



抽象代数学习笔记

Notes for Personal Reference



整理人： 郭利文

时间： 2026 上半年

前言

该讲义为自用笔记，
主题框架是围绕 Galois 理论做准备
仅供学习与交流使用.

目录

1 域	2
2 环	5
2.1 分式域与中国剩余	5
2.2 整环上的讨论	9
2.3 唯一分解多项式环	12
3 群	14
3.1 群行列式	14
3.2 交错单群 $A_n(n \geq 5)$	17
3.3 有限群的合成序列	22
3.4 群作用与 Sylow 定理	24
3.5 二面体群	29
3.6 有限生成 Abel 群分类	31
3.7 pq 阶群	31
3.8 可解群	32
4 Galois 理论	33
4.1 分裂域	33
4.2 Galois 扩张	40
索引	41

1 域

命题 1.1. 设 F 是域, 若 α, β 是 F 代数元, 则 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 也是 F 代数元.

证明. 这里介绍一种不太常见的方法. 设 $f, g \in F[x]$, 使得 $f(\alpha) = 0, g(\beta) = 0$. 记 $R(A, B)$ 表示 A, B 的结式. 令 $h(y) = R(f(x), g(y-x)) \in F[y]$, 且 $h(\alpha + \beta) = 0$. 再令

$$k(y) = R\left(f(x), x^{\deg g} \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)\right) \in F[y]$$

且 $k(\alpha\beta) = 0$ ■

命题 1.2 (维数公式). 设 $F \subset K \subset E$, 且 E/F 是有限扩张, 则 $K/F, E/K$ 也是有限扩张, 且

$$[E : F] = [E : K] \cdot [K : F].$$

证明. 将 K, E 分别视为 F 上线性空间, 则 K 是 E 的子空间, 自然 $[K : F] \leq [E : F] < \infty$. 若我们记 $[E : F] = s$, 我们断言 $[E : K] \leq s$, 否则存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s+1} \in E$, 使得它们在 K 上线性无关, 注意 $F \subset K$, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 在 F 上也线性无关, 这导出矛盾.

下面不妨假定 $[E : K] = m, [K : F] = n$, 且

$$E = \text{span}_K \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad K = \text{span}_F \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$$

则

$$E = \text{span}_F \{\alpha_i \beta_j \mid i \in [1, m]; j \in [1, n]\}$$

下面只需说明 $\{\alpha_i \beta_j\}$ 在 F 线性无关即可. 设 $c_{ij} \in F$ 满足

$$0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} \beta_j \right) \alpha_i$$

对每个固定 $i \in [1, m]$, 由于 $\sum_{j=1}^n c_{ij} \beta_j \in K$, 于是 $\sum_{j=1}^n c_{ij} \beta_j = 0$, 最终得到 $c_{ij} = 0$. ■

对每个域 F , $\text{char} F$ 是 0 或者某个素数, 即 F 有子域 \mathbb{Q} 或者子域 \mathbb{Z}_p (是在同构意义下, 往后不做强调)

例 1.1. 设 F 是域, $\text{char} F = p > 0$, 则 $f : F \rightarrow F, \alpha \mapsto \alpha^p$ 是域同态, 特别地, 当 F 是有限域时, f 是域同构.

命题 1.3. 设有扩张 E/F , 其中 $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i 是 F 代数元, 则 E/F 是有限扩张, 自然也是代数扩张.

证明. E/F 可以看成若干单代数扩张, 由有限扩张的传递性 [命题, 1.2], 我们只要证明 $F(\alpha)/F$ 是代数扩张即可, 其中 α 是 F 代数元. 设 f 是 α 的极小多项式, 记 $\deg f = n$, 则

$$F(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in F\} = \text{span}_F \{1_F, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}\}$$

即 $[F(\alpha), F] = n < \infty$. ■

命题 1.4. 代数扩张具有传递性, 即若 $F \subset K \subset E$, 满足 $E/K, K/F$ 是代数扩张, 则 E/F 也是代数扩张.

证明. 任意取定 $\alpha \in E$, 则存在 $f \in K[x]$, 使得 $f(\alpha) = 0$. 不妨设 $f = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, 记 $K' = F(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$, 则由 [命题, 1.3], K'/F 是有限扩张, 且 $K'(\alpha)/K'$ 也是有限扩张, 于是 $K'(\alpha)/F$ 也是有限扩张, 自然也是代数扩张. 特别地, α 是 F 代数元. ■

定义 1.1. 设有域扩张 E/F , 记 $\text{Aut}(E)$ 是 E 的自同构群, 即 E 到自身的域同构全体, 定义

$$\text{Gal}(E/F) = \{\sigma \in \text{Aut}(E) \mid \sigma|_F = \text{id}_F\}$$

则 $\text{Gal}(E/F)$ 是群, 称为是 E/F 的 Galois 群.

命题 1.5. 若 E/F 是有限扩张, 则 $\text{Gal}(E/F)$ 是有限群.

证明. 不妨设 $[E : F] = n$, 且

$$E = \text{span}_F \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

则对任意 $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$, σ 完全是由 $(\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_n))$ 决定的. 记 $f_i \in F[x]$ 是 α_i 的极小多项式, 则有

$$0 = \sigma(f_i(\alpha_i)) = \sigma((\alpha_i)^m + a_1(\alpha_i)^{m-1} + \cdots + a_m) = f_i(\sigma(\alpha_i))$$

即 σ 是 $X_i = \{\alpha \in E \mid f_i(\alpha) = 0\}$ 上的一个置换. 注意 $\bigcup_{i=1}^n X_i$ 是有限集, 其上的置换有限, 故而 $|\text{Gal}(E/F)| < \infty$. ■

定义 1.2. 反之, 给定域 E , G 是 $\text{Aut}(E)$ 的有限子群, 定义

$$\text{Inv}(G) = \{\alpha \in E \mid \sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in G\}$$

则 $\text{Inv}(G)$ 是 E 的子域, 称为是 G 在 E 上不动域.

定理 1.6. 按 [定义, 1.2] 得到的域扩张 $E/\text{Inv}(G)$ 是有限扩张, 且 $[E : \text{Inv}(G)] \leq |G|$

证明. 设 $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, 我们只需证明对任意取定 $m > n$ 个 E 中元 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, 其在 $\text{Inv}(G)$ 中线性相关即可. 考虑线性方程组

$$\sum_{i=1}^m \sigma_j(\alpha_i) x_i = 0, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.1)$$

(1.1) 中方程个数小于未知元个数, 且方程系数是 E 中元素, 于是方程在 E 中有非零解 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in E^m$. 注意 σ_j 是同构, 则对方程(1.1)的每个属于 $\text{Inv}(G)^m$ 的非零解 \mathbf{x} , 都有 $\sum_{i=1}^m x_i \alpha_i = 0$.

下面我们只需在解空间中找到一个 $\text{Inv}(G)$ 上的非零解. 取解 \mathbf{x} 满足是方程(1.1)的非零解中含有非零元 x_i 最少的一个解, 由于 \mathbf{x} 非零, 故不妨设 $x_1 \neq 0$, 因此进一步可不妨设 $x_1 = 1$. 我们断言 \mathbf{x} 是 $\text{Inv}(G)$ 上的解, 否则的话, 存在 $\sigma \in G$, 使得存在某个 x_i , 满足 $\sigma(x_i) \neq x_i$, 不妨设 $\sigma(x_2) \neq x_2$. 注意 $\sigma(\mathbf{x}) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m))$ 是方程组

$$\begin{aligned} 0 = \sigma \sigma_j \left(\sum_{i=1}^m x_i \alpha_i \right) &= \sum_{i=1}^m \sigma \sigma_j(\alpha_i) \sigma(x_i), \quad 1 \leq j \leq n \\ &= \sum_{i=1}^m \sigma_k(\alpha_i) \sigma(x_i), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

的解, 且方程 (1.1) 和方程 (1.2) 是同一个方程, 于是 $\sigma(\mathbf{x})$ 也是方程(1.1)的解, 且由 \mathbf{x} 取法可知 $\sigma(\mathbf{x})$ 与 \mathbf{x} 的零元位置相同. 但是注意 $\sigma(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ 也是方程(1.1)的非零解, 且其第一个元素也是零, 这与 \mathbf{x} 取法矛盾. ■

引出两个问题:

问题 1

给定域扩张 E/F , 则有 $F \subset \text{Inv}(\text{Gal}(E/F))$, 进一步是否有 $F = \text{Inv}(\text{Gal}(E/F))$.

问题 2

设 E 是域, 给定 $\text{Aut}(E)$ 的有限群 G , 则 $G \subset \text{Gal}(E/\text{Inv}(G))$, 进一步是否有 $G = \text{Gal}(E/\text{Inv}(G))$.

第一个一般不正确, 比如考虑域扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$, 第二个我们先做存疑.

例 1.2. 设

$$E = \mathbb{Q} \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2^k}}} \mid k = 1, 2, \dots \right)$$

则 E/\mathbb{Q} 不是有限生成扩张, 但是是代数扩张.

例 1.3. $\mathbb{Q}(\pi)$ 是有限生成扩张, 但不是代数扩张.

2 环

2.1 分式域与中国剩余

设 R 是环, I 是 R 的子环, 则 $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$ 关于加法是一个 Abel 群, 如果我们想在 R/I 上定义乘法, 一种自然考虑是

$$(x + I) \cdot (y + I) := xy + I \quad (2.1)$$

如果(2.1)的定义是良定的, 则容易验证 R/I 构成一个环. 要使得(2.1)的定义良定, 即要保证: 若 $x_1 - x_2 \in I, y_1 - y_2 \in I$, 要能推出 $x_1y_1 - x_2y_2 \in I$, 即

$$x_1y_1 - x_2y_2 = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\in I}y_1 + x_2\underbrace{(y_1 - y_2)}_{\in I} \in I$$

自然引出一个概念: 设 I 是 R 的子环, 如果对任意 $a \in I, r \in R$, 有 $ar, ra \in I$, 则称 I 为 R 的 (双边) 理想.

定理 2.1 (同态基本定理). 设 $f: R \longrightarrow S$ 是满的环同态, 则 $R/\ker f \cong S$, 且 S 中的理想与 R 中包含 $\ker f$ 的理想有一一对应关系.

证明. 自然定义

$$\begin{aligned} \tilde{f}: R/\ker f &\longrightarrow S \\ r + \ker f &\longmapsto f(r) \end{aligned} \quad (2.2)$$

如果(2.2)的定义是良定的, 则 \tilde{f} 是环同态且是双射的验证是平凡的. 若 $x_1 - x_2 \in \ker f$, 则

$$\tilde{f}(x_1 + \ker f) - \tilde{f}(x_2 + \ker f) = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0$$

所以 \tilde{f} 的定义是良定的, 即不依赖于代表元的选取.

下设 R', S' 分别是 R 和 S 的理想, 则 $f(R'), f^{-1}(S') := \{r \in R \mid f(r) \in S'\}$ 分别是 S 和 R 中理想, 其中 $f(R')$ 是 S 中理想的验证需用到 f 是满的这一条件. 下面我们主要说明对应的唯一性, 即若 R' 是 R 中包含 $\ker f$ 的理想, 则有事实

$$R' = f^{-1}(f(R'))$$

换句话说即证明: 若 R_1, R_2 是 R 中包含 $\ker f$ 的理想, 且 $f(R_1) = f(R_2)$, 则 $R_1 = R_2$:

对任意 $r_1 \in R_1$, 存在 $r_2 \in R_2$, 使得 $f(r_1) = f(r_2)$, 即 $r_1 - r_2 \in \ker f \subset R_2$, 于是有 $r_1 = (r_1 - r_2) + r_2 \in R_2$, 也就是说 $R_1 \subset R_2$, 同理也有 $R_2 \subset R_1$, 这就得到 $R_1 = R_2$. ■

设 I_1, \dots, I_r 是 R 的理想, 则 $I_1 + \dots + I_r := \{x_1 + \dots + x_r \mid x_i \in I_i\}$ 和 $\bigcap_{i=1}^r I_i$ 都是 R 的理想.

若 $S \subset R$, 记 $\langle S \rangle =$ 是包含 S 的 R 中最小理想, 若 R 是交换幺环, 则

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i y_i \mid x_i \in S, y_i \in R, m \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

设 R_1, R_2 是环, 在 $R_1 \times R_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}$ 中定义如下加法和乘法:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2, y_1 y_2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

则 $R_1 \times R_2$ 在运算(2.3)下构成环, 称为 R_1 与 R_2 的直积. 一个简单的事实是: $R_1 \cong R_1 \times \{O_{R_2}\}$, $R_2 \cong \{O_{R_1}\} \times R_2$, 即 R_1, R_2 均可视为 $R_1 \times R_2$ 的理想.

命题 2.2. 设 $I \subset J$ 是 R 中的两个理想, 则 $I/(I \cap J) \cong (I + J)/J$.

证明. 自然考虑 $f: I \longrightarrow (I + J)/J, x \longmapsto x + J$, 则 f 是满的环同态, 且 $\ker f = I \cap J$, 由同态基本定理即得. ■

设 R 为交换环, I_1, I_2 是 R 中两个理想, 定义

$$I_1 I_2 := \left\{ \sum_{i=1}^m x_i y_i \mid x_i \in I_1, y_i \in I_2 \right\} \quad (2.4)$$

则 $I_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2$ 也是 R 的理想. 利用定义(2.4), 我们可以归纳定义: 若 I_1, \dots, I_k 是 R 中理想, 则

$$\prod_{i=1}^k I_k := I_1(I_2 \cdots I_k) = \left\{ \sum_{i=1}^m x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik} \mid x_{ij} \in I_j \right\}$$

设 I, J 是 R 中理想, 若 $R = I + J$, 则称 I, J 是互素的.

引理 2.3. 设 R 为环, I, J 是 R 中互素理想, 则 $R/(I \cap J) \cong (R/I) \times (R/J)$

证明. 自然考虑

$$\begin{aligned} f: R &\longrightarrow (R/I) \times (R/J) \\ r &\longmapsto (r + I, r + J) \end{aligned}$$

f 是同态, 以及 $\ker f = I \cap J$ 都是平凡的, 下面我们主要说明 f 是满的. 任取 $r_1, r_2 \in R$, 且

$$r_1 = x_1 + y_1$$

$$r_2 = x_2 + y_2$$

其中 $x_i \in I, y_i \in J$, 则有

$$\begin{aligned} (r_1 + I, r_2 + J) &= (x_1 + y_1 + I, x_2 + y_2 + J) = (y_1 + I, x_2 + J) \\ &= (x_2 + y_1 + I, x_2 + y_1 + J) = f(x_2 + y_1) \end{aligned}$$

这就证明了 f 是满射. ■

引理 2.4. 设 R 为交换幺环, I_1, \dots, I_n 是 R 中两两互素的理想, 则 $I_1 \cdots I_{n-1}$ 与 I_n 互素.

证明. 只需注意

$$R \xrightarrow{R \text{ 中有幺元}} \underbrace{R \cdots R}_n = \prod_{k=1}^{n-1} (I_n + I_k) = I_n + I_1 \cdots I_{n-1}$$

■

定理 2.5 (中国剩余). 设 R 是交换幺环, 且 I_1, \dots, I_n 是 R 中两两互素的理想, 则

$$R / \left(\prod_{i=1}^n I_i \right) \cong (R/I_1) \times \cdots \times (R/I_n) \quad (2.5)$$

证明. 我们先证明 $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$, 从而由 [引理, 2.4] 可以归纳得到

$$I_1 \cdots I_n = (I_1 \cdots I_{n-1}) I_n = (I_1 \cdots I_{n-1}) \cap I_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} I_k \right) \cap I_n = \bigcap_{k=1}^n I_k.$$

注意 $I_1 \cap I_2$ 中元素 x 可以写为

$$x = x \cdot 1_R = x(y+z) = yx + xz \in I_1 I_2, \quad y \in I_1, z \in I_2$$

从而即得 $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$. 下面我们归纳证明(2.5). 当 $n=2$ 时, 由 [引理, 2.3] 已经做好. 对一般情形, 由归纳假设则有

$$\begin{aligned} R / \left(\prod_{i=1}^n I_i \right) &= R / \left(\bigcap_{i=1}^n I_i \right) \cong \left(R / \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} I_i \right) \right) \times (R/I_n) \\ &\cong (R/I_1) \times \cdots \times (R/I_n). \end{aligned}$$

■

称环 R 为整环, 如果 R 是没有零因子的交换幺环. 令 $R^* = R \setminus \{0\}$, 在 $R \times R^*$ 中定义关系为: $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$, 如果 $r_1 s_2 = r_2 s_1$. 我们说明此关系是一种等价关系, 其中自反性和对称性是显然的, 下面主要说明传递性. 设 $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2), (r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$, 则我们要证明 $r_1 s_3 = r_3 s_1$, 由 $s_2 \neq 0$, 我们只要说明 $r_1 s_2 s_3 = r_3 s_1 s_2$:

$$r_1 s_2 s_3 = (r_1 s_2) s_3 = (r_2 s_1) s_3 = (r_2 s_3) s_1 = (r_3 s_2) s_1 = r_3 s_1 s_2.$$

这就证明了上面关系是等价关系, 则我们可以记 $F = (R \times R^*) / \sim$ 表示上面等价关系得到的等价类的集合, 其中元素记为 $\frac{r}{s}$, 表示以 (r, s) 为代表元的等价类. 在 F 中定义如下加法和乘法

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} &:= \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} \\ \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} &:= \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

我们说明(2.6)的定义是良定的, 即若 $(r_1, s_1) \sim (r'_1, s'_1), (r_2, s_2) \sim (r'_2, s'_2)$, 能有

$$\begin{aligned}(r_1 s_2 + r_2 s_1, s_1 s_2) &\sim (r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1, s'_1 s'_2) \\ (r_1 r_2, s_1 s_2) &\sim (r'_1 r'_2, s'_1 s'_2)\end{aligned}$$

验证有

$$\begin{aligned}(r_1 s_2 + r_2 s_1) s'_1 s'_2 &= (r_1 s'_1) s_2 s'_2 + (r_2 s'_2) s_1 s'_1 = (r'_1 s_1) s_2 s'_2 + (r'_2 s_2) s_1 s'_1 = (r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1) s_1 s_2 \\ r_1 r_2 s'_1 s'_2 &= (r_1 s'_1) (r_2 s'_2) = (r'_1 s_1) (r'_2 s_2) = r'_1 r_2 s_1 s_2.\end{aligned}$$

这样我们就完成了定义良定性的验证, 则 F 在(2.6)的加法和乘法下构成一个整环, 且

$$\begin{aligned}O_F &= \frac{O_R}{s}, \quad \forall s \in R^* \\ 1_F &= \frac{1_R}{1_R} = \frac{s}{s}, \quad \forall s \in R^*\end{aligned}$$

那么对任意 F 中非零元 $\frac{r}{s} (r \neq 0)$, $\frac{s}{r}$ 是有意义的, 且 $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{r} = 1_F$, 于是 F 是域, 称为 R 的分式域.

命题 2.6. 设 R 是整环, F 是 R 的分式域. 若 φ 是 $R \rightarrow F'$ 的单同态, 其中 F' 是域, 则存在唯一的同态 $\psi: F \rightarrow F'$ 使得如下交换图成立, 即分式域唯一.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & F' \\ \downarrow f & \nearrow \psi & \\ F & & \end{array}$$

其中 $f: r \mapsto \frac{r}{1}$ 为自然嵌入.

证明. 存在性: 定义 $\psi: \frac{r}{s} \mapsto \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$, 容易验证 ψ 是环同态, 且 $\varphi = \psi \circ f$. 下面主要证明唯一性.

若 $F \rightarrow F'$ 的域同态 ψ_1, ψ_2 满足 $\varphi = \psi_1 \circ f = \psi_2 \circ f$, 即 $\psi_1\left(\frac{r}{1}\right) = \psi_2\left(\frac{r}{1}\right), \forall r \in R$, 我们证明 $\psi_1 = \psi_2$. 设 $r \neq 0$, 则由域之间同态的性质有

$$\psi_1\left(\frac{1}{r}\right) = \psi\left(\left(\frac{r}{1}\right)^{-1}\right) = \psi_1\left(\frac{r}{1}\right)^{-1} = \psi_2\left(\frac{r}{1}\right)^{-1} = \psi_2\left(\frac{1}{r}\right)$$

于是对于 F 中非零元 $\frac{r}{s} (r \neq 0)$, 我们有

$$\psi_1\left(\frac{r}{s}\right) = \psi_1\left(\frac{r}{1} \cdot \frac{1}{s}\right) = \psi_1\left(\frac{r}{1}\right) \cdot \psi_1\left(\frac{1}{s}\right) = \psi_2\left(\frac{r}{1}\right) \cdot \psi_2\left(\frac{1}{s}\right) = \psi_2\left(\frac{r}{s}\right)$$

且环同态, 都自然的将零元映为零元, 于是 $\psi_1 = \psi_2$. ■

设 R 是交换幺环, I 是 R 的理想, 则 R/I 是交换幺环, 若要求 R/I 是整环, 则要求, 若

$$(a + I) \cdot (b + I) = a \cdot b + I = I$$

能够推出 $a + I = I$ 或者 $b + I = I$, 换句话说 $ab \in I$, 能够推出 $a \in I$ 或者 $b \in I$. 于是引出

定义 2.1. 设 R 是环, $I \neq R$ 是 R 中理想, 称 I 是素理想, 如果对于 $ab \in I$, 能推出 $a \in I$ 或者 $b \in I$.

设 R 是交换幺环, I 是 R 中理想, 如果要求 R/I 是域, 首先要保证 R/I 只有平凡的理想, 这意味着包含 I 的 R 中理想只能是 I 或者是 R . 自然引出

定义 2.2. 设 R 是环, $I \neq R$ 是 R 中理想, 称 I 是 R 中极大理想, 如果包含 I 的理想只有 I 和 R .

命题 2.7. 在交换幺环 R 中, I 是 R 中理想, 则 R/I 是域当且仅当 I 是极大理想.

证明. 当 R/I 是域时, 则对任意 $a \notin I$, 存在 $b \in R$, 使得 $ab - 1_R \in I$. 于是若 R 中理想 J 满足 $J \supsetneq I$, 则存在 $a \in J \setminus I$, 以及相应的 $b \in R$, 使得 $ab - 1_R \in I \subset J$, 注意 $ab \in J$, 这意味着 $1_R = ab - (ab - 1_R) \in J$, 于是 $J = R$.

反之, 当 I 是极大理想时, 由 R/I 中理想与 R 中包含 I 的理想有一一对应关系, 这意味着 R/I 只有平凡理想, 则对任意 $a \notin I$, 有

$$R/I = \langle a + I \rangle = \{(a + I)(b + I) \mid b \in R\} = \{ab + I \mid b \in R\}$$

特别地, 存在某个 $b \in R$, 使得 $1_R + I = (a + I)(b + I)$, 这意味着 $a + I$ 有乘法逆元, 于是 R/I 是域. ■

2.2 整环上的讨论

设 R 是整环, $a, b \in R$, 若存在 $c \in R$, 使得 $a = bc$, 则称 $b|a$, b 视为 a 的因子. 记 U 是 R 中乘法可逆元全体, 其中元素称为单位. 若存在 $c \in U$, 使得 $a = bc$, 则称 a 与 b 相伴, 记为 $a \sim b$. 注意相伴关系是一种等价关系.

设 R 是整环, 且 $a \in R$, 称与 a 相伴的元素以及单位是 a 的平凡因子. 如果 $a \in R^* \setminus U$ (即不考虑单位) 没有非平凡因子, 则称 a 是 R 中的不可约元素.

设 R 是整环, 如果 $p \in R^* \setminus U$, 满足 $p \mid ab$, 能够推出 $p \mid a$ 或者 $p \mid b$, 则称 p 是 R 中素元素.

设 R 是整环, 从理想的角度来看, $a \in R$ 是不可约元当且仅当 $\langle a \rangle$ 是极大主理想 (这里我们指包含 $\langle a \rangle$ 的主理想只有 $\langle a \rangle$ 和 R). $p \in R$ 是素元, 当且仅当 $\langle p \rangle$ 是素理想.

简单事实有: 素元都是不可约元.

称整环 R 满足素性条件, 如果 R 中不可约元都是素元, 即不可约元与素元等价.

设 R 是整环, $a, b \in R$, 如果存在 a, b 的公因子 d , 满足对任意 a, b 的公因子 d_1 , 都有 $d_1 \mid d$, 则称 d 是 a, b 的最大公因子, 简单事实是: 最大公因子在相伴意义下唯一, 所以如果 d 是 a, b 的一个最大公因子, 我们就简记为 $d \sim (a, b)$.

定义 2.3. 设 R 是整环, 如果 R 中任何两个元素都有最大公因子, 则称 R 是满足最大公因子条件的整环, 简称为 GCD 整环.

在 GCD 整环中, 有如下简单性质: $c(a, b) \sim (ca, cb)$; $((a, b), c) \sim (a, (b, c))$; 于是当 $(a, b) \sim 1, (a, c) \sim 1$ 时,

$$(a, bc) \sim ((a, ac), bc) \sim (a, (ac, bc)) \sim (a, c) \sim 1.$$

引理 2.8. 设 R 是 GCD 整环, 则 R 满足素性条件.

证明. 设 p 是 R 中不可约元, 若 $p \mid ab$, 且 $p \nmid a, p \nmid b$, 这意味着 $(p, a) \sim 1, (p, b) \sim 1$, 于是 $(p, ab) \sim 1$, 这与 $p \mid ab$ 矛盾, 于是 p 是素元. ■

定义 2.4. 设 R 是整环, 若对任意 $a, b \in R$, 存在 $d \in R$, 使得 $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle d \rangle$, 即主理想加主理想仍是主理想, 则称 R 是 Bezout 整环.

引理 2.9. Bezout 整环都是 GCD 整环.

证明. 对任意 $a, b \in R$, 设 $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle d \rangle$. 由 $\langle a \rangle \subset \langle d \rangle, \langle b \rangle \subset \langle d \rangle$, 得 d 是 a, b 的公因子. 且存在 $u, v \in R$, 使得 $au + bcv = d$, 这意味着 a, b 的任何公因子都要整除 d , 于是 d 就是 a, b 的一个最大公因子. ■

定义 2.5. 设 R 是整环, 如果 R 中理想都是主理想, 则称 R 是主理想整环, 简称为 PID 整环.

由定义, 主理想整环是比 Bezout 整环性质更好的环.

定义 2.6. 设 R 是整环, 称 R 是唯一分解整环 (简称为 UFD 整环), 如果对任意 $a \in R^* \setminus U$, a 可分解为有限不可约元素的积, 且在相伴意义下, 分解唯一, 即若

$$a = p_1 \cdots p_s = q_1 \cdots q_m$$

其中 p_i, q_j 都是不可约元, 则 $s = m$, 且存在 $\sigma \in S_m$, 使得 $q_i \sim p_{\sigma(i)}$.

定义 2.7. 设 R 是整环, 如果 R 中不存在真因子序列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, 其中 a_{i+1} 是 a_i 的真因子, 则称 R 满足因子链条件.

设整环 R 满足因子链条件, 意味着若 $a \in R^* \setminus U$, 则 a 从任意方式都可分解为有限不可约元素的乘积. 从理想的角度看, 若有主理想升链

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle a_n \rangle \subset \cdots$$

则存在 j , 使得当 $k \geq j$ 时, $\langle a_k \rangle = \langle a_j \rangle$.

定理 2.10. 设 R 是整环, 则 R 是唯一分解整环当且仅当 R 满足素性条件和因子链条件.

证明. 设 R 是唯一分解整环, 则对任意 $a, b \in R$, 由唯一有限分解性, R 满足因子链条件, 且可以将 a, b 表示为如下形式

$$\begin{aligned} a &= p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}, \quad r_i \geq 0 \\ b &= p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}, \quad k_i \geq 0 \end{aligned}$$

其中 p_i 是不可约元, 且 p_i^0 应视为 R 中么元或者某个单位. 那么 $d = \prod_{i=1}^s p_i^{\min\{r_i, k_i\}}$ 就是 a, b 的一个最大公因子, 由 [引理, 2.8], R 满足素性条件.

反之, 因子链条件保证对任意 $a \in R^* \setminus U$, a 至少存在一种有限分解. 若

$$a = p_1 \cdots p_s = q_1 \cdots q_m$$

是 a 的两种不可约分解, 则由素性条件, 对每个 p_i , 存在 q_j , 使得 $p_i \sim q_j$, 这也意味着 $s \leq m$, 否则 p_s 只能是单位, 矛盾. 同理, 应该也要有 $m \leq s$, 于是唯一性即证. ■

命题 2.11. 主理想整环是唯一分解整环.

证明. 设 R 是主理想整环, 由 [引理, 2.8, 2.9], R 满足素性条件. 若

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle a_n \rangle \subset \cdots$$

是 R 中主理想升链, 则 $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle$ 是 R , 其中验证最关键的是 I 是否构成子环, 即若 $x, y \in I$, 设 $x \in \langle a_k \rangle, y \in \langle a_j \rangle$, 不妨设 $j \geq k$, 则 $x - y \in \langle a_j \rangle \subset I$.

由 I 是主理想, 则存在 $d \in I$, 使得 $I = \langle d \rangle$, 特别地, 由 $d \in I$, 得到存在 j , 使得 $d \in \langle a_j \rangle$, 于是 $\langle d \rangle \subset \langle a_j \rangle$, 那么就有 $\langle d \rangle = \langle a_j \rangle$. 于是当 $k \geq j$ 时, $\langle a_k \rangle = \langle a_j \rangle$. ■

定义 2.8. 设 R 是整环, 若存在映射 $\delta: R^* \rightarrow N$, 满足对任意 $a \in R, b \in R^*$, 存在 $q, r \in R$, 使得 $a = bq + r$, 其中 $r = 0$, 或者有 $\delta(b) < \delta(r)$, 则称 R 是欧几里得整环, δ 为 R 的一个欧几里得赋值.

命题 2.12. 欧几里得整环是主理想整环, 从而是唯一分解整环.

证明. 设 R 是欧几里得整环, δ 为 R 的一个欧氏赋值, I 是 R 中一个理想, 则 $\delta(I)$ 是 N 的一个子集, 从而存在最小元素, 取 $a \in I$, 满足 $\delta(a) = \min \{\delta(I)\}$. 则由 a 的取法, 对任意 $b \in I$, 一定有 $a \mid b$, 于是 $I = \langle a \rangle$, 即 R 是主理想整环. ■

例 2.1. 整环 $R = \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$ 是主理想整环但不是欧几里得环.

证明. 见: An Elementary Proof by Robert A. Wilson (QMUL) ■

2.3 唯一分解多项式环

设 R 是环, 一个 R 上的多项式是指如下形式

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_i \in R, \quad n \geq 0.$$

a_i 称为多项式系数. 我们记 $R[x]$ 为系数在 R 上的所有多项式全体, 即

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in R, 0 \leq n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

两个多项式相等如果它们的系数完全相同. 如果 $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 且 $a_n \neq 0$, 则我们称 n 是多项式 $p(x)$ 的次数, 记为 $\deg p$. 系数 a_n 称为多项式 $p(x)$ 的首项系数. 我们定义零多项式的次数为 $-\infty$.

对于一个多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 当 $k > \deg p$ 时, 我们假定 $a_k = 0$. 那么给定两个多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 和 $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$, 我们就可以定义它们的和 $p(x) + q(x)$ 为

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i.$$

定义乘积 $p(x)q(x)$ 为

$$(pq)(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i,$$

其中

$$c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}.$$

则在这两种运算下, $R[x]$ 构成一个环. 且若 1_R 是 R 中么元, 则 1_R 也是 $R[x]$ 中么元.

当 R 为整环时, 对任意 $f, g \in R[x]$, 有 $\deg(fg) = \deg f + \deg g$, 这意味着 $R[x]$ 也是整环, 同时 $R[x]$ 中的单位一定也是 R 中单位, 因为若 $\deg f > 0$, 不会存在 $g \in R[x]$, 使得

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g = \deg(1_R) = 0.$$

引理 2.13. 若 R 是域, 则 $R[x]$ 是欧几里得环.

证明. 我们只要说明对任意 $f \in R[x], 0 \neq g \in R[x]$, 使得存在 $q, r \in R[x]$, 满足 $f = qg + r$, 其中 $r = 0$ 或者 $\deg r < \deg g$, 这样 \deg 就是 $R[x]$ 中的一个欧氏赋值, 从而 $R[x]$ 是欧几里得环.

除去平凡的情况, 设 $\deg f = n, \deg g = m$, 假定结论对次数小于 n 多项式成立, 不妨设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, \quad n > m$$

则

$$\tilde{f} = f - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g$$

的次数小于 n , 由归纳假设即得. ■

设 R 是唯一分解整环, 对于 $f \in R[x]$, 下面我们记 $\gcd(f)$ 表示 f 的各项系数的最大公因子, 如果 $\gcd(f) \sim 1$, 则称 f 是本原多项式. 对任意 $f \in R[x]$, f 都可以写成 $f = cf_1$, 其中 f_1 是本原多项式, 且容易看出在相伴意义下, 这种分解唯一, 即若 $f = c_1f_1 = c_2f_2$, 其中 f_1, f_2 是本原的, 则 c_1, c_2 相差一个 R 中单位.

设 R 是唯一分解整环, 若 $f \in R[x]$ 是本原的, 如果 f 有非平凡因子 g , 则 $\deg g > 0$. 那么对任意次数大于零的 $f \in R[x]$, 由次数的有限性, f 可有限分解为

$$f = u \cdot f_1 \cdots f_s, \quad \deg f_i > 0, \quad u \in R$$

其中 f_i 是 $R[x]$ 中不可约元 (自然也是本原的), 再由 $u \in R$ 可以唯一有限分解, 故 f 在 $R[x]$ 中存在有限不可约分解.

引理 2.14 (Gauss 引理). 设 R 是唯一分解整环, $f_1, f_2 \in R[x]$ 是本原的, 则 f_1f_2 也是本原的.

证明. 假如 $\gcd(f_1f_2)$ 不是单位, 则由 R 是唯一分解整环, 可以取 $\gcd(f_1f_2)$ 的一个不可约因子 p , 其也是 R 中的素元, 于是 $\tilde{R} = R/\langle p \rangle$ 是整环, 则 $\tilde{R}[x]$ 也是整环. 考虑

$$\begin{aligned} \varphi : R[x] &\longrightarrow \tilde{R}[x] \\ \sum_{i=0}^m a_i x^i &\longmapsto \sum_{i=0}^m (a_i + \langle p \rangle) x^i \end{aligned}$$

则 φ 是环同态, 且 $O_{\tilde{R}} = \langle p \rangle = \varphi(f_1f_2) = \varphi(f_1)\varphi(f_2)$, 这意味着 $\varphi(f_1) = O_{\tilde{R}}$ 或者 $\varphi(f_2) = O_{\tilde{R}}$, 即 $p \mid \gcd(f_1)$ 或者 $p \mid \gcd(f_2)$, 但是这与 f_1, f_2 本原相矛盾. ■

引理 2.15. 设 R 是唯一分解整环, F 是 R 的分式域, 则对任意 $0 \neq f \in F[x]$, 存在 $r \in F$, 和 $f_1 \in R[x]$ 是本原的, 使得 $f = rf_1$, 且此分解在 R 中相伴关系下唯一

证明. 存在性就是通分, 即存在 $b \in R^*$, 使得 $f = \frac{f'}{b}$, 其中 $f' \in R[x]$, 于是存在 $c \in R$, 使得 $f = \frac{c}{b}f_1$, 其中 $f_1(x) \in R[x]$ 是本原的, 令 $r = \frac{c}{b}$ 即得. 若 f 存在两种分解, 记为

$$f = \frac{c_1}{b_1}f_1 = \frac{c_2}{b_2}f_2,$$

其中 $f_1, f_2 \in R[x]$ 是本原的. 则有 $b_2c_1f_1 = c_2b_1f_2$, 于是存在 R 中单位 u , 使得 $b_2c_1 = ub_1c_2$, 即 $\frac{c_1}{b_1} = u\frac{c_2}{b_2}$. ■

设 R 是唯一分解整环, F 是 R 的分式域, $f_1, f_2 \in R[x]$ 是本原的, 且存在 $u \in F$, 使得 $f_1 = uf_2$, 则由 [引理, 2.15] 分解的唯一性, 一定有 $u \in R$.

引理 2.16. 设 R 是唯一分解整环, F 是 R 分式域, 若 $f(\deg f > 0)$ 是 $R[x]$ 中的不可约元, 则 f 也是 $F[x]$ 中的不可约元.

证明. 若 f 在 $F[x]$ 中存在真因子, 即存在 $f_1, f_2 \in F[x]$, 满足 $f = f_1 f_2$, 其中 $\deg f_1 > 0, \deg f_2 > 0$. 则由 [引理, 2.15], 存在 $r_1, r_2 \in F$, 使得 $f = r_1 r_2 f'_1 f'_2$, 其中 f'_1, f'_2 是 $R[x]$ 中次数大于零的本原多项式. 由 [引理, 2.14], $f'_1 f'_2$ 也是本原的, 那么就有 $r_1 r_2 \in R$, 这意味着 f 在 $R[x]$ 中可分解, 矛盾. ■

定理 2.17. 设 R 是唯一分解整环, 则 $R[x]$ 也是唯一分解整环.

证明. 对于非平凡的情形, 考虑 $f \in R[x]$, 满足 $\deg f > 0$, 我们已经说明了 f 存在有限分解, 若 f 存在两种有限分解

$$f = (u_1 \cdots u_k) p_1 \cdots p_s = (v_1 \cdots v_l) q_1 \cdots q_t, \quad u_m, v_n \in R, \quad \deg p_i > 0, \quad \deg q_j > 0$$

其中 u_m, v_n 是 R 中不可约元; p_i, q_j 是 $R[x]$ 中的不可约元, 由 [引理, 2.14], $p_1 \cdots p_s$ 与 $q_1 \cdots q_t$ 也是 $R[x]$ 中本元多项式, 则 $u_1 \cdots u_k$ 与 $v_1 \cdots v_l$ 相差一个 R 中单位, 从而由 R 是唯一分解整环, 得 $k = j$, 且存在置换 $\sigma \in S_k$, 使得 $u_i \sim v_{\sigma(i)}$.

再由 [引理, 2.13], f 在 $F[x]$ 中是唯一分解的, 且由 [引理, 2.16], p_i, q_j 也是 $F[x]$ 中的不可约元, 故 $s = t$, 且对每个 p_i , 存在 q_j , 和 $c_i \in F$, 使得 $p_i = c_i q_j$, 那么由 [引理, 2.15] 分解的唯一性, 一定有 $c_i \in R$, 且 $c_1 \cdots c_s$ 是 R 中单位, 于是每个 c_i 都是 R 中单位, 这就证明了唯一性. ■

3 群

3.1 群行列式

定义 3.1. 设 $G = \{g_1, \cdots, g_n\}$ 是 n 阶群, 将 g_i 对应变量 x_i , 称 n 阶矩阵 $X_G = (x_i x_j^{-1})$ 为 G 的一个群矩阵, 其中 $x_i x_j^{-1}$ 表示 $g_i g_j^{-1}$ 所对应的变量, 称 X_G 的行列式 D_G 的群行列式.

设 $G = \{g_1, \cdots, g_n\} = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 是群 G 的两种排序方式, 设 $\sigma \in S_n$, 满足 $a_i = g_{\sigma(i)}$, 记 $P = (e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)})^T$, 其中 e_i 是标准单位列向量, 则有

$$P X_G P^{-1} = P X_G P^T = (x_{\sigma(i)} x_j^{-1}) P^T = (x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)}^{-1})$$

于是群矩阵依赖于群元素的排列顺序, 但是不同的群矩阵是相似的, 因此群行列式与群元素的排列无关, 一般将 g_1 写为幺元.

例 3.1. 设 $G = \{g_1, \dots, g_4\}$ 为 Klein 群, 其中 $g_2^2 = g_3^2 = g_4^2 = g_2g_3g_4 = g_1$, 则其群行列式为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

例 3.2. 设 $G = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 为循环群, 其中 $s_i = s_2^{i-1}$, 则容易得到 G 的群矩阵为循环矩阵

$$X_G = \begin{pmatrix} x_1 & x_n & x_{n-1} & \cdots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_n & \cdots & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \cdots & x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \end{pmatrix}$$

这个矩阵的行列式为

$$D_G = \prod_{i=0}^{n-1} (x_1 + x_2\omega^i + \cdots + x_n\omega^{(n-1)i}),$$

其中 ω 是 n 次本原单位根.

例 3.3. 注意 n 阶群 $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ 的群矩阵 X_G 的每行每列都是 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的全排列, 因此 G 可以写为

$$X_G = \sum_{i=1}^n x_i B_i$$

其中 B_i 是置换矩阵, 我们称 (自称) B_i 是 x_i 在 X_G 中的位置.

由定义 B_1 的第 i 行中, 唯一某个第 j 列元素为 1, 当且仅当 $x_1 = x_i x_j^{-1}$, 即 $x_j = x_1^{-1} x_i$, 即当且仅当 $x_1 x_j = x_i$. 若我们定义

$$\delta(x_k, x_i x_j) = \begin{cases} 1, & x_i x_j = x_k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 B_1 可以表示为 $B_1 = (\delta(x_i, x_1 x_j))$. 考虑 $B_1 B_2$ 的第 (i, j) 元即为

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta(x_i, x_1 x_k) \cdot (x_k, x_2 x_j)$$

则 $d_{ij} = 1 \iff x_1 x_k = x_i$ 且 $x_2 x_j = x_k$, 即当且仅当 $x_1^{-1} x_i = x_2 x_j$, 即当且仅当 $x_i = (x_1 x_2) x_j$. 于是 $B_1 B_2$ 就是 $x_1 x_2$ 在 X_G 中的位置.

置换矩阵全体构成一个同构于 S_n 的群, 不妨就记为 S_n , 这样就有一个自然的同态

$$\pi : G \longrightarrow S_n \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$g_i \longmapsto B_i$$

这个是表示论的起源.

定义 3.2. 设 G 是一个群, 称 G 到 \mathbb{C}^* 的函数 χ 为 G 的一个特征, 如果对任意 $a, b \in G$, 都有 $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. 换句话说, G 的特征就是 G 到 \mathbb{C}^* 的群同态.

引理 3.1. 记 Abel 群 G 的所有特征的全体为 \widehat{G} . 对任意 $\chi, \psi \in \widehat{G}$, 定义 $\phi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ 为

$$\phi(x) = \chi(x)\psi(x).$$

则 $\phi \in \widehat{G}$, 记为 $\phi = \chi \cdot \psi$. 进一步, (\widehat{G}, \cdot) 为 Abel 群, 称 \widehat{G} 为 G 的特征群.

证明. 容易验证 $\phi \in \widehat{G}$, 即运算 \cdot 是合理的. 这个运算实际上就是函数值的逐点相乘, 自然满足交换律和结合律. 于是 \widehat{G} 是一个半群. 记 χ_1 为 G 的主特征, 对任意 $\chi \in \widehat{G}$, $\chi_1 \cdot \chi(s) = \chi_1(s)\chi(s) = \chi(s)$. 故 $\chi_1 \cdot \chi = \chi$, 即 χ_1 为么元. 对任意 $\chi \in \widehat{G}$, 定义 $\mu(s) = \chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$, 容易看出 $\mu \in \widehat{G}$, 且 $\mu \cdot \chi(s) = \chi(s)\overline{\chi(s)} = 1 = \chi_1(s)$, 即 μ 是 χ 的逆元. 于是 \widehat{G} 为 Abel 群. ■

例 3.4. 设 $G = \langle a \rangle$ 为 n 阶循环群, 若 $\chi \in \widehat{G}$, 则 $\chi(a)^n = \chi(a^n) = 1$, 即 $\chi(a)$ 为 n 次单位根. 而 $\chi(a)$ 的取值决定了 χ . 设 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$, 令 $\chi_i(a) = \omega^{i-1}$, 则 $\chi_i(a^k) = \omega^{(i-1)k}$, 其中 $i, k = 1, 2, \dots, n$. 容易看出 $\widehat{G} = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$, 且 χ_2 为 n 阶元, 则 \widehat{G} 为 n 阶循环群, 从而 $G \cong \widehat{G}$.

上述例子中的结论并不是偶然的, 实际上我们有

命题 3.2. 设 G 是一个有限 Abel 群, 则 $G \cong \widehat{G}$.

证明. 有限 Abel 群是循环群的直积, 故不妨设 $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$, 其中 H_i 为 n_i 阶循环群. 对任意 $\chi_i \in \widehat{H_i}$, 定义

$$\chi(a_1 a_2 \cdots a_k) = \chi_1(a_1) \chi_2(a_2) \cdots \chi_k(a_k).$$

容易验证 $\chi \in \widehat{G}$. 于是有映射

$$\phi: \widehat{H_1} \times \widehat{H_2} \times \cdots \times \widehat{H_k} \rightarrow \widehat{G}.$$

可以验证这是一个群同态且是单射. 比较元素个数可知 ϕ 也是满射, 从而是同构. 又由 $\widehat{H_i} \cong H_i$ 知 $G \cong \widehat{G}$. ■

引理 3.1 的结论对于非 Abel 群也成立, 即非 Abel 群的特征的全体也构成一个 Abel 群, 不过我们不用 \widehat{G} 表示这个特征群. 若 χ 为 G 的特征, 由于 $\chi(G)$ 为 Abel 群, 则由群的同态基本定理可知 $G/\text{Ker}\chi \cong \chi(G)$. 故 $G^{(1)} \subseteq \text{Ker}\chi$, 其中 $G^{(1)}$ 为 G 的换位子群. 于是我们自然可以得到

推论 3.3. 设 G 为有限群, 则 G 的特征群同构于 $G/G^{(1)}$.

Abel 群的不同特征之间有一个很好的关系——正交关系. 对于 G 的特征 χ , 我们考虑 $\sum_{s \in G} \chi(s)$. 若 χ 不是主特征, 则存在 $t \in G$ 使得 $\chi(t) \neq 1$. 于是

$$\sum_{s \in G} \chi(ts) = \chi(t) \sum_{s \in G} \chi(s).$$

注意到 $\sum_{s \in G} \chi(ts) = \sum_{s \in G} \chi(s)$, 故

$$(\chi(t) - 1) \sum_{s \in G} \chi(s) = 0.$$

从而我们有

引理 3.4. 设 χ 为有限群 G 的特征, 则 $\sum_{s \in G} \chi(s) = \begin{cases} 0, & \chi \neq \chi_1, \\ |G|, & \chi = \chi_1. \end{cases}$

进一步, 对于特征 χ, ψ , 由于 $\phi = \chi \cdot \psi^{-1}$ 也是特征, 这里 $\psi^{-1}(s) = \psi(s^{-1})$ 为 ψ 在 \hat{G} 中的逆元. 利用上述引理可得

命题 3.5. 设 χ, ψ 为有限群 G 的特征, 则

$$\sum_{s \in G} \chi(s) \psi(s^{-1}) = \begin{cases} 0, & \chi \neq \psi, \\ |G|, & \chi = \psi. \end{cases}$$

设 $G = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 为 Abel 群, 于是 G 的特征群 \hat{G} 也有 n 个元, 设为 $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$. 令

$$A = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \begin{pmatrix} \chi_1(s_1) & \cdots & \chi_1(s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_n(s_1) & \cdots & \chi_n(s_n) \end{pmatrix}.$$

注意到对于任意特征 ψ 有 $\psi(s^{-1}) = \overline{\psi(s)}$, 上述命题表明 A 的行向量在 \mathbb{C}^n 的标准内积下是两两正交的, 即 A 为酉矩阵. 因此上述命题也称为特征的正交关系.

利用群的特征, Dedekind 得到了如下结论.

定理 3.6. 设 $G = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 为 Abel 群, 则群行列式 D_G 可以分解为不同的 n 个一次齐次多项式的乘积:

$$D_G = \prod_{\chi \in \hat{G}} \left(\sum_{i=1}^n \chi(s_i) x_i \right).$$

证明. 对任意 $\chi \in \hat{G}$, 将第 i ($i = 2, 3, \dots, n$) 行分别乘以 $\chi(s_i)$ 加到第一行得 $\sum_{i=1}^n \chi(s_i) x_i$ 是 D_G 的因子. 这些因子对于不同的 χ 是两两互素的. 因此, $\prod_{\chi \in \hat{G}} (\sum_{i=1}^n \chi(s_i) x_i)$ 是 D_G 的因子. 比较两者的次数和 x_1^n 的系数即得. ■

3.2 交错单群 $A_n (n \geq 5)$

对任意 $\sigma \in S_n$, σ 都可以写为不相交轮换的乘积:

$$\sigma = (i_1 \cdots i_k) \cdots (j_1 \cdots j_t) \quad (3.1)$$

且在不记顺序情形之下, (3.1)表法唯一, 称为是 σ 的循环分解.

令 m_k 表示 σ 分解式 (3.1) 中长度为 k 的轮换个数, 则我们可以记

$$\alpha_\sigma = (m_1, m_2, \dots, m_n), \quad \sum_{k=1}^n km_k = n.$$

我们用向量 $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ 表示一种轮换型.

引理 3.7. 设 $\sigma, \tau \in S_n$, 且 $\tau = (i_1 \cdots i_k)$, 则

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_k)) \quad (3.2)$$

证明. 对于任意 $j \in \{1, \dots, n\}$, 当 $\sigma^{-1}(j) \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, 即 $j \notin \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$ 时,

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(j) = j = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_k))(j)$$

当 $\sigma^{-1}(j) \in \{i_1, \dots, i_k\}$, 即 $j \in \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$ 时, 不妨设 $j = \sigma(i_s)$, 则

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(j) = \sigma(i_{s+1}) = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_k))(j)$$

这样即得. ■

由 [引理, 3.7], 我们不难得到

命题 3.8. 设 $\sigma, \tau \in S_n$, 则 σ, τ 相互共轭当且仅当 $\alpha_\sigma = \alpha_\tau$, 即 σ, τ 要有相同的轮换型.

群 S_n 是其所有互不相交的共轭类的并集. 因此, 群的阶等于所有共轭类大小之和:

$$|S_n| = \sum_{C \in \text{Conj}(S_n)} |C| \quad (3.3)$$

其中 $\text{Conj}(S_n)$ 表示 S_n 共轭类的集合.

对于给定的轮换型 \vec{m} , 其对应的共轭类 $C_{\vec{m}}$ 中包含的元素个数 (即具有该轮换型的置换个数) 由以下公式给出:

$$|C_{\vec{m}}| = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n k^{m_k} \cdot m_k!} \quad (3.4)$$

式(3.4)的组合意义如下:

- 分子 $n!$ 是 n 个元素的全排列;
- 分母 k^{m_k} 消除了每个长度为 k 的轮换内部循环移位带来的重复;
- 分母 $m_k!$ 消除了 m_k 个相同长度轮换之间顺序交换带来的重复;

例 3.5. 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 有如下组合恒等式成立

$$1 = \sum_{\substack{0 \leq m_k \leq n; \\ \sum_{k=1}^n km_k = n}} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(m_k)! \cdot k^{m_k}}$$

证明. 将共轭类大小公式(3.4)代入式 (3.3) , 就有

$$n! = \sum_{\substack{0 \leq m_k \leq n \\ \sum_{k=1}^n km_k = n}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n k^{m_k} \cdot m_k!}$$

两边同时除以 $n!$ 即得. ■

引理 3.9. 对于 $n \geq 3$, 交错群 A_n 由所有的 3-轮换生成.

证明. A_n 中的元素是偶置换, 即偶数个对换的乘积. 因此只需证明任意两个对换的乘积可以写成 3-轮换的乘积即可. 设 i, j, k, l 互不相同, 则

$$\begin{aligned} (ij)(jk) &= (ijk) \\ (ij)(kl) &= (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl) \end{aligned} \tag{3.5}$$

式(3.5)已经包含了所有可能轮换乘积的情形, 这样我们就完成了证明. ■

引理 3.10. 对于 $n \geq 5$, A_n 中所有的 3-轮换在 A_n 中共轭.

证明. 由 [命题, 3.8], 在 S_n 中, 所有的 3-轮换属于同一个共轭类. 设 $\tau \in S_n$ 使得 $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma_2$, 其中 σ_1, σ_2 为任意两个 3-轮换.

- 若 $\tau \in A_n$, 则结论显然成立.
- 若 $\tau \notin A_n$ (即 τ 为奇置换), 由于 $n \geq 5$, 我们总可以找到两个元素 d, e 不在 σ_1 的变动元中. 令 $\tau' = \tau(de)$. 此时 τ' 为偶置换, 即 $\tau' \in A_n$. 且由于 (de) 与 σ_1 不相交, (de) 与 σ_1 可交换, 故:

$$\tau'\sigma_1(\tau')^{-1} = \tau(de)\sigma_1(de)^{-1}\tau^{-1} = \tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma_2$$

综上, 在 $n \geq 5$ 时, 任意两个 3-轮换在 A_n 中也是共轭的. ■

定理 3.11. 当 $n \geq 5$ 时, 交错群 A_n 是单群.

证明. 设 $N \neq \{e\}$ 是 A_n 的正规子群, 我们要证明 $N = A_n$. 由 [引理, 3.9], 我们只要证明 N 包含 A_n 中所有 3-轮换. 再由 [引理, 3.10], 我们只要证明 N 中有一个 3-轮换.

任取 $\sigma \in N, \sigma \neq (1)$. 我们对 σ 的循环分解进行分类讨论:

情形 1: σ 的分解中包含一个长度 $r \geq 4$ 的轮换

不妨设 $\sigma = (123\dots r)\tau$, 其中 τ 是与其他元素不相交的置换. 令 $\delta = (123) \in A_n$. 考虑换位子 $\rho = \sigma\delta\sigma^{-1}\delta^{-1}$. 由于 $N \trianglelefteq A_n$, 故 $\rho \in N$.

$$\begin{aligned}\rho &= \sigma(123)\sigma^{-1}(132) \\ &= (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))(132) \\ &= (234)(132) \\ &= (124)\end{aligned}$$

计算结果 (124) 是一个 3-轮换. 故 N 包含 3-轮换.

情形 2: σ 的分解中包含至少两个不相交的 3-轮换

不妨设 $\sigma = (123)(456)\tau$. 令 $\delta = (124) \in A_n$. 同样考虑换位子 $\rho = \sigma\delta\sigma^{-1}\delta^{-1} \in N$.

$$\begin{aligned}\rho &= \sigma(124)\sigma^{-1}(142) \\ &= (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(4))(142) \\ &= (235)(142) \\ &= (14235)\end{aligned}$$

此时 ρ 是一个 5-轮换. 这将我们带回了**情形 1** (循环长度 ≥ 4). 对 ρ 再次应用**情形 1** 的方法, 即可得到 N 包含 3-轮换.

情形 3: σ 是若干不相交的对换 (2-轮换) 之积

由于 σ 是偶置换, 它至少包含两个对换. 不妨设 $\sigma = (12)(34)\tau$, 其中 τ 固定 $1, 2, 3, 4$. 由于 $n \geq 5$, 必然存在元素 5. 令 $\delta = (125) \in A_n$. 构造元素 $\sigma' = \delta\sigma\delta^{-1} \in N$, 则

$$\sigma' = (125)[(12)(34)\tau](152) = (25)(34)\tau$$

注意 δ 仅影响 $1, 2, 5$, 而 τ 与这些无关, 故 τ 保持不变. 现在考虑 $\sigma'\sigma^{-1} \in N$:

$$\begin{aligned}\sigma'\sigma^{-1} &= [(25)(34)\tau] \cdot [\tau^{-1}(34)(12)] \\ &= (25)(34)(34)(12) \\ &= (25)(12) \\ &= (125)\end{aligned}$$

结果 (125) 是一个 3-轮换. 故 N 包含 3-轮换.

综上所述, 无论 σ 属于何种循环类型, N 中必然包含一个 3-轮换. 因此 $N = A_n$, 即 A_n 是单群. ■

例 3.6. 当 $n \geq 5$ 时, S_n 的非平凡正规子群只有 A_n .

证明. 设 $\{e\} \neq N$ 是 S_n 的正规子群, 则 $A_n \cap N$ 也是 S_n 的正规子群, 由 A_n 是单群, 只可能是 $A_n \cap N = A_n$ 或者 $A_n \cap N = \{e\}$. 但是另一方面, 由第二同构有

$$|NA_n/A_n| = |A_n/(A_n \cap N)| \leq 2$$

这意味着不可能有 $A \cap N = \{e\}$, 于是 $A_n \subset N$. 若 $N \neq A_n$, 则 N 中有一个奇置换 σ , 那么 $\sigma A_n \subset N$ 就是 S_n 的所有奇置换, 此时 $N = S_n$. ■

例 3.7. 当 $n \geq 3$ 时, $C(S_n) = \{(1)\}$ 是平凡的.

证明. 对任意 $(1) \neq \sigma \in S_n$, 则存在 $i \in \{1, \dots, n\}$, 使得 $\sigma(i) \neq i$, 记 $j = \sigma(i)$. 由于 $n \geq 3$, 可取 k , 使得 i, j, k 互不相同. 考虑 $\tau = (jk)$, 则 $j = \sigma\tau(i) \neq \tau\sigma(i) = k$, 这意味着 $\sigma \notin C(S_n)$, 于是 $C(S_n) = \{(1)\}$. ■

例 3.8. 设 G 是置换群, 若 G 中有奇置换, 则 G 中存在指数为 2 的子群 H .

证明. 令 H 是 G 中所有偶置换的集合, 则 $H \triangleleft G$. 设 σ 是 G 的一个奇置换, 则 σH 是 G 的所有奇置换 (对于任意 G 的奇置换 τ , 有 $\tau = \sigma(\sigma^{-1}\tau) \in \sigma H$). 于是 $G = H \cup \sigma H$, 即 $[G : H] = 2$. ■

例 3.9. 设 G 是阶数为 $2n$ 的群, 其中 n 是奇数, 则 G 中存在 n 阶子群 H , 即 H 是指数为 2 的正规子群. 特别地, 当 $|G| \geq 6$, 且 $|G| \equiv 2 \pmod{4}$, 则 G 不是单群.

证明. 考虑 G 在 G 上的左平移作用, 其诱导了 $G \rightarrow S_G$ 的同态 φ , 且 φ 是单射. 因此可以将 G 等同 (群同构) 于 S_G 的子群 $\text{im}\varphi$. 设 g 是 G 的一个二阶元, 则 $\varphi(g)^2 = \varphi(g^2) = \text{id}$, 且 $\varphi(g)$ 没有不动点, 因此 $\varphi(g)$ 可以表示为 n 个不相交的 2-轮换之积, 即 $\varphi(g)$ 是一个奇置换, 由 [例, 3.8], 结论得证. ■

例 3.10. 设 G 是有限群, p 是 G 的最小素因子. 若 $[G : H] = p$, 则 $H \triangleleft G$.

证明. 考虑 G 在左陪集集合 $X = G/H$ 上的左平移作用. $|X| = [G : H] = p$. 设此作用诱导的同态为 $\varphi : G \rightarrow S_X \cong S_p$. 设 $K = \ker \varphi$. 根据同态基本定理, $G/K \cong \text{Im}(\varphi) \leq S_p$. 由此可知 $|G/K|$ 能够整除 $|S_p| = p!$. 同时

$$K = \ker \varphi = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} < H$$

这意味着 $|G/K|$ 是 p 的倍数, 且 $|G/K|$ 是 $|G|$ 的因子. 设 $|G/K| = mp$, 则 $m \mid (p-1)!$ 且 $m \mid |G|$, 但是注意 $(p-1)!$ 的素因子都小于 p , 以及 p 是 $|G|$ 的最小素因子, 综合只能是 $m = 1$, 即 $K = H$. ■

例 3.11. 在 A_4 中, 不存在指数为 2 的子群.

证明. 设 $H < A_4$, 且 $[A_4 : H] = 2$, 这意味着对任意 $g \notin H$, 有 $A_4 = H \cup gH$, 也就是有 $g^2 \in H$. 注意三轮换的阶为 3, 即有

$$(abc) = (abc)^4 = ((abc)^2)^2 \in H$$

但是 A_4 中有 $C_4^3 \times 2 = 8$ 个三轮换, 如果将其写出来即是

$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$$

即 $|H| \geq 8$, 这与 $|H| = 6$ 矛盾. ■

例 3.12. 6 阶群只有 \mathbb{Z}_6 和 S_3 .

证明. 设 G 是 6 阶非循环群, 由 sylow 定理 G 有 2 阶和 3 阶群 $\langle a \rangle$ 与 $\langle b \rangle$, 则 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$. 考虑 G 在 $G/\langle a \rangle$ 上的左诱导作用, 其诱导了一个同态 $\rho : G \rightarrow S_{G/\langle a \rangle} \cong S_3$, 我们如果能说明 ρ 是单的, 则比较两边阶数就有 $G \cong \text{im } \rho = S_{G/H} \cong S_3$.

若 $g \in \ker \rho$, 则 $g\langle a \rangle = \langle a \rangle$, 即 $g \in \langle a \rangle$, 因此若 $\ker \rho$ 非平凡, 则一定有 $g = a$, 那么就有 $a(b\langle a \rangle) = b\langle a \rangle$, 这意味着一定有 $ab = ba$, 那么 ab 的阶即是 6, 但是我们已经假定了 G 不是循环群, 矛盾. ■

3.3 有限群的合成序列

设 G 是群, H, K 是 G 的子群, 令

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

若我们要求 HK 是 G 的子群, 则首先要有 HK 中元素逆的全体 $KH \subset HK$, 即要有 $HK = KH$. 且当 $HK = KH$ 时,

$$(h_1k_1)(k_2^{-1}h_2^{-1}) = h_1(k_1h_2)'k_2' = h_1h_3k_3k_2' \in HK$$

即 HK 是 G 子群, 且

$$h_1K = h_2K \iff h_2^{-1}h_1 \in K \iff h_2^{-1}h_1 \in H \cap K \iff h_1(H \cap K) = h_2(H \cap K)$$

这样就得到

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

特别地, 当 H 或 K 是 G 正规子群, 则 HK 是 G 的子群.

设 G 是群, H_1, H_2, H_3 是 G 的子群, 则有

$$H_1 \cap (H_2H_3) \supset (H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3).$$

特别地, 当 $H_2 \subset H_1$ 或者 $H_3 \subset H_1$ 时, 有

$$H_1 \cap (H_2H_3) = (H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3). \quad (3.6)$$

定义 3.3. 设 G 为群, 设有 G 的子群列

$$G = G_1 \supsetneq G_2 \supsetneq \cdots \supsetneq G_{t+1} = \{e\} \quad (3.7)$$

若 $G_{i+1} \triangleleft G_i$, 则称(3.7)是 G 的次正规序列. 若还有 G_i/G_{i+1} 是单群, 则称(3.7)是 G 的合成序列, G_i/G_{i+1} 称为 G 的合成因子.

设 G 是有限群, 若 G 不是单群, 则取 H_1 是 G 的非平凡正规子群, 考虑 G/H_1 , 记 π_1 是 $G \rightarrow G/H_1$ 的自然同态. 若 G/H_1 不是单群, 取 H'_2 是 G/H_1 的非平凡正规子群, 则 $H_2 = \pi_1^{-1}(H'_2)$ 是 G 中真包含 H_1 的正规子群, 再考虑 G/H_2 . 由于群阶的有限性, 总能找到 G_2 , 使得 G/G_2 是单群, 再对 G_2 做相同操作, 有限步之后, 会得到

$$G_1 = G \supsetneq G_2 \supsetneq \cdots \supsetneq G_{k+1} = \{e\}$$

是 G 的一个合成序列.

我们上面的想法就是先找出 G 的一个极大正规子群 G_2 , 即包含 G_2 的正规子群只有 G_2 和 G , 但是过程有点啰嗦. 我们也可以这样来看: 假定 $G \neq \{e\}$, 令 \mathcal{S} 为 G 的所有真正规子群构成的集合, 即

$$\mathcal{S} = \{N \mid N \triangleleft G, N \neq G\}$$

平凡子群 $\{e\}$ 显然是 G 的真正规子群, 故 $\{e\} \in \mathcal{S}$, 这意味着 \mathcal{S} 非空且有限. 考虑

$$\mathcal{O} = \{|N| \mid N \in \mathcal{S}\}$$

由于 G 是有限群, \mathcal{O} 是自然数集的一个有限非空子集. 则 \mathcal{O} 中存在最大元素. 设 $m = \max(\mathcal{O})$. 我们在 \mathcal{S} 中选取一个阶数为 m 的子群 M , 即 $|M| = m$, 则 M 满足条件.

定理 3.12 (Jordan-Hölder). 设 G 是群, 若

$$G = G_1 \supsetneq G_2 \supsetneq \cdots \supsetneq G_{t+1} = \{e\}$$

$$G = H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_{s+1} = \{e\}$$

是 G 的两个合成序列, 则 $t = s$, 且对每个 i , 存在对应 i' , 使得 $H_i/H_{i+1} \cong G_{i'}/G_{i'+1}$.

证明. 对每个 H_i , 有

$$H_i = (H_i \cap H_1) \supset (H_i \cap G_2) \supset \cdots \supset (H_i \cap G_{t+1}) = \{e\} \quad (3.8)$$

除去其中相同的项, (3.8)就是 H_i 的一个次正规列. 由于 H_i/H_{i+1} 是单群, 那么包含 H_{i+1} 的 H_i 中正规子群只有 H_i 和 H_{i+1} , 则在

$$H_i = (H_i \cap H_1)H_{i+1} \supset (H_i \cap G_2)H_{i+1} \supset \cdots \supset (H_i \cap G_{t+1})H_{i+1} = H_{i+1}$$

中, 对每个 G_k , 要么有 $(G_k \cap H_i)H_{i+1} = H_i$, 要么就有 $(G_k \cap H_i)H_{i+1} = H_{i+1}$, 于是存在唯一 i' , 使得

$$\begin{aligned}(G_{i'} \cap H_i)H_{i+1} &= H_i \\ (G_{i'+1} \cap H_i)H_{i+1} &= H_{i+1}\end{aligned}$$

这样由第二同构定理就有

$$\begin{aligned}H_i/H_{i+1} &= (G_{i'} \cap H_i)H_{i+1}/(G_{i'+1} \cap H_i)H_{i+1} \\ &\cong (G_{i'} \cap H_i)/((G_{i'} \cap H_i) \cap (G_{i'+1} \cap H_i)H_{i+1}) \\ &\stackrel{(3.6)}{=} (G_{i'} \cap H_{i+1})(G_{i'+1} \cap H_i)\end{aligned}$$

对 $G_{i'} \supset G_{i'+1}$, 进行类似的操作, 得到, 存在唯一 j , 使得使得

$$(G_{i'} \cap H_j)G_{i'+1} = G_{i'} \quad \text{且} \quad (G_{i'} \cap H_{j+1})G_{i'+1} = G_{i'+1}$$

则

$$G_{i'}/G_{i'+1} \cong (G_{i'} \cap H_j) / (G_{i'} \cap H_{j+1})(G_{i'+1} \cap H_j)$$

我们断言 $j = i$, 这样就有 $H_i/H_{i+1} \cong G_{i'}/G_{i'+1}$.

若 $j \neq i$, 不妨设 $i < j$, 这意味着 $(G_{i'} \cap H_{i+1})G_{i'+1} = G_{i'}$, 于是就有

$$\begin{aligned}H_i &= (H_i \cap G_{i'}) \cdot H_{i+1} \\ &= (H_i \cap (G_{i'} \cap H_{i+1})G_{i'+1}) H_{i+1} \\ &= (G_{i'} \cap H_{i+1})(G_{i'+1} \cap H_i) \cdot H_{i+1} \\ &= (G_{i'} \cap H_{i+1}) \cdot H_{i+1} \subset H_{i+1}\end{aligned}$$

导出矛盾. 综上我们说明了指标集 $\{i\}$ 与 $\{i'\}$ 之间有一一对应关系, 这就完成了我们的证明. ■

3.4 群作用与 Sylow 定理

设 G 是群, Ω 是一个集合, 如果 $f: G \times \Omega \rightarrow \Omega, (g, x) \mapsto g \cdot x$ 满足

$$\begin{aligned}e_G \cdot x &= x, \quad \forall x \in \Omega \\ (g_1 g_2) \cdot x &= g_1 \cdot (g_2 \cdot x), \quad \forall g_1, g_2 \in G\end{aligned}$$

则称 f 是 G 在 Ω 上的一个作用, 以后简记 $g \cdot x = gx$. 从同态角度来看, G 在 Ω 上作用全体与 $\text{Hom}(G, S_\Omega)$ 有一一对应关系.

设 G 在 Ω 上有个作用, 则对任意 $x \in \Omega$, 称

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

是 x 的轨道. 称

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} < G$$

是 x 的稳定子群. 在 Gx 中, 有

$$g_1x = g_2x \iff g_2^{-1}g_1 \in G_x \iff g_1G_x = g_2G_x$$

于是 $|G_x| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}$ (当 G 是有限群时). 如果 $|G_x| = 1$, 即 $G_x = G$, 则称 x 为 G 的不动点.

对任意 $x, y \in \Omega$, 有简单的事实: $Gx = Gy$ 或者 $Gx \cap Gy = \emptyset$, 于是有

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} Gx = \bigcup_{x \in R} Gx$$

其中 R 表示一个代表系, 即对任意 $x, y \in R$, 有 $Gx \cap Gy = \emptyset$, 最终我们得到

$$|\Omega| = \sum_{x \in R} |Gx| = \sum_{x \in R} \frac{|G|}{|G_x|} = |X_0| + \sum_{x \in R \setminus X_0} \frac{|G|}{|G_x|} \quad (3.9)$$

其中 X_0 是 G 的不动点集.

设 $y \in Gx$, 不妨设 $y = gx$, 则若 $h \in G_y$, 即有 $hy = h(gx) = (hg)x = y = gx$, 这意味着 $g^{-1}hg \in G_x$, 即 $h \in gG_xg^{-1}$, 即 $G_y \subset gG_xg^{-1}$, 比较两边元素个数, 即得 $G_y = gG_xg^{-1}$, 即稳定子群相互共轭.

我们称 G 在 Ω 上的作用是可迁的, 如果 Ω 只有一个轨道, 即存在 $x \in \Omega$, 满足对任意 $y \in \Omega$, 存在 $g \in G$, 使得 $y = gx$, 或等价刻画为, 对任意 $x \in \Omega$, 都有 $\Omega = Gx$, 此时 $|\Omega|$ 是 $|G|$ 的因子.

我们称 G 在 Ω 上的作用是忠实的, 如果

$$\{g \in G \mid gx = x, \forall x \in \Omega\} = \{e_G\}$$

换句话讲, 即该作用诱导的同态 $\rho: G \rightarrow S_\Omega$, $\rho(g)(x) := g \cdot x$ 是单同态, 也就是 G 可以视为 S_Ω 的一个子群.

例 3.13 (Burnside 引理). 设有限群 G 作用在集合 X 上, 且该作用下轨道个数为 t , 对任意 $g \in G$, 令

$$F(g) = \#\{x \in X \mid gx = x\}$$

则有

$$\sum_{g \in G} F(g) = t|G|$$

证明. 令 $\Omega = \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$, 下面我们用两种方法计算 $|\Omega|$. 先固定 g , 则 $|\Omega| = \sum_{g \in G} F(g)$. 另外若先固定 x , 记 X 的 t 个不同轨道为 Gx_1, \dots, Gx_t , 则

$$\Omega = \bigcup_{x \in X} G_x \times \{x\} = \bigcup_{i=1}^t \bigcup_{y \in Gx_i} G_y \times \{y\}$$

且当 $y \in Gx_i$ 时, $|G_y| = |G_{x_i}|$, 于是得到

$$|\Omega| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{i=1}^t \sum_{y \in Gx_i} |G_y| = \sum_{i=1}^t |Gx_i| \cdot |G_{x_i}| = t|G|.$$

引理 3.13 (Cauchy 定理). 设 G 是有限群, p 是 $|G|$ 的一个素因子, 则 G 中有 p 阶元.

证明. 考虑集合

$$X = \{(a_1, \dots, a_p) \mid a_i \in G, a_1 \cdots a_p = e\}$$

则 $|X| = |G|^{p-1}$. 设 $\sigma = (12 \cdots p)$, 则 $|\langle \sigma \rangle| = p$, 考虑 $\langle \sigma \rangle$ 在 X 中的作用为

$$\psi(a_1, \dots, a_p) := (a_{\psi(1)}, \dots, a_{\psi(p)}) \in X, \quad \forall \psi \in \langle \sigma \rangle$$

则该作用下每个轨道元素个数只能是 p 或 1 , 若记 X_0 是 $\langle \sigma \rangle$ 的不动点集, 则由(3.9)有, p 整除 $|G|^{p-1} - |X_0|$, 于是 $p \mid |X_0|$, 且 $|X_0| \neq 0$ (因为 $(e, \dots, e) \in X_0$), 所以存在 $a \neq e$, 使得 $a^p = e$, 这意味着 a 的阶为 p .

例 3.14. 设 F 是有限域, 则 $|F| = p^k$, 其中 $p = \text{char} F$.

证明. 将 F 视为加法运算下的交换群, 则 $|1| = p$, 且由于 F 中任意非零元的阶都是 p (因为每个非零元都可逆), [引理, 3.13], 告诉我们 $|F|$ 只能有素因子 p , 于是 $|F| = p^k$.

定理 3.14 (syllow1). 设 G 是有限群, $p^k \mid |G|$, 则 G 中有 p^k 阶群.

证明. 对群 G 的阶进行归纳, 假设结论对阶数小于 $|G|$ 的群成立. 考虑 G 到自身的共轭作用, 则该作用下 G 的不动点集为 $C(G)$, 由 (3.9)就有

$$|G| = |C(G)| + \sum_{g \in R, g \notin C(G)} [G : C(g)]$$

若 $p \mid |C(G)|$, 由 [引理, 3.13], $|C(G)|$ 中有 p 阶元 a , 且 $\langle a \rangle \triangleleft G$, 于是可以考虑商群 $G/\langle a \rangle$, 那么由归纳假设 $G/\langle a \rangle$ 中有 p^{k-1} 阶群 $H/\langle a \rangle$, 则 $|H| = |H : \langle a \rangle| \cdot |\langle a \rangle| = p^k$, 即 H 是 G 的 p^k 阶群.

若 $p \nmid |C(G)|$, 则存在 $g \notin C(G)$, 使得 $p \nmid [G : C(g)]$, 于是 $p^k \mid C(g)$. 由于 $|C(g)| < |G|$, 则由归纳假设 $C(g)$ 中有 p^k 阶子群 H , 其自然也是 G 的 p^k 阶子群.

设 $|G| = p^k m$, 其中 $(p, m) = 1$, 则 [定理, 3.14] 说明了 G 中 p^k 阶群的存在性, 我们称 G 中的 p^k 阶群为 G 的 sylow-p 群.

定理 3.15 (syLOW2). 设 G 是有限群, 且 $|G| = p^k m, (p, m) = 1$, 则 G 的 syLOW-p 群相互共轭.

证明. 设 H 是 G 的一个 syLOW-p 群. 对任意 G 的 syLOW-p 群 K , 考虑 K 在 G/H 上的左诱导作用:

$$k(gH) := (kg)H.$$

记 X_0 为 K 的不动点集, 则 $(|K|, |G/H|) = 1$, 且由(3.9)有

$$|G/H| \equiv |X_0| \pmod{p},$$

于是 $|X_0| \neq 0$, 即 K 有不动点 gH : 满足对任意 $k \in K$, 有 $kgH = gH$, 即 $g^{-1}kg \in H$, 即 $k \in gHg^{-1}$, 从而 $K \subset gHg^{-1}$, 比较两边元素个数就有 $K = gHg^{-1}$. ■

由 [定理, 3.15], $S = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ 即是 G 所有 syLOW-p 群, 且

$$g_1Hg_1^{-1} = g_2Hg_2^{-1} \iff g_2^{-1}g_1 \in N_G(H) \iff g_1N_G(H) = g_2N_G(H)$$

即 $|S| = [G : N_G(H)] \mid m$, 是 G 所有不同的 syLOW-p 群个数.

定理 3.16 (syLOW3). 设 G 是有限群, $|G| = p^k m, (p, m) = 1$, 记 n_p 是 G 的 syLOW-p 群个数, 则 $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

证明. 设 H 是 G 的一个 syLOW-p 群, 考虑 H 在 $S = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ 上的共轭作用:

$$h(gHg^{-1}) := hgH(hg)^{-1}.$$

设 gHg^{-1} 是 H 一个不动点, 则对任意 $h \in H$, 有 $(hg)H(hg)^{-1} = gHg^{-1}$, 即 $g^{-1}Hg \subset N_G(H)$, 也就是说 $g^{-1}Hg$ 也是 $N_G(H)$ 的 SyLOW-p 群, 但注意 $N_G(H)$ 的 syLOW-p 群的个数为 $[N_G(H) : N_G(H)] = 1$, 且 H 就是 $N_G(H)$ 的一个 syLOW-p 群, 于是就有 $g^{-1}Hg = H$, 那么

$$gHg^{-1} = g(g^{-1}Hg)g^{-1} = H.$$

则 H 的不动点只有一个, 由(3.9)就有 $n_p \equiv 1 \pmod{p}$. ■

有了 syLOW 相关定理, 就引出常见的一类问题, 即判断一个群是否是单群, 说明一个群不是单群要相对简单的多, 下面列举一些常见的说明非单群手段.

例 3.15. 设 G 是交换群, 则 G 是单群当且仅当 G 是素数阶的循环群.

例 3.16. 设 G 是一个有限群, 其阶为 $|G| = p^n$, 其中 p 为素数, 且 $n > 1$, 则 G 不是单群. 特别地, 当 $n = 2$ 时, G 还是交换群.

证明. 考虑 G 到自身的共轭作用, 得到类方程

$$|G| = |C(G)| + \sum_{g \in G \setminus C(G)} [G : C(g)]$$

于是 $p \mid |C(G)|$. 若 $G = C(G)$, 此时由 [例, 3.15], G 不是单群. 若 $C(G) \neq G$, 则 $C(G)$ 就是 G 的非平凡的正规群.

当 $n = 2$ 时, 若 $C(G) \neq G$, 则只能是 $|C(G)| = p$. 取 $g \in G \setminus C(G)$, 则 $|C(g)| > |C(G)| = p$, 于是一定有 $|C(g)| = p^2$, 这意味着 $g \in C(G)$, 矛盾. ■

例 3.17. 设 $|G| = pq$, 其中 p 和 q 是素数, 且 $p < q$, 则 G 不是单群.

证明. 由 sylow 第三定理有 $n_q \mid p$, 且 $n_q \equiv 1 \pmod{q}$, 那么只能是 $n_q = 1$, 即 G 的 sylow- q 群是 G 的非平凡正规子, 所以 G 不是单群. ■

例 3.18. 设 $|G| = p^2q$ ($p \neq q$), 其中 p, q 为素数, 则 G 不是单群.

证明. 当 $p > q$ 时, 由 $n_p \mid q$, 且 $n_p \equiv 1 \pmod{p}$, 这意味着只能是 $n_p = 1$, 故 G 是单群.

当 $p < q$ 时, 由 $n_q \mid p^2$, 且 $n_q \equiv 1 \pmod{q}$, 则可能的情形为 $n_q = 1$ 或者 $n_q = p^2$. 若 $n_q = p^2$, 由于 q 是素数, 则任何两个不同 G 的 sylow- q 群的交只能是单位元, 于是 G 中有 $p^2(q-1)$ 个 q 阶元, 这些元素都不能是 G 的 sylow- p 群中的元素, 所以唯一可能的情形是 G 剩下的 p^2 个元素刚好构成 G 的一个 sylow- p 群, 即 $n_p = 1$, 于是 G 不是单群. ■

例 3.19. 设 H 是 G 的子群, 且 $[G : H] = n$, 则存在 G 的正规子群 $K \subset H$, 使得 $[G : K] \mid n!$. 特别地, 当 H 是 G 的真子群, 且 $|G| \nmid n!$ 时, K 是 G 的非平凡正规子群, 即 G 不是单群.

证明. 考虑 G 在集合 G/H 上的左诱导作用, 其诱导了一个同态: $\rho : G \longrightarrow S(G/H)$, 记 $K = \ker \rho$, 则由同态基本定理, $G/K \cong \text{im} \rho$, 取阶数就有 $[G : K] \mid n!$. 另外注意

$$K = \ker \rho = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \subset H$$

这样就完成了证明. ■

例 3.20. 设 $|G| = p^k m$, $(m, p) = 1$, 若 n_p 表示 G 的 sylow- p 群的个数, 则当 $|G| > n_p!$ 时, G 不是单群.

证明. 下面考虑 $n_p > 1$ 情形. 令 $X = \{P_1, \dots, P_{n_p}\}$ 是 G 的 sylow- p 群的集合, 考虑 G 在 X 上的共轭作用, 其诱导了一个同态: $\rho : G \longrightarrow S(X)$, 则有

$$1 \leq [G : \ker \rho] = |\text{im} \rho| \leq n_p! < |G|$$

我们下面说明 $[G : \ker \rho] > 1$, 从而 $\ker \rho$ 即是 G 的非平凡正规子群, 于是 G 不是单群.

若 $[G : \ker \rho] = 1$, 这意味着对任意 $g \in G$, 有 $gP_1g^{-1} = P_1$, 即 $g \in N_G(P_1)$, 也就是 $G = N_G(P_1)$, 则 $n_p = 1$, 矛盾. ■

3.5 二面体群

对于 $n \geq 3$, 二面体群 D_n 定义为将正 n 边形变换回自身的刚体运动 (rigid motions)¹ 组成的群, 群运算为变换的复合.

命题 3.17. D_n 的阶为 $2n$, 即 D_n 中元素是 n 个旋转和 n 个翻转 (反射).

证明. 对于正 n 边形, 取定一个顶点, 编号为 1, 然后按照顺时针给正 n 边形的 n 个顶点依次编号为 $1, \dots, n$, 记 $X = \{1, 2, \dots, n\}$, 则 D_n 在 X 上有个自然的作用, 且对任意 $x \in X$, 如果考虑 D_n 的 n 个旋转, 那么这 n 个旋转作用在 x 上, 就会带 x 跑遍整个 X , 也就是说该作用是可迁的. 记 $\text{stab}(1)$ 是 $x = 1$ 的稳定子群, 则

$$n = |X| = \frac{|D_n|}{|\text{stab}(1)|}$$

首先恒等变换和沿着过 $x = 1$ 的对称轴的翻转是落在 $\text{stab}(1)$, 即 $|\text{stab}(1)| \geq 2$. 另一方面, 任取 $\sigma \in \text{stab}(1)$, 则由于 σ 保持变换前后相邻顶点之间的距离, 即可能情形为 $\sigma(2) = 2$ 或者 $\sigma(2) = n$, 这两种情况刚好分别对应恒等变换和翻转, 于是 $|\text{stab}(1)| = 2$, 则 $|D_n| = 2n$. ■

不难看出 D_n 可描述为

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = e, s^2 = e, srs = r^{-1} \rangle$$

例 3.21. 当 $n \geq 3$ 为奇数时, D_n 的中心是平凡的. 当 $n \geq 3$ 为偶数时, D_n 的中心是 $\{1, r^{n/2}\}$.

证明. 首先, 没有任何反射在 D_n 的中心里, 因为反射不与 r 交换:

$$(r^i s)r = r^i(sr) = r^i r^{-1}s = r^{i-1}s, \quad r(r^i s) = r^{i+1}s$$

所以如果 $r^i s$ 与 r 交换, 则 $r^{i-1} = r^{i+1}$, 这意味着 $r^2 = 1$, 但 r 的阶 $n \geq 3$.

假设旋转 $r^j \in Z(D_n)$ ($0 \leq j < n$), 则首先要有 $r^j s = sr^j$, 这等价于 $r^j s = r^{-j}s$, 所以 $r^j = r^{-j}$. 即 $r^{2j} = 1$. 由于 r 的阶为 n , 于是 $n \mid 2j$, 且 $0 \leq 2j < 2n$. 在 $\{0, 1, \dots, 2n-1\}$ 中 n 的倍数只有 0 和 n , 所以可能的情形是 $2j = 0$ 或 $2j = n$.

当 n 是奇数, 则唯一的选择是 $j = 0$, 所以 $r^j = 1$. 显然 $1 \in Z(D_n)$, 所以 $Z(D_n) = \{1\}$.

当 n 是偶数, 则 r^j 是 1 或 $r^{n/2}$. 同样, 显然 $1 \in Z(D_n)$, 下面我们验证 $r^{n/2} \in Z(D_n)$. 显然 $r^{n/2}$ 与每个 r^i 交换, 故我们只需验证 $r^{n/2}$ 是否与每个反射 $r^i s$ 交换, 计算就有

$$r^{n/2}(r^i s) = r^{n/2+i}s, \quad (r^i s)r^{n/2} = r^i r^{-n/2}s = r^i r^{n/2}s = r^{i+n/2}s = r^{n/2+i}s,$$

这样我们就完成了证明. ■

¹刚体运动是一种保持距离的变换, 如旋转、反射和平移, 也被称为等距变换 (isometry).

例 3.22. D_n 中的共轭类如下.

(1) 如果 n 是奇数,

- 单位元: $\{1\}$,
- $(n-1)/2$ 个大小为 2 的共轭类: $\{r^{\pm 1}\}, \{r^{\pm 2}\}, \dots, \{r^{\pm(n-1)/2}\}$,
- 所有反射构成一个共轭类: $\{r^i s : 0 \leq i \leq n-1\}$.

(2) 如果 n 是偶数,

- 两个大小为 1 的共轭类: $\{1\}, \{r^{n/2}\}$,
- $n/2 - 1$ 个大小为 2 的共轭类: $\{r^{\pm 1}\}, \{r^{\pm 2}\}, \dots, \{r^{\pm(n/2-1)}\}$,
- 反射分为两个共轭类: $\{r^{2i}s : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\}$ 和 $\{r^{2i+1}s : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\}$.

证明. D_n 的每个元素都是 r^i 或 $r^i s$ 的形式, 其中 i 为某个整数. 因此, 为了找到元素 g 的共轭类, 我们将计算 $r^i g r^{-i}$ 和 $(r^i s) g (r^i s)^{-1}$.

利用公式

$$r^i r^j r^{-i} = r^j, \quad (r^i s) r^j (r^i s)^{-1} = r^{-j}$$

随着 i 的变化, 可以看出 r^j 在 D_n 中的共轭元仅有 r^j 和 r^{-j} .

为了找到 s 的共轭类, 我们计算

$$r^i s r^{-i} = r^{2i} s, \quad (r^i s) s (r^i s)^{-1} = r^{2i} s.$$

随着 i 的变化, $r^{2i} s$ 跑遍了那些 r 的指数可被 2 整除的反射. 如果 n 是奇数, 那么在模 n 的运算下, 每个整数都是 2 的倍数 (这是因为 2 在模 n 下是可逆的, 对于给定的 k , 我们可以通过解 $k \equiv 2i \pmod{n}$, 来求出 i). 因此当 n 是奇数时

$$\{r^{2i} s : i \in \mathbb{Z}\} = \{r^k s : k \in \mathbb{Z}\},$$

所以 D_n 中的所有反射都与 s 共轭.

当 n 是偶数时, 我们只能得到一半的反射作为 s 的共轭元. 另一半与 rs 共轭:

$$r^i (rs) r^{-i} = r^{2i+1} s, \quad (r^i s) (rs) (r^i s)^{-1} = r^{2i-1} s.$$

随着 i 的变化, 这给出了 $\{rs, r^3 s, \dots, r^{n-1} s\}$. ■

推论 3.18. 设 D_n 是二面体群, 则

- (1) 当 n 为奇数时, D_n 的所有正规子群为 D_n 和旋转子群 $\langle r^d \rangle$, 其中 $d \mid n$.
- (2) 当 n 为偶数时, D_n 的所有正规子群为 $D_n, \langle r^2, s \rangle, \langle r^2, rs \rangle$ 以及旋转子群 $\langle r^d \rangle$.

3.6 有限生成 Abel 群分类

例 3.23. 设 G 是有限 Abel 群, 且 $|G| = mn, (m, n) = 1$, 则有直积 $G = G_1 G_2$, 其中 $|G_1| = m, |G_2| = n$.

证明. 由 G 是 Abel 群, 则

$$G_1 = \{g \in G \mid g^m = e\} \quad G_2 = \{g \in G \mid g^n = e\}$$

是 G 的子群. 且由 $(m, n) = 1$, 存在 u, v , 使得 $mu + nv = 1$, 即对任意 $g \in G$, 有

$$g = g^{mu+nv} = (g^{nv}) \cdot (g^{mu}) \in G_1 G_2$$

则 $G = G_1 G_2$, 且若 $g \in G_1 \cap G_2$, 则 $o(g) \mid n$, 且 $o(g) \mid m$, 那只能是 $o(g) = 1$, 即 $g = e$. 这样我们就证明了直积. 下面我们只要说明 $(|G_1|, n) = 1, (|G_2|, m) = 1$, 即可说明 $|G_1| = m, |G_2| = n$. 若 $(|G_1|, n) > 1$, 则取其一个公共素因子 p , 由 Cauchy 定理, G_1 中有 p 阶元 g , 但是由定义要有 $g^m = 1$, 这意味着 $o(g) = p$ 要整除 m , 矛盾. ■

推论 3.19. 设 G 是有限 Abel 群, 且 $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$, 则存在直积分解 $G = G_1 \cdots G_s$, 使得 $|G_i| = p_i^{r_i}$.

定理 3.20 (分类定理). 设 G 是有限生成 Abel 群. 则 G 同构于以下形式的直和:

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k} \quad (3.10)$$

其中:

1. $r \geq 0$ 是整数 (G 的自由秩).
2. d_1, \dots, d_k 是满足 $d_i \geq 2$ 且 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_k$ 的整数.

且若

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{d_i} \cong \mathbb{Z}^s \oplus \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Z}_{c_j}$$

其中 d_i 和 c_j 均满足整除链条件. 则 $r = s, k = m$, 且对于所有 i , 有 $d_i = c_i$.

证明. 见 David McKinnon 的讲义: [Classification of Finitely Generated Abelian Groups](#). ■

3.7 pq 阶群

例 3.24 (第一类 pq 阶群). 设有限群 G 的阶为 $|G| = pq (p < q)$, 且 $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, 则 G 是循环群.

证明. 记 H, K 分别是 G 的 sylow- p 和 sylow- q 群, 则 $n_q = 1$ 且 $n_p = 1$ (因为 $q \not\equiv 1 \pmod{p}$), 即 H, K 都是 G 的正规子群, 且 $H \cap K = \{e\}$, 那么 $|HK| = pq = |G|$, 即有直积 $G = HK$. 又因为 H, K 都是素数阶群, 则可设 $H = \langle a \rangle$, $K = \langle b \rangle$, 那么有

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in H \cap K = \{e\}$$

这意味着 $ab = ba$, 于是 $o(ab) = o(a)o(b) = pq$, 即 G 是循环群. ■

例 3.25 (第二类 pq 阶群). 当 $q \equiv 1 \pmod{p}$ 时, 可以作仿射群 $\text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$ 的子群:

$$A_{p,q} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aff}(\mathbb{Z}_q) : x^p = 1 \text{ in } \mathbb{Z}_q \right\}. \quad (3.11)$$

这里 1 是 \mathbb{Z}_q 中的么元. 则 $|A_{p,q}| = pq$, 且群 $A_{p,q}$ 是非阿贝尔群, 因为矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不交换, 其中 x 是 \mathbb{Z}_q 中阶为 p 的元素.

证明. 注意 y 有 q 种选择, 由于 $x \in \mathbb{Z}_q^*$ 且假设 $p|(q-1)$, 由 Cauchy 定理, 在 \mathbb{Z}_q^* 中存在一个阶为 p 的元素, 因此它的幂次在 \mathbb{Z}_q 中给出至少 p 个 $x^p = 1$ 的解. 另一方面, 作为 \mathbb{Z}_q 上的多项式 $x^p - 1$, 其在 \mathbb{Z}_q 中的根不能超过 p 个, 所以 $x^p = 1$ 在 \mathbb{Z}_q 上恰好有 p 个解. 于是 $|A_{p,q}| = pq$. ■

命题 3.21. 设 p 和 q 为素数, 且 $p < q$ 和 $q \equiv 1 \pmod{p}$. 在同构意义下, (3.11) 中的群 $A_{p,q}$ 是唯一的大小为 pq 的非 Abel 群.

证明. 见 Keith Conrad 的讲义: [Applications of Cauchy's Theorem](#). ■

推论 3.22. 对于奇素数 q , $2q$ 阶群只有 \mathbb{Z}_{2q} 和二面体群 D_q .

3.8 可解群

设 G 是群, 记 $G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]$, $G^{(0)} = G$, 若 $\varphi: G \rightarrow H$ 是群同态, 则 $[\varphi(g_1), \varphi(g_2)] = \varphi([g_1, g_2])$, 这意味着 $\varphi(G^{(k)}) \subset H^{(k)}$, 特别地当 φ 是满的, 则 $\varphi(G^{(k)}) = H^{(k)}$.

定义 3.4. 我们称群 G 是可解群, 如果 G 满足如下之一条件

(i) 存在 k , 使得 $G^{(k)} = \{e\}$, 即有

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright \cdots \triangleright G^{(k)} = \{e\}$$

(ii) 存在 G 的次正规列

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_t = \{e\}$$

使得 G_i/G_{i+1} 是 Abel 群.

引理 3.23. 若 G 是可解群, 则 G 的子群 H 是可解的, 且若 $H \triangleleft G$, 则 G/H 是可解的. 反之, 若 $H \triangleleft G$, 且 $H, G/H$ 都是可解的, 则 G 也是可解的.

证明. 若 H 是 G 的子群, 那么 $H^{(k)} \subseteq G^{(k)}$. 如果 H 是正规子群, 考虑自然同态 $\pi: G \rightarrow G/H$, 则 $\pi(G^{(k)}) = (\pi(G))^{(k)} = (G/H)^{(k)}$. 这说明若 G 可解, 则 H 和 G/H 都可解.

再证第二个结论. 若 G/H 可解, 则存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $(G/H)^{(k)} = \{\bar{e}\}$. 于是

$$\pi(G^{(k)}) = (\pi(G))^{(k)} = (G/H)^{(k)} = \{\bar{e}\}.$$

因此 $G^{(k)} \subseteq \text{Ker } \pi = H$. 而 H 可解, 故其子群 $G^{(k)}$ 也可解, 从而存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $(G^{(k)})^{(l)} = \{e\}$, 于是

$$G^{(k+l)} = (G^{(k)})^{(l)} = \{e\},$$

故 G 可解. ■

定理 3.24. 设 G 是有限群, 则 G 是可解群当且仅当 G 的合成因子都是素数阶循环群.

证明. 设 G 是有限阶可解群, 则其存在合成序列

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_k = \{e\}$$

其中 G_i/G_{i+1} 是单群. 由 [引理, 3.23], G_i/G_{i+1} 也是可解群, 从而只能是 $(G_i/G_{i+1})^{(1)} = \{\bar{e}\}$, 这意味着 G_i/G_{i+1} 是 Abel 群, 从而是素数阶的循环群. ■

4 Galois 理论

4.1 分裂域

设有域扩张 E/F , 取定 $\alpha \in E$, 定义 $F[\alpha] = \{\sum_{i=0}^m a_i \alpha^i \mid m \geq 0, a_i \in F\}$. 考虑映射

$$\begin{aligned} f: F[x] &\longrightarrow F[\alpha] \\ \sum_{i=0}^n a_i x^i &\longmapsto \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \end{aligned} \tag{4.1}$$

(4.1) 是一个满的环同态. 当 α 是 F 代数元时, 记 $g(x) \in F[x]$ 是 α 极小多项式, 则 $F[x]/\langle g(x) \rangle \cong F[\alpha]$, 由于 $g(x)$ 是 $F[x]$ 中的不可约元, 则 $\langle g(x) \rangle$ 是极大主理想, 又因为 $F[x]$ 是主理想整环, 从而 $\langle g(x) \rangle$ 是极大理想, 则 $F[x]/\langle g(x) \rangle$ 是域, 于是此时 $F[\alpha] = F(\alpha)$.

当不存在 $F[x]$ 中的非零多项式 $g(x)$, 使得 $g(\alpha) = 0$ 时, 即 α 是 F 中超越元, 此时 $F[x] \cong F[\alpha]$.

定义 4.1. 给定域 F 和 $f(x) \in F[x]$, 称 E 是 f 在 F 的一个分裂域, 如果 E 满足

1) f 可以在 E 中分解为一次因式的乘积

$$f(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), \quad c, \alpha_i \in E.$$

2) $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

引理 4.1. 设 $f \in F[x]$ 是不可约的, 则存在 F 的有限扩张 E , 使得 f 在 E 中有根.

证明. 令 $K = F[x]/\langle f(x) \rangle$, 由于 $\langle f(x) \rangle$ 是极大理想, 则 F 是域. 定义自然嵌入 $\sigma: F \rightarrow K$ 为:

$$\sigma(a) = a + \langle f(x) \rangle, \quad \forall a \in F$$

记 $F' = \sigma(F) = \{a + \langle f(x) \rangle \mid a \in F\}$, 则 F' 是 K 的一个子域, 且 $F \cong F'$. 定义集合 E 为 F 与 K 中除去 F' 像的部分的并集:

$$E = F \cup (K \setminus F')$$

令 $\varphi: E \rightarrow K$ 如下:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \sigma(u) = u + \langle f(x) \rangle, & u \in F \\ u, & u \in K \setminus F' \end{cases}$$

显然 φ 是双射. 其逆映射 $\varphi^{-1}: K \rightarrow E$ 为:

$$\varphi^{-1}(v) = \begin{cases} \sigma^{-1}(v), & v \in F' \\ v, & v \in K \setminus F' \end{cases}$$

利用双射 φ , 我们将 K 上的加法 $+_K$ 和乘法 \cdot_K 拉回到 E 上. 对任意 $x, y \in E$, 定义:

$$\begin{aligned} x +_E y &= \varphi^{-1}(\varphi(x) +_K \varphi(y)) \\ x \cdot_E y &= \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot_K \varphi(y)) \end{aligned}$$

首先, 由于 $(K, +_K, \cdot_K)$ 是域, 且 φ 是双射, 故 $(E, +_E, \cdot_E)$ 必然构成一个域. 其次, 我们需要验证 F 确实是 E 的子域 (即 E 上的运算限制在 F 上与 F 原有运算一致). 设 $a, b \in F$. 注意到 $\varphi(a) = \sigma(a)$ 且 σ 是域同态, 则

$$\begin{aligned} a +_E b &= \varphi^{-1}(\sigma(a) +_K \sigma(b)) \\ &= \varphi^{-1}(\sigma(a + b)) \\ &= a + b \end{aligned}$$

同理可验证乘法 $a \cdot_E b = a \cdot b$.

最后, 对于 $f(x)$ 的根. 在 K 中, 根为 $\bar{x} = x + \langle f(x) \rangle$. 由于 $\bar{x} \notin F'$ (因为 f 不可约且 $\deg(f) \geq 1$), 故 $\bar{x} \in K \setminus F'$. 根据 φ 的定义, 该元素对应 E 中的元素即为它自身. ■

注记 4.1. 一般教科书都直接将 F 视为 $F[x]/\langle f(x) \rangle$ 的子域, 并未做过多解释, 因为是第一次出现, 我们稍稍解释, 以后我们也将 F 直接视为 $F[x]/\langle f(x) \rangle$ 的子域.

定理 4.2. 设 $f \in F[x]$ 是首一的, 且 $\deg f > 0$, 则存在 f 在 F 上的一个分裂域.

证明. 对 $\deg f = n$ 进行归纳, 当 $n = 1$ 时, 取 $E = F$ 即可. 现在假设结论对 $F[x]$ 中次数小于 n 的多项式成立. 取 f 在 $F[x]$ 中的一个不可约因式为 p , 则 $\deg p > 1$, 由 [引理, 4.1], 存在 K/F , 使得 $p(x)$ 在 K 中有根 α_1 , 假定

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r)g(x), \quad \alpha_i \in K, \quad r \geq 1$$

为 f 在 K 中分解, 不妨设 $K = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, 否则考虑其子域 $F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. 因为 $g(x) \in F[x] \subset K[x]$, 则由归纳假设, 存在 $g(x)$ 在 K 中的分裂域 E , 则 f 可以在 E 中分解为一次因式的乘积 $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$, 且

$$E = K(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

这意味着 E 是 f 在 F 中的一个分裂域. ■

推论 4.3. 设 $f \in F[x]$, 且 $\deg f = n$, E 是 f 的一个分裂域, 则 $[E : F] \leq n!$.

设 $\eta : F \rightarrow \tilde{F}$ 是域同构, 其诱导了 η 的一个满的扩张同态:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} : F[x] &\longrightarrow \tilde{F}[x] \\ \sum_{i=0}^n a_i x^i &\longmapsto \sum_{i=0}^n \eta(a_i) x^i \end{aligned} \tag{4.2}$$

现在考虑 $g(x)$ 是 $F[x]$ 中的一个不可约元, 那么 $\tilde{g}(x) = \tilde{\eta}(g)$ 是 $\tilde{F}[x]$ 的不可约元, 记 π 是 $\tilde{F}[x] \rightarrow \tilde{F}[x]/\langle \tilde{g}(x) \rangle$ 的自然投影, 那么 $\pi \circ \tilde{\eta} : F[x] \rightarrow \tilde{F}[x]/\langle \tilde{g}(x) \rangle$ 是满的同态, 且 $\ker \pi \circ \tilde{\eta} = \langle g(x) \rangle$, 则 $F[x]/\langle g(x) \rangle \cong \tilde{F}[x]/\langle \tilde{g}(x) \rangle$. 在这个过程中, 我们始终保持 η 的作用不变.

引理 4.4. 设有域同构 $\eta : F \rightarrow \tilde{F}$, 和域扩张 $E/F, \tilde{E}/\tilde{F}$, 设 $\alpha \in E$ 是 F 的代数元, 记 $g(x) \in F[x]$ 是 α 的极小多项式, 则 η 可以开拓为 $F(\alpha) \rightarrow \tilde{E}$ 的同态当且仅当 \tilde{g} 在 \tilde{E} 中有根, 于是这样的同态个数等于 \tilde{g} 在 \tilde{E} 中不同根的个数, 即这样的同态个数小于等于 $\deg \tilde{g} = \deg g = [F(\alpha) : F]$, 于是等号成立当且仅当 $\tilde{g}(x)$ 在 \tilde{E} 中可以完全分解, 且没有重根.

证明. 设 $\xi : F(\alpha) \rightarrow \tilde{E}$ 是由 η 开拓得到的群同态, 则 $0 = \xi(g(\alpha)) = \tilde{g}(\xi(\alpha))$, 这意味着 $\xi(\alpha)$ 是 \tilde{g} 在 \tilde{E} 中的根. 反过来, 设 $\tilde{\alpha} \in \tilde{E}$ 是 $\tilde{g}(x)$ 的一个根, 则由 \tilde{g} 的不可约性, $\tilde{g}(x)$ 即是 $\tilde{\alpha}$ 的极小多项式, 那么由式(4.1)和(4.2)有

$$F(\alpha) \xrightarrow{\cong} F[x]/\langle g(x) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{F}[x]/\langle \tilde{g}(x) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{F}(\tilde{\alpha}) \longrightarrow \tilde{E}$$

这个过程保持 η 的作用, 合起来即得到一个从 $F(\alpha) \rightarrow \tilde{E}$ 的由 η 开拓的同态. ■

定理 4.5. 设 $\eta_0 : F \rightarrow \tilde{F}$ 是同构, 且 E 和 \tilde{E} 分别是 $f \in F[x]$ 和 $\tilde{f} \in \tilde{F}[x]$ 的一个分裂域, 则存在 η_0 的开拓 $\eta : E \rightarrow \tilde{E}$ 是同构, 且这样的同构个数小于等于 $[E : F]$, 且等号成立当且仅当 f 在 $F[x]$ 中的任一不可约因式在 E 中没有重根.

证明. 不妨假定在 $E[x]$ 中有 $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$. 记 $F_0 = F$, $F_i = F_{i-1}(\alpha_i)$, 由 [引理, 4.4], 存在 $\eta_i : F_i \rightarrow \tilde{F}_i$, 使得 $\eta_i|_{F_{i-1}} = \eta_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$), 即有

$$\begin{array}{ccccccc} F & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E \\ \downarrow \eta_0 & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_2 & & \downarrow \eta = \eta_n \\ \tilde{F} & \longrightarrow & \tilde{F}_1 & \longrightarrow & \tilde{F}_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \tilde{E} \end{array} \quad (4.3)$$

注意

$$\tilde{f}(x) = \tilde{\eta}_0(f) = \tilde{\eta}(f) = \tilde{\eta} \left(\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right) = \prod_{i=1}^n (x - \eta(\alpha_i)) \quad (4.4)$$

由 \tilde{E} 是 \tilde{f} 的分裂域, 于是 $\tilde{E} = \tilde{F}(\eta(\alpha_1), \dots, \eta(\alpha_n))$. 这样就有

$$\begin{aligned} \eta(E) &= \eta(F_{n-1}(\alpha_n)) = \eta_{n-1}(F_{n-1})(\eta(\alpha_n)) = \cdots = \eta_0(F_0)(\eta(\alpha_1)) \cdots (\eta(\alpha_n)) \\ &= \tilde{F}(\eta(\alpha_1), \dots, \eta(\alpha_n)) = \tilde{E} \end{aligned}$$

这意味着 η 是满的, 自然也是同构. 下面我们主要讨论 η_0 的开拓同构 $\eta : E \rightarrow \tilde{E}$ 的个数. 若 η 是这样的同构, 则令 $\eta|_{F_i} = \eta_i$, 则有 $\eta_i|_{F_{i-1}} = \eta_{i-1}$, 于是我们看 η 有多少个, 就是看每一步的 η_i 有多少个.

记 $g_i(x) \in F_{i-1}[x]$ 为 α_i 的极小多项式, 则由于 $f(x) \in F_{i-1}[x]$, 且 $f(\alpha_i) = 0$, 这意味着 $g_i(x) \mid f(x)$, 也就是说 $g_i(x)$ 其实就是 $f(x)$ 在 $F_{i-1}[x]$ 中的一个不可约因式, 那么 $\tilde{g}_i(x)$ 就是 \tilde{f} 在 $\tilde{F}_{i-1}[x]$ 的一个不可约因式. 又因为 $\eta(\alpha_i)$ 是 $\tilde{g}_i(x)$ 的根, 则 $\{\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_n(x)\}$ 包含了 \tilde{f} 的所有根.

现在设 $\tilde{p}(x)$ 是 $\tilde{f}(x)$ 在 $\tilde{F}[x]$ 的任一不可约因式, 则存在某个 $\tilde{g}_i(x)$ 使得 $\tilde{p}(x)$ 与 $\tilde{g}_i(x)$ 在 \tilde{E} 中有公共根 β . 于是, 若 $\tilde{g}_i(x) \nmid \tilde{p}(x)$, 则 $(\tilde{p}(x), \tilde{g}_i(x))_{\tilde{F}_{i-1}[x]} = 1$, 即存在 $u(x), v(x) \in \tilde{F}_{i-1}[x]$, 使得 $\tilde{p}(x)u(x) + \tilde{g}_i(x)v(x) = 1$, 将 $x = \beta$ 代入即得 $0 = 1$, 这是矛盾的. 于是有 $\tilde{g}_i(x) \mid \tilde{p}(x)$.

即 $\tilde{f}(x)$ 在 $\tilde{F}[x]$ 中的任一不可约因式都包含某个 $\tilde{g}_i(x)$ 作为因式. 反过来, 对每个 $\tilde{g}_i(x)$, 其必定与 $\tilde{f}(x)$ 在 $\tilde{F}[x]$ 中的某个不可约因式 $\tilde{p}(x)$ 有公共根, 即 $\tilde{g}_i(x)$ 是 $\tilde{p}(x)$ 的因式.

由 [引理, 4.4], 每个 η_i 的个数小于等于 $[F_i : F_{i-1}] = \deg \tilde{g}_i(x)$, 这样就有

$$|\text{Iso}(E, \tilde{E})| \leq [F_1 : F_0] \cdot [F_2 : F_1] \cdots [F_n : F_{n-1}] = [E : F] \quad (4.5)$$

其中 $|\text{Iso}(E, \tilde{E})|$ 表示满足条件的同构个数, 且等号成立当且仅当 $\tilde{g}_i(x)$ ($1 \leq i \leq n$) 在 \tilde{E} 中没有重根.

当 \tilde{f} 在 $\tilde{F}[x]$ 中的任一不可约因式 $\tilde{p}(x)$ 在 \tilde{E} 中没有重根时, $\tilde{g}_i(x)$ 作为某一个 $\tilde{p}(x)$ 的因式, 自然在 \tilde{E} 中没有重根. 反过来, 每个 $\tilde{f}(x)$ 在 $\tilde{F}[x]$ 中的不可约因式 $\tilde{p}(x)$, 都可以视为 (在调整顺序后) $\tilde{g}_1(x)$, 即作为 (4.3) 的第一步 η_1 中的极小多项式, 所以当 (4.5) 取等号时, $\tilde{p}(x)$ 在 \tilde{E} 中没有重根.

于是 (4.5) 等号成立当且仅当 \tilde{f} 在 $\tilde{F}[x]$ 中的任一不可约因式在 \tilde{E} 中没有重根, 由 (4.4) 和 η 是双射, 这也等价于 $f(x)$ 的任一不可约因式在 E 中没有重根. ■

注记 4.2. 此定理深刻地揭示了代数结构的内蕴性 (Intrinsic Nature). 它表明, 分裂域 E 的代数结构完全由基域 F 及多项式 $f(x)$ 的内在代数性质所决定, 而与元素的具体记号无关. 同构 η_0 就像一座桥梁, 它保证了在 F 中成立的一切代数运算关系, 在映射到 \tilde{F} 后依然成立; 而定理 4.5 进一步断言, 这种“结构的保真性”在扩域过程中不会丢失—— E 与 \tilde{E} 作为 f 与 \tilde{f} 的分裂域, 在代数意义下是不可分辨的 (Indistinguishable). 这体现了抽象代数的核心思想: 我们在乎的不是元素是什么, 而是元素之间如何相互作用.

推论 4.6. $f \in F[x], (\deg f > 0)$ 的分裂域存在, 且在同构意义下唯一.

推论 4.7. 设 E, E_1 是 $f \in F[x]$ 的两个分裂域, 则 $\eta: E \rightarrow E_1, \eta|_F = \text{id}$ 这样的同构个数不超过 $[E:F]$, 且等号成立当且仅当 f 在 $F[x]$ 中的任一不可约因式在 E 中没有重根.

设 $f \in F[x]$, 若 f 的任一不可约因式在其分裂域 E 中没有重根, 则我们称 f 是可分多项式. 若有代数扩张 K/F , 对任意 $\alpha \in K$, 记 $g(x) \in F[x]$ 是 α 的极小多项式, 若 $g(x)$ 是可分多项式, 则称 K/F 是可分扩张, α 称为 F 的可分元. 若对任意 $f \in F[x]$ (默认次数大于零), f 都是可分多项式, 则称 F 是完全域.

定义 4.2. 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in F[x]$, 定义 $f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$, 称为是 $f(x)$ 的形式导数.

当 $f'(x) = 0$ 时, 意味着 $a_1 = 2a_2 = \cdots = na_n = 0$. 若 $\text{char} F = 0$, 则此时 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, 即 $f = a_0$. 若 $\text{char} F = p > 0$, 则当 $p \nmid k$ 时, $a_k = 0$, 此时有 $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^s b_k x^{kp}$.

命题 4.8. 设 $f(x) \in F[x]$, 则 f 在其分裂域 E 上没有重根当且仅当 $(f, f')_{F[x]} = 1$.

证明. 以下不妨假定 f 是首一的. 若 α 是 f 的重根, 则设在 $E[x]$ 中有分解 $f = (x - \alpha)^2 g(x)$, 则

$$f'(x) = 2(x - \alpha)g(x) + (x - \alpha)^2 g'(x)$$

于是有 $f'(\alpha) = 0$, 此时不会有 $(f, f') = 1$. 若 $(f, f') \neq 1$, 取 (f, f') 在 E 中的一个根, 记为 β , 设 $f = (x - \beta)h(x)$, 则

$$f'(x) = h(x) + (x - \beta)h'(x)$$

由 $f'(\beta) = 0$, 即有 $h(\beta) = 0$, 这意味着 β 是 f 在 E 中的重根. ■

于是若 $\text{char} F = 0$, 则 F 一定是完全域. 当 $\text{char} F = p > 0$ 时, $g(x) \in F[x]$ 是不可约元, 则 $g(x)$ 不可分当且仅当 $g'(x) = 0$.

引理 4.9. 设 $\text{char} F = p > 0$, 对任意 $a \in F$, 则 $f(x) = x^p - a$ 要么在 $F[x]$ 中不可约, 要么存在 $b \in F$, 使得 $f(x) = (x - b)^p$.

证明. 若 f 在 $F[x]$ 中可约, 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个真因式, 记 b 为 g 在 E 中的一个根, 则有 $f(b) = 0$, 即 $a = b^p$. 于是 $f(x) = x^p - b^p = (x - b)^p$. 那么 $g(x)$ 在 $E[x]$ 中的分解一定形如 $g(x) = (x - b)^k (k < p)$, 则 $g(x)$ 的常数项为 $(-b)^k \in F$, 这意味着 $b^k \in F$. 又因为 $(k, p) = 1$, 则存在整数 u, v , 使得 $1 = uk + pv$, 于是

$$b = b^{uk+pv} = (b^k)^u \cdot (b^p)^v \in F$$

命题 4.10. 设 $\text{char} F = p > 0$, 则 F 是完全域当且仅当 $F^p = F$, 即由 [例, 1.1] 诱导的 Frobenius 同态是同构. 特别地, 有限域都是完全域.

证明. 当 $F^p \neq F$ 时, 即存在 $a \in F$, 满足对任意 $b \in F$, 都有 $a \neq b^p$, 由 [引理, 4.9], $f(x) = x^p - a$ 是不可约的, 且 $f' = 0$, 于是 f 是不可分多项式, 即 F 不是完全域.

当 F 不是完全域时, 取 $F[x]$ 中的不可约的不可分多项式 $f(x)$, 由 $f'(x) = 0$, 可以不妨设

$$f(x) = a_0 + a_1 x^p + a_2 x^{2p} + \cdots + a_n x^{np}$$

若对每个 a_i , 都存在对应的 $b_i \in F$, 使得 $a_i = b_i^p$, 则

$$f(x) = b_0^p + b_1^p x^p + \cdots + b_n^p x^{np} = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)^p$$

这与 f 不可约矛盾, 于是存在某个 a_i , 使得对任意 $b \in F$, 都有 $a_i \neq b^p$, 即 $F^p \neq F$.

定理 4.11. 设 p 为素数, k 为正整数, 令 $q = p^k$, 则存在唯一的 q 阶域, 记为 \mathbb{F}_q .

证明. 考虑素域 \mathbb{Z}_p 上的多项式 $f(x) = x^q - x \in \mathbb{Z}_p[x]$, 设 K 是 $f(x)$ 在 \mathbb{Z}_p 上的分裂域. 令

$$S = \{\alpha \in K \mid \alpha^q - \alpha = 0\} = \{\alpha \in K \mid \alpha^q = \alpha\}.$$

显然 $0, 1 \in S$, 对于任意 $\alpha, \beta \in S$, 由于 K 的特征为 p , 则

$$(\alpha \pm \beta)^q = \alpha^q \pm \beta^q = \alpha \pm \beta,$$

$$(\alpha\beta)^q = \alpha^q \beta^q = \alpha\beta.$$

若 $\beta \neq 0$, 则 $(\beta^{-1})^q = (\beta^q)^{-1} = \beta^{-1}$. 这说明集合 S 对域的四则运算封闭, 故 S 是 K 的一个子域. 对任意 $a \in \mathbb{Z}_p$, 由费马小定理有 $a^p = a$, 这样就有 $a^q = a$, 这意味着 $\mathbb{Z}_p \subseteq S$. 即 S 是

\mathbb{Z}_p 的一个扩域. 又因为 $f'(x) = qx^{q-1} - 1 = p^k x^{q-1} - 1 = -1$, 于是 $(f, f') = 1$. 因此, $f(x)$ 在分裂域 K 中没有重根, 即 $|S| = q$. 又因为 S 是 \mathbb{Z}_q 的扩域且包含 $f(x)$ 的所有根, 则只能是 $S = K$.

现在设 F 是任意一个阶为 $q = p^k$ 的有限域, 其特征为 p , 即 F 包含了一个 p 阶子域 \mathbb{F}'_p . 考虑 F 的乘法群 $F^* = F \setminus \{0\}$, 这是一个阶为 $q-1$ 的群. 由 Lagrange 定理, 对任意 $\alpha \in F^*$, 有 $\alpha^{q-1} = 1$. 两边同乘 α , 得 $\alpha^q = \alpha$. 对于零元 0 , 显然也有 $0^q = 0$. 因此, F 中的全部 q 个元素都是多项式 $x^q - x$ 的根, 这意味着 F 是 $f(x) \in \mathbb{F}'_p[x]$ 的一个分裂域. 因为 $\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}'_p$, 由 [定理, 4.5], K 与 F 同构. ■

注记 4.3. 通过 [例, 3.14] 和 [定理, 4.11], 我们实际上找出了所有的有限域.

定义 4.3. 设有代数扩张 E/F , 若对任意 $F[x]$ 中的不可约多项式, 要么 $g(x)$ 在 E 中没有根, 要么 $g(x)$ 在 $E[x]$ 中可以完全分解, 则称 E/F 为正规扩张.

定理 4.12. 设 E/F 是有限扩张, 则 E/F 是正规扩张当且仅当 E 是某个 $f \in F[x]$ 的分裂域.

证明. 假设 E 是 $f \in F[x]$ 的分裂域. 设 $g \in F[x]$ 不可约, 若 g 在 E 中有根 α , 我们证明 g 在 E 中可以完全分解. 设 K 是 $g \in E[x]$ 的分裂域, 任意取定 g 在 K 中的根 β , 我们只要证明 $E = E(\beta)$. 在 [定理, 4.5] 中, 取 $\eta_0 : F \rightarrow F$ 为恒等映射, 此时 $g = \tilde{g}$, 则 η_0 可以开拓为同构 $\eta_1 : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$, 注意 E 和 $E(\beta)$ 分别是 $f \in F(\alpha)[x]$ 和 $\tilde{f} = f \in F(\beta)[x]$ 的分裂域, 则 η_1 又可开拓为同构 $\eta : E \rightarrow E(\beta)$. 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i e_i &= 0, \quad x_i \in F, e_i \in E \\ \iff \eta \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) &= \sum_{i=1}^n x_i \eta(e_i) = 0 \end{aligned}$$

这意味着 $[E : F] = [E(\beta) : F]$, 从而一定有 $E = E(\beta)$.

反过来, 设 E/F 是正规扩张, 且 $[E : F] = n$, 以及 $E = \text{span}_F \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, 记 $g_i \in F[x]$ 是 α_i 的极小多项式, 则 g_i 在 E 中可以完全分解, 令 $f = \prod_{i=1}^n g_i$, 则 E 是 $f \in F[x]$ 的分裂域. ■

定义 4.4. 设 E/F 是有限扩张, 类似上面证明与记号, 我们令 K 是 $f = \prod_{i=1}^n g_i(x) \in F[x]$ 的分裂域, 则 E/F 包含于正规扩张 K/F , 因此我们可以定义包含 E/F 的最小正规扩张, 称为是 E/F 的正规闭包.

定理 4.13. 设 E/F 是有限的正规扩张, K 是 E/F 的中间域, 则如下条件等价:

- (1) K/F 是正规扩张.
- (2) 对任意 $\eta \in \text{Gal}(E/F)$, 有 $\eta(K) \subset K$.
- (3) 对任意 $\eta \in \text{Gal}(E/F)$, 有 $\eta(K) = K$.

证明. 假定 K/F 是正规扩张, 任取 $\alpha \in K$, 记 $g(x) \in F[x]$ 为 α 的极小多项式, 则 g 在 K 中可以完全分解, 对任意 $\eta \in \text{Gal}(E/F)$, 则有 $0 = \eta(g(\alpha)) = g(\eta(\alpha))$, 这意味着 $\eta(\alpha) \in K$, 从而 $\eta(K) \subset K$. 另外作为 F -线性空间, 又有 $[\eta(K) : F] = [K : F]$, 这样就有 $\eta(K) = K$.

反过来, 假定对任意 $\eta \in \text{Gal}(E/F)$, 都有 $\eta(K) = K$. 对任意 $\alpha \in K$, 设 $g(x) \in F[x]$ 是 α 的极小多项式, 我们证明 g 在 K 中可以完全分解. 由于 E/F 是正规扩张, 则 g 在 E 中可以完全分解. 设 β 是 g 在 E 中的任意一根, 在 [定理, 4.5] 中, 取 $\eta_0 : F \rightarrow F$ 为恒等映射, 其可以开拓为 $\eta_1 : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$, 由于 E 分别可以视为 $f \in F(\alpha)[x]$ 和 $f \in F(\beta)[x]$ 上的分裂域, 则 η_1 可以开拓为 $\eta \in \text{Gal}(E/F)$, 这意味着 $\beta = \eta_1(\alpha) = \eta(\alpha) \in K$, 于是 $g(x)$ 在 F 中可以完全分解. ■

定理 4.14. 设 $f \in F[x]$ 是可分多项式, E 是 $f \in F[x]$ 的分裂域, 则 E/F 是可分扩张.

证明. 对任意 $\alpha \in E$, 设 $g(x) \in F[x]$ 是 α 的最小多项式, 由 [定理, 4.12], E/F 是正规扩张, 则 g 在 E 中可以完全分解, 记 g 在 E 中有 k 个互异根, 由 [引理, 4.4], 其诱导了从 $F(\alpha) \rightarrow E$ 的 k 个不同嵌入, 记为 $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k)}$, 注意 E 可以视为可分多项式 $f \in F(\alpha)[x]$ 的分裂域, 由 [定理, 4.5], 对每个 $\eta^{(i)}$, 有 $[E : F(\alpha)]$ 个由 $\eta^{(i)}$ 开拓的同构: $\eta : E \rightarrow E$, 于是

$$|\text{Gal}(E/F)| = [E : F] = k \cdot [E : F(\alpha)]$$

又因为 $[E : F] = [E : F(\alpha)] \cdot [F(\alpha) : F] = [E : F(\alpha)] \cdot \deg(g)$, 于是就有 $\deg(g) = k$, 即 $g(x)$ 是可分多项式, 于是 E/F 是可分扩张. ■

4.2 Galois 扩张

索引

$\mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$, 11

Jordan-Hölder, 23

pq 阶群, 31

Cauchy 定理, 26

UFD, 11

中国剩余, 7

二面体群, 29

分式域, 8

单群 $A_n (n \geq 5)$, 19