北京航空航天大学数学科学学院实验报告

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 课程名称：科学计算通识实验课 | | 实验名称：数值积分算法 | |
| 实验类型： 演示性实验□ 验证性实验□ 综合性实验☑ 设计性实验□ | | | |
| 班级：180921 | 姓名：幸天驰 | | 学号：18377432 |
| 实验日期： 2021.7.15 | 指导教师：冯成亮 | | 实验成绩： |
| 实验环境：（所用仪器设备及软件）  Windows + Visual Studio 2019, Ubuntu 18.04.1 + g++ | | | |
| 实验目的与实验内容：  【目的要求】  通过本实验使学生进一步熟悉个人电脑上C++代码的编写与调试，服务器上的代码编译与运行；熟悉数值积分中闭型牛顿-科特斯面积公式（梯形公式T、辛普森公式S、辛普森3/8公式、布尔公式B），并熟练应用它们的复化/组合形式，熟悉它们的误差评估与积分精度关系；对均匀二次加密下牛顿面积公式（T型、S型与B型）的递归过程做了解，并对龙贝格积分做了解；熟悉高斯-勒让德积分的逻辑过程，熟练掌握2点和3点高斯积分公式，掌握利用高斯-勒让德变换对定积分做高精度数值计算。  【实验内容】  **实验1.1：（直接数值积分函数1）**  分别编写四种牛顿-科斯特面积公式对应的积分函数，并使用它们计算函数在[0,1]上的积分，比较它们的误差。  **实验1.2：（复化数值积分函数2）**  对函数,使用复化梯形公式与复化辛普森公式和11个采样点，计算其在区间[1,6]上的积分，比较它们的误差。    **实验1.3：（复化数值积分函数3）**  对函数,使用复化梯形公式与复化辛普森公式和11,21,41,81,161个采样点，计算其在区间[1,6]上的积分，比较它们的误差。  **实验1.4：（复化数值积分函数4）**  对函数 ,使用复化梯形公式与复化辛普森公式计算其在区间[2,7]上的积分，迭代计算M与对应的h，使得误差小于5.0E-9.  **实验2.1：（数值积分函数5）（可小组完成）**  利用龙贝格积分，对定积分    做数值计算，求需均匀加密到J层使得R（J,3）<1.0E-10.    **实验3.1：（数值积分函数6）**  利用2点高斯积分对定积分  做逼近，比较其与梯形公式（h=2）和辛普森公式(h=1)的误差区别；  **实验3.2：（数值积分函数4）(可小组完成)**  利用3点高斯积分对定积分  做逼近，比较其与布尔公式(h=1)的误差区别；  记录网格加密过程（M=1,2,4,8，16）中2种算法的误差表现。 | | | |
| 实验过程与结果：  **实验1.1：（直接数值积分函数1）**  编写四种牛顿-科斯特面积公式对应的积分函数，利用梯形积分公式、Simpson积分公式、Simpson3/8积分公式以及布尔公式直接求解积分1，结果如下。对比发现精度从梯形公式到布尔公式依次提高。    **实验1.2：（复化数值积分函数2）**  利用11个采样点的复化梯形公式和复化Simpson公式分别计算积分2，复化Simpson精度更高。    **实验1.3：（复化数值积分函数3）**  利用复化梯形公式和复化Simpson公式分别计算积分2，随着采样点个数的增加，计算误差逐渐减小，且复化Simpson公式的精度更高。    **实验1.4：（复化数值积分函数4）**  利用复化梯形公式和复化Simpson公式分别计算积分4，要满足误差小于5.0e-9，复化梯形积分公式需要划分成M=9782段，而复化Simpson公式只需要划分成65段即可满足条件。    **实验2.1：龙贝格积分（数值积分函数5）（可小组完成）**  利用Romberg积分计算积分5，要满足误差小于1.0e-10，需要加密到第五层，得到积分值如下。    **实验3.1：2点高斯积分（数值积分函数6）**  利用2点Gauss积分计算积分6，误差比梯形公式和Simpson公式都要小。    **实验3.2：3点高斯积分（数值积分函数4）(可小组完成)**  对积分4，分别利用3点Gauss积分和布尔公式积分，逐渐增大分段数M，误差逐渐减小。对比两种算法来看，同种划分下，3点Gauss积分的误差比布尔公式的误差要小一些。 | | | |
| 实验分析与总结：  本次实验，我们学习了几种常用的数值积分算法。其中包括闭型牛顿-科特斯面积公式（梯形公式T、Simpson公式S、Simpson3/8公式、布尔公式B），从实验中对比发现，布尔公式的精度最高，Simpson公式次之，梯形公式精度最低，但计算形式最为简单。  以及常用的两种复合型公式——复化梯形公式、复化Simpson公式，通过加密划分提高积分计算的精度，而通过实验1.4的对比发现复化梯形公式需要非常精细的划分才能达到复化Simpson公式在较粗略的划分下的计算精度。  利用递归的方法，计算了龙贝格积分。另外，对于[-1,1]区间上的积分，可利用逼近原理通过高斯-勒让德公式进行更高精度的数值积分计算，而其他闭区间上的积分可通过变量代换将积分区间化为[-1,1]再使用高斯-勒让德公式进行积分。  以上几种积分方式都可以通过加密划分提高数值计算的精度。同一个划分下，高斯-勒让德的精度最高，梯形公式最低，在实际实践中需要根据所需精度选择适合的复杂度和精度的定积分数值计算公式。 | | | |

注：若填写内容较多，可在背面继续填写。