北京航空航天大学数学科学学院实验报告

课程名称：科学计算通识实验课		实验名称：　常微分方程的初值问题
实验类型：　演示性实验□　　验证性实验□　　综合性实验☑　设计性实验□		
班级：18377475	姓名：陈博胆	学号：18377475
实验日期：　2020.07.16	指导教师：冯成亮	实验成绩：

实验环境：（所用仪器设备及软件）

Windows + Visual Studio 2019,　Ubuntu 18.04.1 + g++

实验目的与实验内容

【目的要求】

通过本实验使学生进一步熟悉个人电脑上 C++代码的编写与调试，服务器上的代码编译与运行；了解常微分方程初值问题求解中的微分-积分算法设计基本思想，熟练掌握求解一维常微分方程的向前欧拉方法、向后欧拉方法和梯形方法，了解它们对步长 h 的稳定性要求；了解对欧拉方法的精度改进过程，掌握休恩方法（二级迭代法）的求解过程；了解龙格库塔（R-K）方法的构造思路，掌握使用二级、三级和四级 R-K 方法求解常微分方程的能力。

【实验内容】

实验 1.1：（向前欧拉法求解常微分方程 1）

使用向前欧拉法（显式），分别用步长 h= 1,1/2,1/4，…，1/64 求解常微分方程 $y'=\frac{t-y}{2},\quad y(0)=1$ 在区间[0,3]上的初值问题，并比较它们的绝对误差。

精确解 $y(t)=3e^{-t/2}-2+t$。

实验 1.2：（向后欧拉法求解常微分方程 1）（可小组完成）

使用向后欧拉法（隐式），分别用步长 h= 1,1/2,1/4，…,1/64 求解常微分方程 $y'=\frac{t-y}{2},\quad y(0)=1$ 在区间[0,3]上的初值问题，并比较它们的绝对误差。

精确解 $y(t)=3e^{-t/2}-2+t$。

实验 1.3：（预估-修正法向后欧拉法求解常微分方程 1）（可小组完成）

使用预估-修正法（迭代欧拉法）（显式），分别用步长 h= 1,1/2,1/4，…，1/64 求解常微分方程 $y'=\frac{t-y}{2},\quad y(0)=1$ 在区间[0,3]上的初值问题，并比较它们的绝对误差。1e-6

精确解 $y(t)=3e^{-t/2}-2+t$。

实验 2.1：（二级龙格库塔（R-K）法求解常微分方程 1）

使用二级龙格库塔（R-K）法（显式），分别用步长 h= 1,1/2,1/4，…，1/64 求解常微分方程 $y'=\frac{t-y}{2},\quad y(0)=1$ 在区间[0,3]上的初值问题，并比较它们的绝对误差。

精确解 $y(t)=3e^{-t/2}-2+t$。

实验 2.2：（三级龙格库塔（R-K）法求解常微分方程 1）

使用三级龙格库塔（R-K）法（显式），分别用步长 h= 1,1/2,1/4，…，1/64 求解常微分方程 $y'=\frac{t-y}{2},\quad y(0)=1$ 在区间[0,3]上的初值问题，并比较它们的绝对误差。

精确解 $y(t)=3e^{-t/2}-2+t$。

实验 2.3：（四级龙格库塔（R-K）法求解常微分方程 1）

使用四级龙格库塔（R-K）法（显式），分别用步长 h= 1,1/2,1/4，…，1/64 求解常微分方程 $y'=\frac{t-y}{2},\quad y(0)=1$ 在区间[0,3]上的初值问题，并比较它们的绝对误差。

精确解 $y(t)=3e^{-t/2}-2+t$。

实验 3.1：（四级龙格库塔（R-K）法求解常微分方程组 2）（小组完成）

使用四级龙格库塔（R-K）法（显式），用步长 h= 0.02 求解常微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=x+2y \qquad \begin{cases} x(0)=6 \\ y(0)=4 \end{cases}$$
$$\frac{dy}{dt}=3x+2y,$$

在区间[0.0,0.2]上的 $x(0)=6, y(0)=4$ 初值问题，并比较它们的绝对误差。

$$x(t)=4e^{4t}+2e^{-t}$$
$$y(t)=6e^{4t}-2e^{-t}$$

：

实验过程与结果：

实验 1.1：（向前欧拉法求解常微分方程 1）

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class7$ ./1-11
向前欧拉法求解常微分方程1
步长h    步数M    y(3)近似值yM      y(3)-yM         O(h)
1.000    3        1.37500000       0.29439048      0.256
0.500    6        1.53393555       0.13545493      0.128
0.250    12       1.60425171       0.06513877      0.064
0.125    24       1.63742910       0.03196138      0.032
0.062    48       1.65355719       0.01583329      0.016
0.031    96       1.66151013       0.00788035      0.008
0.016    192      1.66545931       0.00393117      0.004
```

实验 1.2：（向后欧拉法求解常微分方程 1）

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class7$ ./1-12
向后欧拉法求解常微分方程1
步长h   步数M   y(3)近似值yM    y(3)-yM      O(h)
1.000   3      1.88888889     0.21949841   0.256
0.500   6      1.78643200     0.11704152   0.128
0.250   12     1.72994642     0.06055594   0.064
0.125   24     1.70020745     0.03081697   0.032
0.062   48     1.68493775     0.01554727   0.016
0.031   96     1.67719933     0.00780885   0.008
0.016   192    1.67330378     0.00391329   0.004
```

实验 1.3：（预估-修正法向后欧拉法求解常微分方程 1）

预估修正法通过显示 Euler 法进行预估，在通过隐式梯形法进行不动点的迭代修正，误差明显较向前向后 Euler 法减小。

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class7$ ./1-3
预报校正格式(不动点迭代法)求解常微分方程1
步长h   步数M   y(3)近似值yM    y(3)-yM      O(h)
1.000   3      1.64799988     0.02139060   0.256
0.500   6      1.66413214     0.00525834   0.128
0.250   12     1.66808138     0.00130910   0.064
0.125   24     1.66906347     0.00032701   0.032
0.062   48     1.66897658     0.00041390   0.016
0.031   96     1.66928764     0.00010284   0.008
0.016   192    1.66930350     0.00008698   0.004
```

实验 2.1：（二级龙格库塔（R-K）法求解常微分方程 1）

利用改进后的 Euler 法（二级二阶 R-K 方法）计算不同步长下的常微分方程数值解。

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class7$ ./2-1
二级龙格库达塔法求解常微分方程1
步长h   步数M   y(3)近似值yM    y(3)-yM         O(h)
1.000   3      1.73242188     6.30313946e-02  0.256
0.500   6      1.68212103     1.27305459e-02  0.128
0.250   12     1.67226878     2.87829577e-03  0.064
0.125   24     1.67007594     6.85459551e-04  0.032
0.062   48     1.66955780     1.67324464e-04  0.016
0.031   96     1.66943182     4.13394065e-05  0.008
0.016   192    1.66940075     1.02742022e-05  0.004
```

实验 2.2：（三级龙格库塔（R-K）法求解常微分方程 1）

利用改进后的 Kutta 法（三级三阶 R-K 方法）计算不同步长下的常微分方程数值解。

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class7$ ./2-2
三级龙格库达塔法求解常微分方程1
步长h   步数M   y(3)近似值yM    y(3)-yM         O(h)
1.000   3      1.66159397     7.79651343e-03  0.256
0.500   6      1.66859179     7.98691818e-04  0.128
0.250   12     1.66930016     9.03196012e-05  0.064
0.125   24     1.66937974     1.07382504e-05  0.032
0.062   48     1.66938917     1.30909814e-06  0.016
0.031   96     1.66939032     1.61603093e-07  0.008
0.016   192    1.66939046     2.00744816e-08  0.004
```

实验 2.3：（四级龙格库塔（R-K）法求解常微分方程 1）

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class7$ ./2-3
四级龙格库达塔法求解常微分方程组2
步长h    步数M    y(3)近似值yM      t=3处误差二范数  O(h)
0.020    10       11.71578065       4.10009271e-06   0.005
```

实验 3.1：（四级龙格库塔（R-K）法求解常微分方程组 2）

利用四级四阶龙格库塔法求解二元常微分方程组，并输出了右积分端点处（t=3）的近似值，及二范数意义下的误差$\sqrt{(x(3)-x_M)^2+(y(3)-y_M)^2}$.

```
work1@ws1:~/ChenBodan/class7$ ./2-4
四级龙格库达塔法求解常微分方程组1
步长h    步数M    y(3)近似值yM    y(3)-yM          O(h)
1.000    3        1.67018599      7.95509358e-04   0.256
0.500    6        1.66943076      4.02813539e-05   0.128
0.250    12       1.66939275      2.26744173e-06   0.064
0.125    24       1.66939061      1.34507324e-07   0.032
0.062    48       1.66939049      8.19037105e-09   0.016
0.031    96       1.66939048      5.05272046e-10   0.008
0.016    192      1.66939048      3.13749027e-11   0.004
```

实验分析与总结：

本次实验中，我们学习了求解常微分方程初值问题的微分-积分算法设计基本思想实现了求解一维常微分方程的单步方法——向前欧拉方法、向后欧拉方法和梯形方法。随着步长 h 的减小，数值解的误差逐渐减小。向后欧拉方法精度高于向前欧拉法，预报校正格式的精度高于向后欧拉法。

我们还实现了常用的二级二阶、三级三阶及四级四阶龙格库塔法，相同步长下精度比向前向后欧拉法更高，且 R-K 的级数越高精度也越高。对于二维常微分方程组，我们也同样可以使用 R-K 法进行数值计算，只是多一个维度而已。

注：若填写内容较多，可在背面继续填写。