrit

$$\exists \eta \in ]-1, 1[, \quad E(f) = I(f) - J(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\eta).$$

*Démonstration -*

Montrons que la matrice du système est inversible, plus précisément on va montrer que les lignes sont linéairement indépendantes. Soient les coefficients  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k g_k(\xi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Cela signifie que le polynôme (de degré au plus  $n-1$ )

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k g_k(t)$$

possède  $n$  racines distinctes et est donc identiquement nul. Par ailleurs, les polynômes  $\{g_0, \dots, g_{n-1}\}$  sont linéairement indépendants donc  $c_k = 0, \forall k$ . Les lignes de la matrice

## La méthode de Gauss- Legendre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



sont donc indépendantes et le système (6.2.3) admet une solution unique. On choisit  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  la solution de ce système.

On commence par démontrer que la relation (6.2.4) est vérifiée pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . On remarque que les conditions (6.2.3) signifient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n w_i g_0(\xi_i) &= \int_{-1}^1 g_0(t) dt = 2, \\ \sum_{i=1}^n w_i g_k(\xi_i) &= \int_{-1}^1 g_k(t) dt = 0, \quad 0 < k \leq n-1.\end{aligned}$$

D'autre part  $\{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}\}$  est une base de  $\mathcal{P}_{n-1}$ , donc  $\forall p \in \mathcal{P}_{n-1}, p = \sum_{k=0}^n a_k g_k$ , on a donc

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 g_k(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^n w_i g_k(\xi_i) = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{k=0}^n a_k g_k(\xi_i) = \sum_{i=1}^n w_i p(\xi_i).$$

Soit maintenant un polynôme  $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$ . La division euclidienne de  $p$  par  $g_n$  donne :

$$p(t) = g_n(t)q(t) + r(t),$$

## La méthode de Gauss- Legendre

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

on a  $\deg(p) \leq 2n - 1$ , donc  $\deg(q) \leq n - 1$  et  $\deg(r) \leq n - 1$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_{-1}^1 p(t) dt = \int_{-1}^1 g_n(t) q(t) dt + \int_{-1}^1 r(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 r(t) dt = I(r), \end{aligned}$$

car  $g_n$  est orthogonal à  $q$  (polynôme de degré  $\leq n - 1$ ). D'autre part on a

$$\begin{aligned} J(p) &= \sum_{i=1}^n w_i p(\xi_i) = \sum_{i=1}^n w_i [g_n(\xi_i) q(\xi_i) + r(\xi_i)], \\ &= \sum_{i=1}^n w_i r(\xi_i) = J(r), \end{aligned}$$

puisque  $g_n(\xi_i) = 0$  (les  $\xi_i$  sont les racines de  $g_n$ ). Or on a  $I(r) = J(r)$  car les poids  $w_i$  ont été déterminés de façon à ce que la formule soit vraie pour les polynômes de degré  $\leq n - 1$ . On a donc  $I(p) = I(r) = J(r) = J(p)$ .

On ne démontrera pas ici le résultat sur l'erreur.

Notons enfin que, tout comme les formules de Newton-Cotes, les formules de Gauss-Legendre peuvent servir à construire des formules de quadrature composées.

## La méthode de Gauss- Legendre

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# Annexe A

## Exemples

A.1	Exemples du chapitre 6 . . . . .	28
-----	----------------------------------	----

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## A.1 Exemples du chapitre 6

A.1.1	Méthode des trapèzes . . . . .	29
A.1.2	Méthode des trapèzes sur un intervalle quelconque . . . . .	31
A.1.3	Calcul de l'erreur de la méthode des trapèzes . . . . .	33
A.1.4	Exemple de formule de Gauss-Legendre . . . . .	34

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple A.1.1 Méthode des trapèzes

Soit l'intervalle de référence  $[-1, +1]$  et soit  $\varphi$  une fonction définie sur cet intervalle. On cherche à approcher  $I(\varphi) = \int_{-1}^1 \varphi(t) dt$  par une formule de quadrature à deux points, soit

$$J(\varphi) = w_0 \varphi(-1) + w_1 \varphi(1).$$

Notons  $p$  le polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) tel que  $p(-1) = \varphi(-1)$  et  $p(1) = \varphi(1)$ . Il s'écrit :

$$p(t) = \frac{1-t}{2} \varphi(-1) + \frac{t+1}{2} \varphi(1)$$

d'où, après calcul des deux intégrales,

$$J(\varphi) = \int_{-1}^1 p(t) dt = \varphi(-1) + \varphi(1).$$

Nous avons ainsi obtenu  $w_0 = w_1 = 1$ .

Nous aurions aussi pu obtenir les deux coefficients par la deuxième technique. Elle consiste à écrire que l'approximation doit être exacte pour les monômes 1 et  $t$ , soit

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = w_0 p(-1) + w_1 p(1),$$

pour  $p(t) = 1$  et  $p(t) = t$ . Ceci donne deux équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

qui redonnent bien  $w_0 = w_1 = 1$ .

[retour au cours](#)

### **Exemple A.1.1**

Méthode des  
trapèzes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exemple A.1.2** Méthode des trapèzes sur un intervalle quelconque

On a vu dans l'exemple [A.1.1](#) que la formule des trapèzes pour approcher  $I(\varphi) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi$  est  $J(\varphi) = \varphi(-1) + \varphi(1)$

Si maintenant nous nous plaçons sur un intervalle quelconque  $[a, b]$ , nous arrivons par un changement de variable à :

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi,$$

avec

$$\varphi(\xi) = f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right).$$

Nous pouvons ainsi approcher cette dernière intégrale

$$\frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi \approx \frac{b-a}{2} (\varphi(-1) + \varphi(1)) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

La raison pour laquelle cette formule est dite des trapèzes est que l'on approche l'intégrale  $I(f)$  par l'aire du trapèze représenté sur la Figure [A.1.1](#).

[retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exemple A.1.2**  
Méthode des  
trapèzes sur un  
intervalle  
quelconque

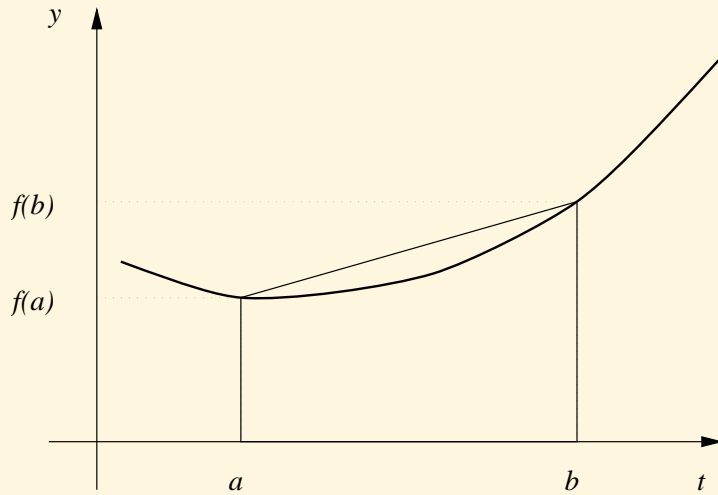


FIGURE A.1.1 – Méthode des trapèzes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



### Exemple A.1.3 Calcul de l'erreur de la méthode des trapèzes

Dans certains cas particuliers il est possible d'obtenir, à peu de frais, une estimation plus fine de l'erreur. Pour la méthode des trapèzes, on a

$$E(f) = \int_a^b (t-a)(t-b) \frac{f''(\xi(t))}{2} dt,$$

or sur  $[a, b]$  le produit  $(t-a)(t-b)$  ne change pas de signe d'où il existe  $\eta \in [a, b]$  tel que

$$E(f) = \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (t-a)(t-b) dt = -\frac{h^3}{12} f''(\eta),$$

où on a noté  $h = b - a$ .

[retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exemple A.1.4** Exemple de formule de Gauss-Legendre

Établissons la formule de Gauss-Legendre à deux points : d'une part on a

$$g_2(t) = 12t^2 - 4 = 4(3t^2 - 1),$$

et donc comme racines

$$\xi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

D'autre part le système pour déterminer les poids est le suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui donne  $w_1 = w_2 = 1$ . La formule est donc

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx J(f) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

On vérifie maintenant que cette formule est exacte pour  $p \in \mathcal{P}_3$ . On prend donc

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d,$$

et on calcule

$$I(p) = \int_{-1}^1 p(t) dt = \frac{2}{3}b + 2d,$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et on compare à ce que donne  $J(p)$ , soit

$$\begin{aligned} J(p) &= p\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{9}a + \frac{1}{3}b - \frac{\sqrt{3}}{3}c + d + \frac{\sqrt{3}}{9}a + \frac{1}{3}b + \frac{\sqrt{3}}{3}c + d, \\ &= \frac{2}{3}b + 2d. \end{aligned}$$

Les deux valeurs coïncident bien.

On aurait pu aussi, alternativement, après la détermination de  $w_1$  et  $w_2$ , vérifier que la formule ainsi construite est exacte pour  $f(t) = t^2$  et  $f(t) = t^3$ .

De toutes façons, il serait bon de s'assurer qu'un miracle ne permet pas que la formule soit encore exacte pour  $f(t) = t^4$ . Effectivement, un calcul rapide montre qu'il n'y a pas de miracle.

[retour au cours](#)

### Exemple A.1.4

Exemple de  
formule de  
Gauss-  
Legendre

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe B

## Documents

B.1	Documents du chapitre 6 . . . . .	37
-----	-----------------------------------	----

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## B.1 Documents du chapitre 6

B.1.1	Approchée en quel sens? . . . . .	38
B.1.2	Estimations <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i> de l'erreur de quadrature	41
B.1.3	Démonstration du théorème 6.2.3 . . . . .	43
B.1.4	Démonstration du théorème 6.2.5 . . . . .	44

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Document B.1.1 Approchée en quel sens ?

Le choix de la forme

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{i=0}^n w_i f(t_i). \quad (\text{B.1.1})$$

ne doit pas surprendre. En effet, rappelons comment est définie l'intégrale d'une fonction intégrable. On se donne une subdivision

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$$

de l'intervalle  $[a, b]$  et pour chaque sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , un point  $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ . On introduit alors la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i),$$

qui représente, une valeur approchée de l'aire sous-tendue par la courbe  $y = f(t)$  entre les points  $a$  et  $b$ . Posons  $h = \max_{0 \leq i < n-1} |t_{i+1} - t_i|$ . On dit que la fonction  $f$  est **Riemann-intégrable** sur l'intervalle  $[a, b]$ , si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i),$$

existe et est la même,

1. quel que soit le choix des points de subdivision  $t_i$  (pourvu que ce choix vérifie simplement la condition  $h \rightarrow 0$ ),

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

2. et, quel que soit le choix des points  $\xi_i$  dans chaque sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ .

La valeur de cette limite est l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Nous voyons ainsi, que chaque somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i),$$

donne une valeur approchée de l'intégrale. Nous voyons aussi que ces sommes sont bien de la forme (B.1.1).

L'idéal serait d'avoir une valeur exacte pour toutes les fonctions susceptibles de nous intéresser, c'est-à-dire en fait pour toutes les fonctions Riemann-intégrables. C'est impossible, mais cette idée donne le principe de construction des méthodes les plus courantes et à partir desquelles beaucoup d'autres sont construites.

On demande ainsi dans un premier temps que les formules de quadrature soient exactes pour des classes de fonctions aussi larges que possible. Comme pour chaque formule on dispose d'un nombre fini de degrés de liberté, on pense vite aux polynômes. En effet, d'une part ils permettent effectivement de construire des formules puisque l'on connaît leurs primitives. D'autre part, ils sont denses dans l'espace des fonctions continues<sup>1</sup>, ce qui permet d'espérer de bonnes propriétés des formules ainsi construites, pour cette large classe de fonctions.

Lorsque l'on a affaire à une fonction  $f$  n'appartenant pas à une classe pour laquelle on dispose de formules exactes, on voudra au moins pouvoir disposer d'une **famille** de

---

1. ce qui signifie en pratique que toute fonction continue peut être approchée aussi près que l'on veut par un polynôme

## Document

### B.1.1

Approchée en  
quel sens?

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

formules  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n w_{in} f(t_{in}) = \int_a^b f(t) dt.$$

Nous construirons plus loin des familles de formule possédant cette propriété pour toute fonction Riemann-intégrable. Nous verrons aussi qu'il existe des familles de formules, qui bien qu'exactes pour les polynômes, ne possèdent pas cette propriété.

[retour au cours](#)

## Document

### B.1.1

Approchée en  
quel sens ?

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



## Document B.1.2 Estimations *a priori* et *a posteriori* de l'erreur de quadrature

L'erreur obtenue pour la méthode du point milieu dans l'exercice C.1.3 et celle obtenue pour la méthode des trapèzes dans le paragraphe [Newton-Cotes-formules d'intégration](#) sont de même nature. Elles montrent par exemple que l'erreur sur un sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  tend vers 0 comme  $h_i^3$ , ce qui est intéressant. Cependant la présence d'un terme de la forme  $f''(\xi_{M,i})$  (ou  $f''(\xi_{T,i})$ ) interdit toute évaluation de la valeur de l'erreur. Par contre, si nous avons les deux estimations simultanément, à savoir

$$E_M^i(f) = \frac{h_i^3}{24} f''(\xi_{M,i}) \quad \text{et} \quad E_T^i(f) = -\frac{h_i^3}{12} f''(\xi_{T,i})$$

nous remarquons que pour  $h_i$  suffisamment petit, nous pouvons écrire

$$E_T^i(f) \simeq -2E_M^i(f)$$

Posons

$$\begin{aligned} I_{\text{exact}}^i(f) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt, \\ I_M^i(f) &= h_i f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right), \quad I_T^i(f) = \frac{h_i}{2} (f(t_i) + f(t_{i+1})), \end{aligned}$$

Il vient alors

$$I^i(f) - I_T^i \simeq -2 \left( I^i(f) - I_M^i(f) \right).$$

On en déduit une valeur approchée améliorée de  $I^i(f)$  :

$$I_i(f) \simeq \frac{I_T^i(f) + 2I_M^i(f)}{3} = \frac{h_i}{6} \left( f(t_i) + 4f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) + f(t_{i+1}) \right)$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

et surtout une estimation de l'erreur, soit

$$E_M^i(f) = I^i(f) - I_M^i(f) \simeq \frac{I_T^i(f) + 2I_M^i(f)}{3} - I_M^i(f) = \frac{I_T^i(f) - I_M^i(f)}{3}.$$

L'estimation ci-dessus est une estimation **a posteriori** : elle donne une “valeur” calculable de l'erreur dès qu'ont été obtenues les valeurs approchées  $I_M^i(f)$  et  $I_T^i(f)$ . Nous verrons au paragraphe suivant comment utiliser ces estimations pour obtenir des valeurs approchées à une précision donnée.

Concluons ce paragraphe en rappelant que toutes les estimations obtenues n'ont de sens que pour des fonctions à intégrer suffisamment régulières (concrètement de classe  $C^2$  pour les formules de la moyenne et des trapèzes). En outre, les estimations *a priori* n'ont de sens que pour des  $h_i$  suffisamment petits pour que l'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur quand on assimile  $\xi_{M,i}$  et  $\xi_{T,i}$ , mais pas trop petits quand même, sinon les erreurs de troncature de la machine deviennent prépondérantes et enlèvent tout sens à ces estimations obtenues sans les prendre en compte.

On donne un intervalle  $[a, b]$ , une fonction  $f$  dont on veut l'intégrale sur  $[a, b]$  avec une erreur inférieure à  $\varepsilon$ . Pour ce faire on évalue une valeur approchée par la méthode du point milieu, puis par la méthode des trapèzes. On obtient ainsi une valeur de l'erreur. Si elle est inférieure à  $\varepsilon$  c'est terminé et on prend comme valeur approchée la valeur extrapolée. Sinon, on subdivise  $[a, b]$  en deux et l'on calcule sur chacun des deux demi-intervalles avec une tolérance de  $\varepsilon/2$  pour chacun d'eux, et ainsi de suite.

[retour au cours](#)

## Document

### B.1.2

Estimations *a priori* et *a posteriori* de l'erreur de quadrature

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Document B.1.3** Démonstration du théorème 6.2.3

Il faut donc montrer que pour  $0 \leq i < k$  on a

$$\int_{-1}^1 g_i(t) g_k(t) dt = 0,$$

pour cela on intègre par parties

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g_i(t) g_k(t) dt &= \int_{-1}^1 \frac{d^i}{dt^i} (t^2 - 1)^i \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k dt \\ &= \left[ \frac{d^i}{dt^i} (t^2 - 1)^i \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (t^2 - 1)^k \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} (t^2 - 1)^i \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (t^2 - 1)^k dt \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} (t^2 - 1)^i \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (t^2 - 1)^k dt, \end{aligned}$$

car le premier terme est nul en vertu du lemme 6.2.2. On peut donc intégrer  $i + 1$  fois par parties ce qui conduit à

$$\int_{-1}^1 g_i(t) g_k(t) dt = (-1)^{i+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{2i+1}}{dt^{2i+1}} (t^2 - 1)^i \frac{d^{k-i-1}}{dt^{k-i-1}} (t^2 - 1)^k dt,$$

Or  $\frac{d^{2i+1}}{dt^{2i+1}} (t^2 - 1)^i$  est identiquement nulle puisque  $(t^2 - 1)^i$  est de degré  $2i$  d'où le résultat.

[Retour au théorème 6.2.3 ▲](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Document B.1.4 Démonstration du théorème 6.2.5

Tout d'abord il est clair que  $g_n$  change au moins une fois de signe dans l'intervalle  $] -1, 1[$  car sinon on aurait

$$\int_{-1}^1 g_n(t) dt \neq 0,$$

ce qui est impossible, d'après (6.2.2). Donc  $g_n$  change  $q$  fois de signe dans  $] -1, 1[$  et y possède donc  $q$  racines (correspondant à des changements de signe, donc de multiplicités impaires) :  $\xi_1, \dots, \xi_q$  (avec  $1 \leq q \leq n$ ). Considérons alors le polynôme

$$\pi(t) = \prod_{j=1}^q (t - \xi_j).$$

Ce polynôme change lui aussi  $q$  fois de signe aux mêmes points que  $g_n$  et donc le produit  $\pi(t)g_n(t)$  garde forcément un signe constant sur  $] -1, 1[$  ce qui entraîne

$$\int_{-1}^1 g_n(t)\pi(t) dt \neq 0,$$

mais ceci n'est possible que si le degré de  $\pi$ , soit  $q$ , est égal à  $n$  (voir le corollaire (6.2.4)), donc  $q = n$ .

[Retour au théorème 6.2.5 ▲](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe C

## Exercices

C.1	Exercices du chapitre 6 . . . . .	46
C.2	Exercices de TD du chapitre 6 . . . . .	56

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## C.1 Exercices du chapitre 6

C.1.1	.....	47
C.1.2	.....	48
C.1.3	.....	49
C.1.4	.....	50
C.1.5	.....	51
C.1.6	.....	52
C.1.7	.....	53
C.1.8	.....	54
C.1.9	.....	55

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.1.1**

On note  $I(f) = \int_a^b f(t) dt$ ,  $J(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i)$ .

1. On choisit  $w_i = \int_a^b \mathcal{L}_i(t) dt$ , avec  $\mathcal{L}_i$  polynôme de la base de Lagrange associée aux points  $t_0, t_1, \dots, t_n$ .

Montrer que alors  $I(p) = J(p)$ ,  $\forall p \in \mathcal{P}_n$ .

2. Réciproquement, on suppose que  $I(p) = J(p)$ ,  $\forall p \in \mathcal{P}_n$ , montrer que

$$w_i = \int_a^b \mathcal{L}_i(t) dt.$$

3. Si on note  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  la base canonique de  $\mathcal{P}_n$ , montrer que

$$I(p) = J(p), \forall p \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow I(p_i) = J(p_i), i = 0, \dots, n.$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.2

On note  $I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt$ ,  $J(f) = w_0 f(-1) + w_1 f(0) + w_2 f(1)$ .

1. Calculer  $(w_i)_{i=0,1,2}$  pour que  $I(p) = J(p)$  pour tous les polynômes de  $\mathcal{P}_n$ ,  $n$  le plus grand possible. Quel est ce degré?
2. En déduire une formule de quadrature pour  $\int_0^2 f(t) dt$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



### Exercice C.1.3

La méthode du point milieu consiste à approcher

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt \text{ par } J(f) = (b-a)f(t_M), \text{ où } t_M = \frac{a+b}{2}.$$

1. Vérifier que cette formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
2. Quel est l'ordre de cette méthode ?
3. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, montrer que l'erreur est donnée par :

$$\exists \eta \in ]a, b[, \quad E(f) = I(f) - J(f) = f''(\eta) \int_a^b \frac{(t-t_M)^2}{2} dt = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta).$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.4

On approche  $I(\varphi) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi$  par la formule des rectangles  $J(\varphi) = w\varphi(t_0)$ . Étant donné  $t_0$ , calculer  $w$  pour que le degré d'exactitude soit le plus élevé possible. Donner le degré d'exactitude en fonction de  $t_0$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.5

Rappeler la formule des trapèzes et donner le degré d'exactitude de cette formule.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.6

Calculer les coefficients  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  de la formule de Simpson 3/8 qui approche :

$$I(\varphi) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi \text{ par } J(\varphi) = w_0\varphi(-1) + w_1\varphi(-\tfrac{1}{3}) + w_2\varphi(\tfrac{1}{3}) + w_3\varphi(1).$$

Donner le degré d'exactitude de cette formule.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.7

On cherche à approcher  $\int_a^b f(t) dt$  à l'aide d'une méthode composée à partir de la méthode de Simpson, on pose  $h = \frac{b-a}{2M}$ ,  $t_i = a + ih$ . Montrer que

$$J(f) = \frac{h}{3} \left( f(t_0) + 4 \sum_{i=0}^{M-1} f(t_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f(t_{2i}) + f(t_{2M}) \right),$$

$$E(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b].$$

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.8

Montrer que les polynômes de Legendre  $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$  forment une base de  $\mathcal{P}_n$ .

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.1.9

Construire les formules de Gauss-Legendre à 1, 2 et 3 points. Vérifier le degré d'exactitude de ces formules.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## C.2 Exercices de TD du chapitre 6

C.2.1	TD6-Exercice1 : quadrature avec 3 points . . . . .	57
C.2.2	TD6-Exercice2 : quadrature optimale avec 1 point . . . . .	59
C.2.3	TD6-Exercice3 : méthode de Gauss-Tchebychev . . . . .	61
C.2.4	TD6-Exercice4 : quadrature avec polynômes de Hermite . . .	64

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



**Exercice C.2.1** TD6-Exercice1 : quadrature avec 3 points

On cherche à déterminer une valeur approchée  $J$  de :  $I = \int_{-1}^1 f(t) dt$  sous la forme

$$J = \alpha_0 f\left(\frac{-1}{2}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{2}\right).$$

1. Calculer le polynôme  $P$  qui interpole  $f$  aux points  $\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ . En déduire  $J$ .
2. Retrouver les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  en écrivant que l'approximation doit être exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
3. Donner une approximation de  $\int_a^b f(t) dt$  faisant intervenir :

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right), f\left(\frac{a+b}{2}\right), f\left(\frac{a+3b}{4}\right).$$

4. Application : donner une valeur approchée de  $\int_0^1 \frac{\sin \pi t}{(t(1-t))^{3/2}} dt$
5. Étant donné une fonction de 2 variables, utiliser ce qui précède pour donner une valeur approchée de :  $\int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy$  à l'aide de la valeur de  $g$  en certains points que l'on précisera.
6. Par cette méthode quelle approximation de :  $\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy$  obtient-on ?

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

Question 1   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)  
Question 2   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)  
Question 3   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)   [Aide 3](#)   [Aide 4](#)  
Question 5   [Aide 1](#)   [Aide 2](#)   [Aide 3](#)  
Question 6   [Aide 1](#)

## Exercice C.2.1

TD6-Exercice2 :  
quadrature  
avec 3 points

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.2.2** TD6-Exercice2 : quadrature optimale avec 1 point

On désire approcher l'intégrale suivante

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt,$$

à l'aide de la formule ci-dessous :

$$J(f) = w_1 f(\xi_1).$$

1. Calculer le poids  $w_1$  ainsi que la valeur de  $\xi_1$  pour que la formule soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Représenter les domaines du plan dont  $I(f)$  et  $J(f)$  calculent l'aire.
2. Quel est l'entier maximal  $m$  pour lequel on a  $J(p) = I(p)$  pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à  $m$ ?
3. Utiliser l'approximation  $J$  pour approcher l'intégrale double d'une fonction de deux variables  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy$ . Quelles sont les fonctions  $f$  pour lesquelles cette formule est exacte ?  
Réponse :  $f(x, y) = a + xb(y) + yc(x)$ .
4. Généraliser la formule pour approcher une intégrale du type :  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$ .  
Si on note  $J(f)$  l'approximation obtenue Représenter sur une figure les domaines de  $\mathbb{R}^3$  dont  $I(f)$  et  $J(f)$  calculent le volume.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Question 1 [Aide 1](#)  
Question 2 [Aide 1](#)  
Question 3 [Aide 1](#)  
Question 4 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

**Exercice C.2.2**  
TD6-Exercice3 :  
quadrature  
optimale avec 1  
point

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice C.2.3 TD6-Exercice3 : méthode de Gauss-Tchebychev

1. On définit  $T_k(x) = \cos(k \operatorname{Arccos} x)$  On admettra que :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \end{cases}$$

- (a) Montrer que pour  $k \geq 1$ ,  $T_k$  est un polynôme de degré  $k$  dont le coefficient de  $x^k$  est  $2^{k-1}$ .
- (b) En déduire que  $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$  forme une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n-1$ .
- (c) On définit  $r_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Montrer que  $(T_n(r_i) = 0, 0 \leq i \leq n-1)$ .

En déduire que  $T_n$  admet  $n$  racines distinctes dans l'intervalle  $] -1, 1[$

2. On pose  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

On admettra que :

$$\text{si } i \neq j, \int_{-1}^1 w(x) T_i(x) T_j(x) dx = 0. \quad (\text{C.2.1})$$

On cherche à approcher  $I(f) = \int_{-1}^1 w(x) f(x) dx$

par :  $J(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f(x_i)$ , où les  $\alpha_i$  et les  $x_i$  sont des coefficients réels.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

Soit  $P$  un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$ , on note  $P = QT_n + R$  où  $Q$  et  $R$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $T_n$ .

- (a) Montrer que  $I(P) = I(R)$ .
- (b) On choisit  $x_i = r_i$  (racines de  $T_n$ ), montrer qu'alors  $J(P) = J(R)$ .
- (c) On choisit les  $\alpha_i$  pour que l'approximation soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ . Quelles équations doivent vérifier les coefficients  $\alpha_i$ . Ces équations ont-elles une solution? On ne demande pas de résoudre le système d'équations.
- (d) Avec le choix précédent des coefficients  $\alpha_i$  et  $x_i$ , montrer que  $I(P) = J(P)$ .

3. Application : on choisit  $n = 2$

- (a) Calculer  $x_0$  et  $x_1$ .
- (b) Calculer  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ .
- (c) Utiliser ces résultats pour obtenir une valeur approchée de  $A(g) = \int_{-1}^1 g(x) dx$ .
- (d) On définit  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .
  - i. Par la méthode précédente calculer une valeur approchée de  $A(g)$ .
  - ii. Calculer la valeur exacte de  $A(g)$ .
  - iii. Le résultat était-il prévisible? Pourquoi?

### Exercice C.2.3

TD6-Exercice3 :  
méthode de  
Gauss-  
Tchebychev

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Question 1b [Aide 1](#)  
Question 1c [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 2a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 2b [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 2c [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 2d [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 3a [Aide 1](#)  
Question 3b [Aide 1](#)  
Question 3c [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 3(d) [Aide 1](#)  
Question 3(d) [Aide 1](#)  
Question 3(d) [Aide 1](#)

### Exercice C.2.3

TD6-Exercice4 :  
méthode de  
Gauss-  
Tchebychev

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice C.2.4** TD6-Exercice4 : quadrature avec polynômes de Hermite

1. On désire approcher l'intégrale d'une fonction  $f$  continûment dérivable sur l'intervalle  $[0, 1]$  par une formule utilisant les valeurs de  $f(t)$  et de sa dérivée  $f'(t)$  en  $t = 0$  et  $t = 1$ . Autrement dit on désire approcher

$$I(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

par

$$J(f) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \beta_0 f'(0) + \beta_1 f'(1).$$

- (a) Montrer en le calculant qu'il existe un polynôme de degré inférieur ou égal à trois tel que :

$$\begin{cases} p(0) &= f(0) \\ p(1) &= f(1) \\ p'(0) &= f'(0) \\ p'(1) &= f'(1) \end{cases}$$

On pourra en particulier calculer les composantes de  $p$  dans la base canonique  $\{a_i\}_{i=0..3}$  en fonction de  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f'(0)$  et  $f'(1)$ .

Réponse :  $a_0 = f(0)$ ,  $a_1 = f'(0)$ ,  $a_2 = -3f(0) + 3f(1) - 2f'(0) - f'(1)$ ,  $a_3 = 2f(0) - 2f(1) + f'(1) + f'(0)$ .

- (b) Revoir le TD sur l'interpolation et plus particulièrement les polynômes de Hermite pour retrouver l'expression de  $p$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



(c) On pose

$$J(f) = \int_0^1 p(t) dt = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \beta_0 f'(0) + \beta_1 f'(1),$$

où  $p(t)$  a été défini dans la question précédente. Déterminer les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$  et  $\beta_1$ .

Réponse :  $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_0 = -\beta_1 = \frac{1}{12}$ .

(d) Retrouver les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  en écrivant que l'approximation doit être exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à trois.

2. Utiliser les résultat précédents pour approcher

$$\int_a^b g(t) dt,$$

où  $g$  est une fonction quelconque.

$$\text{Réponse : } J(g) = \frac{b-a}{2} \left( g(a) + g(b) + \frac{b-a}{6} g'(a) - \frac{b-a}{6} g'(b) \right).$$

3. On veut évaluer l'erreur commise lorsque l'on approche  $I(f) = \int_0^1 f(t) dt$  par

$$J(f) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \beta_0 f'(0) + \beta_1 f'(1).$$

(a) Rappeler l'expression de  $e(t) = f(t) - p(t)$  que l'on a déterminée dans l'exercice sur les polynômes de Hermite dans le TD sur l'interpolation.

(b) En déduire qu'il existe  $c$  compris entre 0 et 1 tel que  $E(f) = I(f) - J(f) = \frac{1}{720} f^{(4)}(c)$ .

4. (a) Rappeler la formule classique de Newton-Cotes qui approche  $I(f)$  par

$$\hat{J}(f) = \beta_0 f(0) + \beta_1 f\left(\frac{1}{3}\right) + \beta_2 f\left(\frac{2}{3}\right) + \beta_3 f(1), \text{ donner l'expression de } \hat{E}(f) = I(f) - \hat{J}(f).$$

**Exercice C.2.4**  
TD6-Exercice4 :  
quadrature  
avec polynômes  
de Hermite

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

(b) quelle est la meilleure des approximations  $J(f)$  ou  $\hat{J}(f)$ ?

5. Application numérique, on prend la fonction

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right),$$

(a) Utiliser ce qui précède pour calculer un majorant de  $E(f)$  et un majorant de  $\hat{E}(f)$ .

(b) Calculer  $I(f)$ ,  $J(f)$ ,  $\hat{J}(f)$ ,  $E(f)$ ,  $\hat{E}(f)$ .  
Comparer.

Question 1a [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 1b [Aide 1](#)

Question 1c [Aide 1](#)

Question 1d [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

Question 3a [Aide 1](#)

Question 3b [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 4a [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 4b [Aide 1](#)

Question 5a [Aide 1](#)

Question 5b [Aide 1](#)

**Exercice C.2.4**  
TD6-Exercice4 :  
quadrature  
avec polynômes  
de Hermite

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## **E**

Erreur de quadrature.....**11**

## **G**

Gauss-Legendre - intégration .....**23**

## **I**

Intégration numérique

Formules composées.....**16**

Introduction .....**3**

Intervalle de référence .....**9**

## **L**

Legendre - polynômes .....**19**

## **N**

Newton-Cotes-formules d'intégration .. **13**

## **Q**

Quadrature - formules .....**6**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Solution de l'exercice C.1.1

1. Si  $p \in \mathcal{P}_n$ , alors  $\forall t \ p(t) = \sum_{i=0}^n p(t_i) \mathcal{L}_i(t)$ , donc

$$I(p) = \int_a^b p(t) dt = \sum_{i=0}^n p(t_i) \int_a^b \mathcal{L}_i(t) dt = \sum_{i=0}^n w_i p(t_i) = J(p).$$

2.

$$I(p) = J(p), \forall p \in \mathcal{P}_n \Rightarrow I(\mathcal{L}_j) = J(\mathcal{L}_j), j = 0, \dots, n,$$

or

$$I(\mathcal{L}_j) = \int_a^b \mathcal{L}_j(t) dt, J(\mathcal{L}_j) = \sum_{i=0}^n w_i \mathcal{L}_j(t_i) = w_j,$$

d'où le résultat.

3.  $I(p) = J(p), \forall p \in \mathcal{P}_n \Rightarrow I(p_i) = J(p_i), i = 0, \dots, n$

Réciproquement si  $p \in \mathcal{P}_n$ ,  $p = \sum_{i=0}^n a_i p_i$ , donc

$$I(p) = \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b p_i(t) dt = \sum_{i=0}^n a_i I(p_i) = \sum_{i=0}^n a_i J(p_i).$$

D'autre part :

$$J(p) = \sum_{j=0}^n w_j p(t_j) = \sum_{j=0}^n w_j \sum_{i=0}^n a_i p_i(t_j) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n w_j p_i(t_j) = \sum_{i=0}^n a_i J(p_i).$$

Ce qui termine de démontrer l'égalité.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.2

1. Si on note  $p_i$  les polynômes de la base canonique  $p_i(t) = t^i$ , on écrit

$$\begin{cases} I(p_0) = J(p_0) & \Leftrightarrow \int_{-1}^1 dt = w_0 + w_1 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 + w_1 + w_2 = 2 \\ I(p_1) = J(p_1) & \Leftrightarrow \int_{-1}^1 t dt = -w_0 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 - w_2 = 0 \\ I(p_2) = J(p_2) & \Leftrightarrow \int_{-1}^1 t^2 dt = w_0 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 + w_2 = \frac{2}{3} \end{cases} .$$

Pour que ces 3 relations soient vérifiées, il faut que  $w_0 = w_2 = \frac{1}{3}, w_1 = \frac{4}{3}$

Vérifions avec ces coefficients si  $I(p_3) = J(p_3)$ , après calcul, on obtient  $I(p_3) = J(p_3) = 0$ , on continue !

On calcule  $I(p_4) = \frac{2}{5}, J(p_4) = \frac{2}{3}$ .

La formule construite (qui s'appelle la formule de Simpson) est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On aurait pu calculer les coefficients  $w_i$  en écrivant  $w_i = \int_{-1}^1 \mathcal{L}_i(t) dt$  où  $\mathcal{L}_i$  est le polynôme de la base de Lagrange.

2.

$$\int_0^2 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(u+1) du, \text{ où } u = t-1$$

Si on pose  $g(u) = f(u+1)$ ,  $\int_{-1}^1 g(u) du$  est approchée par

$$\frac{1}{3}g(-1) + \frac{4}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1) = \frac{1}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(2)$$

d'où la formule.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice C.1.3

1. On vérifie que  $I(p_0) = J(p_0) = b - a$ ,  $I(p_1) = J(p_1) = \frac{b^2 - a^2}{2}$

2. L'ordre est donc au moins égal à 1, on calcule

$$I(p_2) = \frac{b^3 - a^3}{3}, J(p_2) = (b - a) \left( \frac{a + b}{2} \right)^2$$

$I(p_2) \neq J(p_2)$ , donc la formule est d'ordre 1.

3. La formule de Taylor est :

$$f(t) = f(t_M) + (t - t_M)f'(t_M) + \frac{(t - t_M)^2}{2}f''(c_t)$$

$$J(f) = (b - a)f(t_M) = \int_a^b f(t_M) dt$$

donc

$$E(f) = I(f) - J(f) = \int_a^b (f(t) - f(t_M)) dt = \int_a^b (t - t_M)f'(t_M) + \frac{(t - t_M)^2}{2}f''(c_t) dt$$

or  $\int_a^b (t - t_M) dt = 0$ , donc

$$E(f) = \int_a^b \frac{(t - t_M)^2}{2} f''(c_t) dt = f''(\eta) \int_a^b \frac{(t - t_M)^2}{2} dt = f''(\eta) \frac{(b - a)^3}{24}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.4

$I(p_0) = 2$ ,  $J(p_0) = w$ , donc il faut que  $w = 2$ .

$I(p_1) = 0$ ,  $J(p_1) = 2t_0$ , donc

— si  $t_0 \neq 0$ ,  $I(p_1) \neq J(p_1)$ , l'ordre est 0.

— si  $t_0 = 0$ ,  $I(p_1) = J(p_1)$ , on a de plus  $I(p_2) = \frac{2}{3}$ ,  $J(p_2) = 0$ , donc l'ordre est 1.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.5

On approche  $I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt$  par  $J(f) = f(-1) + f(1)$ .

On calcule :

$$I(p_0) = 2, J(p_0) = 2,$$

$$I(p_1) = 0, J(p_1) = 0,$$

$$I(p_2) = \frac{2}{3}, J(p_2) = 2,$$

Donc l'ordre est 1.

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Solution de l'exercice C.1.6

On calcule

$$I(p_0) = 2, J(p_0) = w_0 + w_1 + w_2 + w_3,$$

$$I(p_1) = 0, J(p_1) = -w_0 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + w_3,$$

$$I(p_2) = \frac{2}{3}, J(p_2) = w_0 + \frac{1}{9}w_1 + \frac{1}{9}w_2 + w_3,$$

$$I(p_3) = 0, J(p_3) = -w_0 - \frac{1}{27}w_1 + \frac{1}{27}w_2 + w_3,$$

On obtient un système de 4 équations à 4 inconnues.

En remplaçant la 4ème équation par la 4ème moins la 2ème, on montre que  $w_1 = w_2$ .

En remplaçant la 3ème équation par la 3ème moins la 1ère, on montre que  $w_1 = w_2 = \frac{3}{4}$ .

On résout alors les deux premières équations, on obtient :

$$w_0 = w_3 = \frac{1}{4}, w_1 = w_2 = \frac{3}{4}.$$

On calcule  $I(p_4)$  et  $J(p_4)$ , ces deux valeurs sont distinctes, donc l'ordre vaut 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice C.1.7

En appliquant la méthode de Simpson sur chacun des intervalles  $[t_{2i}, t_{2i+2}]$ , on obtient

$$J(f) = \frac{h}{3} (f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2) + 4f(t_2) + f(t_3) + f(t_4) + \dots + f(t_{2M-2}) + 4f(t_{2M-1}) + f(t_{2M})),$$

ce qui donne le résultat en regroupant. De même en sommant les erreurs, on obtient :

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} (f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + \dots + f^{(4)}(\eta_M)).$$

On applique le théorème de la valeur intermédiaire pour affirmer qu'il existe  $\eta$  tel que

$$f^{(4)}(\eta) = \frac{(f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + \dots + f^{(4)}(\eta_M))}{M}.$$

On a donc

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} M f^{(4)}(\eta) = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\eta).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.8

Les polynômes  $g_i$  sont de degré  $i$ , ils forment donc une famille libre, en effet notons  $p(t) = \sum_{i=0}^n \lambda_i g_i(t)$ , si  $p$  est le polynôme nul, alors le coefficient de  $t^n$  est nul, or ce coefficient vaut  $\lambda_n \frac{(2n)!}{n!}$ , en effet les polynômes  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  sont de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . On en déduit donc que  $\lambda_n = 0$ .

On fait un raisonnement similaire pour le coefficient de  $t^{n-1}$ , on montre que  $\lambda_{n-1} = 0$ , on recommence et on montre que  $\lambda_{n-2} = \lambda_{n-3} = \dots = \lambda_0 = 0$ .

On vient donc de montrer que :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i g_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0.$$

Donc la famille est  $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$  est libre.

La dimension de  $\mathcal{P}_n$  est égal à  $n+1$ , donc  $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$  est une base de  $\mathcal{P}_n$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice C.1.9

### 1. Formule à un point :

$g_1(t) = 2t$ , donc  $\xi_1 = 0$ .

On doit résoudre  $g_0(\xi_1)w_1 = 2$  donc  $w_1 = 2$ .

On retrouve la formule des rectangles avec  $t_0 = 0$  vue dans l'exercice [C.1.4](#) :

$$J(f) = 2f(0).$$

On a déjà montré que l'ordre est égal à 1.

### 2. Formule à deux points :

$g_2(t) = 12t^2 - 4 = 4(3t^2 - 1)$ , donc  $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

On doit résoudre :

$$\begin{pmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

donc  $w_1 = w_2 = 1$ , d'où :

$$J(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Comme prévu on a  $I(p_0) = J(p_0)$ ,  $I(p_1) = J(p_1)$ ,  $I(p_2) = J(p_2)$ ,  $I(p_3) = J(p_3)$ , après calculs, on obtient que  $I(p_4) \neq J(p_4)$ , l'ordre est donc égal à 3

### 3. Formule à trois points :

$g_3(t) = t(120t^2 - 72)$ , donc  $\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ ,  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ .

On doit résoudre :

$$\begin{pmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) & g_0(\xi_3) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) & g_1(\xi_3) \\ g_2(\xi_1) & g_2(\xi_2) & g_2(\xi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & 2\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{16}{5} & -4 & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

donc  $w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9}$ , d'où :

$$J(f) = \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

Comme prévu on a  $I(p_0) = J(p_0), I(p_1) = J(p_1), I(p_2) = J(p_2), I(p_3) = J(p_3), I(p_4) = J(p_4), I(p_5) = J(p_5)$ , après calculs, on obtient que  $I(p_6) \neq J(p_6)$ , l'ordre est donc égal à 5.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice C.2.1

On utilise les polynômes de Lagrange et on obtient :

$$P(t) = 2t \left(t - \frac{1}{2}\right) f\left(-\frac{1}{2}\right) + (-4) \left(t + \frac{1}{2}\right) \left(t - \frac{1}{2}\right) f(0) + 2 \left(t + \frac{1}{2}\right) t f\left(\frac{1}{2}\right)$$

En déduire  $J$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1, Exercice C.2.1

$$J = \int_{-1}^1 P(t) dt = \underbrace{\frac{4}{3}}_{=\alpha_0} f\left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{-\frac{2}{3}}_{=\alpha_1} f(0) + \underbrace{\frac{4}{3}}_{=\alpha_2} f\left(\frac{1}{2}\right)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.1

On écrit que l'approximation est exacte c'est à dire que  $J = I$  pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, c'est à dire que  $J = I$  pour les polynômes de la base  $(1, t, t^2)$ .

Écrire les équations obtenues.

[Retour à l'exercice ▲](#)



Aide 2, Question 2, Exercice C.2.1

$$J = I \iff \alpha_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^1 f(t) dt \text{ pour } : \begin{cases} f(t) = 1 \\ f(t) = t \\ f(t) = t^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha_0 & + \alpha_1 & + \alpha_2 & = 2 \\ -\frac{1}{2}\alpha_0 & & + \frac{1}{2}\alpha_2 & = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_0 & & + \frac{1}{4}\alpha_2 & = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \alpha_0 = \alpha_2 = \frac{4}{3} \text{ et } \alpha_1 = -\frac{2}{3}.$$

On retrouve bien sûr les mêmes coefficients.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice C.2.1

On utilise un changement de variable affine pour se ramener à une intégrale de  $-1$  à  $1$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice C.2.1

On utilise un changement de variable affine :

$$\begin{cases} u = -1, & t = a \\ u = 1, & t = b \end{cases} \Rightarrow t = b \frac{u+1}{2} - a \frac{u-1}{2} = u \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} = \phi(u) \Rightarrow dt = \frac{b-a}{2} du$$

Que devient  $\int_a^b f(t) dt$  par ce changement de variable ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 3, Exercice C.2.1

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(\phi(u)) du$$

Donner une approximation de l'intégrale de droite.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 3, Exercice C.2.1

$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(\phi(u)) du$  est approchée par

$$\frac{b-a}{2} \left[ \frac{4}{3} f\left(\phi\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{2}{3} f(\phi(0)) + \frac{4}{3} f\left(\phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) \right] = \frac{b-a}{3} \left[ 2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right]$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 5, Exercice C.2.1

$$\int_a^b \int_c^d g(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b I(y) \, dy, \text{ avec } I(y) = \int_c^d g(\overset{\perp}{x}, y) \, dx$$

Donner une approximation de  $I(y)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 5, Exercice C.2.1

$I(y)$  est approchée par

$$\frac{d-c}{3} \left[ 2g\left(\frac{3c+d}{4}, y\right) - g\left(\frac{c+d}{2}, y\right) + 2g\left(\frac{c+3d}{4}, y\right) \right]$$

En déduire une approximation de  $\int_a^b I(y) dy$

[Retour à l'exercice ▲](#)

# Aide 3, Question 5, Exercice C.2.1

$\int_a^b I(y) dy$  est approchée par :

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{3} \frac{d-c}{3} \left[ 2 \left( 2g\left(\frac{3c+d}{4}, \frac{3a+b}{4}\right) - g\left(\frac{3c+d}{4}, \frac{a+b}{2}\right) + 2g\left(\frac{3c+d}{4}, \frac{a+3b}{4}\right) \right) \right. \\ & \quad - \left( 2g\left(\frac{c+d}{2}, \frac{3a+b}{4}\right) - g\left(\frac{c+d}{2}, \frac{a+b}{2}\right) + 2g\left(\frac{c+d}{2}, \frac{a+3b}{4}\right) \right) \\ & \quad \left. + 2 \left( 2g\left(\frac{c+3d}{4}, \frac{3a+b}{4}\right) - g\left(\frac{c+3d}{4}, \frac{a+b}{2}\right) + 2g\left(\frac{c+3d}{4}, \frac{a+3b}{4}\right) \right) \right] \\ &= \frac{b-a}{3} \frac{d-c}{3} \left[ 4g(M_1) - 2g(M_2) + 4g(M_3) - 2g(M_4) + g(M_5) \right. \\ & \quad \left. - 2g(M_6) + 4g(M_7) - 2g(M_8) + 4g(M_9) \right], \end{aligned}$$

Où l'on a défini les 9 points :

$$\begin{aligned} M_1 &= \left( \frac{3c+d}{4}, \frac{3a+b}{4} \right), M_2 = \left( \frac{3c+d}{4}, \frac{a+b}{2} \right), M_3 = \left( \frac{3c+d}{4}, \frac{a+3b}{4} \right), \\ M_4 &= \left( \frac{c+d}{2}, \frac{3a+b}{4} \right), M_5 = \left( \frac{c+d}{2}, \frac{a+b}{2} \right), M_6 = \left( \frac{c+d}{2}, \frac{a+3b}{4} \right), \\ M_7 &= \left( \frac{c+3d}{4}, \frac{3a+b}{4} \right), M_8 = \left( \frac{c+3d}{4}, \frac{a+b}{2} \right), M_9 = \left( \frac{c+3d}{4}, \frac{a+3b}{4} \right) \end{aligned}$$

Vous pouvez représenter ces 9 points sur le rectangle  $[c, d] \times [a, b]$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Aide 1, Question 6, Exercice C.2.1

On doit retrouver la **valeur exacte** car l'approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en  $x$  et en  $y$ .

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy = \int_0^1 y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{4}$$

On peut calculer  $J$  avec l'approximation précédente, on doit trouver  $J = \frac{1}{4}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice C.2.2

On écrit

$$I(p_0) = J(p_0) \Leftrightarrow 2 = w_1$$

$$I(p_1) = J(p_1) \Leftrightarrow 0 = w_1 \xi_1$$

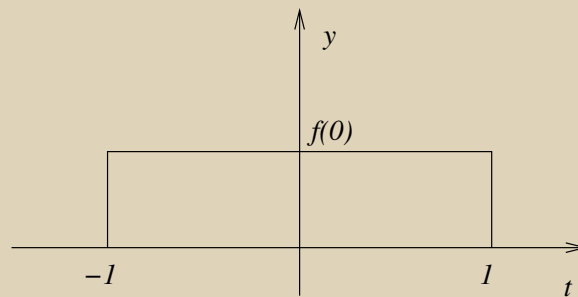
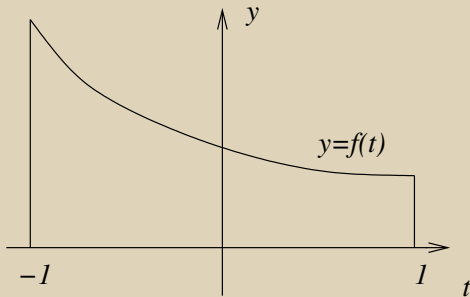
On a donc

$$w_1 = 2, \xi_1 = 0, J(f) = 2f(0)$$

on retrouve la méthode du point milieu déjà étudiée dans l'exercice [C.1.3](#).

$I(f)$  est l'aire de la surface limitée par les droites d'équation  $t = -1, t = 1, y = 0$  et la courbe d'équation  $y = f(t)$ .

$J(f)$  est l'aire du rectangle limité par les droites  $t = -1, t = 1, y = 0, t = f(0)$ .



[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.2

On a  $m \geq 1$ .

D'autre part on calcule  $I(p_2) = \frac{2}{3}, J(p_2) = 0$ , donc ce n'est pas exact pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Donc  $m = 1$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

# Aide 1, Question 3, Exercice C.2.2

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy \approx \int_{-1}^1 (2f(0, y)) dy \approx 4f(0, 0).$$

$\int_{-1}^1 f(x, y) dx = 2f(0, y)$  si  $f(x, y)$  est un polynôme degré inférieur ou égal à 1 en  $x$ , ici  $y$  joue le rôle d'un paramètre, cette première intégrale sera donc exacte si  $f(x, y) = \alpha_1(y) + x\alpha_2(y)$  où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des fonctions quelconques, on a donc pour ces fonctions  $f$

$$\int_{-1}^1 f(x, y) dx = 2f(0, y) = 2\alpha_1(y)$$

et donc

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \alpha_1(y) dy$$

Si maintenant  $\alpha_1(y) = \beta_1 + \beta_2 y$ , on a

$$\int_{-1}^1 \alpha_1(y) dy = 2\alpha_1(0)$$

donc si  $f(x, y) = \beta_1 + \beta_2 y + x\alpha_2(y)$ , on a

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \alpha_1(y) dy = 4\alpha_1(0) = 4f(0, 0)$$

On vient de montrer que l'approximation est exacte pour les fonctions qui s'écrivent  $f(x, y) = \beta_1 + \beta_2 y + x\alpha_2(y)$ .

$x$  et  $y$  jouent des rôles similaires, on aurait pu échanger l'ordre des intégrations en  $x$  et en  $y$ , l'approximation est donc exacte pour les fonctions qui s'écrivent  $f(x, y) = \beta_3 + \beta_4 x + y\alpha_3(x)$ , donc pour les sommes de telles fonctions.

La formule est donc exacte pour toutes les fonctions qui s'écrivent

$$f(x, y) = \beta + x\alpha(y) + y\gamma(x).$$

On a noté  $\beta = \beta_1 + \beta_3$ ,  $\alpha(y) = \beta_4 + \alpha_2(y)$ ,  $\gamma(x) = \beta_2 + \alpha_3(x)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 4, Exercice C.2.2

Faites un changement de variables afin de ramener  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$  à une intégrale  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(u, v) du dv$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 4, Exercice C.2.2

On pose

$$x = \frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, y = \frac{d-c}{2}v + \frac{d+c}{2}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dx \right) dy &= \frac{b-a}{2} \int_a^b \left( \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, y\right) du \right) dy \\ &= \frac{b-a}{2} \times \frac{d-c}{2} \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, \frac{d-c}{2}v + \frac{d+c}{2}\right) du \right) dv \end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 4, Exercice C.2.2

On pose

$$g(u, v) = f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, \frac{d-c}{2}v + \frac{d+c}{2}\right)$$

on a donc

$$g(0, 0) = f\left(\frac{b+a}{2}, \frac{d+c}{2}\right)$$

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, \frac{d-c}{2}v + \frac{d+c}{2}\right) du \right) dv \approx 4f\left(\frac{b+a}{2}, \frac{d+c}{2}\right)$$

d'où

$$I(f) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dx \right) dy$$

est approché par

$$J(f) = (b-a)(d-c)f\left(\frac{b+a}{2}, \frac{d+c}{2}\right).$$

$I(f)$  est le volume du domaine limité par les plans  $x = c, x = d, y = a, y = b, z = 0$  et la surface d'équation  $z = f(x, y)$ .

$J(f)$  est le volume du parallépipède limité par les plans  $x = c, x = d, y = a, y = b, z = 0, z = f\left(\frac{b+a}{2}, \frac{d+c}{2}\right)$ , voir Figure C.2.1, on a noté

$$x_m = \frac{c+d}{2}, y_m = \frac{a+b}{2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)



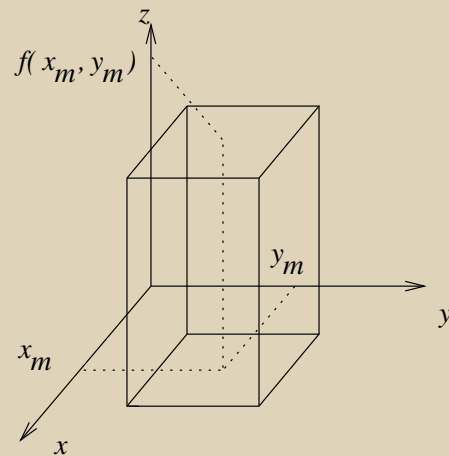
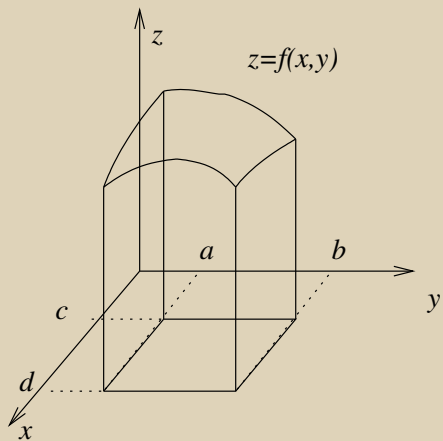


FIGURE C.2.1 – Interprétation graphique

### Aide 1, Question 1b, Exercice C.2.3

On montre que la famille est libre, le nombre de polynômes est égal à la dimension de l'espace vectoriel, donc il s'agit d'une base.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1c, Exercice C.2.3

$$T_n(r_i) = \cos\left(n \operatorname{Arccos} \cos \frac{2i+1}{2n} \pi\right) = \cos\left(n \frac{2i+1}{2n} \pi\right) = \cos\left(\frac{2i+1}{2} \pi\right) = \cos\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

montrer que les  $r_i$  sont distincts et appartiennent à  $[-1, 1]$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1c, Exercice C.2.3

Si on note  $\alpha_i = \frac{2i+1}{2n}\pi$ , on a

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \pi$$

donc

$$1 > \cos \alpha_0 > \cos \alpha_1 > \dots > \cos \alpha_{n-1} > -1,$$

$r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$  sont donc distincts (et ordonnés) et appartiennent à  $] -1, 1[$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2a, Exercice C.2.3

La démonstration est similaire à celle faite pour l'intégration de Gauss Legendre, voir le paragraphe [Gauss-Legendre - intégration](#).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2a, Exercice C.2.3

$$I(P) = \int_{-1}^1 w(x)Q(x)T_n(x)dx + \int_{-1}^1 w(x)R(x)dx$$

On a

$$\int_{-1}^1 w(x)Q(x)T_n(x)dx = 0,$$

vous comprenez pourquoi ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2a, Exercice C.2.3

Puisque le degré de  $P$  est inférieur ou égal à  $2n - 1$  et que le degré de  $T_n$  est égal à  $n$ , alors le degré du polynôme quotient  $Q$  est inférieur ou égal  $n - 1$ , donc  $Q$  s'écrit  $Q = a_0 T_0 + a_1 T_1 + \dots + a_{n-1} T_{n-1}$ , donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 w(x) Q(x) T_n(x) dx &= \int_{-1}^1 w(x) (a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_{n-1} T_{n-1}(x)) T_n(x) dx \\ &= a_0 \int_{-1}^1 w(x) T_0(x) T_n(x) dx + a_1 \int_{-1}^1 w(x) T_1(x) T_n(x) dx + \dots + a_{n-1} \int_{-1}^1 w(x) T_{n-1}(x) T_n(x) dx = 0\end{aligned}$$

On a utilisé la relation (C.2.1).

On a donc

$$I(P) = \int_{-1}^1 w(x) R(x) dx = I(R).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2b, Exercice C.2.3

Écrivez  $J(P)$ ,  $J(R)$  explicitiez  $P(r_i)$  et n'oubliez pas la définition des  $r_i$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Aide 2, Question 2b, Exercice C.2.3

N'oubliez pas que  $P = QT_n + R$  et que  $T_n(r_i) = 0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 2b, Exercice C.2.3

$$J(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P(r_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (Q(r_i) T_n(r_i) + R(r_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i R(r_i) = J(R)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2c, Exercice C.2.3

Comme d'habitude on écrit

$$I(p_0) = J(p_0), I(p_1) = J(p_1), \dots, I(p_{n-1}) = J(p_{n-1}),$$

où  $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$  est la base canonique de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ .

Écrivez le système linéaire à résoudre et montrez qu'il a une solution unique.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2c, Exercice C.2.3

On doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_0 & r_1 & \dots & r_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_0^{n-1} & r_1^{n-1} & \dots & r_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 w(x) dx \\ \int_{-1}^1 x w(x) dx \\ \dots \\ \int_{-1}^1 x^{n-1} w(x) dx \end{pmatrix}$$

Puisque les  $r_i$  sont distincts la matrice du système est une matrice de Vander monde inversible.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 2d, Exercice C.2.3

Avec le choix des  $\alpha_i$  précédents, on a  $I(R) = J(R)$ , vous comprenez pourquoi?

Il suffit ensuite de recoller tous les morceaux. . .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2d, Exercice C.2.3

$R$  est le reste de la division par le polynôme  $T_n$  de degré  $n$ , donc le degré de  $R$  est inférieur ou égal à  $n - 1$ , d'après le choix des  $\alpha_i$ , l'approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieurs ou égal à  $n - 1$ , donc  $I(R) = J(R)$ .

On a montré successivement  $I(P) = I(R)$ ,  $J(P) = J(R)$ ,  $I(R) = J(R)$  On a donc

$$I(P) = J(P).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3a, Exercice C.2.3

$$x_0 = r_0 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = r_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3b, Exercice C.2.3

On doit avoir

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\text{Arcsin}(x)]_{-1}^1 = \pi \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)



Aide 1, Question 3c, Exercice C.2.3

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} g(x) dx$$

Il suffit de poser  $f(x) = \sqrt{1-x^2}g(x)$  et de calculer  $J(f)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3c, Exercice C.2.3

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \left( f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \left( g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3(d)i, Exercice C.2.3

$$A(g) \approx \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3(d)ii, Exercice C.2.3

$$A(g) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{\pi}{2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3(d)iii, Exercice C.2.3

Dans ce cas on a  $f(x) = 1 - x^2$ , or l'approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $2 \times 2 - 1 = 3$ , il était donc prévisible que l'on obtiendrait le résultat exact.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1a, Exercice C.2.4

Soit  $p(t)$  un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 donc  $p$  s'écrit sous la forme :

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Calculer  $p(0), p(1), p'(0), p'(1)$ .

Écrire les conditions et en déduire les coefficients  $a_i$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1a, Exercice C.2.4

$$\left\{ \begin{array}{l} p(0) = a_0 = f(0) \\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f(1) \\ p'(0) = a_1 = f'(0) \\ p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = f'(1) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ a_2 = -3f(0) + 3f(1) - 2f'(0) - f'(1) \\ a_3 = 2f(0) - 2f(1) + f'(0) + f'(1) \end{array} \right.$$

D'où l'expression de  $p(t)$ .

$$p(t) = f(0) + f'(0)t + (-3f(0) + 3f(1) - 2f'(0) - f'(1))t^2 + (2f(0) - 2f(1) + f'(0) + f'(1))t^3$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1b, Exercice C.2.4

Dans l'exercice 5 du TD 5, question 2, nous avons

$$p(t) = f(0) \underbrace{(t-1)^2 (2t+1)}_{q_0(t)} + f(1) \underbrace{t^2 (-2t+3)}_{q_1(t)} + f'(0) \underbrace{(t-1)^2 t}_{q_2(t)} + f'(1) \underbrace{t^2 (t-1)}_{q_3(t)}$$

En développant, on obtiendrait les mêmes coefficients  $a_i$  qu'à la question (a).

[Retour à l'exercice ▲](#)



## Aide 1, Question 1c, Exercice C.2.4

On a

$$\alpha_0 = \int_0^1 q_0(t) dt = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \int_0^1 q_1(t) dt = \frac{1}{2},$$
$$\beta_0 = \int_0^1 q_2(t) dt = \frac{1}{12}, \quad \beta_1 = \int_0^1 q_3(t) dt = -\frac{1}{12}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1d, Exercice C.2.4

On écrit que l'approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, c'est dire que  $J(f) = I(f)$  pour les polynômes définis par

$$f(t) = 1, f(t) = t, f(t) = t^2, f(t) = t^3, \forall t.$$

Écrire les équations obtenues et les résoudre.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1d, Exercice C.2.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 + \quad + 2\beta_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha_1 + \quad + 3\beta_1 = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \beta_0 = -\beta_1 = \frac{1}{12}.$$

On retrouve bien sûr le même résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice C.2.4

On utilise un changement de variable affine pour se ramener à une intégrale de 0 à 1.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2, Exercice C.2.4

$$\begin{cases} u = 0, & t = a \\ u = 1, & t = b \end{cases} \implies t = bu + a(1 - u) = (b - a)u + a = \psi(u) \Rightarrow dt = (b - a)du$$

Que devient  $\int_a^b g(t) dt$  par ce changement de variable ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 2, Exercice C.2.4

$$\int_a^b g(t) dt = (b-a) \int_0^1 g(\psi(u)) du = (b-a) \int_0^1 g((b-a)u + a) du = (b-a) \int_0^1 f(u) du$$

On a posé  $f(u) = g((b-a)u + a)$ .

Donner une approximation de l'intégrale de droite. Pour ce faire, on doit calculer  $f'(u)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 2, Exercice C.2.4

$$f'(u) = (b-a)g'((b-a)u+a).$$

$$\int_a^b g(t)dt = (b-a) \int_0^1 f(u)du$$

est approché par :

$$(b-a) \left[ \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{12} f'(0) - \frac{1}{12} f'(1) \right] = \frac{(b-a)}{2} \left[ g(a) + g(b) + \frac{(b-a)}{6} g'(a) - \frac{(b-a)}{6} g'(b) \right].$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3a, Exercice C.2.4

$$\forall t \in [0, 1], \exists \xi(t) \in [0, 1], e(t) = t^2(t-1)^2 \frac{f^{(4)}(\xi(t))}{4!}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)



Aide 1, Question 3b, Exercice C.2.4

$$E(f) = \int_0^1 e(t) dt = \int_0^1 t^2(t-1)^2 \frac{f^{(4)}(\xi(t))}{4!} dt$$

pensez à utiliser le deuxième théorème de la moyenne.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3b, Exercice C.2.4

$t^2(t-1)^2$  garde un signe constant donc on peut écrire

$$\exists t^* \in [0, 1], \int_0^1 t^2(t-1)^2 \frac{f^{(4)}(\xi(t))}{4!} dt = \frac{f^{(4)}(\xi(t^*))}{4!} \int_0^1 t^2(t-1)^2 dt.$$

On peut poser  $c = \xi(t^*)$ , puis on calcule l'intégrale, on obtient

$$\exists c \in [0, 1], E(f) = \frac{f^{(4)}(c)}{720}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 4a, Exercice C.2.4

Revoyez le paragraphe de cours [Newton-Cotes-formules d'intégration](#), que vaut  $h$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 4a, Exercice C.2.4

On obtient  $h = \frac{1}{3}$ ,

$$\widehat{J}(f) = \frac{1}{8}f(0) + \frac{3}{8}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8}f(1).$$

$$\exists \hat{c} \in [0, 1], \widehat{E}(f) = -\frac{1}{6480}f^{(4)}(\hat{c}).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 4b, Exercice C.2.4

Si l'on suppose que la dérivée quatrième varie peu, l'approximation à l'aide des formules de Newton-Cotes est meilleure.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 5a, Exercice C.2.4

$$|f^{(4)}(t)| = \left| \left( \frac{\pi}{2} \right)^5 \cos \left( \frac{\pi}{2} t \right) \right| \leq \left( \frac{\pi}{2} \right)^5$$

donc

$$|E(f)| \leq \left( \frac{\pi}{2} \right)^5 \times \frac{1}{720} \approx 0.0132821,$$

$$|\hat{E}(f)| \leq \left( \frac{\pi}{2} \right)^5 \times \frac{1}{6480} \approx 0.0014758.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Ici on sait calculer  $I(f)$

$$I(f) = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \left[\sin \frac{\pi}{2}t\right]_0^1 = 1.$$

On calcule  $J(f)$  et  $\hat{J}(f)$

$$J(f) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{12} \times \frac{\pi^2}{4} \approx 0.99101492$$

$$\hat{J}(f) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \right) \approx 1.0010049$$

Puisque  $f^{(4)}$  est positive on trouve bien que  $J(f)$  approche  $I(f)$  par défaut, alors que  $\hat{J}(f)$  approche  $I(f)$  par excès.

$$E(f) \approx 0.00898508, \hat{E}(f) \approx -0.0010049$$

On retrouve entre  $E(f)$  et  $\hat{E}(f)$  à peu près le rapport  $-\frac{6480}{720}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)