北京航空航天大学数学科学学院实验报告

课程名称：科学计算通识实验课		实验名称： 数值积分算法
实验类型： 演示性实验□ 验证性实验□ 综合性实验☑ 设计性实验□		
班级：18377475	姓名：陈博胆	学号：18377475
实验日期： 2020.07.15	指导教师：冯成亮	实验成绩：
实验环境：（所用仪器设备及软件） Windows + Visual Studio 2019， Ubuntu 18.04.1 + g++		

实验目的与实验内容：

【目的要求】

通过本实验使学生进一步熟悉个人电脑上 C++代码的编写与调试，服务器上的代码编译与运行；熟悉数值积分中闭型牛顿-科特斯面积公式（梯形公式 T、辛普森公式 S、辛普森 3/8 公式、布尔公式 B），并熟练应用它们的复化/组合形式，熟悉它们的误差评估与积分精度关系；对均匀二次加密下牛顿面积公式（T 型、S 型与 B 型）的递归过程做了解，并对龙贝格积分做了解；熟悉高斯-勒让德积分的逻辑过程，熟练掌握 2 点和 3 点高斯积分公式，掌握利用高斯-勒让德变换对定积分做高精度数值计算。

【实验内容】

实验 1.1：（直接数值积分函数 1）

分别编写四种牛顿-科斯特面积公式对应的积分函数，并使用它们计算函数 $f(x) = 1 + e^{-x}\sin(4x)$在[0,1]上的积分，比较它们的误差。

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{21e - 4\cos(4) - \sin(4)}{17e} = 1.3082506046426\cdots$$

实验 1.2：（复化数值积分函数 2）

对函数 $f(x) = 2 + \sin(2\sqrt{x})$,使用复化梯形公式与复化辛普森公式和 11 个采样点，计算其在区间[1,6]上的积分，比较它们的误差。

$$\int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=1}^{x=6} = 8.1834792077$$

$$F(x) = \int 2 + \sin(2\sqrt{x})dx = 2x - \sqrt{x}\cos(2\sqrt{x}) + \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2}$$

实验 1.3：（复化数值积分函数 3）

对函数 $f(x) = 2x - \sqrt{x}\cos(2\sqrt{x}) + \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2}$,使用复化梯形公式与复化辛普森公式和 11,21,41,81,161 个采样点，计算其在区间[1,6]上的积分，比较它们的误差。

实验 1.4：（复化数值积分函数 4）

对函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，使用复化梯形公式与复化辛普森公式计算其在区间[2,7]上的积分，迭代计算 M 与对应的 h，使得误差小于 5.0E-9.

真值 $\int_2^7 dx/x = \ln(x)|_{x=2}^{x=7} = 1.252762968$

实验 2.1：（数值积分函数 5）（可小组完成）

利用龙贝格积分，对定积分

$$\int_0^{\pi/2}(x^2+x+1)\cos(x)\,dx = -2+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4} = 2.038197427067\cdots$$

做数值计算，求需均匀加密到 J 层使得 R（J,3）<1.0E-10.

实验 3.1：（数值积分函数 6）

利用 2 点高斯积分对定积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2} = \ln(3)-\ln(1) \approx 1.09861$$

做逼近，比较其与梯形公式（h=2）和辛普森公式(h=1)的误差区别；

实验 3.2：（数值积分函数 4）（可小组完成）

利用 3 点高斯积分对定积分

$$\int_1^5\frac{dt}{t} = \ln(5)-\ln(1) \approx 1.609438$$

做逼近，比较其与布尔公式(h=1)的误差区别；记录网格加密过程（M=1,2,4,8，16）中 2 种算法的误差表现。

实验过程与结果：

实验 1.1：（直接数值积分函数 1）

编写四种牛顿-科斯特面积公式对应的积分函数，利用梯形积分公式、Simpson 积分公式、Simpson3/8 积分公式以及布尔公式直接求解积分 1，结果如下。对比发现精度从梯形公式到布尔公式依次提高。

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class6$ ./1-1
梯形公式： 0.86079396
辛普森公式： 1.32127583
辛普森3/8公式： 1.31439681
布尔公式： 1.30859192
```

实验 1.2：（复化数值积分函数 2）

利用 11 个采样点的复化梯形公式和复化 Simpson 公式分别计算积分 2，复化 Simpson 精度更高。

实验 1.3：（复化数值积分函数 3）

利用复化梯形公式和复化 Simpson 公式分别计算积分 2，随着采样点个数的增加，计算误差逐渐减小，且复化 Simpson 公式的精度更高。

实验 1.4：（复化数值积分函数 4）

利用复化梯形公式和复化 Simpson 公式分别计算积分 4，要满足误差小于 5.0e-9，复化梯形积分公式需要划分成 M=9782 段，而复化 Simpson 公式只需要划分成 65 段即可满足条件。

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class6$ ./1-23
 The exact value: 8.183479207662728

 n=11
 复化梯形公式: 8.193854565172531
 复化辛普森公式: 8.183015494056182

 n=21
 复化梯形公式: 8.186049263770315
 复化辛普森公式: 8.183447496636239

 n=41
 复化梯形公式: 8.184120191790313
 复化辛普森公式: 8.183477167796980

 n=81
 复化梯形公式: 8.183639357318622
 复化辛普森公式: 8.183479079161391

 n=161
 复化梯形公式: 8.183519239040985
 复化辛普森公式: 8.183479199615107
```

实验 2.1：龙贝格积分（数值积分函数 5）（可小组完成）

利用 Romberg 积分计算积分 5，要满足误差小于 1.0e-10，需要加密到第五层，得到积分值如下。

```
 The exact value:    1.252762968495368
 Complex trapezoid: 1.252762970847139    h for trapezoid: 0.000152587890625
 Complex Simpson:    1.252762968495368    h for simpson:   0.000152587890625
```

实验 3.1：2 点高斯积分（数值积分函数 6）

利用 2 点 Gauss 积分计算积分 6，误差比梯形公式和 Simpson 公式都要小。

```
}work1@ws1:~/ChenBodan/class6$ ./3-1
 The exact value: 1.098612288668110
 Gauss-Legendre:  1.090909090912655
 Trapezoid:       1.333333333333333
 Simpson:         0.888888888888889
```

实验 3.2：3 点高斯积分（数值积分函数 4）（可小组完成）

对积分 4，分别利用 3 点 Gauss 积分和布尔公式积分，逐渐增大分段数 M，误差逐渐减小。对比两种算法来看，同种划分下，3 点 Gauss 积分的误差比布尔公式的误差要小一些。

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class6$ ./3-2
 The exact value: 1.609437912434100
 Gauss-Legendre:  1.602693602742476
 Cotes(布尔):      1.617777777777778
 Trapezoid:       2.400000000000000
 Simpson:         1.333333333333333
```

实验分析与总结:

本次实验，我们学习了几种常用的数值积分算法。其中包括闭型牛顿-科特斯面积公式（梯形公式 T、Simpson 公式 S、Simpson3/8 公式、布尔公式 B），从实验中对比发现，布尔公式的精度最高，Simpson 公式次之，梯形公式精度最低，但计算形式最为简单。

以及常用的两种复合型公式——复化梯形公式、复化 Simpson 公式，通过加密划分提高积分计算的精度，而通过实验 1.4 的对比发现复化梯形公式需要非常精细的划分才能达到复化 Simpson 公式在较粗略的划分下的计算精度。

利用递归的方法，计算了龙贝格积分。另外，对于[-1,1]区间上的积分，可利用逼近原理通过高斯-勒让德公式进行更高精度的数值积分计算，而其他闭区间上的积分可通过变量代换将积分区间化为[-1,1]再使用高斯-勒让德公式进行积分。

以上几种积分方式都可以通过加密划分提高数值计算的精度。同一个划分下，高斯-勒让德的精度最高，梯形公式最低，在实际实践中需要根据所需精度选择适合的复杂度和精度的定积分数值计算公式。

注：若填写内容较多，可在背面继续填写。