代数笔记

GLW

2025 上半年

目录

第 **1** 章

章节综合题

1.1 行列式

问题 1.1. $C_x^r = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}, r \geq 1 \\ 1, r = 0 \end{cases}$. 设 $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j C_x^j \in \mathbb{Q}[x]$. 证明：如果存在一个整数 k_0, 使得对任意的正整数 $k \geq k_0$, 都有 $f(k)$ 为整数，那么 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 也为整数.

证明. 取 $k = \max\{k_0, n\}$, 令 $x = k, k+1, \cdots, k+n$ 得

$$\begin{pmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \cdots & C_k^n \\ 1 & C_{k+1}^1 & C_{k+1}^2 & \cdots & C_{k+1}^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & C_{k+n}^1 & C_{k+n}^2 & \cdots & C_{k+n}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(k) \\ f(k+1) \\ \vdots \\ f(k+n) \end{pmatrix}$$

不妨记其系数矩阵为 A. 则

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{2!3!\cdots n!} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 - k & \cdots & n!C_k^n \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 - (k+1) & \cdots & n!C_{k+1}^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & k+n & (k+n)^2 - (k+n) & \cdots & n!C_{k+n}^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2!3!\cdots n!} \det \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & \cdots & k^n \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & k+n & (k+n)^2 & \cdots & (k+n)^n \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

因为 A 的所有元素都为整数，所以其伴随矩阵元素也全为整数.$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$ 其元素也为整数. 因为

$f(k),\cdots,f(k+n)$ 也为整数，从而由 $(c_0,c_1,\cdots,c_n)'=A^{-1}(f(k),f(k+1),\cdots,f(k+n))'$ 可知 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 也为整数. ■

问题 1.2. 设 $|A|=|a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式，A_{ij} 是它的第 (i,j) 元素的代数余子式，证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{an} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z|A| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j.$$

证明. 将上述行列式按最后一列展开，展开第一项为

$$(-1)^{n+2}x_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{an} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix} = D_1,$$

再将上面行列式按最后一行展开得

$$D_1=(-1)^{n+2}x_1(-1)^{n+1}(y_1A_{11}+y_2A_{12}+\cdots+y_nA_{1n})=-\sum_{j=1}^{n}x_1y_jA_{1j}.$$

因此原行列式的值为

$$z|A|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j$$

■

注 1.3. 对于问题 1.2，令 $Y=(y_1,\cdots,y_n)', X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 于是

- 若 A 可逆，有
$$\begin{vmatrix} A & X \\ Y^T & z \end{vmatrix} = |A|\cdot(z-Y^TA^{-1}X)=z|A|-Y^TA^*X.$$

- 若 A 不可逆，存在 $\delta>0$, 当 $0<t<\delta$ 时有 $A_t=tI_n+A$ 可逆，于是有
$$\begin{vmatrix} A_t & X \\ Y^T & z \end{vmatrix} = z|A_t|-Y^tA_t^*X,$$

  注意到两边是关于 t 的多项式，自然关于 t 连续，让 $t\to 0^+$ 可知结论成立.

因此有

$$\begin{vmatrix} A & X \\ Y^T & z \end{vmatrix} = |A| \cdot (z - Y^T A^{-1} X) = z|A| - Y^T A^* X = z|A| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j A_{ij}.$$

注 1.4. 在问题 1.2 基础上，若 $z \neq 0$ 结合打洞原理有

$$\begin{vmatrix} A & X \\ Y^T & z \end{vmatrix} = z \cdot \left| A - \frac{1}{z} X Y^T \right| = z|A| - Y' A^* X.$$

问题 1.5. (中国海洋大学 2024) 设 A 是 n 阶反对称阵，证明：存在 n 维非零列向量 X, 使得对任意常数 λ, 都有

$$|A + \lambda X X^T| = |A|.$$

证明. 由问题 1.2 有

$$\begin{vmatrix} A & -\lambda X \\ X^T & 1 \end{vmatrix} = |A + \lambda X X^T| = |A| + \lambda X^T A^* X$$

- 若 A 不可逆，则 A^* 也不可逆，于是 $A^* X = 0$ 有非零解 X_0, 取 $X = X_0$ 即可.
- 若 A 可逆，则 $A^* = |A| A^{-1}$, 因为 A 是反对称阵，则 A^{-1} 也是反对称阵，因此 A^* 也是反对阵，于是对任意非零列向量 X，均有 $X^T A^* X = 0$, 则任取非零向量即可满足条件.

■

问题 1.6. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}, \quad a \neq b.$$

证明. 将 D_n 第一列拆成两列，由行列式的性质有 $D_n = (x-b) D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}$. 由 a, b 的对称性，同时也有

$$D_n = (x-a) D_{n-1} + a(x-b)^{n-1}.$$

于是联立可得 $|D_n| = \dfrac{b(x-a)^n - a(x-b)^n}{b-a}$. ■

注 1.7. 对于问题 1.6, 记 $J = (1, 1, \cdots, 1)'$ 为 n 维列向量，令

$$D_n(t) = \det(D_n - tJJ'),$$

则容易看出 $D_n(t)$ 是关于 t 的一次多项式，即 $D_n(t)=pt+q$. 此外，$D_n(a)=(x-a)^n, D_n(b)=(x-b)^n$, 所以

$$D_n=D_n(0)=\frac{bD_n(a)-aD_n(b)}{b-a}=\frac{b(x-a)^n-a(x-b)^n}{b-a}.$$

问题 1.8. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，若记 $J=(1,1,\cdots,1)^T$, 则

$$|A+xJJ'|=|A|+x\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

证明. 由行列式的性质，将左边行列式展开为 2^n 个行列式的和，使得每个行列式每列元素都只含有 x 或 a_{ij}, 于是结论得证. ■

注 1.9. 特别地，令上述 $x=1$, 则有

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将又边两个行列式分别从第一列至第 $n-1$ 列，依次将前一列减去后一列，于是有

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1,n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{n,n} & 1 \end{vmatrix}$$

问题 1.10. (南京大学 2021) 已知

$$A=\begin{pmatrix} x_1-1 & x_2-1 & x_3-1 & x_4-1 \\ x_1^2-1 & x_2^2-1 & x_3^2-1 & x_4^2-1 \\ x_1^3-1 & x_2^3-1 & x_3^2-1 & x_4^3-1 \\ x_1^4-1 & x_2^4-1 & x_3^4-1 & x_4^4-1 \end{pmatrix}$$

求 A 的行列式以及 $|A|$ 的所有代数余子式之和.

证明. 注意到

$$|A| = \prod_{i=1}^{4}(x_i-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & x_4+1 \\ x_1^2+x_1+1 & x_2^2+x_2+1 & x_3^2+x_3+1 & x_4^2+x_4+1 \\ x_1^3+x_1^2+x_1+1 & x_2^3+x_2^2+x_2+1 & x_3^3+x_3^2+x_3+1 & x_4^3+x_4^2+x_4+1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{4}(x_i-1)\cdot\prod_{1\le i<j\le 4}(x_j-x_i)$$

若记 $|A|$ 的代数余子式为 $A_{ij}(1\le i,j\le 4)$, 则由问题 1.8 有

$$\sum_{1\le i,j\le 4}A_{ij} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix} - |A| = \prod_{i=1}^{4}x_i\prod_{1\le i<j\le 4}(x_i-x_j) - \prod_{i=1}^{4}(x_i-1)\cdot\prod_{1\le i<j\le 4}(x_j-x_i)$$

■

♯♯♯ 更多关于代数余子式之和的问题可以参考 3.1.1 的 [问题 **2017A01**] 和 3.2.1 的 [问题 **2018A03**]

问题 1.11. *计算以下 n 阶行列式 $(bc\neq 0)$:*

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

证明. 不难看出递推式 $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, 现在令 $a=\alpha+\beta, bc=\alpha\beta$, 则

$$D_n-\alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) = \cdots = \beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1) = \beta^n,$$

同理有 $D_n-\beta D_{n-1} = \alpha^n$.

- 若 $\alpha\neq\beta$, 即 $a^2\neq 4bc$, 有 $D_n = \dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$,
- 若 $\alpha=\beta$, 则

$$D_n = \alpha D_{n-1}+\alpha^n = 2\alpha^n+\alpha^2D_{n-2} = \cdots = (n+1)\alpha^n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

■

问题 1.12. 设 a, b, c 均为复数且 $bc \neq 0$, 证明：下列 n 阶矩阵 A 可对角化.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}$$

证明. 首先令 x_1, x_2 是方程 $x^2 - (\lambda - a)x + bc = 0$ 的两个根，则由问题 1.11 有

$$|\lambda I_n - A| = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2},$$

于是 λ 是 A 的特征值当且仅当 $x_1^{n+1} = x_2^{n+1}$. 若记 $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n+1} + i\sin\dfrac{2\pi}{n+1}$, 则由 $x_1^{n+1} = x_2^{n+1}$ 可得 $x_1 = \omega^k x_2 (1 \leq k \leq n)$. 由 Vieta 定理有 $x_1 x_2 = bc$, 因此若取定 bc 的一平方根 $\sqrt{bc}$ 之后，有

$$x_1 = \sqrt{bc}(\cos\frac{k\pi}{n+1} + i\sin\frac{k\pi}{n+1}), \quad x_2 = \sqrt{bc}(\cos\frac{k\pi}{n+1} - i\sin\frac{k\pi}{n+1}), 1 \leq k \leq n,$$

因此由 $x_1 + x_2 = \lambda - a$ 有

$$\lambda = x_1 + x_2 + a = a + 2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1}, 1 \leq k \leq n.$$

即 A 有 n 个互不相同的特征值，因此 A 可对角化. ■

问题 1.13. 计算 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0, n \geq 3$.

证明. 令

$$B=\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}$$

则 $D=B+C$. 注意到当 $n\geq 3$ 时,$|B|=0$, 当 $n=2$ 时 $|B|=-(a_1-a_2)^2$. 当 $n=1$ 时 $|B|=2a_1$. 由于 B 的任一 k 阶主子式都与 B 有相同的形状, 从而上述给出了 B 的所有主子式的计算结果. 注意到 C 只有主子式非零. 将 A 按照行列式性质展开，使每个行列式每列只含有 B 或者只含有 C, 然后按 B 的那些列进行 Laplace 展开得

$$\begin{aligned}
|A|&=|B|+|C|+\sum_{1\leq k\leq n-1}\sum_{\substack{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n\\ 1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n}}B\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\hat{C}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\\
&=|C|+\sum_{i=1}^n B\begin{pmatrix}i\\ i\end{pmatrix}\hat{C}\begin{pmatrix}i\\ i\end{pmatrix}+\sum_{1\leq i<j\leq n}B\begin{pmatrix}i & j\\ i & j\end{pmatrix}\hat{C}\begin{pmatrix}i & j\\ i & j\end{pmatrix}\\
&=(-2)^n a_1a_2\cdots a_n+\sum_{i=1}^n(2a_i)(-2)^{n-1}a_1a_2\cdots\hat{a_i}\cdots a_n+\sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(-(a_i-a_j)^2(-2)^{n-2}a_1\cdots\hat{a_i}\cdots\hat{a_j}\cdots a_n\Big)\\
&=(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left((n-2)^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)\right)=(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n(n-2)^2a_i.
\end{aligned}$$

■

问题 1.14. (浙江大学 2018) 设 $A(t)=(a_{ij}(t))$ 为 n 阶实矩阵, 其中 $a_{ij}(t)$ 是定义在实数域上的可导函数, 其导数记为 $a'_{ij}(t)$, 记 $A'(t)=(a'_{ij}(t))$, 若 $A(t)$ 的行列式恒大于零, 证明:

$$\ln(|A(t)|)'=\operatorname{tr}(A(t)^{-1}A'(t))$$

证明. 由链式法则有

$$A'(t)=\sum_{i=1}^n\begin{vmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a'_{i1}(t) & a'_{i2}(t) & \cdots & a'_{in}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a'_{ij}(t)A_{ij}=\operatorname{tr}(A'(t)A^*(t))$$

其中 $A^*(t)$ 是 $A(t)$ 的伴随矩阵, 所以

$$\ln(|A(t)|)' = \frac{A'(t)}{|A(t)|} = \frac{\operatorname{tr}(A'(t)A^*(t))}{A(t)} = \operatorname{tr}(A'(t)A^{-1}(t)) = \operatorname{tr}(A^{-1}(t)A'(t)).$$

■

问题 1.15. 设 $A = (a_{ij})$, 对如下 a_{ij} 两种取值情况，分别求 $\det A$.

1. $a_{ij} = \max\{i, j\}$
2. $a_{ij} = |i - j|$.

证明. 1. 注意到

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

依次将第 $i-1$ 行减去第 i 行 $(i = 2, 3, \cdots, n)$ 可以得到一个下三角行列式, 求得其值为 $\det A = (-1)^{n-1}n$.

2. 注意到

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

从最后一列起，每一列减去前一列, 再将得到的行列式的最后一行加到前面的每一行上去, 就可以得到一个下三角行列式, 求得其值为 $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

■

问题 1.16. (苏州大学 2024) 解答如下问题:

1. 计算如下 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

2. 证明：当 $n \geq 3$ 且为奇数时，$\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 是无理数.

证明. 1. 下面证明 $D_n = \cos n\alpha$. 对阶数进行归纳. 注意 $D_1 = \cos\alpha, D_2 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$. 假设结论对阶数小于 n 时成立. 将 D_n 按最后一行展开，利用归纳假设有

$$D_n = 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2} = 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha = \cos n\alpha.$$

2. 由 1 将 $\alpha = \arccos(x)$ 代入即可看出 $\cos(n\arccos x)$ 是关于 x 的多项式，且首项系数为 2^{n-1}. 现假定 $\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 是有理数，则存在互素整数 p,q 使得 $q\arccos(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) = p\pi$. 因此 $\cos(q\arccos\dfrac{1}{\sqrt{n}}) = \cos(p\pi) = \pm 1$, 所以 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 是形如整系数多项式

$$q(x) = 2^{q-1}x^q + a_1x^{q-1} + \cdots + a_{q-1}x + a_q$$

的根. 若 $\sqrt{n}$ 非整数, 则 $f(x) = nx^2 - 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 且 $f(x), q(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上不互素, 所以 $f(x), q(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上也不互素，因此一定有 $f(x) \mid q(x)$, 即存在 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 $f(x) = (nx^2-1)g(x)$. 设 $g(x) = bg_1(x)$, 其中 $b \in \mathbb{Q}, g_1(x)$ 是本原多项式. 又因为 $nx^2 - 1$ 是本原多项式, 所以由 Gauss 引理，$(nx^2-1)g_1(x)$ 也是本原多项式, 因此一定有 $a \in \mathbb{Z}$. 即 $g(x)$ 是整系数多项式, 所以有 $n \mid 2^{q-1}$, 矛盾. 同理可证若 $\sqrt{n}$ 为整数，则 $\sqrt{n} \mid 2^{q-1}$, 也矛盾. 所以 $\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 是无理数.

■

问题 1.17. 设 f 为从 n 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射，使得对任意 n 阶方阵 A, 任意的指标 $1 \leq i \leq n$, 以及任意常数 c, 满足下列条件：(1) 设 A 的第 i 列是方阵 B 和 C 的第 i 列之和，且 A 的其余列与 B 和 C 的对应列完全相同，则 $f(A) = f(B) + f(C)$.(2) 将 A 的第 i 列乘以常数 c 得到方阵 B, 则 $f(B) = cf(A)$.(3) 对换 A 的任意两列得到方阵 B, 则 $f(B) = -f(A)$.(4)$f(I_n) = 1$. 证明：$f(A) = |A|$.

证明. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$\alpha_j = a_{1j}e_i + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$$

由条件 (1) 和 (2) 得

$$f(A) = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} a_{k_1 1}a_{k_2,2}\cdots a_{k_n n} f(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n})$$

再由性质 (3), 若 $k_i = k_j$, 则 $f(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}) = 0$. 因此在 $f(A)$ 的表达式中，只剩下 k_i 互不相同的项. 通过 $N(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 次相邻对换可将 $(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n})$ 变成 $I_n = (e_1, \cdots, e_n)$, 故由条

件 (3) 和 (4) 有

$$f(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}) = (-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} f(I_n) = (-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$$

于是

$$f(A) = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} = |A|.$$

■

问题 1.18. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个互不相同的实数，$f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 是 n 个次数不超过 $n-2$ 的实系数多项式，证明：

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

证明. 令 $f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式，且 $f(a_2) = f(a_3) = \cdots = f(a_n) = 0$, 从而 $f(x) \equiv 0$, 于是 $f(a_1) = \Delta = 0$. ■

问题 1.19. 设 n 阶方阵 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 且 λ_1 的一个特征向量为 $e = (1, 1, \cdots, 1)'$. 证明：若 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为其列分块，则

$$\det(\alpha_1, \cdots, e, \cdots, \alpha_n) = \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n.$$

其中 e 替换 A 的第 i 列 $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$.

证明. 首先证明 e 也是 A^* 关于特征值 $\prod_{i=2}^{n} \lambda_i$ 的特征向量. 若 A 可逆,则由 $Ae = \lambda_1 e$ 有 $A^{-1}e = \lambda_1^{-1} e$, 从而 $A^* e = |A| A^{-1} e = \lambda_2 \cdots \lambda_n e$. 若 A 不可逆，则存在一系列有理数 $t_k \to 0$ 使得 $t_k I + A$ 可逆，则由 $(A + t_k I)e = (t_k + \lambda_1)e$, 有

$$(A + t_k I)^* e = (\lambda_2 + t_k) \cdots (\lambda_n + t_k) e,$$

让 $t_k \to 0$ 即有 $A^* e = \lambda_2 \cdots \lambda_n e$. 将要证等式左边按第 i 列展开，只需证明

$$\det(\alpha_1, \cdots, e, \cdots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} = \lambda_2 \cdots \lambda_n. (\dagger)$$

由 $A^* e = \lambda_2 \cdots \lambda_n e$, 比较两边第 i 行，即得 $(\dagger)$ 式. ■

问题 1.20. (北京大学 2017) 设 $\mathbb{F}$ 为数域,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中 $2n$ 个列向量. 用 $|\alpha_1\cdots\alpha_n|$ 表示以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为列向量的矩阵的行列式. 证明下面的行列式等式:

$$|\alpha_1,\cdots,\alpha_n|\cdot|\beta_1,\cdots,\beta_n|=\sum_{i=1}^n|\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta_1,\beta_{i+1},\cdots,\alpha_n|\cdot|\alpha_i,\beta_2,\cdots,\beta_n|.$$

证明. 记 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,$\alpha_i,\beta_i$ 的第 j 个元素为 $a_{ij},b_{ij},1\le i,j\le n,A_{ij},B_{ij}$ 为相应代数余子式. 则有

$$\begin{aligned}右边&=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n b_{1k}A_{ik}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}B_{1j}\right)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n b_{1k}B_{1j}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ik}\right)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n b_{1k}B_{1j}(\delta_{jk}|A|)=|A|\sum_{j=1}^n b_{1j}B_{1j}=|A||B|=左边.\end{aligned}$$

■

问题 1.21. 求下列 $n+1$ 阶矩阵 A 行列式的值:

$$A=\begin{pmatrix}(a_0+b_0)^n&(a_0+b_1)^n&\cdots&(a_0+b_n)^n\\(a_1+b_0)^n&(a_1+b_1)^n&\cdots&(a_1+b_n)^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(a_n+b_0)^n&(a_n+b_1)^n&\cdots&(a_n+b_n)^n\end{pmatrix}$$

证明. 由于 $(a_i+b_j)^n=a_i^n+C_n^1a_i^{n-1}b_j+C_n^2a_i^{n-2}b_j^2+\cdots+C_n^{n-1}a_ib_j^{n-1}+b_j^n$, 所以

$$A=\begin{pmatrix}a_0^n&C_n^1a_0^{n-1}&\cdots&1\\a_1^n&C_n^1a_1^{n-1}&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n^n&C_n^1a_n^{n-1}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\b_0&b_1&\cdots&b_n\\\vdots&\vdots&&b_n\\b_0^n&b_1^n&\cdots&b_n^n\end{pmatrix},$$

于是

$$|A|=\prod_{k=1}^n C_n^k\cdot\prod_{0\le i<j\le n}(a_i-a_j)(b_j-b_i).$$

■

问题 1.22. 设 n 阶实矩阵 A 的每行元素之和都为 1, 求 $|A|$ 的最大值.

证明. 设 $A'A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 由条件有 $\mathrm{tr}(A'A)=\sum_{i=1}^n a_{ij}^2=n$. 所以

$$|A|^2=|AA'|=\prod_{i=1}^n\lambda_i\le\left(\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n=1.$$

取 $A = I_n$, 则 $|A| = 1$, 因此 $|A|$ 的最大值为 1. ■

1.2 多项式

问题 1.23. 设 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约当且仅当 n 为素数.

证明. 若 n 为素数，令 $x = y + 1$, 则

$$f(x) = f(y+1) = \frac{(y+1)^n - 1}{y} = y^{n-1} + C_n^1 y^{n-2} + \cdots + n,$$

取 $p = n$, 由 Eisenstein 判别可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 若 n 不是素数，设 $n = n_1 n_2$, 则

$$f(x) = (1+x+\cdots+x^{n_1-1})+(x^{n_1}+\cdots+x^{2n_1-1})+\cdots = (1+x+\cdots+x^{n_1-1})(1+x^{n_1}+\cdots+x^{(n_2-1)n_1})$$

即 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约. ■

问题 1.24. 设 u 是复数域上的某个数,若 u 适合某个非零有理系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则称 u 是代数数. 证明

1. 对任意一代数数 u, 存在唯一的一个首一有理多项式 $g(x)$, 使得 $g(u) = 0$, 且 $g(x)$ 的次数是 u 所有适合多项式中次数最小的，称 $g(x)$ 为 u 的最小多项式.

2. 设 $g(x)$ 是 u 适合的首一有理系数多项式，则 $g(x)$ 是 u 的最小多项式的充要条件是 $g(x)$ 在有理数域上不可约.

证明. 1. 存在性总是可以做到的，把所有 u 适合多项式拿出来比较，选出首一的次数最低的即可，下证唯一性. 对于任意 u 适合多项式 $f(x)$，一定有 $g(x) \mid f(x)$. 不然，做带余除法有

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad r(x) \neq 0, \deg(r(x)) < \deg(g(x)),$$

则 $r(u) = 0$, 这与 $g(x)$ 的取法相矛盾. 于是若 $g_1(x)$ 也是 u 的最小多项式，则 $g(x)$ 与 $g_1(x)$ 相互整除，且都是首一多项式，从而 $g(x) = g_1(x)$, 这就证明了唯一性.

2. 必要性. 若 $g(x)$ 在有理数域上可约，则存在次数小于 $g(x)$ 的互素有理系数多项式 $h(x), v(x)$ 使得 $g(x) = h(x)v(x)$, 由 $g(u) = 0$, 一定有 $h(u) = 0$ 或者 $v(u) = 0$, 不论何种情况，这与 $g(x)$ 的定义相矛盾. 充分性. 因为 $g(x)$ 在有理数域上不可约，因此对于 u 的适合多项式 $f(x)$, 只能是 $g(x) \mid f(x)$, 特别地，最小多项式也整除 $g(x)$, 再由 $g(x)$ 是首一的，因此 $g(x)$ 就是 u 的最小多项式.

■

问题 1.25. 设 $f(x)$ 是 n 次有理系数多项式，其中 n 是大于 *1* 的奇数，且 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 证明：若 c_1, c_2 是 $f(x)$ 的两个复根，则 $c_1 + c_2$ 不是有理数.

证明. 令 $c = c_1 + c_2$, 若 c 是有理数，则 $f(c-x)$ 也是有理系数多项式，且 $f(c-c_1) = f(c_2) = f(c_1) = 0$, 即 $f(c-x)$ 与 $f(x)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上不互素，从而在有理数域上也不互素. 又因为 $f(x)$ 在有理数域上不可约，且 n 是奇数，从而只能是

$$f(x) + f(c-x) = 0.$$

因此 $f\left(\frac{c}{2}\right) = 0$, 这与 $f(x)$ 在有理数域上不可约矛盾. ■

问题 1.26. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，如果存在正整数 m 满足 $m \nmid f(0), m \nmid f(1) \cdots, m \nmid f(m-1)$, 证明 $f(x)$ 没有整数根，特别地，若 $f(x)$ 是首一多项式，则 $f(x)$ 没有有理根.

证明. 对任意整数 k, 做带余除法 $k = mq + r, 0 \le r \le m-1$. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则

$$f(k) = a_n(mq+r)^n + a_{n-1}(mq+r)^{n-1} + \cdots + a_1(mq+r) + a_0 = mb + f(r), b \in \mathbb{Z},$$

由于 $m \nmid f(r)$, 所以 $m \nmid f(k)$, 于是 $f(k) \neq 0$, 所以 f 没有整数根. ■

问题 1.27. 证明如下问题：

1. 设 $f(x)$ 是一个首一整系数多项式，且 $f(0), f(1)$ 都是奇数，则 $f(x)$ 无整数根.
2. 设 $f(x)$ 是一个首一整系数多项式，已知 a 是偶数，b 是奇数，且 $f(a), f(b)$ 都是奇数，则 $f(x)$ 无整数根.
3. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 是整系数多项式，且 $(a+b)c$ 是奇数，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.
4. 已知 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式，且 $a_0, a_0 + a_1 + \cdots + a_n, a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$ 都不能被 3 整除，则 $f(x)$ 没有整数根.

证明.

1. 对任意整数 k, 对 2 做带余除法，由问题 1.26 可知结论成立.
2. 由 $f(a), f(b)$ 是奇数，分别可以推出 $f(0), f(1)$ 也都是奇数，由 1 可知结论成立.
3. 由 $(a+b)c$ 是奇数，所以 $a+b, c$ 都是奇数. 所以 $f(0) = c, f(1) = 1 + a + b + c$ 都是奇数，且 $f(x)$ 是首 1 的，由 1 可知 $f(x)$ 没有有理根，且 $f(x)$ 次数为 3，$f(x)$ 在有理数域可约与 $f(x)$ 有有理根等价，所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.
4. 由条件 $f(0), f(1), f(-1)$ 都不能被 3 整除，则

$$f(2) = f(3 + (-1)) = 3a + f(-1), \quad a \in \mathbb{Z},$$

因此 $3 \nmid f(2)$, 于是由前面讨论可知 $f(x)$ 没有整数根.

■

问题 1.28. 已知 m,n 是正整数，则 $(m,n)=d$ 的充要条件是 $(x^m-1,x^n-1)=x^d-1$.

证明. x^m-1 与 x^n-1 的公共根为

$$\cos\frac{2k\pi}{d}+i\sin\frac{2k\pi}{d},\quad 0\le k\le d-1,$$

于是 $(x^m-1,x^n-1)=x^d-1$. 所以结论得证. ■

问题 1.29. 设 $g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n, f(x)=g(x^k)$, 其中 k 是一个正整数，且 $(k,n+1)=1$, 证明：$g(x)\mid f(x)$.

证明. 注意到 $g(x)=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, f(x)=\dfrac{x^{(n+1)k}-1}{x^k-1}$, 因此 $x^{n+1}-1=g(x)(x-1)\mid f(x)(x^k-1)$. 又因为 $(k,n+1)=1$, 所以 $(x^k-1,x^{n+1}-1)=x-1$, 于是 $(\dfrac{x^k-1}{x-1},g(x))=1$, 因此 $g(x)\mid f(x)$. ■

问题 1.30. 设 $f(x)=x^3+2x+1,\alpha$ 是 $f(x)$ 的一个复根, 令

$$\mathbb{Q}[\alpha]=\left\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{Q}\right\},$$

证明*:*

1. $\forall g(x)\in\mathbb{Q}[x], g(\alpha)\in\mathbb{Q}[\alpha]$.
2. $\forall\beta\in\mathbb{Q}[\alpha]$, 存在 $\gamma\in\mathbb{Q}[\alpha]$ 使得 $\beta\gamma=1$.

证明.

1. 首先证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约，若 $f(x)$ 有有理根，则只能是 ±1, 但是 $f(\pm1)\neq 0$, 所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约. 因此由问题 1.24 可知 $f(x)$ 是 α 最小多项式，因此 $1,\alpha,\alpha^2$ 在有理数域上线性无关，$1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3$ 线性相关，于是 1 结论成立.

2. 设 $\beta=b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2$, 令 $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$, 则 $(f(x),g(x))=1$. 于是存在 $u,v\in\mathbb{Q}[x]$ 使得

$$g(x)u(x)+f(x)v(x)=1,$$

于是 $\beta u(\alpha)=1$, 令 $\gamma=u(\alpha)\in\mathbb{Q}[\alpha]$.

■

问题 1.31. 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是数域 P 上的多项式，且

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1\mid f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1}).$$

证明：$(x-1)^n\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$.

证明. 记 $\omega_i, i=1,2,\cdots,n$ 是 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=0$ 的复根，于是 $(\omega_i)^{n+1}=1$. 因此有

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(1) \\ f_2(1) \\ \vdots \\ f_n(1) \end{pmatrix} = 0,$$

由 ω_i 互不相同，因此 $f_1(1)=f_2(1)=\cdots=f_n(1)=0$, 于是 $(x-1)^n \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$. ■

问题 1.32. 设 $f(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}, g(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$, 证明:$f(x)\mid g(x)$ 的充要条件是 n 为偶数.

证明. 注意到 $f(x)=\dfrac{x^{2(n+1)-1}}{x^2-1}, g(x)=\dfrac{x^{4(n+1)}-1}{x^4-1}$, 于是 $f(x)\mid g(x)(x^2+1)$. 当 n 为偶数时，$f(\pm i)=1$ 所以 $(f(x),x^2+1)=1$, 所以 $f(x)\mid g(x)$. 反过来，假如 n 为奇数，则 $x^2+1\mid f(x)$, 且 $(g(x),x^2+1)=1$, 所以不可能有 $f(x)\mid g(x)$, 因此一定有 n 为偶数. ■

问题 1.33. 设 $f(x)$ 是实系数首一多项式且无实根，求证：$f(x)$ 可以表示为两个实系数多项式的平方和.

证明. 因为实系数多项式的复根成对存在，所以 $f(x)$ 是偶数次多项式，不妨设它的根为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n; \quad \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n.$$

令 $u(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n); v(x)=(x-\bar{x}_1)\cdots(x-\bar{x}_n)$, 则 $v(x)=\overline{u(x)}, f(x)=u(x)v(x)$. 再将 $u(x),v(x)$ 的实部和虚部分开，可设

$$u(x)=g(x)+ih(x), \quad v(x)=g(x)-ih(x),$$

则 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$. ■

问题 1.34. 设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是实系数多项式，且对任意实数 c, 有 $f(c)\geq 0$, 证明:$f(x)$ 可以写成两个实系数多项式的平方和.

证明. 若 $f(x)$ 没有实根，则结论显然成立. 否则设 $f(x)$ 的所有互不相同的实根为 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 且 $x_1<x_2<\cdots<x_s$, 设

$$f(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_s)^{k_s}f_1(x), \quad k_i\geq 1, i=1,2,\cdots,s.$$

则 $f_1(x)$ 没有实根，于是存在两个实系数多项式 $g_1(x),h_1(x)$ 使得 $f_1(x)=h_1^2(x)+g_1^2(x)$, 且对任意实数 c 有 $f_1(c)>0$. 于是对任意实数 c, 有

$$(c-x_1)^{k_1}(c-x_2)^{k_2}\cdots(c-x_s)^{k_s}\geq 0,$$

令 $c \in (x_{s-1}, k_s)$, 则可以推出 k_s 为偶数，继续令 $c \in (x_{s-2}, x_{s-1})$, 可以推出 k_{s-1} 为偶数,$\cdots$ 从而得到 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 都是偶数，于是 $f(x)$ 可以写成

$$f(x) = p^2(x)(g_1^2(x) + h_1^2(x)) = [p(x)g_1(x)]^2 + [p(x)h_1(x)]^2.$$

因此结论得证. ■

引理 1.35. 设 $f(x), g(x) \in P[x], a, b, c, d \in P$ 满足 $ad - bc \neq 0$, 则

$$(f(x), g(x)) = (af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)).$$

引理1.35的证明是平凡的，留给读者.

问题 1.36. (华南理工大学 2024) 设 $(f(x), g(x)) = 1$, 证明:$f^2(x) + g^2(x)$ 的重根必是 $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2$ 的根.

证明. 注意到

$$m(x) = f^2(x) + g^2(x) = (f(x) + ig(x))(f(x) - ig(x)),$$

因为 $(f(x), g(x)) = 1$, 所以在复数域上也有 $(f(x), g(x)) = 1$, 从而由引理 1.35 有 $(f(x)+ig(x), f(x)-ig(x)) = 1$. 设 α 是 $m(x)$ 的重根，则一定有 $(x-\alpha)^2 \mid (f(x) + ig(x))(f(x) - ig(x))$, 因此一定有 $(x-\alpha)^2 \mid f(x) + ig(x)$ 或者 $(x-\alpha)^2 \mid f(x) - ig(x)$. 不论哪种情况一定有

$$x - \alpha \mid (f'(x) + ig'(x))(f'(x) - ig'(x)) = [f'(x)]^2 + [g'(x)]^2.$$

于是结论得证. ■

问题 1.37. 证明方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = 0 \end{cases}$$

仅有零解.

证明. 1. 由 Newton 公式可以解出 $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = 0$, 所以

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n,$$

于是结论成立.

2. 反证. 若有非零解，不妨设 $x_1, x_2, \cdots, x_s (s \leq n)$ 是方程非零互异解，且对应的个数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_s (k_i \geq 1)$, 则上述方程组前 s 个方程等价于

$$\begin{cases} k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s = 0 \\ k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots + k_s x_s^2 = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ k_1 x_1^s + k_2 x_2^s + \cdots + k_s x_s^s = 0 \end{cases}$$

将此方程看作是关于 $k_1, \cdots, k_s$ 的方程，其系数矩阵行列式为 $\prod_{i=1}^{s} x_i \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq s} (x_j - x_i) \neq 0$, 因此方程仅有零解，矛盾了.

■

问题 1.37 的推广版本可以参考 3.2.1 的 **[问题 2018A02]**

问题 1.38. *已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互异的整数时，证明：*

1. *$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ 在有理数域上不可约.*
2. *当 n 是奇数时，$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$ 在有理数上不可约.*
3. *当 n 是偶数且 $n \geq 6$ 时，$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$ 在有理数域上也不可约.*
4. *$f(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$ 在有理数域上不可约.*

证明. .

1. 若存在首一次数小于 $f(x)$ 的整系数多项式 $h(x), v(x)$ 使得 $f(x) = h(x)u(x)$. 则 $f(a_i) = h(a_i)v(a_i) = -1, 1 \leq i \leq n$. 又因为 $h(a_i), v(a_i)$ 都是整数，因此一定有

$$h(a_i) + v(a_i) = 0. \quad 1 \leq i \leq n.$$

于是一定有 $h(x) = -v(x)$, 因此 $f(x) = -v^2(x)$, 这与 $f(x)$ 首相系数为 1 矛盾.

2. 类似想法，若 $f(x)$ 可约，存在首一整系数多项式 $h(x), v(x)$ 使得 $f(x) = h(x)v(x)$, 由条件不难推出 $h(x) = v(x)$, 因此 $f(x) = h^2(x)$, 这与 $f(x)$ 次数为偶数矛盾.

3. (a) 在 2 的基础上若 $f(x) = h(x)^2$, 由于 $\deg(h(x)) = \dfrac{n}{2} \geq 3$, 所以在 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 一定有 $\dfrac{n}{2}$ 个数使得 $h(a_j) = 1$, 有 $\dfrac{n}{2}$ 个数使得 $h(a_k) = -1$, 否则一定可以推出 $h(x) \equiv 1$ 或 $h(x) \equiv -1$ 显然不可能. 因为 $h(x)$ 不是零多项式且是首一的，于是有

$$h(x) = (x - a_{i_1})(x - a_{i_2}) \cdots (x - a_{i_{\frac{n}{2}}}) + 1 = (x - a_{j_1})(x - a_{j_2}) \cdots (x - a_{j_{\frac{n}{2}}}) - 1,$$

任取 $a_{j_k}, 1 \le k \le \frac{n}{2}$, 有

$$|h(a_{j_k})| = |(a_{j_k} - a_{i_1}) \cdots (a_{j_k} - a_{i_{\frac{n}{2}}}) + 1| \ge |1 \cdot 2 \cdot 3| - 1 \ge 5 \ne 1,$$

矛盾，所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(b) 还一种想法是找到一个点 x_0, 使得 $f(x_0) < 0$, 就可以推出矛盾. 这不是件难事情，比如令 $x_0 = a_{n-1} + \frac{1}{2}$, 这里不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

4. 若存在首一整系数多项式 $h(x), v(x)$ 使得 $f(x) = h(x)v(x)$. 首先证明 $h(x), v(x)$ 的次数都为 n, 假如其中有一个次数小于 n, 不妨设 $\deg(h(x)) < n$, 由于 $h(a_i) = \pm 1, (1 \le i \le n)$, 断言一定存在 $h(a_j) = 1, h(a_k) = -1$, 否则一定能推出 $h(x) \equiv 1$ 或者 $h(x) \equiv -1$, 显然不行. 不妨设 $a_i < a_k$, 于是 $h(x)$ 在区间 (a_i, a_k) 中有零点 x_0, 但是显然 $f(x)$ 没有实根，矛盾. 于是

$$h(a_i) - v(a_i) = 0, \quad 1 \le i \le n.$$

又因为 $\deg(h(x) - v(x)) \le n - 1$, 从而一定有 $h(x) = v(x)$. 即 $f(x) = h(x)^2$. 现在令 $u(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, 于是 $h^2(x) - u^2(x) = (h(x) + u(x))(h(x) - v(x)) = 1$. 从而 $h(x) + u(x) = 1$ 且 $h(x) - u(x) = 1$ 或者 $h(x) + u(x) = -1$ 且 $h(x) - u(x) = -1$. 于是推出 $h(x) \equiv 1$ 或者 $h(x) \equiv -1$, 显然不行，于是 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

■

问题 1.39. (南京大学 2023) 证明多项式 $f(x) = \prod_{i=1}^{18} (x - i) + 23$ 在有理数域上不可约.

证明. 反证. 设存在次数大于零的首一整系数多项式 $h(x), g(x)$ 使得 $f(x) = h(x)g(x)$. 令 $H = \{\pm 1, \pm 23\}$, 则 $g(i), h(i) \in H$. 于是根据抽屉原理，存在 $m \in H$ 使得在 $T = \{1, 2, \cdots, 18\}$ 中至少有 5 个点满足 $g(x)$ 在这些点的取值为 m. 不妨设 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_5$ 满足 $g(a_i) = m$,. 则可设

$$g(x) = q(x) \prod_{i=1}^{5} (x - a_i) + m$$

- 若存在 $r \in T, m_1 \in H$ 使得 $g(r) = m_1 \ne m$, 则 $q(r) \prod_{i=1}^{5} (x - a_i) = m_1 - m \in \{\pm 2, \pm 22, \pm 24, \pm 46\}$ 而这些数都不能写成 5 个互不相同的整数的乘积，矛盾.
- 若对任意 $r \in T$, 有 $g(r) = m$, 则 $\deg g(x) = 18$ 矛盾.

■

问题 1.40. 已知多项式 $f(x) = x^7 + 7x^2 + 1$.

1. 证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.
2. $f(x)$ 至少存在一个实根.

3. 对任意 $\beta \in \mathbb{Q}$, 存在 $u(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 使得 $u(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - \beta}$.

证明. 1. 令 $x = y - 1$, 则

$$f(x) = f(y-1) = (y-1)^7 + 7(y-1)^2 + 1 = y^7 + 7a_1 y^6 + \cdots + 7a_6 y + 7,$$

其中 $a_1, \cdots, a_6$ 是整数. 取素数 $p = 7$, 由 Eisenstein 判别法可知结论成立.

2. 注意到 $f(-2) < 0, f(1) > 0$, 所以由连续函数的介值性，$f(x)$ 至少存在一个实根.

3. 因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，所以 $(f(x), x - \beta) = 1$. 于是存在 u, v 使得

$$f(x)v(x) + u(x)(x - \beta) = 1,$$

记 α 是 $f(x)$ 的一个实根，则 $\alpha \neq \beta$. 于是 $u(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - \beta}$.

■

问题 1.41. 设 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = \left\{a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} \mid a_i \in \mathbb{Q}, 0 \leq i \leq n-1\right\}$, 证明：$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是一个数域，并求 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间的一组基.

证明. 令 $f(x) = x^n - 2$, 由 Eisenstein 判别法 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，且 $f(\sqrt[n]{2}) = 0$, 因此 $f(x)$ 是 $\sqrt[n]{2}$ 的最小多项式. 所以 $a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. 容易验证 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 关于加法，减法，乘法封闭. 对任意 $0 \neq \alpha = a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{2^{n-1}}$, 记 $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, 则 $g(x) \neq 0$, 且由 $(g(x), f(x)) = 1$，存在 u, v 使得

$$g(x)u(x) + f(x)v(x) = 1,$$

从而 $g(\sqrt[n]{2})u(\sqrt[n]{2}) = 1$, 即 $\alpha^{-1} = u(\sqrt[n]{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$, 因此 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 构成数域，且有前面讨论，$1, \sqrt[n]{2}, \cdots, \sqrt[n]{2^{n-1}}$ 线性无关构成 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 的一组基. ■

问题 1.42. (四川大学 2024) 设 $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$, 其中 p 为素数，q 为正整数, 且 $p \nmid q$. 证明：

1. α 是无理数.

2. 设 $W = \{\beta = h(\alpha) \mid h(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$, 将 W 看成数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间, 则 $\dim W \leq 4$.

证明. 1. 令 $x - \sqrt{p} = \sqrt{q}$, 两边平方得 $x^2 + p - 2\sqrt{p}x = q$, 整理有 $x^2 + p - q = 2\sqrt{p}x$, 两边再平方得 $x^4 - 2(p+q)x^2 + (p-q)^2$. 令 $f(x) = x^4 - 2(p+q)x^2 + (p-q)^2$, 则 $f(\alpha) = 0$. 如果能证明 $f(x)$ 无有理根, 则结论可证. 若 t 是 $f(x)$ 的有理根，则 t^2 是 $x^2 - 2(p+q) + (p-q)^2$ 的有理根. 从而首先需满足

$$\Delta = \sqrt{4(p+q)^2 - 4(p-q)^2} = 4\sqrt{pq} \in \mathbb{Q}$$

即存在 $k\in\mathbb{Q}$ 使得 $pq=k^2$, 所以 $k\neq 1$ 是整数，且由 $(p,q)=1$ 有 $k\mid q$ 或者 $k\mid q$. 若 $k\mid p$, 则 $k=p$. 从而由 $p^2=pq\Rightarrow p=q$ 矛盾. 若 $k\mid q$, 设 $q=kl$, 则 $pkl=k^2$, 即 $p\mid k\mid q$, 矛盾. 所以 $f(x)$ 无有理根，从而 α 是无理数.

2. 对任意 $h(x)\in\mathbb{R}[x]$, 存在 $r(x)$ 使得

$$h(x)=f(x)q(x)+r(x),\quad 0\leq\deg r(x)\leq 3$$

从而 $h(\alpha)=r(\alpha)$, 即 $W=\{|\beta=r(\alpha)\mid r(x)\in\mathbb{Q}_3[x]\}$. 所以对任意 $\beta\in W,\beta$ 可以写成 $1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3$ 的线性组合, 所以 $\dim W\leq 4$.

■

1.3 矩阵与向量组

问题 1.43. (北京大学 2019) 给定任意实数 $\varepsilon>0$, 证明：对任意 n 阶实矩阵 A, 存在一个 n 阶对角阵 D, 使得其每个对角元为 ε 或 $-\varepsilon$, 并满足

$$|A+D|\neq 0.$$

证明. 对阶数进行归纳. 若 $k=1$, 则 $A=a$ 为一个数，总有 $a+\varepsilon$ 或者 $a-\varepsilon$ 不等于零，所以结论成立. 假设 $k\leq n-1$ 时结论成立，现在考虑 $k=n$ 的情形，对任意

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha' \\ \beta & A_{n-1}\end{pmatrix},$$

由归纳假设存在主对角元为 ε 或者 $-\varepsilon$ 的 $n-1$ 阶对角阵 D_1 使得 $A_{n-1}+D_1$ 可逆. 从而有

$$\left|A+\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & D_1\end{pmatrix}\right|-\left|A+\begin{pmatrix}-\varepsilon & 0\\ 0 & D_1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}2\varepsilon & \alpha'\\ 0 & D_1+A_{n-1}\end{vmatrix}=2\varepsilon|A_{n-1}+D_1|\neq 0,$$

所以 $\left|A+\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & D_1\end{pmatrix}\right|,\left|A+\begin{pmatrix}-\varepsilon & 0\\ 0 & D_1\end{pmatrix}\right|$ 中至少有一个不等于零，于是结论成立. ■

问题 1.44. (北京大学 2012)n 阶方阵 A 的每行每列恰好有一个元素为 1 或者 -1, 其余元素均为零. 证明：存在 $k\in\mathbb{N}^*$ 使得

$$A^k=E.$$

证明. 设 S 为每行每列都恰好有一个元素不为零且在 $\{1,-1\}$ 上取值，其余全为零的 n 阶矩阵集合, 则 S 是有限集. 对任意 $B\in V$,AB 相当于对 B 的行进行对换，并且某些行乘以 -1, 于是 $AB\in S$, 所以 $A,A^2,\cdots\in S$, 因此一定存在 $p>q$ 使得 $A^p=A^q$, 令 $k=p-q$, 则由 A 可逆有 $A^k=E$. ■

卌 问题 1.44 说明置换矩阵均可对角化.

问题 1.45. (南开大学 2020) 设 B, C 为 n 阶实对称阵，且 $|B| \neq 0$, 证明存在 n 阶实矩阵 A, 使得

$$AB + BA' = C.$$

证明. 注意到条件和结论在正交相似变换：$A \mapsto Q^{-1}AQ, B \mapsto Q^{-1}BQ, C \mapsto Q^{-1}CQ$ 下不会发生改变. 于是不妨一开始便设 $B = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 为 B 的正交相似标准型. 由条件有 $\lambda_i \neq 0(1 \leq i \leq n)$. 设 $C = (c_{ij}), X = (x_{ij})$, 若满足

$$XB + BX' = C,$$

则需有 $x_{ij}\lambda_j + \lambda_i x_{ji} = c_{ij}$. 当 $i = j$ 时，$x_{ii} = \dfrac{c_{ii}}{2\lambda_i}$ 被唯一确定. 当 $i \neq j(i < j)$, 让 $x_{ij} = 0$, 则 $x_{ji} = \dfrac{c_{ij}}{\lambda_i}$. 于是一定存在满足条件的 A 使得 $AB + BA' = C$. ■

卌 问题 1.45，我认为还可以再稍微加难一点. 对任意可逆实对称阵 B, 我们可以考虑集合

$$W = \left\{XB + BX' \mid \forall X \in \mathbb{R}^{n\times n}\right\},$$

不难看出 W 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的一个子空间. 若我们记 $\mathbb{S}$ 为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上所有对称阵构成的 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间，则有 $W = \mathbb{S}$, 于是 $\dim W = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

问题 1.46. (北京大学 2019) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上线性无关的列向量组,$\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是 $\mathbb{R}^s$ 上线性无关的列向量组. 若有实数 c_{ij} 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} c_{ij}\alpha_i\beta_j' = O,$$

证明：系数 $c_{ij} = 0$.

证明. 记 $\gamma_j = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} c_{kj}\alpha_k\right)$, 现在令 $A = (\gamma_1, \cdots, \gamma_t)$,$B = \begin{pmatrix}\beta_1' \\ \beta_2' \\ \vdots \\ \beta_t'\end{pmatrix}$, 则由条件有

$$0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} c_{ij}\alpha_i\beta_j' = \sum_{j=1}^{t}\gamma_j\beta_j' = AB,$$

从而由 Sylvester 秩不等式有

$$0 = r(AB) \geq r(A) + r(B) - t = r(A),$$

所以 $r(A)=0$, 即 $\gamma_j=0(1\le j\le t)$. 再由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关可得 $c_{ij}=0$. ■

注 1.47. 问题 1.46 条件等价于

$$O=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1t}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1'\\\beta_2'\\\vdots\\\beta_t'\end{pmatrix},$$

由于 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 和 $(\beta_1,\cdots,\beta_t)'$ 分别是列满秩和行满秩矩阵，满足左右消去律，因此

$$O=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1t}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mt}\end{pmatrix},$$

所以结论得证.

问题 1.48. (北京大学 2020) 设 A 是秩为 r 的 n 阶实对称阵, 证明：存在一个 r 阶主子式非零, 并且任意一非零 r 阶主子式符号相同.

证明. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 A 的列分块, 不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 A 列向量组的极大无关组. 则 $\alpha_1',\cdots,\alpha_r'$ 是 A 的行向量组的一组极大无关组. 由于 A 的后 $n-r$ 个向量是前面向量的线性组合，则可通过列变换再进行对应的行变换使得 A 合同于 $\begin{pmatrix}D&O\\O&O\end{pmatrix}$ 其中 $|D|$ 是 A 是第 r 个顺序主子式，由于 $r(A)=r(D)=r$, 所以 $|D|\neq 0$. 设 $|\Lambda|$ 是 A 任一 r 阶非零主子式，Λ 是由 A 的第 $j_1,\cdots,j_r$ 行和列的相交元素组成的矩阵, 则可以通过行列对换使得

$$P'AP=\begin{pmatrix}\Lambda&A_1\\A_1&A_2\end{pmatrix}=B,$$

并且由 Λ 行向量组线性无关，所以 $R\begin{pmatrix}\Lambda\\A_1\end{pmatrix}=R(\Lambda)=r$, 因此存在可逆阵 Q 使得

$$Q'BQ=(PQ)'A(PQ)=\begin{pmatrix}\Lambda&O\\O&A_3\end{pmatrix},$$

于是由 $R(A)=R(B)=R(\Lambda)+R(A_3)=r$, 所以 $R(A_3)=0$, 即 $A_3=O$. 因此 A 的正负惯性指数和 Λ 的正负惯性指数相同. 即 A 的非零特征值中正特征值和负特征值的个数分别等于 Λ 的正特征值的个数和负特征值的个数. 于是由行列式等于所有特征值的乘积可知结论成立. ■

卌 根据问题 1.48 的结论，有如下推论：设 A 为 n 阶实对称阵，且 $R(A)=r$, 则 A 的所有 r 阶主子式之和不为零.

问题 1.49. (北京大学 2010) 设 A 是 n 阶正定阵，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 满足 $\beta_i'A\beta_j=0(1\le i<j\le s)$. 问向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩可能是多少，证明你的结论.

证明. 向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的秩为 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 中非零向量的个数. 以下不妨假设 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 都是非零向量. 则 $G=(\beta_i'A\beta_j)$ 为对角元全大于零的 s 阶对角阵，所以 G 是正定阵. 若 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性相关，则存在非零实列向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_s)'$ 使得

$$v=a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_s\beta_s=0.$$

于是 $\alpha'G\alpha=v'v=0$, 这与 G 正定矛盾. ∎

问题 1.50. (南开大学 2009) 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵，满足 $b_{ij}=b^{i-j}a_{ij}$, 其中 b 是一非零常数. 证明：对任意 $\alpha\in\mathbb{K}^n$, 方程组 $AX=\alpha$ 有解当且仅当对任意 $\beta\in\mathbb{K}^n$, 方程组 $BX=\beta$ 有解.

证明. 命题等价去证明 $\det(A)\ne0$ 当且仅当 $\det(B)\ne0$, 当且仅当证明 $r(A)=r(B)$. 现在令 $H=\operatorname{diag}\left\{1,b,\cdots,b^{n-1}\right\}$, 由条件则有 $B=HAH^{-1}$, 自然有 $r(A)=r(B)$. ∎

问题 1.51. (南开大学 2020) 已知 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是有限维欧式空间 V 中的线性变换，$\mathscr{B}^*$ 是 $\mathscr{B}$ 的共轭变换，满足 $\mathscr{B}^*\mathscr{A}=\mathscr{O}$, 证明：$\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 的秩等于 $\mathscr{A}$ 的秩加 $\mathscr{B}$ 的秩.

证明. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的表示阵为 A,B 则由条件有 $B^TA=O$. 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, 并设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$ 和 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_k}$ 分别是 A,B 列向量组的一个极大无关组. 设 $t_1,\cdots,t_{s+k}$ 满足

$$t_1\alpha_{i_1}+\cdots+t_s\alpha_{i_s}+t_{s+1}\beta_{j_1}+\cdots+t_{s+k}\beta_{j_k}=0,$$

由 $B^TA=O$, 有 $\beta_i'\alpha_j=0,(1\le i,j\le n)$. 所以有

$$\beta_{j_l}^T(t_{s+1}\beta_{j_1}+\cdots+t_{s+k}\beta_{j_k})=0,\quad\forall 1\le l\le k.$$

于是有

$$(t_{s+1}\beta_{j_1}+\cdots+t_{s+k}\beta_{j_k})^T(t_{s+1}\beta_{j_1}+\cdots+t_{s+k}\beta_{j_k})=0,$$

所以 $t_{s+1}\beta_{j_1}+\cdots+t_{s+k}\beta_{j_k}=0$, 故 $t_{s+1}=\cdots=t_{s+k}=0$. 再由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$ 线性无关，所以 $t_1=\cdots=t_s=0$, 因此有 $r(A+B)=r(A)+r(B)$. 故结论成立. ∎

卌 在问题 1.51 中，若取 n 维实列向量空间的内积为标准内积，则 $B^TA=O$, 说明 $\beta_i(1\le i\le n)\in L^{\perp}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 自然有结论成立.

问题 1.52. (南开大学 2019) 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 均是线性空间 V 上的线性变换，且 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}\subset\mathrm{Ker}\mathscr{B}$, 证明：存在 V 上的线性变换 $\mathscr{T}$ 使得 $\mathscr{T}\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

证明. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的表示阵为 A,B. 则由条件有 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解，即 $AX=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 同解，于是有 $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$, 即 B 的行向量组可以由 A 的行向量组线性表出，于是存在 T 使得 $TA=B$. 让 $\mathscr{T}$ 在这组基下的表示阵为 T 即可.($\mathscr{T}$ 的几何构造可以参考问题 1.115 的 1) ■

问题 1.53. (同济大学 2023) 设 $E=\{1,2,\cdots,n^2\}$,$A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，且 $a_{ij}\in E$ 互不相同，求 $\mathrm{rank}A$ 的最小值和最大值.

证明. 显然 $r(A)\geq 1$. 若 $r(A)=1$, 设 α 是 A 中包含元素 1 的列向量，则其余列可以写成 α 的 k 倍，其中 k 是整数. 若 α 中元素最大值为 n, 则 A 中其余列中一定有一列 α_j 的元素最小值要大于等于 $n+1$. 那么此时 $k\geq n+1$, 则 α_j 中最大元素大于等于 $n(n+1)>n^2$ 矛盾. 所以 β 中元素最大值要大于等于 $n+1$, 则 A 其余列必有一列 α_j 的最小元素大于等于 n, 此时 $k\geq n$, 那么 α_j 中元素最大值大于等于 $(n+1)n>n^2$ 也矛盾，所以 $r(A)\geq 2$. 考虑

$$A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\n+1&n+2&\cdots&2n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n(n-1)+1&n(n-1)+2&\cdots&n^2\end{pmatrix}$$

不难验证此时 $r(A)=2$. 从而 $\mathrm{rank}A$ 的最小值为 2. 注意到 E 中至少有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个元素为偶数. 因此我们可以令 A 的主对角元都为奇数，$a_{ij},(i>j)$ 为偶数. 对此时的 A 的每个元素 a_{ij} 对 2 做带余除法. 即 $a_{ij}=2p_{ij}+b_{ij},0\leq b_{ij}\leq 1$. 令 $B=(b_{ij})$ 由行列式的定义我们有 $\det A\equiv\det B(\mathrm{mod}2)$. 注意到 B 是对角元全为 1 的上三角阵，于是 $\det B=1$, 从而 A 的行列式也为奇数, 即 A 可逆. 所以 $\mathrm{rank}A$ 的最大值为 n. ■

本问题可以作如下推广：

问题 1.54. 设 E 是由数域 $\mathbb{K}$ 上任意 n^2 个互不相同的数组成的集合.$A=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}\in E$, 且 a_{ij} 互不相同，则一定有 $r(A)$ 的最大值为 n.

详细证明可以参考 3.1.1 的 [**问题 2017A13**]. 其中证明核心利用到了循环矩阵的性质. 而基础循环矩阵是一类特殊的置换矩阵，有关置换矩阵的更多讨论可以参考 2.20.

问题 1.55. 设 n 为奇数，$A,B\in M_n(\mathbb{C})$ 且 $A^2=O$, 证明：$AB-BA$ 不可逆.

证明. 注意到 $A^2=O$, 所以 A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,J_2(0),\cdots,J_2(0)\}$, 且由 n 为奇数，一阶零 Jordan 块一定是存在的. 所以 $r(A)\leq\dfrac{n-1}{2}$. 因此

$$r(AB-BA)\leq r(AB)+r(BA)\leq 2r(A)\leq n-1.$$

即 $AB-BA$ 不可逆. ■

问题 1.56. (南开大学 2021) 设 A 为 n 阶方阵，其中 $n\geq 3$, 且 A 的第 i 行第 j 列元素为 $(i-j)^2$, 求 A 的秩.

证明. 注意到

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2^2&-4&1\\\vdots&\vdots&\vdots\\n^2&-2n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&n\\1&2^2&\cdots&n^2\end{pmatrix}=BC,$$

所以 $r(A)=r(BC)\leq r(B)\leq 3$. 另一方面，考虑 $|A|$ 三阶顺序主子式 $\begin{vmatrix}0&1&4\\1&0&1\\4&1&0\end{vmatrix}=8\neq 0$, 所以 $r(A)\geq 3$, 从而 $r(A)=3$. ■

问题 1.57. (武汉大学 2024) 设 n 阶方阵 A 的第 (i,j) 元为 a_i-b_j.

1. 求 $|A|$.
2. 当 $n>2$ 时，若 $a_1\neq a_2, b_1\neq b_2$, 求 $Ax=0$ 解空间维数和一组基.

证明. 1. 当 $n=1$ 时，$|A|=a_1-b_1$. 当 $n=2$ 时，$|A|=(a_2-a_1)(b_2-b_1)$. 当 $n\geq 3$ 时，注意到

$$A=\begin{pmatrix}a_1&-1\\a_2&-1\\\vdots&\vdots\\a_n&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}=CB$$

所以 $r(A)\leq 2$, 从而 $|A|=0$.

2. 首先有 $r(A)=2$, 且 A 的一个子式 $\begin{vmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2\\a_2-b_1&a_2-b_2\end{vmatrix}=(a_2-a_1)(b_2-b_1)\neq 0$, 所以 $r(A)=2=r(B)$. 且显然若 $Bx=0$ 则 $Ax=CBx=0$, 所以 $Ax=0\Leftrightarrow Bx=0$. 所以 $Ax=0$ 解空间维数为 $n-2$, 取 $Bx=0$ 的一组基即是 $Ax=0$ 的一组基.

■

问题 1.58. 设 G 是数域 $\mathbb{F}$ 上一些 n 阶可逆阵的集合，且满足：对 G 中任意不同矩阵 A,B 都有 $|A+B|=0$. 证明：G 是有限集.

证明. 对任意 $A\in G$, 构造多元多项式

$$f_A(X)=|X+A|,$$

其中 $X=(x_{ij})$, 则 $f_A(x)$ 是以 x_{ij} 为未知元，且次数不超过 n 的多元多项式. 若记 V 为所有次数不超过 n 的 n^2 元多元多项式全体和 0 构成的线性空间，则 $f_A(X)\in V$. 对任意不同 $A_1,\cdots,A_m\in G$, 若存在 $k_1,\cdots,k_m$ 使得

$$0=\sum_{i=1}^{m}k_if_{A_i}(X)=\sum_{i=1}^{m}k_i|X+A_i|,$$

对于上式，分别将 $X=A_i(1\leq i\leq m)$ 代入可得 $k_i|A_i+A_i|=0$, 从而由 A_i 可逆有 $k_i=0$, 即 $f_{A_1},\cdots,f_{A_m}$ 作为 V 中向量线性无关. 而 V 是有限维线性空间，所以 G 是有限集. ∎

问题 1.59. (南开大学 2022) 已知 V 是数域 P 上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 V 中两个向量组，其秩分别为 $r_1,r_2,C=(c_{ij})\in P^{r\times s}$ 满足

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{r}c_{ij}\alpha_i,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

证明：$r(C)\leq r_2-r_1+r$.

证明. 记 $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s)$, 设 $\dim W=n,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 W 的一组基. 设 $A\in P^{n\times r},B\in P^{s\times n}$ 满足

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A;\quad(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B,$$

则有 $r(A)=r_1,r(B)=r_2$(需要证明, 读者自证之). 且由条件有 $B=AC$. 因此由 Sylvester 秩不等式有

$$r_2=r(B)=r(AC)\geq r(A)+r(C)-r=r_1+r(C)-r,$$

所以有 $r(C)\leq r_2-r_1+r$. ∎

问题 1.60. (华东师范大学 2024) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 满足 $A^2=O$, 令 $B=AA'+A'A$ 证明：$R^n=\mathrm{Im}A\oplus\mathrm{Im}A'\oplus\mathrm{Ker}B$

证明. 设 $\alpha=A\beta=A'\gamma\in\mathrm{Im}A\cap\mathrm{Im}A'$, 则 $0=A\alpha=A^2\beta=AA'\gamma$, 所以 $A'\gamma=0$, 即 $\alpha=0$, 所以 $\mathrm{Im}A\oplus\mathrm{Im}A'$. 注意到

$$B=(A,A')\begin{pmatrix}A'\\A\end{pmatrix}=C'C$$

所以 $Bx=0\Leftrightarrow Cx=0\Leftrightarrow Ax=0$ 且 $A'x=0$. 设 $\alpha=A\beta+A'\gamma\in(\mathrm{Im}A+\mathrm{Im}A')\cap\mathrm{Ker}B$ 则有 $0=A\alpha=AA'\gamma$, 所以 $A'\gamma=0$. 同理 $0=A'\alpha=A'A\beta$, 所以 $A\beta=0$, 于是 $\alpha=0$, 即

$\mathrm{Im}A \oplus \mathrm{Im}A' \oplus \mathrm{Ker}B$. 由维数公式下面只需证明 $r(A)+r(A')=r(B)=r(A,A')$. 令

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1'\\ \beta_2'\\ \vdots\\ \beta_n'\end{pmatrix}$$

则由 $A^2=(\beta_i'\alpha_j)_{n\times n}=O$, 所以 $\alpha_i\beta_j=0(1\le i,j\le n)$. 由问题 1.51 有 $r(A,A')=r(A)+r(A')$. ■

注 1.61. 对于问题 1.106 首先显然有 $r(A,A')\le r(A)+r(A')$, 另一方面

$$r(A,A')\ge r\left(\begin{pmatrix}A'\\ A\end{pmatrix}(A,A')\right)=r\begin{pmatrix}A'A & O\\ O & AA'\end{pmatrix}=r(A)+r(A')$$

所以有 $r(A,A')=r(A)+r(A')$.

问题 1.62. (四川大学 2023) 设 A 是 n 阶实反对称阵, 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的双线性函数: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$. 证明: 对 $\mathbb{R}^n$ 的任意子空间 W, 有

$$\dim W+\dim W^{\perp}=n+\dim(W\cap(\mathbb{R}^n)^{\perp}).$$

其中 $W^{\perp}=\{\alpha\in\mathbb{R}^n\mid(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in W\}$

证明. 设 $\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$ 为 W 的一组基, 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$, 则

$$W^{\perp}=\big\{\alpha\in\mathbb{R}^n\mid\alpha'AB=0\big\}=\big\{\alpha\in\mathbb{R}^n\mid(B'A')\alpha=0\big\}$$

因此 $\dim W+\dim W^{\perp}=r(B)+n-r(AB)$. 此外令

$$U=W\cap(\mathbb{R}^n)^{\perp}=\big\{B\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}^n,A'B\alpha=0\big\}=\{B\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}^n,AB\alpha=0\}$$

于是问题等价于证明: $\dim U=r(B)-r(AB)$. 记 $B\boldsymbol{x}=0$ 和 $AB\boldsymbol{x}=0$ 的解空间分别为 V_1,V_2. 取 V_1 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$, 将其扩张为 V_2 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$. 则

$$U=L(B(\alpha_1),\cdots,B(\alpha_t),B(\alpha_{t+1}),\cdots,B(\alpha_l))=L(\underbrace{B(\alpha_{t+1}),\cdots,B(\alpha_l)}_{l-t})$$

下面证明 $B(\alpha_{t+1}),\cdots,B(\alpha_l)$ 线性无关. 若

$$0=k_1B(\alpha_{t+1})+\cdots+k_{l-t}B(\alpha_l)=B(k_1\alpha_{t+1}+\cdots+k_{l-t}\alpha_l),$$

即 $k_1\alpha_{l+1}+\cdots+k_{l-t}\alpha_l\in V_1$, 结合 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 线性无关可知 $k_1=\cdots=k_{l-t}=0$, 于是 $B(\alpha_{t+1}),\cdots,B(\alpha_l)$

线性无关. 所以

$$\dim U = l - t = n - r(AB) - (n - r(B)) = r(B) - r(AB).$$

因此结论得证. ■

问题 1.63. 设 n 阶矩阵 A 的秩为 $n-1, B$ 是同阶非零阵且 $AB = BA = O$, 证明：存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

证明. 由条件有 $r(B) = 1$, 因此可设 $B = \alpha\beta'$, 其中 α, β 为非零向量. 则由 $AB = BA = O$, 有 $A\alpha = 0, A'\beta = 0$. 记 $m(x)$ 为 A 的最小多项式, 则由于 A 有零特征值，所以 $m(x)$ 常数项为零, 于是存在 $g(x)$ 使得 $m(x) = xg(x)$. 从而由 $Ag(A) = O$, 存在 η, ξ 使得 $g(A) = \eta\xi'$, 其中 η, ξ 是非零向量. 同理有 $A\eta = 0, A'\xi = 0$. 于是存在 t, k 使得 $\alpha = k\eta, \beta = t\xi$, 即有 $B = \alpha\beta' = ktg(A)$. 注意 $g(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式，于是结论得证. ■

问题 1.64. 设 A 是 n 阶方阵,A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n. \\ 1, & r(A) = n-1. \\ 0, & r(A) \le n-2. \end{cases}$$

证明. 若 $r(A) = n$, 则由 $A^* = |A|A^{-1}$ 可知 $r(A^*) = n$. 若 $r(A) = n-1$, 则由 $AA^* = |A|I_n = O$, 有 $r(A^*) \le 1$. 且由 $r(A) = n-1$, 所以 A 有一个 $n-1$ 阶子式不为零，于是 $r(A^*) = 1$. 若 $r(A) \le n-2$, 则 A 的任一 $n-1$ 阶子式为零，从而 $A^* = O$, 即 $r(A^*) = 0$. ■

问题 1.65. 设 n 阶复方阵 A 不可逆，证明：至多存在两个复数 λ, 使得 $\lambda I_n + A^*$ 不可逆.

证明. 由问题 1.64 有 $r(A^*) \le 1$. 若 $A^* = O$, 则结论显然，否则有 $A^* = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为 n 维非零列向量. 则由注 2.19 有 A^* 相似于 $\operatorname{diag}\{0, 0, \cdots, 0, J(0, 2)\}$ 或者 $\operatorname{diag}\{0, 0, \cdots, 0, \operatorname{tr}(A^*)\}$, 其中 $\operatorname{tr}A^* = \beta^T\alpha \ne 0$, 即 A^* 至多有一个非零特征值，从而结论得证. ■

问题 1.66. 设 A 为 n 阶矩阵，证明：伴随矩阵 A^* 可表示为 A 的次数不超过 $n-1$ 的多项式.

证明. 若 $r(A) = n$, 设 A 的特征多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0,$$

此时 $a_0 \ne 0$, 从而 $-\dfrac{1}{a_0}f(x) = xg(x) - 1$ 其中 $g(x) = \dfrac{f(x) - a_0}{-a_0x}$. 则由 Cayley-Hamilton 定理 $0 = Ag(A) - I_n$, 即 $A^{-1} = g(A)$, 从而 $A^* = |A|g(A)$, 其中 $g(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式. 若 $r(A) = n-1$, 则由问题 1.63 可知结论成立. 若 $r(A) \le n-2$, 则由问题 1.64 有 $A^* = O$, 此时结论显然成立. ■

问题 1.67. (东南大学 2024) 设 A, B 为 n 阶实对称阵，且 A 是正定阵，且 AB 的特征值都是 1, 证明：存在次数不超过 n 的多项式 $f(x)$ 使得 $B = f(A)$.

证明. 设 $A = C'C$, 则由降阶公式有 $|\lambda I_n - C'CB| = |\lambda_n - CBC'|$, 从而 CBC' 特征值都是 1, 即 B 也是正定阵. 下证 AB 可对角化. 设 $Q'AQ = I_n$, 则 $Q'AB(Q')^{-1} = Q'AQQ^{-1}B(Q^{-1})' = Q^{-1}B(Q^{-1})'$ 仍是正定阵，所以可对角化，即 AB 可对角化. 从而 $B = A^{-1}$, 由问题 1.66 证明过程可知结论成立. ■

问题 1.68. (武汉大学 2024) 设 A, B 为 n 阶实矩阵，且 $A^2 + B^2 = AB$. 证明：若 $AB - BA$ 是可逆阵，则 n 是 3 的倍数.

证明. 记 λ_1, λ_2 是方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的两根，则 $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 1, \lambda_1 + \lambda_2 = -1, \lambda_1\lambda_2 = 1$. 于是

$$(A + \lambda_1 B)(A + \lambda_2 B) = A^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1(BA - AB) + B^2 = \lambda_1(BA - AB).$$

$$(A + \lambda_2 B)(A + \lambda_1 B) = A^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_2(BA - AB) + B^2 = \lambda_2(BA - AB).$$

两边取行列式则有 $\lambda_1^n|BA - AB| = \lambda_2^n|BA - AB|$, 即 $\lambda_1^n = \lambda_2^n$, 因此 n 是 3 的倍数. ■

问题 1.69. (华中科技大学 2024) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶实矩阵，满足对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^3$, 有 $\alpha' A\alpha = 0$. 证明：对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^3$, 存在 $\beta \in \mathbb{R}^3$ 使得 $A\alpha = \alpha \times \beta$.

证明. 设 e_i 为标准单位列向量，则由条件有 $e_i'Ae_i = 0, (e_i + e_j)'A(e_i + e_j) = 0 (\forall i \neq j)$, 即 $a_{ii} = 0, a_{ij} + a_{ji} = 0$. 所以 A 是反对称阵. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = (x, y, z)'$, 令 $\beta = (c, -b, a)'$, 则容易验证 $A\alpha = \alpha \times \beta$. ■

问题 1.70. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 满足 $AB = BA = O, r(A) = r(A^2)$, 证明: $r(A+B) = r(A) + r(B)$.

证明. 注意条件和结论在相似变换 $A \mapsto P^{-1}AP, B \mapsto P^{-1}BP$ 下不会发生改变，故不妨一开始便设 $A = \operatorname{diag}\{O, A_1\}$ 为 A 的 Jordan 标准型，其中 A_1 由 A 非零特征值的 Jordan 块构成. 将 B 进行对应分块 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 则由 $AB = BA = O$ 以及 A_1 非异可知,B_{12}, B_{21}, B_{22} 都是零矩阵. 于是

$$r(A + B) = r\begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = r(B_{11}) + r(A_1) = r(B) + r(A).$$

■

问题 1.70 可作推广：设 A, B 为 n 阶矩阵, 满足 $AB = BA = O$, 则存在正整数 k, 使得 $r(A^k) + r(B^k) = r(A^k + rB^k)$.

证明. 由于 $r(A^n) = r(A^{2n})$, 由问题 1.70 取 $k = n$ 即可. ■

问题 1.71. 设 A, B 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵，满足 $AB = BA$，证明：$r(A+B) \le r(A) + r(B) - r(AB)$

证明. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), U_A = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), U_{AB}, U_B, U_{A+B}$ 同意义. 显然有 $U_{A+B} \subseteq U_A + U_B$. 由 $AB = BA$, 则 $U_{AB} \subseteq U_A \cap U_B$. 于是

$$\dim U_{A+B} \le \dim (U_A + U_B) = \dim U_A + \dim U_B - \dim U_A \cap U_B \le \dim U_A + \dim U_B - \dim U_{AB},$$

即有 $r(A+B) \le r(A) + r(B) - r(AB)$. ∎

问题 1.72. 设 A 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶幂零阵，B 为 n 阶方阵，满足 $AB = BA$ 且 $r(AB) = r(B)$. 证明：$B = O$.

证明. 反证. 设 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n), W = L(\beta_1, \cdots, \beta_n)$, 则 $\dim W \ge 1$. 由 $AB = BA$, 即 $A\beta_i \in W$, 因此可以将 A 限制在 W 上. 由 $r(AB) = r(B)$, 则 $\dim(\mathrm{Im}(A|_W)) = \dim W$. 但是 $A|_W$ 仍是幂零的，即 $\mathrm{Ker} A|_W \ne \{0\}$, 矛盾. ∎

问题 1.73. 设 A, B 是 n 阶方阵满足 $AB = BA$, 且 $r(A) \ge n-1$, 证明：

$$r(A^2) + r(B^2) \ge 2r(AB)$$

证明. 若 A 是可逆阵，则由 Sylvester 秩不等式有

$$r(A^2) + r(B^2) = n + r(B^2) \ge 2r(B) = 2r(AB).$$

否则有 $r(A) = n-1$, 注意条件和结论在相似变换 : $A \mapsto P^{-1}AP, B \mapsto P^{-1}BP$ 下不会发生改变，因此不妨一开始便设 $A = \mathrm{diag}\{J_0, J_1\}$ 为 A 的 Jordan 标准型，其中 J_0 是 A 的关于特征值 0 的 Jordan 块，J_1 是 A 的非零特征值的 Jordan 块拼成的矩阵. 设 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ 为对应分块，由 $AB = BA$ 解得 $B_{12} = O, B_{21} = O, B_{11}J_0 = J_0B_{11}, B_{22}J_1 = J_1B_{22}$. 则 $r(A^2) = r(J_1)^2 + r(J_0^2)$,$r(B^2) = r(B_{11}^2) + r(B_{22}^2)$, $r(AB) = r(J_0B_{11}) + r(J_1B_{22})$. 由前面可逆情形的讨论有

$$r(J_1^2) + r(B_{22}^2) \ge 2r(J_1B_{22})$$

因此只需证明

$$r(J_0^2) + r(B_{11}^2) \ge 2r(J_0B_{11}).$$

不妨设 J_0, B_{11} 是 k 阶矩阵，则 $r(J_0^2) \ge k-2$. 且由 Sylvester 秩不等式有 $r(B_{11}^2) + k \ge 2r(B_{11})$. 若 $r(J_0B_{11}) = r(B_{11})$, 此时由问题 1.72 有 $B_{11} = O$, 此时结论显然成立. 否则有 $r(J_0B_{11}) \le r(B_{11}) - 1$, 于是

$$r(J_0^2) + r(B_{11}^2) \ge k - 2 + 2r(B_{11}) - k = 2(r(B_{11}) - 1) \ge 2r(J_0B_{11})$$

故结论得证. ∎

问题 1.74. 设 A,B 为 n 阶方阵，证明：$|r(AB)-r(BA)|\le \dfrac{n}{2}$.

证明. 不妨设 $r(AB)\ge r(BA)$. 记 $s(AB)$ 为 AB 阶数大于等于 2 的 0Jordan 块的个数, 则 $s(AB)\le \dfrac{n}{2}$. 由于 $r((AB)^2)=r(A(BA)B)\le r(BA)$, 则

$$r(AB)-r(BA)\le r(AB)-r((AB)^2)=s(AB)\le \frac{n}{2}$$

■

1.4 线性空间与线性映射

问题 1.75. (南京大学 2016) 设 W 为实 n 维列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，且在 W 中每个非零向量 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)'$ 中零分量的个数不超过 r. 证明：$\dim W\le r+1$.

证明. 令 $U=\left\{\alpha\in\mathbb{R}^n \mid \alpha\text{的前 } r+1 \text{ 个分量为零}\right\}$, 则 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，且 $\dim U=n-(r+1)$. 由于 $W\cap U=\{0\}$, 所以

$$\dim W=\dim(W\oplus U)-\dim U\le n-(n-r-1)=r+1.$$

■

问题 1.76. 设 U 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的 $n+1$ 维子空间，证明：存在非零矩阵 $A\in U$ 使得 A 不可逆.

证明. 任取非零向量 $v\in\mathbb{F}^n$, 定义 $\varphi:U\to\mathbb{F}^n, A\mapsto Av$, 则 φ 是线性映射. 且由于 $\dim U=n+1>\dim\mathbb{F}^n=n$, 则 $\mathrm{Ker}\varphi\ne\{O\}$. 从而任取非零矩阵 $A\in\mathrm{Ker}\varphi$, 满足 $A\boldsymbol{v}=0$, 即 A 不可逆. ■

问题 1.77. 设 V 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间，满足 V 中所有非零元素都是可逆阵，证明：$\dim_{\mathbb{K}}V\le n$.

证明. 设 U 为第一行元素全为零的矩阵构成的 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间，则 U 中元素都是奇异阵，且 $\dim U=n^2-n$. 则由条件有 $V+U=V\oplus U$ 为 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间，从而 $\dim U+\dim V=\dim(V\oplus U)\le n^2$, 即 $\dim V\le n$. ■

问题 1.78. (西安交通大学 2024) 设 $V=\mathbb{R}^{n\times n}, W$ 为 V 的一个子空间满足 $\forall A,B\in W$ 有 $\mathrm{tr}(AB)=0$. 求满足上述条件的 W 的维数 $\dim W$ 的最大值.

证明. 令 W_0 为对角元全为零的上三角阵，则 W_0 满足上述条件且 $\dim W_0=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 此外，若 W 也满足上述条件且 $\dim W>\dfrac{n(n-1)}{2}$. 令 $U=\left\{A\in V \mid A=A^T\right\}$, 则由维数公式

$$\dim(W\cap U)=\dim W+\dim U-\dim(U+W)>\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-n^2=0.$$

但是任取 $A\in W\cap U$, 则有 $\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(AA')=0$, 从而 $A=O$, 矛盾. 所以 $\dim W$ 的最大值为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$. ■

问题 1.79. 设 W 是由一些 n 阶复方阵组成的复数域上的线性空间，且 W 中任意非零元均可逆，证明：$\dim W \leq 1$.

证明. 反证. 若 $\dim W \geq 2$, 则存在两个线性无关的可逆阵 $A, B \in W$ 使得对任意 $k \in \mathbb{C}$ 都有 $kA + B \neq O \in W$ 是可逆阵. 由行列式性质有

$$\det(kA + B) = \det(A) \cdot \det(kI_n + A^{-1}B) \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{C},$$

让 k 取 $A^{-1}B$ 特征值的相反数即可推出矛盾, 所以 $\dim W \leq 1$. ■

问题 1.80. 设 σ 是复数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换，V 对应的实数域上线性空间 V_0 是 $2n$ 维的，σ 看成 V_0 的线性变换 σ_0. 证明：$\det(\sigma_0) = |\det(\sigma)|^2$, 其中 $|\det(\sigma)|^2$ 表示其行列式模长的平方.

证明. 取 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 设 σ 在这组基下的表示阵为 $A_{\mathbb{C}} = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = u_{ij} + iv_{ij} \in \mathbb{C}, v_{ij}, u_{ij} \in \mathbb{R}$. 于是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, i\varepsilon_1, \cdots, i\varepsilon_n$ 是 V_0 的一组基. 记 σ_0 在这组基下的表示阵为 $A_{\mathbb{R}}$. 则有

$$\sigma_0(e_i) = \sigma(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k = \sum_{k=1}^{n} u_{ki}e_k + \sum_{k=1}^{n} v_{ki}(ie_k), \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$\sigma_0(ie_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(ie_i) = \sum_{k=1}^{n} -v_{ki}e_i + \sum_{k=1}^{n} u_{ki}(e_k), \quad 1 \leq i \leq n.$$

于是若记 $B = (u_{ij}), C = (v_{ij})$, 则 $A_{\mathbb{C}} = B + iC, A_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$. 由问题 2.79 有

$$\det \sigma_0 = |A_{\mathbb{R}}| = |B + iC| \cdot |B - iC| = |A_{\mathbb{C}}| \cdot \overline{|A_{\mathbb{C}}|} = |\det \sigma|^2$$

■

问题 1.81. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，U 是 V 的非平凡子空间，证明：V 中有无限多个 U 的补子空间.

证明. 不妨设 $\dim U = k(1 \leq k \leq n-1), \{e_1, \cdots, e_k\}$ 是 U 的一组基，将其扩张为 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 令 $W_t = L(te_k + e_{k+1}, e_{k+2}, \cdots, e_n)$, 其中 $t \in \mathbb{K}$. 则由于

$$\{e_1, \cdots, e_k, te_k + e_{k+1}, \cdots, e_n\}$$

为 V 的一组基，所以 $V = U \oplus W_t$. 下面断言：若 $s \neq t$, 则 $W_s \neq W_t$. 反证，若 $W_s = W_t$, 则 $te_{k+1} + e_{k+2} \in W_s$, 于是可设

$$te_k + e_{k+1} = c_{k+1}(se_k + e_{k+1}) + c_{k+2}e_{k+2} + \cdots + c_n e_n$$

从而 $t-c_{k+1}s=c_{k+1}-1=\cdots=c_n=0$, 即 $s=t$ 矛盾. 因此 $\{W_t, t\in\mathbb{K}\}$ 是 U 的无限多个补子空间. ■

问题 1.82. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵，证明：A 的极小多项式的次数小于等于 $r(A)+1$

证明. 设 A 的不变因子组为 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$, 则 A 的最小多项式 $m(\lambda)=d_k(\lambda)$. 设 $\deg d_k(\lambda)=r$, 则由于 A 相似于 $\operatorname{diag}\{F(d_1(\lambda)),\cdots,F(d_k(\lambda))\}$. 注意 t 阶 Frobenius 块右上角的 $t-1$ 阶子式非零，则

$$r(A)\geq r(F(d_k(\lambda)))\geq \deg r-1=d_k(\lambda)-1$$

于是结论得证. ■

问题 1.83. (北京大学 2020) 设 $V_0,V_1,\cdots,V_{n+1}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，其中 $V_0=V_{n+1}=\{0\}$，线性映射

$$\mathscr{A}_i: V_i\to V_{i+1},\quad i=0,1,2,\cdots,n.$$

满足

$$\mathrm{Ker}\mathscr{A}_{i+1}=\mathrm{Im}\mathscr{A}_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n-1.$$

证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\dim V_i=0.$

证明. 由条件有正合序列

$$\{0\}=V_0\xrightarrow{\mathscr{A}_0}V_1\xrightarrow{\mathscr{A}_1}V_2\cdots\xrightarrow{\mathscr{A}_{n-1}}V_n\xrightarrow{\mathscr{A}_n}V_{n+1}=\{0\},$$

由 $\dim V_i=\dim\mathrm{Ker}\mathscr{A}_i+\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim V_i=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\dim V_i=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(\dim\mathrm{Ker}\mathscr{A}_i+\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}_i)=0.$$

■

问题 1.84. (南开大学 2020) 设 A,B 为 n 阶可逆实矩阵，满足 $AB-BA=B^2A$, 证明：n 为偶数.

证明. 由条件有 $AB=(B+B^2)A$, 因此 B 与 B^2+B 相似. 若 n 为奇数，则 B 有非零实特征值 λ_1, 则 $\lambda_2=\lambda_1^2+\lambda_1>\lambda_1$ 也是 B 实特征值，这样下去有 B 有无限个不同特征值，矛盾. ■

问题 1.85. (浙江大学 2023) 设 α 是 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 的根，

$$V=\left\{\sum_{i=0}^{6}a_ix^i\mid i=0,1,\cdots,6,a_i\in\mathbb{Q}\right\}$$

是次数不超过 6 的有理系数多项式构成的有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，定义线性映射 $\varphi : V \to \mathbb{C}, \varphi(f(x)) = f(\alpha)$, 求 φ 的核空间和像空间的维数，并证明：$\dfrac{1}{\alpha+2} \in \varphi(V)$.

证明. 令 $g(x) = x^4 + x^3 + \cdots + x + 1 = \dfrac{x^5-1}{x-1}$, 令 $x-1=y$ 有

$$g(x) = g(y+1) = y^4 + C_5^1 y^3 + C_5^2 y^2 + C_5^3 y + 5$$

由 Eisenstein 判别法可知 $g(y+1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，所以 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上也不可约. 因此对任意 $f(x) \in \varphi^{-1}(0)$, 有 $g(x) \mid f(x)$, 从而 $f(x) = g(x)(ax^2+bx+c)$, 其中 $a,b,c \in \mathbb{Q}$. 所以 $\dim \varphi^{-1}(0) = 3$, 再结合维数公式有 $\dim \varphi(V) = 4$. 再记 $h(x) = x+2$, 则由 $(h(x), g(x)) = 1$ 可知存在 $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 并可要求 $\deg(v(x)) < \deg(g(x)) = 4 < 6$ 使得

$$g(x)u(x) + h(x)v(x) = 1.$$

因此有 $h(\alpha)v(\alpha) = 1$, 所以 $\dfrac{1}{\alpha+2} \in \varphi(V)$. ■

问题 1.86. (浙江大学 2024) 设 V 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，$\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 满足

$$\mathscr{A}(\alpha) = \beta, \quad \mathscr{A}(\beta) = \gamma, \quad \mathscr{A}(\gamma) = \alpha - 2\beta,$$

证明：若 $\alpha \neq 0$, 则 α, β, γ 线性无关.

证明. 由条件有 $\mathscr{A}^3(\alpha) = \alpha - 2\mathscr{A}^2(\alpha)$, 即 $(\mathscr{A}^3 + 2\mathscr{A} - \mathrm{id})(\alpha) = 0$. 记 $f(x) = x^3 + 2x - 1$. 若 $f(x)$ 在有理数域上可约, 则 $f(x)$ 一定有有理根，从而只能是 ± 1, 但是 $f(\pm 1) \neq 0$, 于是 $f(x)$ 在有理数域上不可约, 且 $f(\mathscr{A})(\alpha) = 0$. 若 α, β, γ 线性相关，则存在不全为零的 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Q}$ 使得

$$k_1\alpha + k_2\mathscr{A}(\alpha) + k_3\mathscr{A}^2(\alpha) = 0,$$

令 $g(x) = k_1 + k_2 x + k_3 x^2$, 则 $g(\mathscr{A})(\alpha) = 0$, 且 $(g(x), f(x)) = 1$. 于是存在 u, v 使得

$$0 = u(\mathscr{A})f(\mathscr{A})(\alpha) + v(\mathscr{A})g(\mathscr{A})(\alpha) = \alpha,$$

这与 $\alpha \neq 0$ 矛盾，于是 α, β, γ 线性无关. ■

问题 1.87. (北京大学竞赛) 设 $\mathbb{F}$ 为数域, M 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子集, 且满足 (i) 对任意 $A, B \in M, A-B \in M$; (ii) 对任意 $A \in M, T \in \mathbb{F}^{n\times n}, TA \in M$, 证明:

1. M 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，且 $n \mid \dim M$.
2. 存在 $B \in M$ 使得 $B^2 = B$ 且 $M = \{TB \mid T \in \mathbb{F}^{n\times n}\}$.
3. 存在满足上述条件的 $(i), (ii)$ 的子空间 N，使得 $N \oplus M = \mathbb{F}^{n\times n}$.

4. 若 M 还满足对任意 $A \in M, T \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 有 $AT \in M$, 则 $M = \{O\}$ 或者 $M = \mathbb{F}^{n\times n}$.

证明. 1. 由条件 (ii) 首先对任意 $k, l \in \mathbb{F}, A, B \in M$ 有

$$kA = (kI_n)A \in M, \quad kA + lB = (kA) - (-lB) \in M,$$

所以 M 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间. 设 B 是 M 中秩最大的矩阵，记 $r(B) = r$. 当 $r = 0$ 或者 $r = n$ 时，易看出 $M = \{O\}$ 或者 $M = \mathbb{F}^{n\times n}$, 此时结论显然成立. 当 $0 < r < n$, 不妨设 $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$, 其中 $r(B_1) = r(B) = r$(否则可以通过初等行变换,) 变成上述形式. 对于 $i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, r$, 令 $Q_{ij} = E_{ij}B$, 即 Q_{ij} 的第 i 行为 B 的第 j 行 β_j, 其余行全为零. 容易验证，这 nr 个矩阵 Q_{ij} 线性无关. 对任意 $A \in M$, 记 A 的行向量为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 固定 i, 注意到

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ \alpha_i \\ O \end{pmatrix} = E_{r+1,i}A + B \in M,$$

所以由 B 的取法可知 α_i 可由 B_1 的行向量组线性表出. 设 $\alpha_i = \sum_{j=1}^r k_{ij}\beta_j$, 则

$$A = \sum_{i=1}^n E_{ii}A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r k_{ij}Q_{ij},$$

因此 $\{Q_{ij} \mid 1 \le i \le n; 1 \le j \le r\}$ 是 V 的一组基，所以 $\dim M = nr$, 即有 $n \mid \dim M$.

2. 可构造 B 为：不妨设 1 中 B_1 为行最简型 (否则可以通过初等行变换变成行最简型)，然后通过与 0 行的对换使得 B_1 的非零行主元位于对角线上，仍记为 B_1, 则 B 仍在 M 中，且由于对换变换是正交相似变换，于是 B 相似于矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$, 即有 $B^2 = B$, 且 $M = \{TB \mid T \in \mathbb{F}^{n\times n}\}$.

3. 在 1 中，将 B_1 的行向量组扩张为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$. 其中 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 是 B_1 的行向量组. 令 $C = \begin{pmatrix} O \\ B_2 \end{pmatrix}$, 其中 B_2 的行向量组为 $\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n$. 现在构造

$$N = \left\{TC \mid T \in \mathbb{F}^{n\times n}\right\},$$

则 N 显然满足 $(i), (ii)$ 且 $\mathbb{F}^{n\times n} = M \oplus N$.

4. 设 $M \ne \{O\}$, 任取非零矩阵 $A = (a_{ij}) \in M$, 不妨设 $a_{ij} \ne 0$. 则对任意 $E_{ki}, E_{jl}, (1 \le k, l \le n)$, 有 $E_{ki}AE_{jl} = a_{ij}E_{kl} \in M$, 由 $a_{ij} \ne 0$, 所以 $E_{kl} = (a_{ij}E_{kl})\left(\frac{1}{a_{ij}}I_n\right) \in M$, 于是 $\dim M \ge n^2$, 即 $M = \mathbb{F}^{n\times n}$

■

问题 1.88. (北京大学 2018) 考虑线性空间 $M_n(K)$, 称 $V \subset M_n(K)$ 是一个公共子空间，如果对每个 $A \in M_n(K)$ 及每个 $B \in V$ 都有 $AB \in V$.

1. 构造 $n+1$ 个不同的 n 维子空间.
2. 证明每个 n 维公共子空间都是极小的，即若有另外的公共子空间 $V' \subset V$, 则要么 $V = V'$ 要么 $V' = \{0\}$.

证明. 1. 参照问题 1.87 即可. 现在令

$$V_i = \left\{ J \in M_n(K) \mid J\text{的除了第 i 列之外全为零, 第 i 列}\alpha_i \in \mathbb{F}^n \right\}, i = 1, 2 \cdots, n.$$

则显然 V_i 是公共子空间，且 $\dim V_i = n$. 再令

$$V_{n+1} = \left\{ (k_1\alpha, k_2\alpha, \cdots, k_n\alpha)' \mid k_i \in \mathbb{R}, \alpha = (1, 1, \cdots, 1)' \right\},$$

则显然 V_{n+1} 也是公共子空间且 $\dim V_{n+1} = n$.

2. 若 $V' \neq \{0\} \subset V$ 是公共子空间，则由和问题 1.87 完全相同的证明手段，有 $n \mid \dim V'$, 从而只能是 $\dim V' = \dim V = n$, 所以 $V' = V$.

■

问题 1.89. (北京大学 2019) 设 A 为 n 阶实对称阵，令

$$S = \left\{ X \mid X'AX = 0, X \in \mathbb{R}^n \right\},$$

1. 求 S 作为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间的充要条件，并证明你的结论.
2. 若 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子空间, 求 $\dim S$.

证明. 1. S 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间当且仅当 A 为半正定阵或者半负定阵.

- 充分性. 设 A 为半正定阵，若 A 为半负定考虑 $-A$. 则存在 C 使得 $A = C'C$. 于是对任意 $X \in S$, 有 $(CX)'(CX) = 0$, 即 $CX = 0$, 所以 $C'CX = AX = 0$. 于是显然 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.
- 必要性. 反证，若 A 既不是半正定也不是半负定阵，则存在可逆阵 C 使得

$$C'AC = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{pmatrix}, \quad p, q > 0,$$

设 ε_i 表示 n 维标准单位列向量，令

$$Y_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{p+1}, \quad Y_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_{p+1},$$

则有 $CY_1, CY_2 \in S$, 但是 $CY_1 + CY_2 \notin S$, 这与 S 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间矛盾.

2. 在 1 讨论基础上，显然有 $\dim S = n - r(A)$.

■

问题 1.90. (北京大学 2016) 设 V 为有限维线性空间,$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是 V 上线性变换满足如下条件:

(1) $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{O}$, 其中 $\mathscr{O}$ 是零变换.

(2) $\mathscr{A}$ 的任意不变子空间都是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

(3) $\mathscr{A}^5 + \cdots + \mathscr{A}^2 + \mathscr{A} = 0$

证明:$\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{O}$.

证明. 首先注意到 $\mathscr{A}$ 适合多项式 $f(x) = x(x^5 - 1)$ 无重根，所以 $\mathscr{A}$ 在复数域上相似可对角化，即有直和分解

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k,$$

其中 $V_i(1 \le i \le k)$ 是 $\mathscr{A}$ 属于特征值 λ_i 的特征子空间,$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 为 $\mathscr{A}$ 所有不同特征值. 则对任意 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \in V$, 其中 $\alpha_i \in V_i$, 有 $\mathscr{B}(\alpha_i) \in V_i$, 于是

$$\mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{B}(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k\alpha_k) = \lambda_1\mathscr{B}(\alpha_1) + \cdots + \lambda_k\mathscr{B}(\alpha_k) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha)) = \mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha) = 0,$$

所以 $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{O}$. ■

问题 1.91. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{C}$ 上相似，即存在可逆阵 $P \in M_n(\mathbb{C})$, 使得 $P^{-1}AP = B$, 试证明 A, B 在实数域上相似.

证明. 设 $P = Q + iR$, 则由 $AP = PB$, 比较两边虚部和实部矩阵可以得到 $AQ = QB, AR = RB$. 现在考虑辅助函数

$$q(\lambda) = \det(Q + \lambda R), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

其是次数小于或者等于 n 关于 λ 的多项式 (其系数都是实数). 注意到 $q(i) \neq 0$, 所以其是非零多项式，则其在 $\mathbb{R}$ 上至多只有 n 个根. 因此存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $q(a) = \det(Q + aR) \neq 0$. 此时矩阵 $\widetilde{P} = Q + aR$ 可逆，且满足 $A\widetilde{P} = \widetilde{P}B$, 从而 $B = \widetilde{P}^{-1}A\widetilde{P}$. ■

相似 $\Leftrightarrow$ 有相同的行列式因子组，而行列式因子由最大公因式定义，其不依赖于数域的选取, 所以 A, B 在 $\mathbb{C}$ 上相似 $\Leftrightarrow A, B$ 在 $\mathbb{R}$ 上相似.

问题 1.92. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C}), r, s \in \mathbb{C}$, 满足 $AB - BA = rA + sB$. 证明：A, B 有公的特征向量.

证明. .

- 若 $r=s=0$, 则 A,B 可交换，任取 A 特征值 λ, 设 V_λ 是 A 关于 λ 的特征子空间. 则对任意 $\alpha\in V_\lambda$, 有
$$A(B\alpha)=\lambda B\alpha,$$
即 V_λ 是 $B-$ 子空间，自然有 B 的特征向量，于是 A,B 有公共特征向量.

- 若 r,s 不全为 0，不妨设 $s\neq 0$. 设 λ 是 A 的一个特征值，让
$$k:=\max\left\{l\in\mathbb{Z}:\lambda+ls\text{是 A 的一个特征值}\right\},$$
由于集合是非空有限集，所以 k 是存在的. 设 $0\neq\boldsymbol{x}$ 满足 $A\boldsymbol{x}=(\lambda+ks)\boldsymbol{x}$, 记
$$\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}+\frac{r(\lambda+ks)}{s}\boldsymbol{x},$$
则由 $AB-BA=rA+sB$, 容易计算出 $A\boldsymbol{y}=(\lambda+(k+1)s)\boldsymbol{y}$, 从而 $\boldsymbol{y}=0$ 否则与 k 的取法相矛盾. 于是 $\boldsymbol{x}$ 即是 A,B 的一个公共特征向量.

■

对于问题 1.92, 利用归纳法进一步可以证明 A,B 可同时相似上三角化.

问题 1.93. 设 n 维线性空间 V 上的两个线性变换 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 满足 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$, 且 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}=\mathrm{Ker}\mathscr{B}$, 证明: $\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.

证明. 首先 $\mathscr{A}$ 适合多项式 x^2-x, 于是有直和分解 $V=\mathrm{Im}\mathscr{A}\oplus\mathrm{Ker}\mathscr{A}$, 且对任意 $\beta\in\mathrm{Im}\mathscr{A}$, 存在 $\gamma\in V$ 使得 $\beta=\mathscr{A}(\gamma)$. 于是
$$\mathscr{A}(\beta)=\mathscr{A}^2(\gamma)=\mathscr{A}(\gamma)=\beta,$$
所以对任意 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V$, 其中 $\alpha_1\in\mathrm{Im}\mathscr{A},\alpha_2\in\mathrm{Ker}\mathscr{A}$, 有
$$\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{B}(\alpha_1)=\mathscr{B}(\mathscr{A}(\alpha_1))=\mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha_1)=\mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha_1+\alpha_2)=\mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha),$$
于是 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$. ■

问题 1.94. (南京大学 2018) 已知 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\mathscr{A}^k=\mathscr{O}$, 证明: $\dim\mathrm{Ker}\mathscr{A}\geq\dfrac{n}{k}$.

证明. $\dim\mathrm{Ker}\mathscr{A}=n-r(A)$ 为 $\mathscr{A}$ 的 Jordan 块 (关于 0) 的个数. 而由 $\mathscr{A}^k=\mathscr{O}$, 所以 $\mathscr{A}$ 最小多项式的次数小于等于 k. 于是 $\mathscr{A}$ 至少有 $\dfrac{n}{k}$ 个非常数不变因子，所以 $\mathscr{A}$ 至少有 $\dfrac{n}{k}$ 个初等因子，于是结论成立. ■

问题 1.95. 设 A,B 为 n 阶复矩阵，且 $C=AB-BA,AC=CA$, 证明：存在正整数 m 使得 $C^m=O$.

证明. 只需证明 $\mathrm{tr}C^k=0(1\le k\le n)$. 当 $k=1$ 时结论显然成立, 当 $k\ge 2$ 时由 $AC=CA$ 有 $AC^{k-1}=C^{k-1}A$, 于是

$$\mathrm{tr}C^k=\mathrm{tr}(C^{k-1}(AB-BA))=\mathrm{tr}(C^{k-1}AB)-\mathrm{tr}(C^{k-1}BA)=\mathrm{tr}(C^{k-1}AB)-\mathrm{tr}(AC^{k-1}B)=0,$$

于是 C 是幂零阵，即存在 m 使得 $C^m=O$. ■

问题 1.96. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明：$A$ 与 A' 相似, 且存在对称阵 $S\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $S^{-1}AS=A'$.

证明. 设 P 是可逆阵使得

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}\left\{J(\lambda_1,k_1),J(\lambda_2,k_2),\cdots,J(\lambda_s,k_s)\right\}$$

为 A 的 Jordan 标准型. 注意到对每个

$$J(\lambda_i,k_i)=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix},$$

有

$$\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}J(\lambda_i,k_i)\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}=B_i^{-1}QB_i=J^T(\lambda_i,k_i),$$

其中 $B_i=B_i^{-1}$ 为对称阵. 现在令 $B=\mathrm{diag}\left\{B_1,B_2,\cdots,B_s\right\}$, 则 B 是对称阵且有

$$BP^{-1}APB=P^TA^T(P^T)^{-1},$$

现在令 $S=PBP^T$, 则 S 是对称阵且 $S^{-1}AS=A'$. ■

问题 1.97. (南京大学 2017) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n},A$ 的最小多项式和特征多项式相同,

$$\mathbb{C}(A)=\left\{B\in M_{n\times n}\mid BA=AB\right\},$$

1. 证明：$\mathbb{C}(A)$ 是 n 维线性空间.
2. 设 $X\in M_{n\times n}(\mathbb{C}),XA=A^TX$, 则 X 是对称阵.

证明. .

1. 维数为 n, 具体讨论可参考问题 2.35

2. 由问题 1.96 可知存在对称阵 S 使得 $A^T = S^{-1}AS$. 则有 $SXA = ASX$, 即 $SX \in \mathbb{C}(A)$, 即存在 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $f(A) = SX$. 若设 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} k_iA^i$, 则有

$$X = S^{-1}f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} k_iS^{-1}A^i = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(A^i)^TS^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(A^i)^T(S^{-1})^T = X^T,$$

于是 X 是对称的.

■

问题 1.98. 设 $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足: $\varphi^2 = \varphi$ 且 $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_m$. 则 $r(\varphi) = r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + \cdots + r(\varphi_m)$ 成立的充要条件是 $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0(i \neq j)$.

证明. 令 $V_0 = \mathrm{Im}\varphi, V_i = \mathrm{Im}\varphi_i$, 则由 $\varphi = \varphi_i + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$ 可得 $V_0 \subseteq V_1 + V_2 + \cdots + V_m$. 先证充分性. 由 $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0(i \neq j)$. 可得 $\varphi_i = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_m)\varphi_i = \varphi\varphi_i$, 从而 $V_i \subseteq V$, 于是 $V_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_m$. 设 $0 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, 其中 $\alpha_i = \varphi_i(v_i) \in V_i(1 \le i \le m)$. 则 $0 = \varphi_i(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) = \varphi_i^2(v_i) = \varphi_i(v_i) = \alpha_i$, 从而零向量表示唯一，即 $V_0 = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$. 两边取维数则有 $r(\varphi) = r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + \cdots + r(\varphi_m)$. 再证必要性. 由条件有

$$r(\varphi) = \dim V_0 \le \dim(V_1+V_2+\cdots+V_m) \le \dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_m = r(\varphi_1)+\cdots+r(\varphi_m) = r(\varphi)$$

等号成立当且仅当 $V_0 = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$, 从而 $V_0 = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$. 于是由 $V_i \subseteq V_0$, 对任意 $\alpha \in V$, 存在 $\beta \in V$ 使得 $\varphi_i(\alpha) = \varphi(\beta)$. 进一步

$$\varphi_i(\alpha) = \varphi(\beta) = \varphi^2(\beta) = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_m)\varphi(\beta) = (\varphi_1 + \cdots + \varphi_m)\varphi_i(\alpha)$$

则由直和表示唯一有 $\varphi_i^2(\alpha) = \varphi_i(\alpha), \varphi_j\varphi_i(\alpha) = 0(j \neq i)$, 因此 $\varphi_i^2 = \varphi_i, \varphi_i\varphi_j = 0(i \neq j)$. ■

问题 1.99. 设 V 为线性空间，$\varphi_i \in \mathrm{End}(V)(1 \le i \le k)$ 满足 $\varphi_i^2 = \varphi_i$，$\varphi_i\varphi_j = 0(1 \le i \neq j \le k)$, 证明：

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\varphi_i \bigoplus \left(\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_j\right)$$

证明. 令 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k$, 则容易验证 $\varphi^2 = \varphi$, 从而有 $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$. 由问题 1.98 的充分性证明有 $\mathrm{Im}\varphi = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\varphi_i$. 另一方面显然 $\bigcap\limits_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_j \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$, 任取 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi$, 即有 $0 = \varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_k(\alpha)$, 则

$$0 = \varphi_i(0) = \varphi_i\varphi(\alpha) = \varphi_i^2(\alpha) = \varphi_i(\alpha)$$

即 $\alpha \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_j$, 从而 $\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_j = \mathrm{Ker}\varphi$. 于是

$$V = \mathrm{Im}\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\varphi_i \bigoplus \left(\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_j \right)$$

■

问题 1.100. (南京大学 2018) 定义映射 $f: M_n(F) \to M_m(F)$ 满足条件

1. f 是单射.
2. $f(A+B) = f(A)+f(B), f(AB) = f(A)f(B)$.
3. $f(E_n) = E_m, f(O_n) = O_m$.

证明: $n \mid m$.

证明. 设 $E_{ij}(1 \le i,j \le n)$ 为基础矩阵，记 $f(E_{ij}) = X_{ij}$, 则由条件有 $f(E_{ij}E_{kl}) = f(E_{il}\delta_{kl}) = X_{ij}X_{kl}$, 因此有 $X_{ii}^2 = f(E_{ii}) = X_{ii}, X_{ii}X_{jj} = O_m(i \ne j)$, 且

$$I_m = f(E_{ii} + \cdots + E_{nn}) = X_{11} + \cdots + X_{nn},$$

则由问题 1.98 有 $m = r(X_{11} + \cdots + R_{nn}) = r(X_{11}) + \cdots + r(X_{nn})$. 此外，

$$r(X_{ii}) = r(X_{ij}X_{ji})r(X_{ij}X_{jj}X_{ji}) \le r(X_{jj}),$$

同理可证 $r(X_{jj}) \le r(X_{ii})$. 因此有 $r(X_{ii}) = r(X_{jj})(\forall 1 \le i,j \le n)$. 由于 f 是单射，所以 $X_{ii} = f(E_{ii}) \ne O_m$, 所以 $r(X_{ii}) \ge 1$, 因此 $m = nr(X_{11})$, 所以 $n \mid m$. ■

问题 1.101. (南开大学 2009) 设 P 是数域，T 为 $P^{n\times n}$ 上的线性变换，满足对任何 $A,B \in P^{n\times n}, T(AB) = T(A)T(B)$ 或者 $T(AB) = T(BA)$ 至少有一个成立. 证明:或者对任意 $A,B \in P^{n\times n}$ 成立 $T(AB) = T(A)T(B)$，或者成立对任意 $A,B \in P^{n\times n}$, 有 $T(AB) = T(B)T(A)$.

证明. 为证明此结论，我们借助定理 2.3 即线性空间不能被其有限个真子空间的并完全覆盖这一结论. 对任意固定

$$l_A = \left\{ B \in P^{n\times n} \mid T(AB) = T(A)T(B) \right\},$$

$$r_A = \left\{ B \in P^{n\times n} \mid T(AB) = T(B)T(A) \right\}.$$

下面证明 l_A, r_A 是 $P^{n\times n}$ 的子空间. 只证明 l_A, 对于 r_A 有类似的讨论. 注意到 $O \in l_A$, 所以 l_A 非

空，且对任意 $B_1, B_2 \in l_A$, 有

$$\begin{aligned} T(A(B_1 - B_2)) &= T(AB_1 - AB_2) = T(AB_1) - T(AB_2) \\ &= T(A)T(B_1) - T(A)T(B_2) \\ &= T(A)(T(B_1) - T(B_2)) = T(A)T(B_1 - B_2), \end{aligned}$$

所以 $B_1 - B_2 \in l_A$, 所以 l_A 是 $P^{n\times n}$ 的子空间，且由条件有 $P^{n\times n} = l_A \cup r_A$, 因此 $P^{n\times n} = l_A$ 或者 $P^{n\times n} = r_A$ 必有一个成立. 现在定义

$$V_l = \left\{A \in P^{n\times n} \mid l_A = P^{n\times n}\right\}, \quad V_r = \left\{A \in P^{n\times n} \mid r_A = P^{n\times n}\right\},$$

和上述完全相同的手段可以证明 V_l, V_r 都是 $P^{n\times n}$ 的子空间，且有 $V_l \cup V_r = P^{n\times n}$, 因此一定有 $V_l = P^{n\times n}$ 或者 $V_r = P^{n\times n}$. 这两种情况分别对应题目的两种结论. ■

♯♯♯ 问题 1.101 的证明思路还体现在问题 1.188 的证明当中, 读者可作比较.

问题 1.102. (南开大学 2017) 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是一个幂零阵，满足 $a_{12} \neq 0, a_{13} = 1, a_{22} = 0, a_{23} \neq 0$, 证明：不存在矩阵 B 使得 $B^{n-1} = A$.

证明. 由条件有 A 的二阶子式 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$, 于是 $r(A) \geq 2$. 若存在满足条件的 B, 则首先有 B 是幂零阵，且 $B^{n-1} \neq O$, 从而 B 的特征多项式等于其最小多项式，于是 B 仅有一个 0Jordan 块，即存在可逆阵 P 使得

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $r(B^{n-1}) = r((P^{-1}BP)^{n-1}) = 1 \neq r(A)$, 矛盾. 所以不存在 B 使得 $B^{n-1} = A$. ■

问题 1.103. 设 V_1 和 V_2 是 n 维线性空间 V 的真子空间. 证明：$V = V_1 \oplus V_2$ 的充要条件是存在 V 上的幂等变换 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathrm{Im}\mathscr{A} = v_1, \mathrm{Ker}\mathscr{A} = V_2$.

证明. 充分性由幂等变换的性质可得. 下证必要性. 设 V_1, V_2 的一组基分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $\alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 构成 V 的一组基. 现在定义:

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\alpha_i) = \alpha_i, & 1 \leq i \leq s \\ \mathscr{A}(\alpha_j) = 0, & s+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

则 $\mathscr{A}$ 即满足条件，读者自行验证. ■

若我们只要求 $\dim V_1+\dim V_2=n$, 则仍存在 $\mathscr{A}$ 使得 $\mathrm{Im}\mathscr{A}=V_1,\mathrm{Ker}\mathscr{A}=V_2$, 只不过无法要求 $\mathscr{A}$ 是幂等变换.

问题 1.104. 设 A 是 n 阶正定阵，α 是 n 维非零实列向量，令 $B=A\alpha\alpha'$, 求 B 的所有特征值和相应的特征子空间的维数，并给出特征子空间的一组基.

证明. 由降阶公式有

$$|\lambda I_n-B|=|\lambda I_n-A\alpha\alpha'|=\lambda^{n-1}|\lambda-\alpha'A\alpha|,$$

由 A 正定，所以 $\alpha'A\alpha\neq 0$, 因此 B 的特征值为 0 和 $\alpha'A\alpha$. 注意到 $A\alpha\alpha'(A\alpha)=(\alpha'A\alpha)A\alpha$, 所以 B 属于特征值 $\alpha'A\alpha$ 的特征子空间的维数是 $1,A\alpha$ 是其一组基. 对任意 x 满足 $A\alpha\alpha'x=0$, 当且仅当 $\alpha\alpha'x=0$, 由 $\alpha\alpha'$ 半正定，所以当且仅当 $x'\alpha\alpha'x=0$. 当且仅当 $\alpha'x=0$. 记 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ 是 $\alpha'x=0$ 的解空间的一组基，则 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ 是 B 属于特征值 0 的特征子空间的一组基，其维数为 $n-1$. ■

问题 1.105. 设有 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} & & & a_1\\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$$

求可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为 A 的 Jordan 标准型.

证明. 将 A 看成 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换，记 $e_i(1\leq i\leq n)$ 为标准单位列向量，则有

$$A(e_i)=a_{n+1-i}e_{n+1-i},\quad A(e_{n-i+1})=a_ie_i,\quad 1\leq i\leq n.$$

限制 $i\leq\dfrac{n}{2}$, 令 $U_i=L(e_i,e_{n-i+1})$, 则 U_i 是 A 的不变子空间，且 $A|_{U_i}$ 在基 $S_i=\{e_i,e_{n-i+1}\}$ 下的表示阵为 $A_i=\begin{pmatrix}0 & a_i\\ a_{n-i+1} & 0\end{pmatrix}$. 只要选取 U_i 的基 M_i 使得 $A|_{U_i}$ 在基 M_i 下的表示阵为 J_i 是 Jordan 标准型即可. 若 $n=2m$, 则 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^m U_i$, 则 A 在基 $M=\bigcup\limits_{i=1}^m M_i$ 下表示阵为 $J=\mathrm{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_m\}$, 依次与 M 中的各个列向量为各列排成的可逆阵 P 满足 $AP=PJ$, 即 $P^{-1}AP=J$. 当 $n=2m+1$ 为奇数时, 此时有不变子空间直和分解 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^m U_i\oplus L(\varepsilon_{m+1})$. 在基 $M=\bigcup\limits_{i=1}^m M_i\cup\{e_{m+1}\}$ 下的表示阵 $J=\mathrm{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_m,a_{m+1}\}$ 是 Jordan 标准型. 下面只需找出 M_i 即可.

- 若 $a_i=a_{n-i+1}=0$, 取 $M_i=S_i$, 此时 $J_i=A_i=O$.
- 若 $a_{n-i+1}=0\neq a_i$, 则有

$$e_{n-i+1}\xrightarrow{A|_{U_i}}a_ie_i\xrightarrow{A|_{U_i}}0,$$

  此时令 $M_i=\{a_ie_i,e_{n-i+1}\}$，则 $A|_{U_i}$ 在基 M_i 下表示阵为 $J_i=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 为 Jordan 标准型.

- 若 $a_i = 0 \neq a_{n-i+1}$, 则有
$$e_i \xrightarrow{A|_{U_i}} a_{n-i+1}e_{n-i+1} \xrightarrow{A|_{U_i}} 0,$$
此时令 $M_i = \{a_{n-i+1}e_{n-i+1}, e_i\}$, 则 $A|_{U_i}$ 在基 M_i 下的表示阵为 $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 Jordan 标准型.

- 若 a_i, a_{n-i+1} 都不为零,此时 A_i 的特征多项式 $f_i(\lambda) = \lambda^2 - a_i a_{n-i+1}$ 有两个不同根 $\pm\sqrt{a_i a_{n-i+1}}$, 分别求出对应的特征向量 $X_i = \sqrt{a_i}e_i + \sqrt{a_{n-i+1}}e_{n-i+1}$ 与 $Y_i = \sqrt{a_i}e_i - \sqrt{a_{n-i+1}}e_{n-i+1}$, 令 $M_i = \{X_i, Y_i\}$, 则 $A|_{U_i}$ 在基 M_i 下的表示阵为 $J_i = \begin{pmatrix} \sqrt{a_i a_{n-i+1}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a_i a_{n-i+1}} \end{pmatrix}$ 为 Jordan 标准型.

■

问题 1.104 粗略来看：注意到

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1 a_n & & & \\ & a_2 a_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n a_1 \end{pmatrix},$$

即 A^2 可对角化. 由问题 2.12 相关讨论，A 的不属于特征值 0 的 Jordan 块一定是一阶的，所以 A 是否可对角化取决于 A 是否有 2 阶及以上 0Jordan 块，即取决于 $r(A)$ 是否等于 $r(A^2)$. 事实上 A 最多可能只有 2 阶零 Jordan 块. 否则 A^2 也不可对角化. 即

- 若 $r(A) = r(A^2)$，则 A 可对角化.
- 若 $r(A) > r(A^2)$, 则 A 的 Jordan 标准型是由若干个 A 的非零特征值和若干个 2 阶 0Jordan 块组成.

问题 1.106. (厦门大学 2015) 设 U 是 n 维线性空间 V 的 r 维子空间，$1 \le r \le n-1$. 证明：U 是 V 的若干个 $n-1$ 维子空间的交.

证明. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 U 的一组基，将其扩张为 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 现在令 $V_i = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$, 其中 $r+1 \le i \le n$. 显然 V_i 都是 $n-1$ 维子空间. 下面证明 $U = \bigcap\limits_{i=r+1}^{n} V_i$. 显然 $U \subseteq \bigcap\limits_{i=r+1}^{n} V_i$. 为方便起见，记 $W = \bigcap\limits_{i=r+1}^{n} V_i$, 若 $\dim W = j \ge r+1$, 则存在 $\beta \in W$ 使得 β 不能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表出. 由于 $W \subseteq V_{r+1}$, 因此若设

$$\beta = k_1\alpha + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + k_{r+1}\alpha_{r+2} + \cdots + k_{n-1}\alpha_n$$

则 $k_{r+1},\cdots,k_{n-1}$ 不全为零，不妨设 $k_{r+1}\neq 0$, 令 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r\in W$, 则

$$\beta-\alpha=k_{r+1}\alpha_{r+2}+\cdots+k_{n-1}\alpha_n\in W\subseteq V_{r+2},$$

则 $\beta-\alpha$ 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r+1},\alpha_{r+3},\cdots,\alpha_n$ 线性表出，于是 α_{r+2} 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r+1},\alpha_{r+3},\cdots,\alpha_n$ 线性表出，这与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关相矛盾，所以 $\dim W=r$, 即 $U=W=\bigcap\limits_{i=r+1}^{n}V_i$. ■

对于问题 1.106, 在同构意义下不妨设 $V=\mathbb{F}^n$. 只需证明对任意 $\mathbb{F}^n$ 的非平凡子空间 U 是 $\mathbb{F}^n$ 的若干个 $n-1$ 维子空间的交. 设 $U=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$, 其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 则令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-r})^T$, 让 $B_i=\begin{pmatrix}\beta_i'\\\beta_i'\\\vdots\\\beta_i'\end{pmatrix}$ $(1\le i\le n-r)$ 其中 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 构成 $Ax=0$ 解空间的一组基. 若记 U_i 是 $B_ix=0$ 的解空间，则 $\dim U_i=n-1$, 且 $U=\bigcap\limits_{i=1}^{n-r}U_i$.

问题 1.107. (华东师范大学 2019) 设 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ 是 2 阶可逆复矩阵全体,V 是迹为零的 *2* 阶复矩阵构成的复线性空间. 若 V 的一个线性子空间 W 满足: $\forall P\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ 和 $\forall A\in W$, 总有 $P^{-1}AP\in W$, 则称 W 为 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$-不变子空间. 证明: V 的 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$-不变子空间只有零空间和 V.

证明. 若 $W\neq\{O\}$, 则有 $A\in W$, 且 $|A|\neq 0$.(否则任意 $O\neq A\in W$, A 相似于 $J(0,2)$, 但是显然这构不成线性空间).

1. 若 A 有实特征值，则根据 $\mathrm{tr}A=0$, 可设 A 的两个特征值分别为 $\lambda,-\lambda(\lambda\neq 0)$. 即 A 可对角化. 于是不难注意到

$$A_1=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&-\lambda\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&\lambda\\\lambda&0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}\lambda&0\\1&-\lambda\end{pmatrix}\in W,$$

   此外不难发现 A_1,A_2,A_3 线性无关，从而 $\dim W\ge 3$. 又因为 $\dim V=3$, 从而只能是 $W=V$.

2. 若 A 没有实特征值，则 A 有两个纯虚数特征值，记为 $ai,-ai$. 此时 A 也可对角化，和上面完全类似的讨论.

■

问题 1.108. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，且 $D_i=\left\{x\in\mathbb{C}\mid |x-a_{ii}|\le\sum\limits_{j=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|\right\}$. 证明:

1. 若 r 为 A 的特征值，则 $r\in D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$.

2. 若 $|a_{ii}|<\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,n$. 则 A 是可逆阵.

3. 若 $a_{ii} < \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$. 则 $|A| > 0$.

证明. 为方便起见，记 $R_i = \sum\limits_{i\neq j}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$.

1. 对于 A 任意特征值 r, 设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ 是其对应的特征向量. 记 $|x_k| = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$, 于是 $|x_k| > 0$. 由 $AX = rX$, 我们有 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = rx_k$. 所以有

$$|r - a_{kk}||x_k| = |a_{k1}x_1 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n| \leq R_i|x_k|,$$

   所以 $r \in D_k \subseteq D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$, 于是结论得证.

2. 由 1,A 没有零特征值, 所以 A 是可逆阵.

3. 考虑矩阵 $tI_n + A$, 则 $f(t) = |tI_n + A|$ 是关于 t 的多项式且首项系数为 1，且当 $t \geq 0$ 时，由 2 有 $f(t) \neq 0$. 注意到当 t 充分大时，有 $f(t) > 0$, 所以对任意 $t \in [0, +\infty)$ 恒有 $f(t) > 0$. 特别地，$f(0) = |A| > 0$.

■

问题 1.109. (南京师范大学 2011) 设 $n \geq 3, A = (a_{ij})$ 为 n 阶实方阵，且对任意 $1 \leq i \neq j \leq n$, 有

$$|a_{ii}a_{jj}| > \left(\sum_{k\neq i} a_{ik}\right)\left(\sum_{l\neq j} a_{jl}\right)$$

证明：$|A| \neq 0$.

证明. 反证. 若非零向量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 满足 $AX = 0$. 则 x_i 至少有两个非零，不妨设 $x_i \neq 0, x_j \neq 0$, 且满足 $|x_i| \geq |x_j| \geq |x_k|(k \neq i, j)$, 则

$$|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = \left|\left(\sum_{k\neq i} a_{ik}x_k\right)\right| \cdot \left|\sum_{l\neq j} a_{jl}c_l\right| \leq |c_j|\left(\sum_{k\neq i} |a_{ik}|\right) \cdot |c_i|\left(\sum_{l\neq j} |a_{jl}|\right)$$

与条件矛盾，所以 $|A| \neq 0$. ■

问题 1.110. (华中科技大学 2023) 已知 n 维线性空间 V 中至少存在一族至少有一个不为零变换的线性变换 $\mathcal{A}_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$, 满足

$$\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{hk} = \begin{cases} \mathcal{A}_{ik}, & j = h \\ 0, & j \neq h \end{cases}$$

证明：存在 V 的一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 使得

$$\mathcal{A}_{ij}(v_k) = \begin{cases} v_i, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

证明. 设 $\mathcal{A}_{pq}$ 是非零线性变换，则对任意 $\mathcal{A}_{ij}$ 有 $\mathcal{A}_{pi}\sigma_{ij}\mathcal{A}_{jq} = \sigma_{pq}$, 即 $\mathcal{A}_{ij}$ 也是非零线性变换. 此外，

$$\mathcal{A}_{ii}^2 = \mathcal{A}_{ii} \cdot \mathcal{A}_{ii} = \mathcal{A}_{ii}, 1 \leq i \leq n.$$

由于 $\mathcal{A}_{11}$ 不是零线性变换，则 $\mathcal{A}_{11}(V) \neq \{0\}$, 则取 $0 \neq v_1 = \mathcal{A}_{11}(\alpha) \in \mathcal{A}_{11}(V)$, 则 $\mathcal{A}_{11}^2(v_1) = v_1$. 令 $v_k = \mathcal{A}_{k1}(v_1), \quad k \leq 2 \leq n$. 于是 $\mathcal{A}_{ij}(v_k) = \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{k1}(v_1) = \begin{cases} v_i, & j = k. \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$ 因此下面只需证明 $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关即可. 设

$$l_1 v_1 + l_2 v_2 + \cdots + l_n v_n = 0,$$

两边作用 $\mathcal{A}_{1i}$ 得 $k_i v_1 = 0$, 因此 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. 所以 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的一组基. ■

问题 1.110 进一步可推广为：设有 n^2 个 n 阶非零矩阵 A_{ij} 满足 $A_{ij}A_{jk} = A_{ik}, A_{ij}A_{kl} = O(j \neq k)$. 则存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}A_{ij}P = E_{ij}$, 其中 E_{ij} 为基础矩阵.

问题 1.111. (西安交通大学 2022) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 证明: 对任意正整数 k, A^k 中所有元素之和可以被 6 整除.

证明. 注意到 $A = 2I_3 + B$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 若记 $\boldsymbol{x}_0 = (1,1,1)'$, 则有 $B\boldsymbol{x} = 0$. 因此对任意的正整数 m 有 $\boldsymbol{x}^T B^m \boldsymbol{x} = 0$. 于是若令 A^k 的所有元素之和为 S_k, 则

$$S_k = \boldsymbol{x}^T A^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T (2I_3 + B)^k \boldsymbol{x} = 3 \cdot 2^k.$$

所以 $6 \mid S_k$, 于是结论得证. ■

问题 1.112. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}, r(AB - BA) \leq 1$, 证明：$A, B$ 可同时下三角化.

证明. 若 $AB = BA$, 此时结论的证明是容易的，下面只考虑 $r(AB - BA) = 1$ 的情形. 将 A, B 看成 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换. 对 A 的阶数进行归纳. 假设阶数小于 n 时，结论成立.

- 若 A 是奇异阵，则 $\mathrm{Ker}A, \mathrm{Im}A$ 都是 A 的非平凡不变子空间. 下证 $\mathrm{Ker}A$ 或 $\mathrm{Im}A$ 是 B 的不变子空间. 若存在 $\alpha \in \mathrm{Ker}A$ 使得 $AB\alpha \neq 0$. 则由于 $AB\alpha = AB\alpha - BA\alpha \in \mathrm{Im}(AB - BA)$. 又因为 $\dim \mathrm{Im}(AB - BA) = 1$, 因此 $\mathrm{Im}(AB - BA) = L(AB\alpha) \subseteq \mathrm{Im}A$. 于是对任意 $\beta \in$

$\mathbb{C}^n, BA\beta = AB\beta - (AB-BA)\beta \in \mathrm{Im}A$, 于是 $\mathrm{Im}A$ 是 B 的不变子空间. 下面不妨设 $\mathrm{Ker}A$ 是 B 的不变子空间. 则取 $\mathrm{Ker}A$ 的一组基扩张为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基，则 A, B 在这组基下的表示阵分别为 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & B_3 \end{pmatrix}$, 并且有 $1 = r(AB-BA) \geq r(A_1B_1 - B_1A_1) + r(A_3B_3 - B_3A_3)$, 所以由归纳假设 A_1, B_1 与 A_3, B_3 可同时下三角化，从而结论得证.

- 若 A 是非异阵，任取 A 的特征值 λ, 此时有 $AB - BA = (A-\lambda E) - B(A-\lambda E)$, 因此 $A - \lambda E$ 与 B 可同时下三角化，于是 A, B 也可同时下三角化.

■

问题 1.113. *设 V 是奇数维实线性空间，$\mathcal{A}_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)(1 \leq i \leq n)$, 满足两两可交换，证明：$\mathcal{A}_i$ 存在公共实特征向量.*

证明. 对 n 的个数进行归纳. 当 $n = 1$ 时，$\mathcal{A}$ 有实特征值，自然有实特征向量. 假设结论对个数小于 n 的情形成立. 取 λ_1 是 $\mathcal{A}_1$ 的奇数阶实特征值，令 $R_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_1 - \lambda_1 \mathrm{id})^r$ 是对应的根子空间，则 $\dim R_{\lambda_1} = r$ 为奇数 (即 λ_1 对应的代数重数). 由于 $\mathcal{A}_i$ 可交换，所以容易验证 R_{λ_1} 是 $\mathcal{A}_i(2 \leq i \leq n)$ 的不变子空间，且有 $\mathcal{A}_i|_{R_{\lambda_1}}$ 仍两两可交换. 由归纳假设存在 $\lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得 $W = \bigcap\limits_{i=2}^{n} (\mathcal{A}_i|_{R_{\lambda_1}} - \lambda_i \mathrm{id}) \neq \{0\}$. 由于 $W \subset R_{\lambda_1}$, 所以 W 是 $\mathcal{A}_1$ 的不变子空间，从而 W 中有 $\mathcal{A}_1$ 的实特征向量 α, 则 α 即是 $\mathcal{A}_i$ 公共实特征向量. ■

问题 1.114. *设 A, B 分别为 n 阶和 m 阶矩阵，$D = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$. 证明：*

1. *若 A, B 均可对角化，且无公共特征值，则 D 也可对角化.*
2. *若 D 可对角化，则 A, B 均可对角化.*

证明. 1. 由 A, B 没有公共特征值，所以由问题 2.7 可知 $AX = XB$ 仅有零解，则 $\varphi(X) = AX - XB$ 是线性同构，于是存在唯一 Y 使得 $AY - YB = C$. 因此有

$$\begin{pmatrix} E_n & -Y \\ O & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & Y \\ O & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

注意到上述变换是相似变换，结合 A, B 均可对角化，所以 D 也可对角化.

2. 设 $R_\lambda(D), V_\lambda(D)$ 分别表示 D 关于特征值 λ 的几何重数和代数重数. 则由

$$|\lambda E_{n+m} - D| = |\lambda E_n - A| \cdot |\lambda E_m - B|,$$

所以 $R_\lambda(D) = V_\lambda(D) = V_\lambda(A) + V_\lambda(B)$. 又因为 $r(D) \geq r(A) + r(B)$, 所以

$$R_\lambda(D) = n + m - r(D) \leq n - r(A) + m - r(B) = R_\lambda(A) + R_\lambda(B),$$

所以只能是 $R_\lambda(A)+R_\lambda(B)=V_\lambda(A)+V_\lambda(B)$, 从而 $R_\lambda(A)=V_\lambda(A)$,$R_\lambda(B)=V_\lambda(B)$. 即 A,B 均可对角化.

■

问题 1.114 的 2 告诉我们，若 $\mathcal{A}$ 是复线性空间 V 上可对角化的线性变换，U 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，则 $\mathcal{A}|_U$ 和 V/U 上的诱导变换 $\bar{\mathcal{A}}$ 均可对角化.

问题 1.115. (四川大学 2021) 设 U,V,W 为数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间，其维数分别为 l,m,n. 若 $f\in\mathrm{Hom}(U,V),g\in\mathrm{Hom}(U,W)$ 满足 $\mathrm{Ker}f\subseteq\mathrm{Ker}g$.

1. 证明：存在 $h\in\mathrm{Hom}(V,W)$, 使得 $g=h\circ f$, 并且 h 唯一当且仅当 f 为满射.
2. 已知 $\dim\mathrm{Im}f$ 为 t，记

$$S=\{h\in\mathrm{Hom}(V,W)\mid g=h\circ f\},\quad T=\{\rho\in\mathrm{Hom}(V,W)\mid\exists h_1,h_2\in S,\text{s.t.}\rho=h_1-h_2\}$$

则 T 是 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 的子空间，求其维数.

证明. 现在来构造 h 使得如下交换图成立.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[rr, bend left, "g"] & V \arrow[r, hook, "h"] & W \end{tikzcd}$$

取 $\mathrm{Ker}f$ 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 扩张为 U 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$. 则有

$$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)=(0,\cdots,0,f(\alpha_{s+1}),\cdots,f(\alpha_l)),\quad g(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)=(0,\cdots,0,g(\alpha_{s+1}),\cdots,g(\alpha_n))$$

此时容易证明 $f\alpha_{s+1},\cdots,f\alpha_l$ 线性无关，将其扩张为 V 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_k,f\alpha_{s+1},\cdots,f\alpha_l(k=m-(l-s))$. 现在定义 $h:$

$$\begin{cases}h(\beta_i)=1(1\le i\le k)\\h(f(\alpha_j))=g(\alpha_j)(s+1\le j\le l)\end{cases}$$

于是容易验证 $h\in\mathrm{Hom}(V,W)$, 且 $h\circ f(\alpha_i)=g(\alpha_i)(1\le i\le l)$, 所以 $h\circ f=g$. 并且容易看出 $h(\beta_i)$ 随意定义都可以满足条件，所以 h 唯一当且仅当 $k=0$ 即 f 是满的线性映射.(其代数证明可以参考问题 1.52) 现在考虑 S, 但是 S 不一定构成线性空间，因此我们才考虑 T, 且有 $\dim T=(m-t)\times n$. 具体细节可以考虑 T 同构于 $H=\left\{(A,O)\mid A\in\mathbb{K}^{n\times(m-t)},O\in\mathbb{K}^{n\times t}\right\}$. ■

问题 1.116. (中南大学 2022) 设 n 阶复矩阵 A_1,A_2 均相似于对角阵，$\mathbb{C}^n$ 表示 n 维复向量空间. 记

$$V_1^{(k)}=\{\alpha\mid A_k\alpha=0,\alpha\in\mathbb{C}^n\},V_2^{(k)}=\{A_k\beta\mid\beta\in\mathbb{C}^n\},k=1,2.$$

证明：$\mathbb{C}^n=V_1^{(k)}\oplus V_2^{(k)}(k=1,2)$; 进一步，若 $A_1A_2=O$, 则 $\mathbb{C}^n=(V_1^{(1)}\cap V_1^{(2)})\oplus V_2^{(1)}\oplus V_2^{(2)}$.

证明. 首先由于 A_1, A_2 均可对角化，所以 $r(A_1^2) = r(A_1), r(A_2^2) = r(A_2)$, 因此有 $\mathbb{C}^n = V_1^{(k)} \oplus V_2^{(k)}(k = 1, 2)$. 进一步，若 $A_1A_2 = O$, 则有 $V_2^{(2)} \subseteq V_1^{(1)}$. 只需证明

$$V_1^{(1)} = V_2^{(2)} \oplus (V_1^{(1)} \cap V_1^{(2)}).$$

直和显然. 并且注意到

$$V_1^{(1)} = V_1^{(1)} \cap V = V_1^{(1)} \cap (V_1^{(2)} \oplus V_2^{(2)}) = (V_1^{(1)} \cap V_1^{(2)}) \oplus (V_1^{(1)} \cap V_2^{(2)}) = V_2^{(2)} \oplus (V_1^{(1)} \cap V_1^{(2)})$$

所以结论得证. ■

问题 1.116 证明过程中使用到一个小命题：设 V_1, V_2, V_3 是 n 维线性空间 V 的子空间, 且 $V_1 \subseteq V_3$, 则

$$V_1 + (V_2 \cap V_3) = (V_1 + V_2) \cap V_3.$$

该命题的证明是平凡的，留给读者.

问题 1.117. (南方科技大学 2022) 设 V 是 n 维复线性空间, 给定 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$, 定义 $\mathrm{End}(V)$ 上的线性变换:

$$\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}, \quad \forall \mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$$

证明：$\mathcal{A}$ 的任一根子空间都是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间的充要条件是存在正整数 m 使得 $\Phi^m(\mathcal{B}) = 0$.

证明. 必要性. 设 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 互不相同. 则由问题 2.22 有

$$V = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_k}.$$

其中

$$R_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathrm{id})^{k_i} = \left\{\alpha \in V \mid \exists t \in \mathbb{N}^*, \text{s.t.} (\mathcal{A} - \lambda_i \mathrm{id})^t \alpha = 0\right\}, \quad 1 \le i \le k$$

为 $\mathcal{A}$ 的根子空间. 经递推不难发现，对任意正整数 t, 有 $\Phi^t(\mathcal{B}) = \sum_{i=0}^{t} C_t^i \mathcal{A}^{t-i}\mathcal{B}(-\mathcal{A})^i$. 设 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的幂零部分, 即 $\widetilde{\mathcal{A}}|_{R_{\lambda_i}} = \mathcal{A}|_{R_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{id}$. 注意

$$\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathrm{id})\mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathrm{id}), \quad \forall 1 \le i \le k.$$

由于 $\mathcal{B}(R_{\lambda_i}) \subseteq R_{\lambda_i}$, 所以

$$\Phi^t(\mathcal{B})|_{R_{\lambda_i}} = \sum_{i=0}^{t} C_t^i \mathcal{A}^{t-i}\mathcal{B}(-\mathcal{A})^i|_{R_{\lambda_i}} = \sum_{i=0}^{t} C_t^i \widetilde{\mathcal{A}}^{t-i}\mathcal{B}(-\widetilde{\mathcal{A}})^i|_{R_{\lambda_i}}.$$

所以对任意 $\alpha \in R_{\lambda_i}$, 有

$$\Phi^{2r_i}(\mathcal{B})|_{R_{\lambda_i}}(\alpha) = \sum_{j=0}^{2r_i} C_{2r_i}^j \mathcal{A}^{2r_i-j}\mathcal{B}(-\mathcal{A})^j|_{R_{\lambda_i}}(\alpha) = \sum_{i=0}^{2r_i} C_{2r_i}^j \widetilde{\mathcal{A}}^{2r_i-j}\mathcal{B}(-\widetilde{\mathcal{A}})^j|_{R_{\lambda_i}}(\alpha) = 0.$$

取 $m = 2\max\{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$, 则 $\Phi^m(\mathcal{B}) = 0$.

充分性. 若 $\Phi^m(\mathcal{B}) = 0$, 则 $\Phi^s(\mathcal{B}) = 0(s \geq m)$, 因此不妨设 $m > \max\{r_1, \cdots, r_k\}$. 由于 $\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{AB} - \mathcal{BA} = (\mathcal{A} - \lambda\mathrm{id})\mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathcal{A} - \lambda\mathrm{id})$, 故不妨设 $\mathcal{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 0$，只需证明 R_0 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间即可. 对任意 $\alpha \in R_0$, 由于

$$\Phi^m(\mathcal{B}) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i(\mathcal{A})^{m-i}\mathcal{B}(-\mathcal{A})^{m-i} = 0, \quad (\dagger)$$

对 $(\dagger)$ 式两边作用 $\mathcal{A}^{r_1-1}(\alpha)$ 得 $\mathcal{A}^m\mathcal{B}\mathcal{A}^{r_1-1}(\alpha) = 0$. 再对 $(\dagger)$ 式两边左乘 $\mathcal{A}$, 然后作用 $\mathcal{A}^{r_1-2}(\alpha)$, 可得 $\mathcal{A}^{m+1}\mathcal{B}\mathcal{A}^{r_1-2}(\alpha) = 0$. 重复做下去，最终可得 $(\mathcal{A})^{m+r_1-1}\mathcal{B}(\alpha) = 0$, 所以 $\mathcal{B}\alpha \in R_0$, 即 R_0 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间. ∎

问题 1.118. (湖南大学 2021) 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,P, Q 分别是 V 的 $k, n-k$ 维线性子空间，且有 $V = P \oplus Q$. 记 P 到 Q 的线性映射全体为 $\mathrm{Hom}(P, Q)$, 定义 $T \in \mathrm{Hom}(P, Q)$ 在 V 中的图像为 $\Gamma(T) = \{p + T(p) \mid p \in P\}$. 证明：

1. 任意 $T \in \mathrm{Hom}(P, Q), \Gamma(T)$ 是 V 的 k 维线性子空间.

2. V 的 k 维线性子空间 S 是某个 $T\mathrm{Hom}(P, Q)$ 的图像, 即 $S = \Gamma(T)$ 的充要条件是 $S \cap Q = \{0\}$.

证明. .

1. 对任意 $T \in \mathrm{Hom}(P, Q)$, 显然 $\Gamma(T)$ 是 V 的线性子空间. 设 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ 是 P 的一组基, 若 $r_1, \cdots, r_k \in \mathbb{K}$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i(p_i + Tp_i) = 0$, 由 $P \cap Q = \{0\}$, 从而只能是 $\sum\limits_{i=1}^{k} r_ip_i = \sum\limits_{i=1}^{r} r_iT(p_i) = 0$, 于是 $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$. 并且显然对任意 $p + T(p) \in \Gamma(T), p + T(p)$ 可以写成 $\{p_1 + T(p_1), \cdots, p_k + T(p_k)\}$ 的线性组合, 于是 $\{p_1 + T(p_1), \cdots, p_k + T(p_k)\}$ 为 $\Gamma(T)$ 的一组基, 即 $\dim\Gamma(T) = k$.

2. 必要性显然, 下证充分性. 设 $\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}$ 为 S 的一组基，且设 $\beta_i = p_i + q_i$, 其中 $p_i \in P, q_i \in Q$, 由于 $S \cap Q = \{0\}$, 所以 $p_i \neq 0(1 \leq i \leq k)$. 设 $\sum\limits_{i=1}^{k} r_ip_i = 0$, 则

   $$\sum_{i=1}^{k} r_i\beta_i = \sum_{i=1}^{k} r_iq_i \in S \cap Q = \{0\},$$

   从由 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 线性无关得 $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$, 即 $p_1, \cdots, p_k$ 线性无关构成 P 的一组基. 现在定义 $T : P \to Q, T(p_i) = q_i$, 从而 $T \in \mathrm{Hom}(P, Q)$, 且 $S \subseteq \Gamma(T)$. 且由 1 有 $\dim\Gamma(T) = \dim S = k$, 从而 $S = \Gamma(T)$.

■

问题 1.119. 设 A 是 n 阶三对角方阵, 即设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

其中 $b_ic_i>0$, 证明：A 的特征值都是实数，且互不相同，从而 A 可对角化.

证明. 首先考虑 A 是对称阵情形, 则 A 特征值全为实数, 从而 A 的极小多项式无重根. 考虑 λI_n-A 的 $n-1$ 阶子式

$$(\lambda I_n-A)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}=(-1)^{n-1}b_2b_3\cdots b_n\neq 0$$

所以 A 的行列式因子为 $1,1,\cdots,D_n$. 因此 A 的特征多项式等于 A 的极小多项式没有重根，所以 A 有 n 个不同特征值. 对于一般情形, 设 $D=\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 为可逆对角阵，则有

$$D^{-1}AD=\begin{pmatrix} a_1 & \frac{d_2}{d_1}b_1 & & & & \\ \frac{d_1}{d_2}c_1 & a_2 & \frac{d_3}{d_2}b_2 & & & \\ & \frac{d_2}{d_3}c_2 & a_3 & \frac{d_4}{d_3}b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} & a_{n-1} & \frac{d_n}{d_{n-1}}b_{n-1} \\ & & & & \frac{d_{n-1}}{d_n}c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

若能使 $D^{-1}AD$ 为对称阵, 则结论可证. 现在令 $d_1=1$, 由 $\frac{d_{i+1}}{d_i}b_i=\frac{d_i}{d_{i+1}}c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 则可令 $d_i=\sqrt{\frac{c_1c_2\cdots c_{i-1}}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}}$, 此时

$$D^{-1}AD=\begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{b_1c_1} & & & & \\ \sqrt{b_1c_1} & a_2 & \sqrt{b_2c_2} & & & \\ & \sqrt{b_2c_2} & a_3 & \sqrt{b_3c_3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{b_{n-2}c_{n-2}} & a_{n-1} & \sqrt{b_{n-1}c_{n-1}} \\ & & & & \sqrt{b_{n-1}c_{n-1}} & a_n \end{pmatrix}$$

为实对称阵, 所以由前面讨论可知 A 有 n 个互不相同的实特征值. ■

问题 1.120. 设 A,B,C 分别是 $m\times m, n\times n, m\times n$ 阶矩阵，满足：$AC=CB, r(C)=r$. 证明：A 和 B 至少有 r 个相同的特征值.

证明. 注意条件和结论在相抵变换 $A\mapsto P^{-1}AP, C\mapsto P^{-1}CQ, B\mapsto Q^{-1}BQ$ 下不会发生改变，因此不妨一开始变设 $C=\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$ 是对应相抵标准型. 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$ 为对应分块，则

$$AC=\begin{pmatrix} A_{11} & O\\ A_{21} & O\end{pmatrix},\quad CB=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ O & O\end{pmatrix}$$

从而由 $AC=CB$ 有 $A_{11}=B_{11}, A_{21}=O, B_{12}=O$. 于是 A,B 至少有 r 个相同特征值. ■

问题 1.121. 设 A 是 n 阶复方阵，且有 n 个互不相同的特征值，证明：n 阶复方阵 B 可对角化的充要条件是存在 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 使得 B 相似于 $f(A)$.

证明. 必要性显然，下证充分性. 设 $P,Q\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 满足

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\},\quad Q^{-1}BQ=\operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互不相同. 则由问题 2.1 可知存在 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $f(\lambda_i)=\mu_i (1\le i\le n)$. 于是 $Q^{-1}BQ=P^{-1}f(A)P$, 从而 B 相似于 $f(A)$. ■

♯♯♯ 由问题 1.121 可知 n 阶复方阵 B 可对角化的充要条件是 B 相似于某个循环阵.

问题 1.122. (复旦大学 2024) 设 A 是 n 阶复矩阵，证明以下条件等价：(1)$\forall k\in\mathbb{N}^+, A$ 与 A^k 相似.(2)A 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r$, 其中 r 为 A 的秩.

证明. (1)⇒(2) 显然 A 特征值只能为 $0,1$. 且 0Jordan 块都是一阶的, 即 A 关于零特征值的代数重数等于几何重数, 从而 A 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r$.(2)⇒(1) 注意条件和结论在相似变换 $A\mapsto P^{-1}AP$ 下不会发生改变，因此不妨一开始便设 A 为 Jordan 标准型，即 $A=\operatorname{diag}\{\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-r},J(1,k_1),\cdots,J(1,k_s)\}$. 由问题 2.12 可知 $J^k(1,k_i)$ 的 Jordan 标准型还是 $J(1,k_i)$. 因此 A^k 与 A 有相同的 Jordan 标准型，即 A 与 A^k 相似. ■

问题 1.123. 设 V 是 n 维线性空间，X 是 V 的 $n+1$ 元子集，且 $r(X)=n$. 定义

$$\mathrm{GL}_V(X)=\{L\in \mathrm{GL}(V)\mid L(X)=X\}$$

证明:$\mathrm{GL}_V(X)$ 为有限集，并求其元素个数的最大值.

证明. 在同构意义下，显然 $\mathrm{GL}_V(X)$ 是对称群 S_{n+1} 的子群，所以 $\mathrm{GL}_V(X)$ 是有限集. 类似定理2.3的证明过程, 存在 V 中的 $n+1$ 个互不相同向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$，使得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$ 中任取 n 个向量

线性无关构成 V 的一组基. 现在令 $X=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}\}$, 则 $r(X)=n$. 任取 $\sigma\in S_{n+1}$(即 σ 是 $1,2,\cdots,n+1$ 的一个全排列), 定义 $L:L(\alpha_i)=\alpha_{\sigma(i)}(1\le i\le n+1)$, 则 L 将 V 的一组基映为 V 的一组基，所以 $L\in \mathrm{GL}_V(X)$. 从而此时 $|\mathrm{GL}_V(X)|=|S_{n+1}|=(n+1)!$. ■

问题 1.124. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，φ,ψ 是 V 上的线性变换，满足 $\varphi\psi=\psi\varphi$. 证明：存在正整数 m 使得

$$\mathrm{Im}(\varphi^m+\psi^m)=\mathrm{Im}\varphi^m+\mathrm{Im}\psi^m.$$

证明. 注意 φ,ψ 的乘法可交换性和结论在 φ,ψ 变成同一个幂次 φ^k,ψ^k 之后不会发生变换，因此不妨一开始便设 $r(\varphi)=r(\varphi^2),r(\psi)=r(\psi^2)$, 即有 $V=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Ker}\psi\oplus\mathrm{Im}\psi$, 其中 $\varphi|_{\mathrm{Im}\varphi},\psi|_{\mathrm{Im}\psi}$ 是可逆变换. 由于 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 所以 $\mathrm{Im}\varphi,\mathrm{Ker}\varphi$ 都是 ψ 的不变子空间. 从而 $\psi(\mathrm{Im}\varphi)\cap\psi(\mathrm{Ker}\varphi)\subseteq \mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi$, 即 $\psi(\mathrm{Im}\varphi)\oplus\psi(\mathrm{Ker}\varphi)$. 从而

$$V=\mathrm{Ker}\psi\oplus\mathrm{Im}\psi=\mathrm{Ker}\psi\oplus(\psi(\mathrm{Im}\varphi)+\psi(\mathrm{Ker}\varphi))=\mathrm{Ker}\psi\oplus\psi(\mathrm{Im}\varphi)\oplus\psi(\mathrm{Ker}\varphi),\quad(\dagger)$$

在不变子空间的直和分解 $(\dagger)$ 下，适当选取 V 的一组基，可以使得 φ,ψ 在这组基下的表示阵分别为 $\mathrm{diag}\{A_1,A_2,O\},\mathrm{diag}\{O,B_2,B_1\}$, 其中 A_2,B_2 是可逆阵，且 $A_2B_2=B_2A_2$. 因此等价的只要证明存在正整数 m 使得

$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix}A_1^m&&\\&A_2^m+B_2^m&\\&&B_1^m\end{pmatrix}=\mathrm{Im}\begin{pmatrix}A_1^m&&\\&A_2^m&\\&&O\end{pmatrix}+\mathrm{Im}\begin{pmatrix}O&&\\&B_2^m&\\&&B_1^m\end{pmatrix}$$

即证 $\mathrm{Im}(A_2^m+B_2^m)=\mathrm{Im}A_2^m+\mathrm{Im}B_2^m$. 由 $A_2B_2=B_2A_2$, 有 $A^m+B^m=A^m(I+(A^{-1})^mB^m)=A^m(I+(A^{-1}B)^m)$, 故只需证明：若 C 是可逆阵，则存在正整数 m 使得 $I+C^m$ 也是可逆阵. 从特征值角度 m 显然是存在的, 于是结论得证. ■

问题 1.125. 设 B 是 n 阶幂零矩阵，证明存在可对角化矩阵 A，使得 $AB-BA=B$.

证明. 注意条件和结论在相似变换 : $B\mapsto P^{-1}BP,A\mapsto P^{-1}AP$ 下不会发生改变，因此不妨一开始便设 $B=\mathrm{diag}\{J(0,k_1),J(0,k_2),\cdots,J(0,k_s)\}$ 为 B 的 Jordan 标准型. 令

$$A_i=-\begin{pmatrix}k_i&&&\\&k_i-1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix},(1\le i\le s)$$

则有 $A_iJ(0,k_i)-J(0,k_i)A_i=J(0,k_i)$. 令 $A=\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$, 则 A 可对角化，且 $AB-BA=B$. ■

问题 1.126. 称 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 到自身的映射 $\mathscr{D}$ 为一个导子，如果对任意 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n},k,l\in\mathbb{F}$, 满足

$$\mathscr{D}(kA+lB)=k\mathscr{D}(A)+l\mathscr{D}(B),\quad \mathscr{D}(AB)=\mathscr{D}(A)+A\mathscr{D}(B)$$

记 $\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})$ 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的全体导子，则 $\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})$ 为 $\mathrm{End}(\mathbb{F}^{n\times n})$ 的子空间.

1. 对任意 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 定义 $\mathrm{ad}_A(B)=AB-BA,\forall B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 证明：$\mathrm{ad}_A\in\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})$.

2. 证明：$\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})=\{\mathrm{ad}_A\mid A\in\mathbb{F}^{n\times n}\}$.

证明. 1 显然 ad_A 是线性映射，且

$$\mathrm{ad}_A(BC)=ABC-BCA=(AB-BA)C+B(AC-CA)=\mathrm{ad}_A(B)C+B\mathrm{ad}_A(C)$$

所以 $\mathrm{ad}_A\in\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})$.

2 定义线性映射 $\varphi:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n}),A\mapsto\mathrm{ad}_A$. 则命题等价证明：$\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})=\mathrm{Im}\varphi$. 设 $A\in\mathrm{Ker}\varphi$, 则有 $AX=XA,\forall X\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 由问题 2.40 有 $A=kI_n$, 即 $\mathrm{Ker}\varphi=\{kI_n\mid k\in\mathbb{F}\}$, 于是 $\dim\mathrm{Im}\varphi=n^2-\dim\mathrm{Ker}\varphi=n^2-1$. 下面只需证明 $\dim\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})\le n^2-1$. 对任意 $\mathscr{D}\in\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})$, 则 $\mathscr{D}$ 由其在 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的基 $\{E_{ij}\mid 1\le i\le n;1\le j\le n\}$ 下的取值决定. 由 $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$ 有

$$\mathscr{D}(E_{ij})E_{kl}+E_{ij}\mathscr{D}(E_{kl})=\delta_{jk}\mathscr{D}(E_{il}).$$

- 当 $j=k$ 时，$\mathscr{D}(E_{ij})E_{jl}+E_{ij}\mathscr{D}(E_{jl})=\mathscr{D}(E_{il})$. 即 $\mathscr{D}(E_{il})$ 除了第 i 行和第 l 列之外元素全为 0, 且 $\mathscr{D}(E_{il})$ 的 i 行和 l 列分别由 $\mathscr{D}(E_{ij})$ 和 $\mathscr{D}(E_{jl})$ 决定. 于是，$\mathscr{D}$ 由 $\mathscr{D}(E_{12}),\mathscr{D}(E_{23}),\cdots,\mathscr{D}(E_{n1})$ 所决定.

- 当 $k\ne j$ 时，有 $\mathscr{D}(E_{ij})E_{kl}+E_{ij}\mathscr{D}(E_{kl})=O$. 若记 $\mathscr{D}(E_{ij})$ 的第 (k,l) 元素为 $\mathscr{D}(E_{ij})_{kl}$, 则

$$\mathscr{D}(E_{ij})E_{kl}=\mathscr{D}(E_{ij})_{ik}E_{il},\quad E_{ij}\mathscr{D}(E_{kl})=\mathscr{D}(E_{kl})_{jl}E_{il}$$

  即 $\mathscr{D}(E_{ij})_{ik}+\mathscr{D}(E_{kl})_{jl}=0$. 由此可知 $\mathscr{D}(E_{kl})$ 的第 l 列元素由 $\mathscr{D}(E_{ij})$ 的第 i 行元素决定.

综上讨论，$\mathscr{D}$ 是由 $\mathscr{D}(E_{12}),\mathscr{D}(E_{23}),\cdots,\mathscr{D}(E_{n1})$ 共 n 个矩阵的 n 行元素决定，于是 $\dim\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})\le n^2$. 又因为 $\mathscr{D}(I_n)X=O,\forall X\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 所以 $\mathscr{D}(I_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathscr{D}(E_{ii})=0$, 所以 $\dim\mathrm{Der}(\mathbb{F}^{n\times n})\le n^2-1$, 所以结论得证. ■

问题 1.127. 设 P 为 n 阶矩阵满足 $P=P^T,P^*P=I_n$, 其中 P^* 表示 P 的共轭转置，则存在可逆阵 Q 使得 $P=\overline{Q}Q^{-1}$.

1.5 二次型

引理 1.128. (Sherman-Morrison 求逆公式) 设 A 是 n 阶可逆阵,α,β 是 n 维列向量,且 $1+\beta' A^{-1}\alpha \neq 0$, 证明:

$$(A+\alpha\beta')^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+\beta' A^{-1}\alpha} A^{-1}\alpha\beta' A^{-1}.$$

证明. 这里不采用直接验证的形式，首先考虑特殊情形，对于 $1+\beta'\alpha \neq 0$ 的情形，注意到

$$\beta'(I_n+\alpha\beta') = (1+\beta'\alpha)\beta',$$

因此 $\alpha\beta' = (1+\beta'\alpha)^{-1}\alpha\beta'(I_n+\alpha\beta')$, 从而

$$I_n = I_n+\alpha\beta'-\alpha\beta' = I_n+\alpha\beta'-(1+\beta'\alpha)^{-1}\alpha\beta'(I_n+\alpha\beta') = (I_n - \frac{\alpha\beta'}{1+\beta'\alpha})(I_n+\alpha\beta'),$$

所以 $(I_n+\alpha\beta')^{-1} = I_n - \dfrac{\alpha\beta'}{1+\beta'\alpha}$. 对于一般情形，注意到 $A+\alpha\beta' = A(I_n+(A^{-1}\alpha)\beta')$, 所以

$$\begin{aligned}(A+\alpha\beta')^{-1} &= (I_n+(A^{-1}\alpha)\beta')^{-1}A^{-1}\\ &= \left(I_n - \frac{A^{-1}\alpha\beta'}{1+\beta' A^{-1}\alpha}\right)A^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+\beta' A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta' A^{-1}\end{aligned}$$

■

问题 1.129. 已知 A 是 n 阶正定阵，则对任意 n 维非零列向量 α, 有

$$0 < \alpha'(A+\alpha\alpha')^{-1}\alpha < 1.$$

证明. 首先 $\alpha\alpha'$ 是半正定阵，于是 $A+\alpha\alpha'$ 是正定阵，所以不等式前半部分成立，下面主要讨论不等式的后半部分.

1. 首先由 A 正定，存在可逆阵 C 使得 $A^{-1} = C'C$. 于是由引理 1.128 有

$$\begin{aligned}\alpha'(A+\alpha\alpha')^{-1}\alpha &= \alpha'\left(A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\alpha' A^{-1}}{1+\alpha' A^{-1}\alpha}\right)\alpha\\ &= \alpha'\left(C'C - \frac{C'(C\alpha)(C\alpha)'C}{1+(C\alpha)'(C\alpha)}\right)\alpha\\ &= \frac{(C\alpha)'(C\alpha)}{1+(C\alpha)'(C\alpha)} < 1.\end{aligned}$$

2. 考虑如下对称初等变换

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\alpha\alpha' & \alpha \\ \alpha' & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+\alpha\alpha' & O \\ O & 1-\alpha'(A+\alpha\alpha')^{-1}\alpha\end{pmatrix}$$

上述变换不会改变正定性，所以 $1-\alpha'(A+\alpha\alpha')^{-1}\alpha>0$, 所以结论得证.

■

问题 1.130. 证明如下问题：

1. 已知 A 是 n 阶半正定阵，X 是一个 n 维实列向量，且 $X'AX=0$, 则 $AX=0$.
2. 已知 A 是一个 n 阶非对称的实矩阵，对任意的 n 维实列向量 X 都有 $X'AX\geq 0$, 已知实列向量 α 满足 $A\alpha=0$, 则 $A'\alpha=0$.
3. 已知 A 是一个 n 阶非对称的实矩阵，对任意的 n 维实列向量 X 都有 $X'AX\geq 0$, 且存在实向量 β 使得 $\beta'A\beta=0$. 同时对任意的 n 维实列向量 γ,η, 若 $\gamma A\eta\neq 0$ 时有
$$\gamma'A\eta+\eta'A\alpha\neq 0,$$
证明：对任意 n 维实列向量 Y 都有 $Y'A\beta=0$.
4. 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，且 B 是半正定矩阵. 证明：若 $A+iB$ 行列式为零，则方程组 $(A+iB)X=0$ 有非零实解.
5. 设 A 为 n 阶实矩阵，若对任何 n 维非零列向量 X, 都有 $X'AX>0$, 证明：$|A|>0$.
6. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶半正定实对称阵，若 $a_{ii}=0$, 则该对角元所在行和列的其余所有元素都是零.

下面的证明尽可能从更多角度来看.

证明. 1. 由 A 半正定，存在方阵 C 使得 $A=C'C$. 于是 $X'AX=(CX)'(CX)=0$, 所以 $CX=C'CX=AX=0$.

2. 注意到
$$X'(A+A')X=2X'AX\geq 0,$$
所以 $A+A'$ 是半正定阵，因此若 $A\alpha=0$, 则
$$0=2\alpha'A\alpha=\alpha'(A+A')\alpha,$$
于是 $0=(A+A')\alpha=A\alpha+A'\alpha$, 从而推出 $A'\alpha=0$.

3. 由条件 $A+A'$ 是半正定矩阵. 因此由 $\beta'A\beta=0$, 可以推出 $(A+A')\beta=0$. 若结论不成立，则存在实列向量 Y 使得 $Y'A\beta\neq 0$. 但是注意到
$$Y'A\beta+\beta'AY=Y'(A+A')\beta=0,$$
这与条件矛盾.

4. 由条件有 $A+iB$ 有非零解，不妨设为 $X=\alpha+i\beta(\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n)$ 为其非零解，则有

$$(A+iB)(\alpha+i\beta)=(A\alpha-B\beta)+i(A\beta+B\alpha)=0,$$

于是 $A\alpha=B\beta, A\beta=-B\alpha$. 进而有

$$\alpha'B\alpha+\beta'B\beta=-\alpha'A\beta+\alpha'A\beta=0,$$

而 $\alpha'B\alpha\geq 0, \beta'B\beta\geq 0$, 于是推出 $A\alpha=B\alpha=A\beta=B\beta=0$. 由 α,β 不全为零，所以 $A+iB$ 有非零实解.

5. (a) 首先 A 复特征值都是成对存在的，且虚部不为零，因此只需证明若 A 有实特征值 λ, 则一定有 $\lambda>0$. 假如 λ 是 A 的实特征值，α 是 A 的实特征向量，则有

$$\alpha'A\alpha=\lambda\alpha'\alpha>0,$$

于是 $\lambda>0$.

(b) 首先对任何 $t\geq 0$, 有 $f(t)=|tI_n+A|\neq 0$, 不然则一定存在实特征向量 X 使得 $X'(A+tI_n)X=0$, 与条件矛盾. 注意到 $f(t)$ 是首项系数为 1 的多项式，则当 t 充分大时，一定有 $f(t)>0$. 特别地，当 $t=0$ 时有 $f(0)=|A|>0$.

6. (a) 任取 $j\neq i$, 考虑 A 第 i,j 行与列构成的主子式，则

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{ii} \end{vmatrix}=a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ij}=-a_{ij}^2\geq 0,$$

所以 $a_{ij}=a_{ji}=0$.

(b) 取标准单位列向量 e_i, 则有 $e_i'Ae_i=a_{ii}=0$, 于是由 1 可知 $Ae_i=0$. 即 A 第 i 列元素全为零. 由 A 对称，A 的第 i 行元素也全为零，因此结论得证.

■

注 1.131. 对于问题 1.130 的 5，事实上，我们还能证明 A 的复特征值的实部一定大于零. 设 $a+bi, b\neq 0$ 是 A 的任意复特征值，$X_1+iX_2(X_1,X_2\in\mathbb{R}^n)$ 是对应的特征向量. 则由 $A(X_1+iX_2)=(a+bi)(X_1+iX_2)$ 有

$$\begin{cases} AX_1=aX_1-bX_2 \\ AX_2=bX_1+aX_2. \end{cases}$$

注意到若 $X_1=0$, 则由 $AX_1=aX_1-bX_2$ 可以推出 $X_2=0$ 矛盾. 所以 $X_1\neq 0$, 同理可证 $X_2\neq 0$.

于是根据条件有

$$\begin{cases} X_1'AX_1 = aX_1'X_1 - bX_1'X_2 > 0. \\ X_2'AX_2 = bX_2'X_1 + aX_2'X_2 > 0, \end{cases}$$

于是 $2aX_2'X_2 > 0$, 即 $a > 0$.

问题 1.132. (复旦大学 2024) 令 $H = \{z = a + bi \mid a.b \in \mathbb{R}, b > 0\}$, 给定 n 阶实对称半正定阵 $A_i(i = 1, 2, \cdots, k)$, 定义复值函数

$$f(x_1, \cdots, x_k) = \det\left(\sum_{i=1}^{k} x_i A_i.\right)$$

若存在 $x_1', \cdots, x_k' \in H$, 使得 $f(x_1', \cdots, x_k') = 0$, 证明: $f(x_1, \cdots, x_k) \equiv 0$.

证明. 设 $x_i' = a + bi(a, b \in \mathbb{R}, b > 0), A = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i A_i, B = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i A_i$, 则有 $|A + iB| = 0$. 所以由问题 1.130 的 4 可知存在 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$ 使得 $A\alpha = 0, B\alpha = 0$. 即有

$$\alpha' B\alpha = b_1\alpha' A_1\alpha + \cdots + b_k\alpha' A\alpha = 0,$$

由 $b_i > 0$ 从而有 $\alpha' A_i\alpha = 0$, 即 $A_i\alpha = 0$. 所以 $f(x_1, \cdots, x_k) \equiv 0$. ■

问题 1.133. 证明如下问题，设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实对称阵,

$$f(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

1. $(-1)^i a_i = A$ 所有 i 阶主子式之和.$i = 1, 2, \cdots, n$.
2. 若记 A 的所有特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 $\sigma_k = \sum\limits_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, k = 1, 2, \cdots, n.$
3. A 是正定的充要条件是 a_i 的正负号与 $(-1)^i$ 相同.
4. A 半正定的充要条件是 A 的所有主子式大于等于零.

证明. 1. 按只含 A 的列和 λI_n 的列进行 Laplace 展开即可得结论.

2. 结合 Vieta 定理和 1 可得结论.

3. 必要性. 由 1 可得 $(-1)^i a_i$ 恒正, 于是结论得证. 必要性. 若 n 为奇数，则当 $\lambda \le 0, f(\lambda) < 0$. 当 n 为偶数时，$f(\lambda) > 0, \lambda \le 0$, 因此无论哪种情况都有 A 没有小于等于 0 特征值，所以 A 是正定阵.

4. 必要性. 利用 $t(>0)I_n + A$ 是正定阵，其主子式 $= t^k + A_k$ 大于零，让 $t \to 0$ 可得结论. 下证充分性. 设

$$f(t) = |A + tI_n| = t^n + c_1t^{n-1} + \cdots + c_{n-1}t + c_n,$$

由 Laplace 展开可知 $c_i \geq 0$, 于是对任何 $t > 0$ 总有 $f(t) > 0$. 设 $A_k(1 \leq k \leq n)$ 是 A 的第 k 个顺序主子式，则 A_k 的主子式也是 A 的主子式，所以 A_k 的所有主子式也大于等于零. 因此对任何 $t > 0$ 有 $|A_k + tI_k| > 0$, 注意到 $|A_k + tI_k|$ 是 $A + tI_n$ 的第 k 个顺序主子式，因此 $A + tI_n$ 是正定阵，所以让 $t \to 0$ 可得 A 是半正定.

■

问题 1.134. 证明如下问题：

1. 设 B 是 n 阶半正定实对称阵,$\mu_1, \cdots, \mu_n$ 是 B 的全体特征值, 存在一个只和 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 有关的多项式 $f(x)$ 使得 $B = f(B^2)$.
2. 设 A 是 n 阶半正定实对称阵，则存在唯一的 B 使得 $A = B^2$.

证明. 1. 存在正交阵 Q 使得

$$Q'BQ = \mathrm{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\},$$

设 $\mu_{i_1}, \cdots, \mu_{i_s}$ 是 B 所有不同特征值. 现在令 $\lambda_i = \mu_i^2$, 则 $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_s}$ 两两互异. 由问题 2.1 令

$$f(x) = \sum_{j=1}^{s} \mu_{i_j} \frac{(x-\lambda_{i_1})\cdots(x-\lambda_{i_{j-1}})(x-\lambda_{i_{j+1}})\cdots(x-\lambda_{i_s})}{(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_1})\cdots(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_{j-1}})(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_{j+1}})\cdots(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_s})},$$

于是 $f(\lambda_i) = \mu_i (1 \leq i \leq n)$. 因此

$$\mathrm{diag}\{\mu_1, \cdots, \mu_n\} = \mathrm{diag}\{f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)\} = f(\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}),$$

因此进一步有 $B = f(B^2)$.

2. 存在性, 显然. 下面讨论唯一性.

   (a) 若 C 满足 $C^2 = A$, 则由 1 可得 $C = f(C^2) = f(A) = B$.

   (b) 设 $A = B^2 = C^2$, 且 A 所有不同特征值为 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_s^2$, 则 B, C 的所有不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$. 于是存在 $P, Q \in O(n)$ 使得 $B = P'\Lambda P, C = Q'\Lambda Q$, 因此

$$P' \begin{pmatrix} \lambda_1^2 E_{k_1} & & & \\ & \lambda_2^2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s^2 E_{k_s} \end{pmatrix} P = Q' \begin{pmatrix} \lambda_1^2 E_{k_1} & & & \\ & \lambda_2^2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s^2 E_{k_s} \end{pmatrix} Q,$$

即

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 E_{k_1} & & & \\ & \lambda_2^2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s^2 E_{k_s} \end{pmatrix} PQ' = PQ' \begin{pmatrix} \lambda_1^2 E_{k_1} & & & \\ & \lambda_2^2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s^2 E_{k_s} \end{pmatrix}$$

由于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同，因此 PQ' 一定是分块对角阵. 所以此时一定有

$$\Lambda PQ' = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{k_s} \end{pmatrix} PQ' = PQ' \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{k_s} \end{pmatrix} = PQ'\Lambda,$$

因此 $B = P'\Lambda P = P'\Lambda PQ'Q = P'PQ'\Lambda Q' = Q'\Lambda Q = C$, 这就证明了唯一性.

■

注 1.135. 问题 1.134 的 2 可推广为：设 A 为 n 阶半正定阵，对任意正整数 k, 存在唯一半正定阵 B 使得 $A = B^k$.

问题 1.136. 证明如下问题：

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵，且 $A+B$ 可逆，证明：

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$

2. 设 A 是 n 阶正定实对称矩阵，B 是同阶实对称阵，则存在可逆阵 C 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

3. 设 A, B 都是 n 阶正定实对称阵，满足 $A \geq B$, 证明：$B^{-1} \geq A^{-1}$.

4. 设 A, B 都是 n 阶正定实对称阵，满足 $A \geq B$, 证明：$A^{\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{1}{2}}$.

证明. 1. 若 A,B 均可逆, 则

$$A(A+B)^{-1}B = A((E_n + BA^{-1})A)^{-1}B = (E_n + BA^{-1})^{-1}B = (B^{-1} + A^{-1})^{-1}.$$

同理

$$B(A+B)^{-1}A = B((AB^{-1} + E_n)B)^{-1}A = (E_n + AB^{-1})^{-1}A = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}.$$

若 A，B 不可逆, 令 $A_t = tI_n + A, B_t = tI_n + B$, 则除了有限个 t 外,$A_t, B_t, A_t + B_t$ 均可逆, 让 $t \to 0$, 结论得证.

2. 因为 A 正定，所以存在可逆阵 P 使 $P'AP=I_n$, 此时 $P'BP$ 仍是对称阵，则存在正交阵 Q 使得

$$(PQ)'B(PQ)=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

让 $C=PQ$, 此时仍有 $C'AC=I_n$, 于是结论成立.

3. (a) 若 $A>B$, 则由 1 有

$$(B^{-1}-A^{-1})^{-1}=A(A-B)^{-1}B=(A-B+B)(A-B)^{-1}B=B+B(A-B)^{-1}B,$$

于是 $B^{-1}>A^{-1}$. 对于一般情况，对任意 $t>0$, 有 $tI_n+A>\dfrac{1}{2}tI_n+B$, 于是

$$(\frac{1}{2}tI_n+B)^{-1}>(tI_n+A)^{-1},$$

让 $t\to 0^+$, 可知结论成立.

(b) 存在可逆阵 C 使得

$$C'AC=I_n,\quad C'BC=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$$

由 B 正定，所以 $C'BC$ 正定，于是 $\lambda_i>0$. 再由 $C'(A-B)C$ 半正定，则 $1-\lambda_i\geq 0$, 即 $\lambda_i^{-1}\geq 1$, 于是

$$C^{-1}B^{-1}(C')^{-1}-C^{-1}B^{-1}(C')^{-1}=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1^{-1}-1,\cdots,\lambda_n^{-1}-1\right\}$$

是半正定阵，所以 $B^{-1}-A^{-1}$ 也是半正定阵.

4. (a) 存在可逆阵 C, 使得

$$(C^{-1})'A^{\frac{1}{2}}C^{-1}=I_n,\quad (C^{-1})'B^{\frac{1}{2}}C^{-1}=\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

因为 $B^{\frac{1}{2}}$ 是正定阵, 从而 $(C^{-1})'B^{\frac{1}{2}}C^{-1}$ 是正定阵，从而 $\lambda_i>0$. 设正定阵 $C'C=D=(d_{ij})$, 则 $d_{ii}>0$. 注意到 $A^{\frac{1}{2}}=C'C, B^{\frac{1}{2}}=C'\Lambda C$, 因此有

$$A-B=(C'C)^2-(C'\Lambda C)^2=C'(D-D\Lambda D)C\geq 0.$$

从而 $D-D\Lambda D$ 是半正定阵，从而其 (i,i) 元素 $d_{ii}(1-\lambda_i^2)\geq 0$. 从而 $0<\lambda_i\leq 1$. 从而

$$A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}=C'(I_n-\Lambda)C=C'\mathrm{diag}\{1-\lambda_1,1-\lambda_2,\cdots,1-\lambda_n\}C\geq 0.$$

从而结论得证.

(b) 先设 $A>B>0$. 令 $C=A-B, M(\alpha)=(B+\alpha C)^{\frac{1}{2}}$. 下面证明 $M(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调. 我们对 α 求导有

$$C=M'(\alpha)M(\alpha)+M(\alpha)M'(\alpha)>0.$$

从而 $M'(\alpha)>0$. 因此

$$M(1)-M(0)=\int_0^1 M'(\alpha)d\alpha=A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}>0.$$

从而 $A^{\frac{1}{2}}>B^{\frac{1}{2}}$. 若 $A\geq B$, 则有 $(tI_n+A)^{\frac{1}{2}}>(tI_n+B)^{\frac{1}{2}}$. 令 $t\to 0^+$, 结论得证.

■

注 1.137. 对于问题 1.136 中 4 的证法 (b), 作两点说明:

1. 推出 $M'(\alpha)>0$ 是因为由于 $C, M(\alpha)$ 正定，所以矩阵方程 $C=M(\alpha)X+XM(\alpha)$ 有唯一正定解.
2. 对于 $\int_0^1 M'(\alpha)$ 的正定性: 对任意非零实列向量 X, 有

$$X'\left(\int_0^1 M'(\alpha)d\alpha\right)X=\int_0^1 (X'M'(\alpha)X)d\alpha>0.$$

问题 1.138. 设 A,B 都是半正定阵, 证明:

1. 若将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^T & A_{22}\end{pmatrix}$, 其中 A_{11} 是方阵，则有

$$R(A_{11},A_{12})=R(A_{11}).$$

2. AB 可对角化.
3. AB 的特征值都是非负实数，从而 $\mathrm{tr}(AB)\geq 0$.
4. 若 $\mathrm{tr}(AB)=0$, 则 $AB=O$.
5. 存在可逆矩阵 P 使得

$$P'AP=\mathrm{diag}\left\{d_1,d_2,\cdots,d_r,O\right\},$$

$$P'BP=\mathrm{diag}\left\{1-d_1,1-d_2,\cdots,1-d_r,O\right\}$$

证明. 1. 只需证明 $\begin{pmatrix} A_{11}\\ A_{12}^T\end{pmatrix}X=O$ 与 $A_{11}X=O$ 同解即可. 显然只需证若有 $A_{11}X_0=0$, 能推出 $\begin{pmatrix} A_{11}\\ A_{12}^T\end{pmatrix}X_0=0$ 即可. 注意到

$$0=X_0^TA_{11}X_0=(X_0^T,O)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^T & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0\\ O\end{pmatrix},$$

所以 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ O \end{pmatrix} = 0$, 于是有 $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12}^T \end{pmatrix} X_0 = 0$.

2. 由 A 半正定，存在可逆阵 C 使得 $C'AC = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 作分块 $C^{-1}B(C^{-1})' = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{pmatrix}$. 注意到 AB 相似于
$$C'ACC^{-1}B(C')^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}' & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix},$$
由于 $C^{-1}B(C^{-1})'$ 仍是半正定阵，所以 $R(B_{11}, B_{12}) = R(B_{11})$, 即存在 Y 使得 $B_{12} = B_{11}Y$. 于是
$$\begin{pmatrix} E & -Y \\ O & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -Y \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$
又因为 B_{11} 是对称阵可对角化，所以 AB 可对角化.

3. 由 2, AB 相似于一个半正定阵，所以 AB 特征值都是非负实数.

4. 由 3, AB 特征值全为零，且 AB 可对角化，所以 $AB = O$.

5. 由 $A+B$ 是半正定阵，所以存在可逆阵 C 使得 $C'(A+B)C = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 由于 $C'BC, C'AC$ 也都是半正定阵，其对角元都大于等于零，从而只能是 $C'AC$ 的后 $n-r$ 个主对角元等于零 (所以其对角元所在行和例的所有元素也为零). 即 $C'AC$ 是形如
$$C'AC = \begin{pmatrix} H_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$
的形式. 设 Q 是正交阵，使得 $Q'H_rQ = \operatorname{diag}\{d_1, \cdots, d_r, O\}$, 令 $P = C\begin{pmatrix} Q & O \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix}$ 即可.

■

问题 1.139. 设 A 为 n 阶半正定实对称阵,S 为 n 阶实反对称矩阵, 满足 $AS + SA = O$. 证明: $|A+S| > 0$ 的充要条件是 $r(A) + r(S) = n$.

证明. 注意条件和结论在正交相似变换 $A \mapsto Q'AQ.S \mapsto Q'SQ$ 下不会发生改变, 因此不妨一开始便设 $A = \operatorname{diag}\{\Lambda, O\}$, 其中 $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}, \lambda_i > 0 (1 \le i \le r)$. 设 $S = (s_{ij})$, 则由 $AS + SA = O$ 可得 $(\lambda_i + \lambda_j)s_{ij} = 0$. 则当 i, j 至少有一个落在 $[1, r]$ 中时, 有 $\lambda_i + \lambda_j > 0$, 从而 $s_{ij} = 0$, 即 $S = \operatorname{diag}\{O, S_{n-r}\}$, 其中 S_{n-r} 是 S 右下角的 $n-r$ 阶主子阵. 注意 S_{n-r} 仍是反对称阵, 所以 $|S_{n_r}| \ge 0$, 从而
$$|A+S| = |\operatorname{diag}\{\Lambda, S_{n-r}\}| = |\Lambda| \cdot |S_{n-r}| \ge 0$$

于是 $|A+S|>0$ 当且仅当 $|S_{n-r}|>0$, 即当且仅当 $r(S_{n-r})=n-r$, 这也当且仅当 $r(A)+r(S_{n-r})=n$. ∎

问题 1.140. 设 A 是 n 阶实对称阵，证明：

1. 若 A 可逆，则 A 是正定的充要条件是对任意正定阵 B, 有 $\operatorname{tr}(AB)>0$.
2. A 是半正定阵的充要条件是对任意正定阵 B, 有 $\operatorname{tr}(AB)\geq 0$.

证明. 1. 必要性由 AB 特征值都大于零可得, 下证充分性. 若 A 不是正定阵，则由 A 可逆，A 一定存在负特征值, 记为 λ_1. 设 Q 是正交阵，使得

$$Q'AQ=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda,\cdots,\lambda_n\},$$

设 $Q'BQ=\operatorname{diag}\{k,1,1,\cdots,1\}$, 其中 k 是正实数，所以 B 是正定阵, 但是当 k 充分大时，有 $\operatorname{tr}(AB)<0$, 矛盾.

2. 与 1 完全类似的讨论.

∎

问题 1.141. 现有实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX, A$ 为对称阵，证明：当 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 时，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 的最小值恰好等于 A 的最小特征值.

证明. 设 Q 为正交阵，使得 $Q'\Lambda Q=A$, 其中 $\Lambda=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,$\lambda\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$ 为 A 的正交相似标准型，于是令 $Y=QX$, 则有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX=X'Q'\Lambda QX=Y'\Lambda Y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\geq\lambda_1(y_1^2+\cdots+y_n^2),$$

且等号可以取到，取 $y_1=1,y_2=\cdots=y_n=0$. 注意到，当 $X'X=x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 时，

$$y_1^2+\cdots+y_n^2=Y'Y=X'Q'QX=X'X=1,$$

于是当 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 时，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 的最小值即为 λ_1，是 A 的最小特征值. ∎

注 1.142. 问题 1.141 的本质事实上是对称阵 *(或者说更一般地 Hermite 矩阵)* 的一个很重要的命题：设 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，对任意非零 $X\in\mathbb{C}^n$,

$$R(x)=\frac{X^HAX}{X^HX}$$

称为 A 的 Rayleigh 商. 设 A 的特征值为 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$, 则有

$$\lambda_1=\max_{X\neq0}R(X),\quad \lambda_n=\min_{X\neq0}R(X).$$

进一步，有 (Courant-Fisher 定理)

$$\lambda_i = \max_{V_i} \min_{0\neq X\in V_i} R(x), \quad \lambda_{n-i+1} = \min_{V_i} \max_{0\neq X\in V_i} R(x)$$

其中 V_i 是 $\mathbb{C}^n$ 中的 i 维子空间.

证明. 设 $Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 为酉阵使得 $Q^TAQ=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 令 $U=L(q_i,q_{i+1},\cdots,q_n)$, 对任意 i 维子空间 V_i, 由维数公式可知，$V_i\cap U\neq\{0\}$. 设

$$0\neq X_1 = c_iq_i + c_{i+1}q_{i+1} + \cdots + c_nq_n \in V_i\cap U,$$

则

$$R(X_1) = \frac{\lambda_i|c_i|^2+\cdots+\lambda_n|c_n|^2}{|c_i|^2+\cdots+|c_n|^2} \leq \lambda_i,$$

于是 $\min\limits_{0\neq X\in V_i} R(X)\leq R_1$. 现在取 $V_i=L(q_1,q_2,\cdots,q_i)$, 则对任意 $0\neq X\in V_i$, 有 $R(X)\geq\lambda_i$, 从而有 $\min\limits_{0\neq X\in V_i} R(X)=\lambda_i$. 因此一定有

$$\lambda_i = \max_{V_i} \min_{0\neq X\in V_i} R(X).$$

同理可证另一种情形. ■

问题 1.143. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个秩为 n 符号差为 s 的实二次型，证明存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $\dfrac{1}{2}(n-|s|)$ 维子空间 W, 使得对任意 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W$, 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

证明. 设 f 的相伴矩阵为 A. 若 $s=0$ 或 n, 则 f 正定或负定，结论显然成立. 否则，设 f 的正负惯性指数分别为 $n-q,q$. 其中 $0<q<n$. 现在不妨设 $n-q>q$, 即 $\dfrac{1}{2}(n-s)=q$, 设 $Y=CX$, 使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = X'AX = -y_1^2-\cdots-y_q^2+y_{q+1}^2+\cdots+y_n^2,$$

令 $CX_t=Y_t=\varepsilon_t+\varepsilon_{t+1}(1\leq t\leq n)$, 其中 ε_i 是 n 维标准单位列向量. 则有 $X_t'AX=0$, 且 $X_1,\cdots,X_q$ 线性无关. 令 $W=L(X_1,\cdots,X_q)$, 则结论成立. ■

问题 1.144. 设 n 元实二次型 $f(X)=X'AX$, 其中 A 为阶实对称阵.p,q 分别是 f 的正负惯性指数，记

$$N_f = \left\{X\in\mathbb{R}^n \mid X'AX=0\right\},$$

证明：

1. 包含在 N_f 内的子空间的最大维数为 $n-\max\{p,q\}$.

2. 记 $N_f^+=\{X\in\mathbb{R}^n \mid f(X)>0\}\cap\{0\}$, 则包含在 N_f^+ 内的子空间的最大维数为 p.

3. 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，将 f 限制在 W 上得到的新二次型记为 f_W, 则 f_W 的正负惯性指数 p_1, q_1 满足 $p_1 \le p, \quad q_1 \le q$.

证明. .

1. 不妨设 $p \ge q$, 同理可证 $p < q$ 的情形. 令 $X = CY$ 使得

$$f(X) = X'AX = Y'C'ACY = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 + \cdots - y_{p+q}^2,$$

记 $\eta_i = C(\varepsilon_i + \varepsilon_{i+p})(i = 1, 2, \cdots, q).\gamma_j = C\varepsilon_{p+q+j}(j = 1, 2, \cdots, n-p-q)$. 令

$$U = L(\eta_1, \cdots, \eta_q, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-p-q}),$$

则显然 $U \subseteq N_f$, 且 $\dim U = n - p$. 记 U_0 是 N_f 中维数最大的子空间，则 $\dim U_0 \ge n - p$. 对任意非零 $\alpha \in L(\eta_1, \cdots, \eta_p)$, 有 $f(\alpha) > 0$, 于是

$$U_0 \cap L(\eta_1, \cdots, \eta_p) = \{0\}.$$

因此由维数公式有

$$\dim U_0 + \dim L(\eta_1, \cdots, \eta_p) = \dim U_0 + p \le n,$$

于是 $\dim U_0 \le n - p$, 因此 $\dim U_0 = n - p$.

2. 设 V_0 是包含在 N_f^+ 内的维数最大的子空间. 则由于

$$L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p) \subseteq N_f^+,$$

所以 $\dim V_0 \ge p$. 注意到对任意 $\beta \in L(C\varepsilon_{p+1}, \cdots, C\varepsilon_n)$, 有 $f(\alpha) \le 0$, 因此

$$V_0 \cap L(C\varepsilon_{p+1}, \cdots, C\varepsilon_n) = \{0\}.$$

则由维数公式有 $\dim V_0 + \dim L(C\varepsilon_{p+1}, \cdots, C(\varepsilon_n)) = \dim V_0 + n - p \le n$, 从而只能是 $\dim V_0 = p$.

3. 显然 $N_{f_W}^+ \subseteq N_f^+$, 则由 2 可知 $p_1 \le p$. 同理可证 $q_1 \le q$.

■

问题 1.145. 设 n 阶方阵 $M = (m_{ij})$ 满足 $m_{ii} = 0$ 且 $m_{ij} = 0 \Leftrightarrow m_{ji} = 1 (i \ne j)$. 证明: $r(M) \ge n - 1$.

证明. 由条件 $A = M + M'$ 是对角元为零，其余元素全为 1 的对称阵. 定义 $f(X) = X'AX$, 则 $p = 1, q = n - 1$, 其中 p, q 分别是 f 的正负惯性指数. 设 $M\boldsymbol{x} = 0$ 的解空间为 U, 则任取 $\alpha \in U$, 有

$f(\alpha)=\alpha' A\alpha=\alpha'(M+M')\alpha=0$, 即 $U\subseteq N_f$. 由问题 1.144 的 1 有

$$n-r(M)=\dim U\leq n-\max\{p,q\}$$

即 $r(M)\geq n-1$. ■

问题 1.146. 设 $l_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n, i=1,2,\cdots,p+q$. 其中 $a_{ij}\in\mathbb{R}$, 设 p_1,q_1 是 n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2,$$

的正负惯性指数，证明：$p_1\leq p,\quad q_1\leq q$.

证明. 记

$$V=\{x\in\mathbb{R}^n\mid l_1=l_2=\cdots=l_p=0\},$$

则显然 $\dim V\geq n-p$. 则当 $X\in V$ 时有 $f(X)\leq 0$, 因此 $N_f^+\cap V=\{0\}$, 从而由问题 1.144 和维数公式有

$$p_1=\text{包含在 } N_f^+ \text{ 中子空间的最大维数}\leq n-\dim V\leq p,$$

同理可证 $q_1\leq q$. ■

引理 1.147. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，β 是一 n 维列向量，则 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 有解当且仅当, 若 $A'\boldsymbol{y}=0$, 则 $\beta'\boldsymbol{y}=0$.

证明. $A\mathbf{x}=\beta$ 有解当且仅当 $r(A')=r\begin{pmatrix}A'\\ \beta'\end{pmatrix}$ 当且仅当 $A'\mathbf{y}=0$ 与 $\begin{pmatrix}A'\\ \beta'\end{pmatrix}\mathbf{y}=0$ 同解，于是结论得证. ■

注 1.148. 引理 1.147 的对偶命题是: $A\boldsymbol{x}=\beta$ 无解的充要条件是存在 $\boldsymbol{y}$ 满足 $A'\boldsymbol{y}=0$ 但是 $\beta'\boldsymbol{y}\neq 0$. 进而可以找到 $\boldsymbol{y}$ 使得 $A'\boldsymbol{y}=0$ 同时 $\beta'\boldsymbol{y}=1$.

问题 1.149. (华中科技大学 2023) 设 A 是 n 阶实对称阵，且方程组 $A\boldsymbol{x}=\alpha$ 无解，$\alpha\in\mathbb{R}^n, d>0$, 证明：$n+1$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & d\end{pmatrix}$ 是不定的.

证明. 首先做合同变换

$$\begin{pmatrix}I_n & -\frac{\alpha}{d}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0\\ -\frac{\alpha^T}{d} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-\frac{\alpha\alpha^T}{d} & 0\\ 0 & d\end{pmatrix},$$

因此只需说明 $A-\frac{1}{d}\alpha\alpha^T$ 的负惯性指数不为零，则结论得证. 因为 $A\boldsymbol{x}=\alpha$ 无解，则由注 1.148 可知存在 $\boldsymbol{y}$ 使得 $A\mathbf{y}=0$, 且 $\alpha^T\boldsymbol{y}=1$. 因此

$$\boldsymbol{y}'\left(A-\frac{1}{d}\alpha\alpha^T\right)\boldsymbol{y}=-\frac{1}{d}<0,$$

因此结论得证. ■

问题 1.150. (南开大学 2023) 设 A 是 n 阶实正定阵, 若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 及 $c\in\mathbb{R}$ 满足 $\alpha' A\alpha+2\alpha'\beta+c=0$, 证明: $\beta' A^{-1}\beta\geq c$.

证明. 注意当且仅当证 $\beta' A^{-1}\beta+\alpha' A\alpha+2\alpha'\beta\geq 0$.

- 注意到
$$(\alpha',\beta')\begin{pmatrix}A & I_n\\ I_n & A^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\alpha' A\alpha+\beta' A^{-1}\beta+2\alpha'\beta,$$
因此只需证明 $\begin{pmatrix}A & I_n\\ I_n & A^{-1}\end{pmatrix}$ 半正定. 做合同变换
$$\begin{pmatrix}I_n & O\\ -A^{-1} & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & I_n\\ I_n & A^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & -A^{-1}\\ O & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ O & O\end{pmatrix}$$
所以结论得证.

- 由 A 正定, 存在可逆阵 C 使得 $A=C'C, A^{-1}=C^{-1}(C^{-1})'$. 现在设 $C\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)',(C^{-1})'\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 则由 Cauchy 不等式
$$\begin{aligned}\alpha' A\alpha+\beta' A^{-1}\beta&=(C\alpha)'(C\alpha)+((C^{-1})'\beta)'((C^{-1})'\beta)\\&=\sum_{i=1}^n(a_i^2+b_i^2)\geq 2\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\geq -2\sum_{i=1}^n a_ib_i=-2(C\alpha)'((C^{-1})'\beta)=-2\alpha'\beta\end{aligned}$$
所以结论得证.

■

问题 1.151. 设 A 是 n 阶实对称阵, 证明: 存在正数 k, 使得对任意 $\alpha\in\mathbb{R}^n$, 有
$$-k\alpha'\alpha\leq\alpha' A\alpha\leq k\alpha'\alpha.$$

证明. (a) 若记 A 的特征值为 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$. 则有
$$\lambda_1\leq\frac{\alpha' A\alpha}{\alpha'\alpha}\leq\lambda_n,\alpha\neq 0$$
取 k 充分大即可.

(b) 当 k 充分大时候, 有
$$k\pm a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则由问题 1.108 的 3 可知 $|kI_n \pm A|$ 的顺序主子式全大于零，即 $kI_n \pm A$ 是正定阵, 于是有 $-k\alpha'\alpha \leq \alpha' A\alpha \leq k\alpha'\alpha$.

■

问题 1.152. (中南大学 2022) 设 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n_1} x_i x_{i+1}, n \geq 2$.

1. 证明 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 正定.
2. 求 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在条件 $x_n = 1$ 下的最小值.

证明. 1. 注意到

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_n^2) \geq 0$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 且 $x_1 = x_n = 0$, 所以 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 正定.

2. 记 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的相伴矩阵为 A, 并做分块为 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha' & 1 \end{pmatrix}$. 令 $P = \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则有

$$P'AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha' A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

注意对上述 $X = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 1)$, 令 $Y = PX = (y_1, \cdots, y_{n-1}, 1)$ 不会改变限制条件. 而

$$Y^T AY = X_{n-1}^T A_1 X_{n-1} + 1 - \alpha' A_1^{-1}\alpha \geq 1 - \alpha' A_1^{-1}\alpha$$

所以最小值为 $1 - \alpha' A_1^{-1}\alpha$. 此外容易计算 $|A| = \frac{n+1}{2^n}, |A_1| = \frac{n}{2^{n-1}}$, 且 $|A| = |A_1|(1 - \alpha' A_1^{-1}\alpha)$, 于是 $1 - \alpha' A_1^{-1}\alpha = \frac{n+1}{2n}$.

■

问题 1.153. 设 A 为 n 阶实对称阵, B 为 n 阶实对称正定阵. 记 $|\lambda B - A| = 0$ 的 n 个根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 证明：存在 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $x_1, \cdots, x_n$ 使得对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 有

$$Ax_i = \lambda_i Bx_i \text{且} x_i' Bx_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

证明. 设 $B = P'P$, 则 $|\lambda B - A| = 0 \Leftrightarrow |\lambda I_n - (P^{-1})' AP^{-1}| = 0$. 由于 $(P^{-1})' AP^{-1}$ 为对称阵，所

以存在正交阵 $Q=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 使得

$$Q'((P^{-1})'AP^{-1})Q=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

让 $x_i=P^{-1}e_i(1\le i\le n)$, 则有 $(P^{-1})'Ax_i=((P^{-1})'AP^{-1})e_i=\lambda_i(P^{-1})'e_i=\lambda_iP'e_i=\lambda_iP'Px_i=\lambda_iBx_i$. 且 $x_i'Bx_j'=e_i'e_j=\delta_{ij}$, 所以结论得证. ■

1.6 欧式空间

问题 1.154. 设 V,U 是 n 维欧式空间,$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 和 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 分别是 V,U 中的向量组, 证明：存在保积同构 $\varphi:V\to U$, 使得

$$\varphi(\alpha_i)=\beta_i(1\le i\le m)$$

的充要条件是 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 的 Gram 矩阵相等.

证明. 必要性平凡, 下证充分性. 不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关为 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 的极大无关组, 断言 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 为 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 的极大无关组 (证明平凡, 读者自证). 记 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),U_1=L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$, 让 $\varphi_1:V_1\to U_1,\varphi(\alpha_i)=\beta_i(1\le i\le r)$. 则有 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\varphi(\alpha_i),\varphi(\alpha_j))=(\beta_i,\beta_j)(1\le i,j\le m)$. 分别取 $V_1^\perp,U_1^\perp$ 的一组标准正交基为 $\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_n,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$, 定义 $\varphi_2:V_1^\perp\to U_1^\perp,\varphi_2(\gamma_j)=\eta_j(r+1\le j\le n)$. 则对任意 $v=\alpha+\gamma\in V$, 其中 $\alpha\in V_1,\gamma\in V_1^\perp$, 令 $\varphi:V\to U,\varphi(\alpha)=\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\gamma)$, 则容易验证 φ 是保积同构, 且 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i(1\le i\le m)$. ■

问题 1.155. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 满足 $A'A=B'B$, 证明：存在正交阵 T, 使得 $TA=B$.

证明. 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中取标准内积, 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, 则

$$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=A'A=B'B=G(\beta_1,\cdots,\beta_n)$$

由问题 1.154 可知存在正交阵 T 使得 $TA=B$. ■

注 1.156. 问题 1.155 还可以从极分解角度来看, 由问题 1.134 可知存在唯一半正定阵 C 使得 $A'A=B'B=C^2$. 由极分解可知存在正交阵 T_1,T_2 使得 $A=T_1C,B=T_2C$, 令 $T=T_2^{-1}T_1$ 即可.

问题 1.157. 设 V 为 n 维内积空间,$\mathcal{A}$ 是 V 上的正规变换, 证明：α 是 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量的充要条件是 α 是 $\mathcal{A}^*$ 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

证明. 首先对任意 $\alpha \in V$, 有

$$||\mathcal{A}\alpha||^2 = (\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) = (\alpha, \mathcal{A}^*\mathcal{A}\alpha) = (\alpha, \mathcal{A}\mathcal{A}^*\alpha) = (\mathcal{A}^*\alpha, \mathcal{A}^*\alpha) = ||\mathcal{A}^*\alpha||^2.$$

即 $||\mathcal{A}\alpha|| = ||\mathcal{A}^*\alpha||$. 又因为 $(\lambda I - \mathcal{A})^* = \bar{\lambda} I - \mathcal{A}^*$, 且 $(\bar{\lambda} I - \mathcal{A}^*)(\lambda I - \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})(\bar{\lambda} I - \mathcal{A}^*)$, 所以 $\lambda I - \mathcal{A}$ 也是正规变换, 于是有 $\operatorname{Ker}(\lambda I - \mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\bar{\lambda} I - \mathcal{A}^*)$, 于是结论得证. ∎

♯♯♯ 利用问题 1.157 可以给出引理 2.61 的几何证明 (只考虑酉空间, 欧式空间类似可证)：

问题 1.158. (引理2.61) *设 V 是 n 维酉空间, 设 $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ 是正规变换, W 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则 W 也是 $\mathcal{A}^*$-子空间, 所以 $W, W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}^*$-子空间. 进一步, $\mathcal{A}|_W$ 也是正规变换.*

证明. 对不变子空间 W 的维数 k 进行归纳. 当 $k = 1$ 时, 即 $W = L(\alpha)$, 则 α 是 $\mathcal{A}$ 是的特征向量, 由问题 1.157 可知 α 也是 $\mathcal{A}^*$ 的特征向量, 所以 W 也是 $\mathcal{A}^*$ 的不变子空间. 下假设结论对于维数小于 k 的不变子空间成立, 当 $\dim W = k$ 时, 将 $\mathcal{A}$ 限制在 W 上, 设 λ 是 $\mathcal{A}|_W$ 的特征值,β 为对应的特征向量, 则由问题 1.157 可知 $U = L(\beta)$ 是 $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$ 公共不变子空间. 于是 $U^\perp$ 也是 $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$ 公共不变子空间. 令 $U_0 = W \cap U^\perp$, 则由维数公式有

$$\dim U_0 = \dim W + \dim U^\perp - \dim(W + U^\perp) = k + n - 1 - n = k - 1$$

由归纳假设可知 U_0 也是 $\mathcal{A}^*$ 的不变子空间, 且 $W = U \perp U_0$, 所以 W 也是 $\mathcal{A}^*$ 不变子空间. ∎

♯♯♯ 问题 1.158 中用到一个小命题：V 是 n 维内积空间,$\mathcal{A}$ 是 V 上正规变换, 若 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 则 $W^\perp$ 是 $\mathcal{A}^*$ 的不变子空间.(证明平凡, 留给读者).

问题 1.159. *设 V 是 n 维酉空间,$\mathcal{A}$ 为 V 上的正规变换, 则 $\mathcal{A}$ 属于不同特征值的特征向量相互正交.*

证明. 设 α, β 分别是 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ, μ 的特征向量 $(\lambda \neq \mu)$, 则由问题 1.157 有

$$\lambda(\alpha, \beta) = (\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) = (\alpha, \bar{\mu}\beta) = \mu(\alpha, \beta)$$

于是 $(\alpha, \beta) = 0$, 结论得证. ∎

问题 1.160. *设 A 是 n 阶实正规矩阵, 虚数 $\lambda = a + ib$ 是 A 的一个复特征值, 向量 $\alpha = \beta + i\gamma (\beta, \gamma \in \mathbb{R}^n)$ 是属于 λ 的特征向量, 证明：β, γ 正交且 $|\beta| = |\gamma|$.*

证明. 由 $A\alpha = \lambda\alpha$, 有 $A\overline{\alpha} = \overline{\lambda}\overline{\alpha}$. 即 $\overline{\alpha}$ 是 A 属于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量 (取内积为 $(\beta, \alpha) = \alpha^H \beta$). 由于 A 是正规阵，所以由问题 1.159 可知 A 属于不同特征值特征向量相互正交. 于是

$$0 = (\alpha, \overline{\alpha}) = (\beta + i\gamma, \beta - i\gamma) = (\beta, \beta) - (\gamma, \gamma) + 2i(\gamma, \beta),$$

于是 $(\beta, \beta) = (\gamma, \gamma), (\gamma, \beta) = 0$. ∎

问题 1.161. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明：$A$ 是正规阵的充要条件是存在 $h(x) \in \mathbb{R}[x]$, 使得 $A' = h(A)$.

证明. 充分性显然, 下证必要性. 由于 $AA' = A'A$, 则 A, A' 可同时对角化 (证明过程参考问题 1.187 的 2), 即存在可逆阵 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}, \quad P^{-1}A'P = \operatorname{diag}\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$$

不妨设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 A 全体不同特征值，$\mu_1, \cdots, \mu_s$ 是 A' 全体不同特征值, 则由问题 2.1 可知存在 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 使得 $f(\lambda_i) = \mu_i (1 \le i \le s)$, 进而 $f(\lambda_j) = \mu_j (1 \le j \le n)$, 于是有 $f(A') = A$. 再设 $f(x) = h(x) + ig(x)$, 其中 $h(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, 由于 $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 从而一定有 $ig(A) = O$, 于是 $A' = h(A)$ ■

问题 1.162. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

且等号成立当且仅当 A 是正规矩阵.

证明. 由 Schur 定理存在酉阵 U 使得

$$\overline{U}'AU = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\operatorname{tr}(B\overline{B}') = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} |b_{ij}|^2 = \operatorname{tr}(\overline{U}'A\overline{A}'U) = \operatorname{tr}(A\overline{A}') = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2,$$

所以结论得证，等号成立当且仅当 $b_{ij} = 0 (1 \le i < j \le n)$, 即 A 酉相似可对角化，即 A 是正规阵. ■

问题 1.163. 已知 A, B 为两个 n 阶实正交阵，试证明：

1. 如果 $|A| + |B| = 0$, 那么 $|A + B| = 0$.
2. 如果 n 为奇数，那么 $|(A - B)(A + B)| = 0$.

证明. 1. 由 $|A| + |B| = 0$, 所以 $|AB| = -1$, 所以 $|A^{-1}B| = -1$. 由于 $A^{-1}B$ 仍是正交阵，所以 $A^{-1}B$ 必有特征值 -1, 于是

$$|A + B| = |A| \cdot |I_n + A^{-1}B| = 0.$$

2. 若 $|A|+|B|=0$, 则由 1 结论显然. 否则 $|A|=|B|$, 即 $|A^{-1}B|=1$. 又因为 n 为奇数，则 $A^{-1}B$ 必有特征值 1, 因此

$$|A-B|=|A|\cdot|I_n-A^{-1}B|=0,$$

所以 $|(A-B)(A+B)|=0$.

问题 1.164. (南京大学 2023) 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为欧式空间 $V=\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，$v_1,\cdots,v_n\in V$ 且满足对任意 i 都有 $|e_i-v_i|<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 证明：$v_1,\cdots,v_n$ 是 V 的一组基.

证明. 反证. 若 $v_1,\cdots,v_m$ 不是 V 的一组基，则存在 $0\neq\gamma\in V$ 使得 $(\gamma,v_i)=0(1\le i\le n)$. 于是有

$$\gamma=\sum_{i=1}^n(\gamma,e_i)e_i=\sum_{i=1}^n(\gamma,e_i-v_i)e_i.$$

于是

$$(\gamma,\gamma)=\sum_{i=1}^n(\gamma,e_i-v_i)^2\le(\gamma,\gamma)\sum_{i=1}^n(e_i,v_i)<(\gamma,\gamma)$$

矛盾，所以结论得证. ■

注 1.165. 对于问题 1.164, 若记 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$, 其中 $A=(a_{ij})$, 只需证明 A 可逆即可. 由条件有

$$(e_i-v_i,e_i-v_i)=\left(e_i-\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j,e_i-\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\right)=(1-a_{ii})^2+\sum_{j\neq i}^n a_{ji}^2<\frac{1}{n}\quad,1\le i\le n$$

所以

$$1>n\left[(1-a_{ii})^2+\sum_{j\neq i}^n a_{ji}^2\right]\ge\left(|1-a_{ii}|+\sum_{i\neq j}^n|a_{ji}|\right)^2,$$

从而 $|a_{ii}|\ge1-|1-a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}^n|a_{ji}|(1\le i\le n)$, 所以由问题 1.108 可知 $|A|\neq0$.

■

问题 1.166. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧式空间 V 的一组基，$\beta_1,\cdots,\beta_n\in V$ 满足

$$(\alpha_i,\beta_j)=\begin{cases}1, & i=j.\\0, & i\neq j\end{cases}$$

证明:

1. 满足条件的 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是存在且唯一的.

2. $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 V 的一组基.

证明. 1. 令 $W_i=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n),(1\le i\le n)$. 则 $\dim W_i=n-1$, 所以 $\dim W_i^{\perp}=1$. 设 $0\neq\gamma_i\in W_i^{\perp}$, 若 $(\alpha_i,\gamma_i)=0$, 则对任意 $\alpha\in V$, 有 $(\gamma_i,\alpha)=0$, 从而 $\gamma_i=0$ 矛盾，所以 $(\gamma_i,\alpha_i)\neq 0$. 现在令 $\beta_i=\dfrac{\gamma_i}{(\alpha_i,\gamma_i)}$, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 满足条件. 再证唯一性. 若 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 也满足条件，则首先 $\eta_i\in W_i^{\perp}$, 因此可设 $\eta_i=k_i\beta_i$, 则 $1=(\alpha_i,\eta_i)=(\alpha_i,k_i\beta_i)=k_i$, 所以 $\beta_i=\eta_i$.

2. 设 $k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{R}$ 满足 $k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=0$, 则有

$$0=\left(\sum_{k=1}^{n}k_i\beta_i,\alpha_i\right)=k_i,\quad 1\le i\le n$$

所以 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关.

■

注 1.167. 对于问题 1.166, 若定义 $\varphi_{\alpha_i}(\beta)=(\alpha_i,\beta),\forall\beta\in V$, 则 $\varphi_{\alpha_i}\in V^*$, 则容易证明 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_i}$ 线性无关构成 V^* 的一组基. 令 $\beta_1,\cdots,\beta_n\in V$ 为 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_i}$ 的对偶基，则 $\varphi_{\alpha_i}(\beta_j)=(\alpha_i,\beta_j)=\delta_{ij}$. 唯一性由对偶基的唯一性 (参考问题 1.178) 可得.

问题 1.168. 设 V 是 n 维欧式空间，$e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个实数，证明：存在唯一的向量 $\alpha\in V$, 使得 $(\alpha,e_i)=c_i,1\le i\le n$.

证明. 设 $\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$, 则 $(\alpha,e_i)=c_i$ 等价于

$$\begin{cases}(e_1,e_1)x_1+(e_1,e_2)x_2+\cdots+(e_1,e_n)x_n=c_1\\(e_2,e_1)x_1+(e_2,e_2)x_2+\cdots+(e_2,e_n)x_n=c_2\\\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\(e_n,e_1)x_1+(e_n,e_2)x_2+\cdots+(e_n,e_n)x_n=c_n\end{cases}$$

由于 $((e_i,e_j))$ 为正定阵，自然是可逆阵，所以方程有唯一解, 于是结论得证. ■

注 1.169. 利用问题 1.166 结论，令 $\alpha=c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_n\beta_n$, 其中 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 满足 $(e_i,\beta_j)=\delta_{ij}$. 则 $(\alpha,e_i)=c_i$.

问题 1.170. 设 U 是欧式空间 V 的子空间，$\eta_1,\cdots,\eta_r$ 是 U 的一组基，γ 是 V 中的非零向量. 设 $G_0=|G(\eta_1,\cdots,\eta_r)|,G=|G(\eta_1,\cdots,\eta_r,\gamma)|$ 分别是向量组的 Gram 矩阵的行列式值. 证明：γ 到子空间 U 的距离为 $d=\sqrt{\dfrac{G}{G_0}}$.

证明. 记 $\gamma = k_1\eta_1 + \cdots + k_r\eta_r + de$, 其中 e 为单位向量满足 $e \perp U$. 则

$$G(\eta_1, \cdots, \eta_r, \gamma) = (\eta_1, \cdots, \eta_r, e)\begin{pmatrix} 1 & & & k_1 \\ & 1 & & k_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & d \end{pmatrix} = (\eta_1, \cdots, \eta_r, e)C$$

则有 $|G(\eta_1, \cdots, \eta_r, \gamma)| = |C^2||G(\eta_1, \cdots, \eta_n, e)| = d^2|G(\eta_1, \cdots, \eta_r)|$ 所以结论得证. ■

问题 1.171. (中南大学 2022) 设 V 是 n 维欧式空间, V_1, V_2 是 V 的两个非平凡子空间, 且 $V = V_1 \oplus V_2$, 设 $\mathcal{A}_i$ 是 V 到 $V_i (i = 1, 2)$ 的正交投影. 证明:$\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1|_{V_2}$ 的任一特征值 λ 都满足 $0 \le \lambda < 1$.

证明. 注意到 $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2|_{V_2} = \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1|_{V_2}$, 因此只需证明 $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ 的特征值满足 $0 \le \lambda < 1$. 首先由 $\mathcal{A}_i$ 是对称变换, 所以 $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ 也是对称变换, 所以 $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ 特征值全为实数. 且有对任意 $\beta \in V, (\mathcal{A}_i\beta, \mathcal{A}_i\beta) \le (\beta, \beta)$, 等号成立当且仅当 $\beta \in \mathrm{Im}\mathcal{A}_i = V_i (i = 1, 2)$. 而又因为 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 从而对任意 $0 \neq \alpha \in V_2$ 有

$$(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\alpha, \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\alpha) < (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\alpha, \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\alpha) \le (\mathcal{A}_2\alpha, \mathcal{A}_2\alpha) \le (\alpha, \alpha)$$

所以对任意 $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_1|_{V_2}$ 特征值 λ, 有 $\lambda < 1$. 此外, 对任意 $\alpha \in V_2$ 有

$$(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\alpha, \alpha) = (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1\alpha, \alpha) = (\mathcal{A}_1\alpha, \alpha) \ge 0$$

所以有 $\lambda \ge 0$, 于是 $0 \le \lambda < 1$. ■

问题 1.172. (西安交通大学 2024) 设 V 是 $n(n > 2)$ 维欧式空间,$\mathcal{A}$ 为 V 上的线性变换, 满足对任意 $\alpha, \beta \in V$, 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则 $(\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)) = 0$. 证明: 存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 和正交变换 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{A} = \lambda_0\mathcal{B}$.

证明. 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为 V 的一组标准正交基, 则对任意 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \boldsymbol{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j \in V$, 由条件有

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathcal{A}(\varepsilon_i), \sum_{j=1}^{n} y_j\mathcal{A}(\varepsilon_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i(\mathcal{A}(\varepsilon_i), \mathcal{A}(\varepsilon_i))$$

因此只需证明对任意 $i \neq j$ 有 $(\mathcal{A}(\varepsilon_i), \mathcal{A}(\varepsilon_i)) = (\mathcal{A}(\varepsilon_j), \mathcal{A}(\varepsilon_j))$. 注意 $(\varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j) = 0$, 所以

$$0 = (\mathcal{A}(\varepsilon_i + \varepsilon_j), \mathcal{A}(\varepsilon_i - \varepsilon_j)) = (\mathcal{A}(\varepsilon_i), \mathcal{A}(\varepsilon_i)) - (\mathcal{A}(\varepsilon_j), \mathcal{A}(\varepsilon_j))$$

所以结论得证.(让 $\lambda_0 = (\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_1))$, 则 $\dfrac{1}{\lambda_0}\mathcal{A}$ 是正交变换) ■

对于问题 1.172, 进一步讨论我们有

问题 1.173. 设 V 是 n 维欧式空间,$\mathcal{A}\in \mathrm{End}(V)$, 则以下条件等价：

1. $\mathcal{A}$ 保持向量的夹角不变.
2. $\mathcal{A}$ 保持向量的正交性不变.
3. 存在正实数 λ, 使得 $\lambda\mathcal{A}$ 为正交变换.
4. 存在正实数 k, 使得 $\mathcal{A}^*\mathcal{A}=kI$.

证明. $1\Rightarrow 2$ 平凡.$2\Rightarrow 3$ 由问题 1.172 可证.$3\Rightarrow 4$ 平凡 $4\Rightarrow 1$. 对任意 $\alpha,\beta\in V$,

$$(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\beta))=(\alpha,\mathcal{A}^*\mathcal{A}(\beta))=k(\alpha,\beta)$$

所以 $\mathcal{A}$ 保持向量的夹角. ■

问题 1.174. 证明：在 $\mathbb{R}^n$(取标准内积) 中存在一个非零线性变换 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathcal{A}(\alpha)\perp\alpha$ 对任意 $\alpha\in V$ 成立, 但是在 $\mathbb{C}^n$(取标准内积) 中这样的非零线性变换不存在.

证明. 任取一个 n 阶实反对称阵 A, 定义 $\mathcal{A}(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$, 则 $(\alpha,\mathcal{A}(\alpha))=\alpha'A\alpha=0$. 若在 $\mathbb{C}^n$ 中存在满足条件的非零线性变换 $\mathcal{A}$, 则任取 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ, 设 α 为对应特征向量, 则 $0=(\mathcal{A}(\alpha),\alpha)=\lambda_0(\alpha,\alpha)$, 从而 $\lambda=0$, 即 $\mathcal{A}$ 是幂零变换. 于是存在 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的表示阵为 $\mathrm{diag}\,\{J(0,k_1),J(0,k_2),\cdots,J(0,k_s)\}$. 若 $\mathcal{A}$ 不可对角化, 则存在 $k_i>1$, 不妨设 $k_1>1$, 即 $\mathcal{A}(e_1)=0,\mathcal{A}(e_2)=e_1$. 从而 $0=(e_2,\mathcal{A}(e_2))=(e_1,e_2)$. 再由 $0=(e_1+e_2,\mathcal{A}(e_1+e_2))=(e_1,e_1)$. 从而 $e_1=0$ 矛盾. 于是 $\mathcal{A}$ 可对角化, 即 $\mathcal{A}$ 是零线性变换, 矛盾. ■

问题 1.175. (东南大学 2024) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为欧式空间 V 的一组基，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 和 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 是 V 的正交向量组，满足 $\alpha_i(1\le i\le n)$ 可以同时被 $\beta_1,\cdots,\beta_i$ 和 $\gamma_1,\cdots,\gamma_i$ 线性表出，则存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得 $\beta_1=k_1\gamma_1,\beta_2=k_2\gamma_2,\cdots,\beta_n=k_n\gamma_n$.

证明. 由条件有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A_1,$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)A_2,$$

其中 A_1,A_2 是可逆的上三角阵，于是 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)A_2A_1^{-1}$. 令 $\beta_i'=\dfrac{1}{||\beta_i||}\beta_i,\gamma_i'=\dfrac{1}{||\gamma_i||}\gamma_i(1\le i\le n)$, 则 $\{\beta_1',\cdots,\beta_n'\}$ 和 $\{\gamma_1',\cdots,\gamma_n'\}$ 是 V 的标准正交基，且有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_n')B_1,\quad(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\gamma_1',\gamma_2',\cdots,\gamma_n')B_2,$$

其中 B_1,B_2 是可逆对角阵. 因此 $(\beta_1',\cdots,\beta_n')=(\gamma_1',\cdots,\gamma_n')B_2A_2A_1^{-1}B_{-1}^{-1}$ 由于上三角阵的可逆阵和上三角阵的乘积仍是上三角阵，所以 $B_2A_2A_1^{-1}B_{-1}^{-1}$ 是上三角阵且是正交阵，于是为对角阵. 从而 $A_2A_1^{-1}$ 是对角阵，即命题得证. ■

问题 1.176. 证明：正交阵任一 k 阶子阵的特征值的模长不会超过 1.

证明. 设 A 为 n 阶正交阵，我们先证明一种特殊情形：$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}, k=1,2,\cdots,n$ 的特征值模长不超过 1. 设 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$，其中 $A_{11}=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}$，由 $A'A=I_n$ 得 $A_{11}'A_{11}+A_{12}'A_{12}=I_k$. 设 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是 A_{11} 的任一特征值,$\alpha\in\mathbb{R}^n$ 为对应的特征向量，上式两边左乘 $\overline{\alpha}'$, 右乘 α 得：

$$\overline{(A_{11}\alpha)}'(A_{11}\alpha)+\overline{(A_{12}\alpha)}'(A_{12}\alpha)=\overline{\alpha}'\alpha.$$

即有 $|\lambda|^2\overline{\alpha}'\alpha+\overline{(A_{12}\alpha)}'(A_{12}\alpha)=\overline{\alpha}'\alpha$. 从而 $(1-|\lambda|^2)\overline{\alpha}'\alpha=\overline{(A_{12}\alpha)}'(A_{12}\alpha)\geq 0$. 从而 $|\lambda|\leq 1$. 对于一般情形子阵，总能通过有限次行列对换使其成为某个矩阵的顺序主子式，注意到第一类初等矩阵是正交阵, 即得到的仍然是正交阵，从而由上述讨论可知结论成立. ■

问题 1.177. 设 A 是三阶正交阵，且 $|A|=1$, 证明：$(1-\mathrm{tr}(A))^2+\sum\limits_{1\leq i<j\leq 3}(a_{ij}-a_{ji})^2=4$.

证明. 注意到

$$2\sum_{1\leq i<j\leq 3}(a_{ij}-a_{ji})^2=\mathrm{tr}[(A-A^T)(A^T-A)]=6-2\mathrm{tr}(A^2).$$

注意 $\mathrm{tr}(A),\mathrm{tr}(A^2)$ 在正交相似变换 $A\mapsto Q^TAQ$ 下不会发生改变，因此不妨一开始便设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 为 A 的正交相似标准型. 则有

$$(1-\mathrm{tr}(A))^2+3-\mathrm{tr}(A^2)=4\cos^2\theta+3-(1+2\cos 2\theta)=4.$$

■

1.7 线性函数

问题 1.178. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的一组基，定义线性映射 $\varphi: V^*\to\mathbb{F}^{1\times n}$

$$\varphi(f)=(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f(\alpha_n)).$$

则 φ 是 V^* 到 $\mathbb{F}^{1\times n}$ 的线性同构. 从而有 $\dim V^*=\dim V$.

证明. 单射. 只需证明 Kerφ=0. 这个比较显然，若 $(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f(\alpha_n))=0$, 则对任意的 $\alpha\in V, f(\alpha)=0$. 从而 $f=0$.(这里指零线性映射). 满射. 对任意的 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{F}^{1\times n}$, 定义 $f(\alpha_i)=a_i, i=1,2,\cdots,n$. 显然 $f\in V^*$. ■

注 1.179. 进一步我们可以求出 V^* 的一组基：注意到

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$$

是 $\mathbb{F}^{1\times n}$ 的一组基. 则 $f_i=\varphi^{-1}(\varepsilon_i),i=1,2,\cdots,n$ 是 V^* 的一组基. 即 $f_i(\alpha_j)=\delta_{ij},1\le i,j\le n$, 称为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的对偶基.

问题 1.180. 设 f 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性函数, 证明

1. 若对任意 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 有 $f(AB)=f(BA)$, 则存在 $c\in\mathbb{F}$ 使得 $f(A)=ctrA$.
2. 若对任意 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 其中 B 可逆，有 $f(B^{-1}AB)=f(A)$, 则存在 $c\in\mathbb{F}$ 使得 $f(A)=c\mathrm{tr}A$.

证明. 1. 设 E_{ij} 为基础矩阵，即其第 (i,j) 元为 1，其余元素全为零. 所以根据条件我们有

$$f(E_{ij}E_{kl})=f(E_{kl}E_{ij}),1\le i,j,k,l\le n.$$

因此当 $j=k$ 且 $l\neq i$ 时，$f(E_{il})=f(O)=0$. 当 $j=k,i=l$ 时，有 $f(E_{ii})=f(E_{jj})$. 所以对任意的 $A=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 我们有

$$f(A)=f\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}f(E_{ij})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}f(E_{ii})=f(E_{ii})\mathrm{tr}A.$$

令 $c=f(E_{ii})$, 则结论得证.

2. 注意 $B^{-1}(BA)B=AB$, 所以 $f(AB)=f(BA)(|B|\neq 0)$. 因此有

$$f((E_{ij}+E)E_{ji})=f(E_{ji}(E+E_{ij})),$$

所以 $f(E_{ii})=f(E_{jj})$. 另一方面，若 $i\neq j$, 则由

$$f(E_{i1}(E_{1j}+E))=f((E_{1j}+E)E_{i1})$$

所以 $f(E_{ij})=0$. 于是对任意 $A=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 我们有

$$f(A)=f\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}f(E_{ij})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}f(E_{ii})=f(E_{ii})\mathrm{tr}A.$$

∎

问题 1.181. 设 $\dim V/\mathbb{F}=n, V^*$ 为其对偶空间. 对 $f\in V^*,\alpha\in V$, 定义 V 上的线性变换

$$\varphi_{f,\alpha}(\beta)=f(\beta)\alpha.\forall\beta\in V.$$

1. 证明：$\varphi_{f,\alpha}\in\mathrm{End}(V)$, 将其记为 $f\otimes\alpha$.
2. 线性变换 $f\otimes\alpha$ 的秩为 0 或 1, 且 $f\otimes\alpha=0$ 当且仅当 $f=0$ 或者 $\alpha=0$.
3. 对任意的 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$, 存在 $f_i\in V^*,\alpha_i\in V, i=1,2,\cdots,r$, 使得 $\mathscr{A}=\sum\limits_{i=1}^{r}f_i\otimes\alpha_i$.
4. 试求 3 中 r 的最小值.
5. 设 $f_1,\cdots,f_n\in V^*$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$ 的对偶基，则

$$f_1\otimes\alpha_1+\cdots+f_n\otimes\alpha_n=id.$$

证明. 1. 略.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基. 记 α 在这组基下的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 则

$$(f\otimes\alpha(\alpha_1),f\otimes\alpha(\alpha_2),\cdots f\otimes\alpha(\alpha_n))=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}f(\alpha_1)a_1 & f(\alpha_2)a_1 & \cdots & f(\alpha_n)a_1\\ f(\alpha_1)a_2 & f(\alpha_2)a_2 & \cdots & f(\alpha_n)a_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f(\alpha_1)a_n & f(\alpha_2)a_n & \cdots & f(\alpha_n)a_n\end{pmatrix}.$$

将上述表示阵记为 A. 注意到 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f(\alpha_n))=X\beta'$. 从而 $\mathrm{rank}A\le 1$. 当 $X=0$ 或者 $\beta=0$ 时，即 $\alpha=0$ 或 $f=0$, 有 $\mathrm{rank}A=0$, 即 $f\otimes\alpha=0$.

3. 取 V 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，对任意的 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$, 设 $\mathscr{A}$ 在这组基下的表示阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 取 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的对偶基. 令 $\alpha_i=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}$. 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\otimes\alpha_i$ 在这组基下的表示阵为 A. 从而 $\mathscr{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\otimes\alpha$.

4. 最小值就是 n. 最大值为 n^2.

5. 注意到 $f_i \otimes \alpha_i$ 在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的表示阵为基础矩阵 E_{ii}, 所以 $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes \alpha_i$ 在这组基下的表示阵为单位阵 I_n, 所以

$$f_1 \otimes \alpha_1 + f_2 \otimes \alpha_2 + \cdots + f_n \otimes \alpha_n = \mathrm{id} \text{ 为恒等变换.}$$

■

引理 1.182. $f_1, \cdots, f_n$ 为 V^* 的一组基当且仅当 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i = \{0\}$.

证明. 必要性. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 $f_1, \cdots, f_n$ 的对偶基，即 $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. 于是对任意 $0 \neq \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \in V$, 有 $k_1, \cdots, k_n$ 不全为零，不妨设 $k_i \neq 0$, 则 $f_i(\alpha) = k_i f(\alpha_i) = k_i \neq 0$, 所以 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i = \{0\}$. 充分性. 反证：若 $f_1, \cdots, f_n$ 线性相关，不妨设 $f_1, \cdots, f_r (r < n)$ 为 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性无关向量组，将其扩张为 V^* 的一组基 $f_1, \cdots, f_r, g_1, \cdots, g_{n-r}$. 记 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 为 $f_1, \cdots, g_n$ 的对偶基，于是 $f_i(\beta_n) = 0 (1 \leq i \leq n)$, 这与 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i = \{0\}$ 矛盾. ■

问题 1.183. (四川大学 2021) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，V^* 为 V 的对偶空间，$\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换，对任意 $g \in V^*$, 定义 $B(g) = g \circ \mathscr{A}$, 则 B 是 V^* 上的线性变换，证明：

1. B 是自同构当且仅当 $\mathscr{A}$ 为自同构.

2. 设 $f \in V^*$, 证明：$f, B(f), B^2(f), \cdots, B^{n-1}(f)$ 为 V 的基当且仅当 $\mathscr{A}$ 的任意非零不变子空间都不是 $\mathrm{Ker} f$ 的子空间.

证明.

1. 注意 $g \in \mathrm{Ker} B \Leftrightarrow \mathrm{Im}\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Ker} g$. 所以 B 是自同构，当且仅当 $\mathrm{Ker} B = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\mathscr{A} = V \Leftrightarrow \mathscr{A}$ 是自同构.(若 $\dim \mathrm{Im}\mathscr{A} < n$, 可以将 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 扩为 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 此时容易证明 $\mathscr{A}\alpha_{r+1}, \cdots, \mathscr{A}\alpha_n$ 线性无关，再将其扩为 V 的一组基 $\beta_1, \cdots, \beta_r, \mathscr{A}\alpha_{r+1}, \cdots, \mathscr{A}\alpha_n$. 此时定义 $g: g(\beta_i) = 1 (1 \leq i \leq r); g(\mathscr{A}\alpha_j) = 0 (r+1 \leq j \leq n)$, 则 $g \neq 0$ 且 $g \in \mathrm{Ker} B$, 因此 $\mathrm{Ker} B \neq \{0\}$)

2. 借助引理 1.182 来证明本题结论. 必要性. 若 $\mathscr{A}$ 不变子空间 $W = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \subseteq \mathrm{Ker} f (r \geq 1)$, 则有 $f(A^k\alpha_1) = 0 (0 \leq k \leq n-1)$, 即 $B^k(f)(\alpha_1) = 0$, 矛盾. 充分性. 对任意 $0 \neq \alpha \in V$, 令 $W = L(\alpha, \mathscr{A}\alpha, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}\alpha)$ 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，所以 $W \not\subseteq \mathrm{Ker} f$, 即存在 $j \in [0, n-1]$ 使得 $f(\mathscr{A}^j\alpha) = B^j(f)\alpha \neq 0 (B^0 = f)$, 所以 $f, B(f), \cdots, B^{n-1}(f)$ 是 V^* 的一组基.

■

问题 1.184. (北京大学 2012) 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, 设 $g_1, g_2 \in V^*$, 定义

$$f(\alpha, \beta) = g_1(\alpha)g_2(\beta), \quad \forall a, \beta \in V.$$

证明：若 $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的对称双线性函数, 则存在 $0 \neq k \in \mathbb{K}, h \in V^*$ 使得

$$f(\alpha, \beta) = kh(\alpha)h(\beta).$$

证明. 若 $g_1=0$ 或者 $g_2=0$, 则 $f=0$, 此时让 $k=1,h=0$ 即可. 下面不妨设 $g_1\neq 0,g_2\neq 0$. 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 V 的一组基. 则由条件有

$$g_1(\alpha_i)g_2(\alpha_j)=g_1(\alpha_j)g_2(\alpha_i),\quad 1\leq i,j\leq n.$$

- 若 $g_1(\alpha_i)=0$, 则有 $0=g_1(\alpha_j)g_2(\alpha_i)(1\leq j\leq n)$. 由于 $g_1\neq 0$, 所以 $g_1(\alpha_j)$ 不全为零, 于是 $g_2(\alpha_i)=0$. 同理, 若 $g_2(\alpha_j)=0$, 则 $g_1(\alpha_j)=0$.
- 若 $g_1(\alpha_i),g_2(\alpha_j)$ 均非零，则有

$$0\neq k=\frac{g_1(\alpha_i)}{g_2(\alpha_i)}=\frac{g_1(\alpha_j)}{g_2(\alpha_j)}.$$

所以 $g_1=kg_2$, 让 $h=g_2$ 即可. ■

问题 1.185. (南开大学 2008) 设 $f(x,y)$ 是域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的非退化双线性函数. 证明: 对任意 $g\in V^*$, 存在唯一的 $\alpha\in V$ 使得 $g(\beta)=f(\alpha,\beta),\forall\beta\in V$.

证明. 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组基, 记 $A=(f(\alpha_i,\alpha_j))$ 为 f 在这组基下的度量阵. 由 f 非退化, 所以 A 是可逆阵. 令 $\boldsymbol{y}=(g(\alpha_1),g(\alpha_2),\cdots,g(\alpha_n))'$, 则线性方程组 $A'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 有唯一解，记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)'$. 令 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^n x_i\alpha_i$, 则有

$$f(\alpha,\alpha_j)=\sum_{i=1}^n x_if(\alpha_i,\alpha_j)=g(\alpha_j),\quad 1\leq j\leq n.$$

所以 $g(\beta)=f(\alpha,\beta)$. 由于方程组 $A'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 仅有唯一解, 所以 α 是唯一的. ■

注 1.186. 关于问题 1.185, 除了上述构造性证明, 还可以换个角度来看. 对任意固定 $\alpha\in V$, 定义 $f_\alpha(\beta)=f(\alpha,\beta),\forall\beta\in V$, 则 $f_\alpha\in V^*$. 因此可以定义映射 $\varphi:V\to V^*,\alpha\mapsto f_\alpha$. 显然 φ 是线性映射. 且由 f 非退化, 有 $\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$, 即 φ 是同构映射. 于是，对任意 $g\in V^*$, 存在唯一的 $\alpha\in V$ 使得 $\varphi(\alpha)=f_\alpha=g$, 即对任意 $\beta\in V$, 有 $g(\beta)=f_\alpha(\beta)=f(\alpha,\beta)$.

问题 1.187. 设 $\dim V/\mathbb{F}=n,\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{End}(V)$ 的子空间，$\mathfrak{g}$ 中元素都可对角化且两两可交换. 对任意 $\alpha\in\mathfrak{g}^*$, 令 $V_\alpha=\{v\in V\mid \mathscr{A}(v)=\alpha(\mathscr{A})v,\forall\mathscr{A}\in\mathfrak{g}\}$. 令 $\Delta=\{\alpha\in\mathfrak{g}^*\mid V_\alpha\neq\{0\}\}$. 证明:

1. Δ 是非空有限集.
2. $V=\bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta}V_\alpha$.

证明. 1. 设 $\{\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_r\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 设 V_λ 是 $\mathscr{A}_1$ 关于特征值 λ 的特征子空间. 则由 $\mathscr{A}_i\mathscr{A}_j=\mathscr{A}_j\mathscr{A}_i(1\leq i,j\leq n)$, 有 V_λ 是 $\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_r$ 的不变子空间，因此可以考虑 $\mathscr{A}_i|_{V_\lambda}$,

且仍有 $\mathscr{A}|_{V_\lambda}\mathscr{A}_j|_{V_\lambda} = \mathscr{A}_j|_{V_\lambda}\mathscr{A}_i|_{V_\lambda}$, 所以利用数学归纳 (对 r 的个数进行归纳) 容易证出 V_λ 中有 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_r$ 公共的特征向量 β, 进一步可知 β 是 $\mathfrak{g}$ 中所有元素的特征向量. 现在定义：

$$\beta^* : \mathfrak{g} \to \mathbb{F}, \quad \beta^*(\mathscr{A}) = \beta_{\mathscr{A}}, \forall \mathscr{A} \in \mathfrak{g}, \quad \text{其中}\beta_{\mathscr{A}}\text{满足}\mathscr{A}(\beta) = \beta_{\mathscr{A}}\beta.$$

于是容易验证 $\beta^* \in \mathfrak{g}^*$, 且 $V_{\beta^*} \neq \{0\}$, 因此 $\beta \in V_{\beta^*}$, 因此 $\beta^* \in \Delta$, 即 Δ 是非空集合. 现在任取 Δ 中两个不同元素 α_1, α_2. 则存在 $\mathscr{A}_i (1 \leq i \leq r)$ 使得 $\alpha_1(\mathscr{A}_i) \neq \alpha_2(\mathscr{A}_i)$. 于是对任意 $v \in V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$, 有 $\mathscr{A}_i(v) = \alpha_1(\mathscr{A}_i)v, \mathscr{A}_i(v) = \alpha_2(\mathscr{A}_i)v$, 从而只能是 $v = 0$, 即 $V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2}$. 由于 $\dim V = n$, 所以 Δ 中至多有 n 个不同元素，因此 Δ 为有限集合.

2. 结合 1 只需证明 V 中有 $\mathfrak{g}$ 的 n 个线性无关的公共特征向量. 只需证明 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_r$ 可同时对角化即可. 当 $r = 1$ 时，结论平凡. 现在考虑 $r \geq 2$. 我们对线性空间 V 的维数进行归纳. 当维数为 1 时，结论显然成立. 假设维数小于 n 时结论成立. 由于 $r \geq 2$, 此时 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_r$ 不全为数乘变换, 不妨设 $\mathscr{A}_1$ 不是数乘变换，设

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

为 $\mathscr{A}_1$ 的特征子空间直和分解,其中 $s \geq 2$, 所以 $\dim V_{\lambda_i} < n$. 且由 1 可知,V_{λ_k} 是 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_r$ 的不变子空间，因此可以考虑 $\mathscr{A}_i|_{V_{\lambda_k}}$, 且仍有 $\mathscr{A}|_{V_\lambda}\mathscr{A}_j|_{V_{\lambda_k}} = \mathscr{A}_j|_{V_{\lambda_k}}\mathscr{A}_i|_{V_{\lambda_k}} (1 \leq k \leq s)$. 于是由归纳假设 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_r$ 限制在 V_{λ_k} 上可同时对角化, 即存在 V_{λ_k} 的一组基,使得 $\mathscr{A}_1|_{V_{\lambda_k}}, \cdots, \mathscr{A}_r|_{V_{\lambda_k}}$ 在这组基下的表示阵为对角阵. 将上述 V_{λ_k} 的一组基拼成 V 的一组基，不妨设为 $\beta_1, \cdots, \beta_n$. 因此 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_r$ 在 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 下的表示阵为对角阵. 即 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 中所有元素的公共特征向量. 仿照 1 可以定义 $\beta_1^*, \cdots, \beta_n^* \in \mathfrak{g}^*$ 使得 $\beta_i^* \in \Delta$, 因此有 $V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} V_\alpha$.

■

♯♯♯ 问题 1.187 基本涵盖了可交换诱导的性质, 所以后面不再对可交换诱导的性质进行总结.

1.8 双线性函数

问题 1.188. 设 f 是 V 上的双线性函数，则下列条件等价：

1. 正交关系是对称的，即 $f(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta, \alpha) = 0$.
2. 对任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, 有
$$f(\alpha, \beta)f(\gamma, \alpha) = f(\beta, \alpha)f(\alpha, \gamma).$$
3. 对任意 $\alpha, \beta \in V, f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ 或者 $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$.
4. f 是对称的或者反对称的.

证明. .

- $1 \Rightarrow 2$. 令 $\omega = f(\alpha,\beta)\gamma - f(\alpha,\gamma)\beta$, 则

$$f(\alpha,\omega) = f(\alpha,\gamma)f(\alpha,\beta) - f(\alpha,\gamma)f(\alpha,\beta) = 0.$$

  因此 $0 = f(\alpha,\omega) = f(\omega,\alpha) = f(\alpha,\beta)f(\gamma,\alpha) - f(\alpha,\gamma)f(\beta,\alpha)$, 所以结论得证.

- $2 \Rightarrow 3$. 在 2 中令 $\gamma = \alpha$, 得到对任意 $\alpha,\beta \in V$ 有

$$f(\alpha,\beta)f(\alpha,\alpha) = f(\beta,\alpha)f(\alpha,\alpha),$$

  于是有 $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$ 或者 $f(\alpha,\alpha) = 0$. 若对任意 $\alpha \in V$, 有 $f(\alpha,\alpha) = 0$, 即 f 是反对称的，则结论显然成立. 否则，存在 $u \in V$ 使得 $f(u,u) \neq 0$, 此时，若结论不成立，则存在 $\alpha,\beta \in V$ 使得 $f(\alpha,\beta) \neq \pm f(\beta,\alpha)$, 此时有 $f(u,\alpha) = f(\alpha,u), f(u,\beta) = f(\beta,u), f(\alpha,\alpha) = f(\beta,\beta) = 0$. 再由 2 有

$$f(\alpha,\beta)f(u,\alpha) = f(\alpha,u)f(\beta,\alpha),$$

  从而结合 $f(\alpha,\beta) \neq \pm f(\beta,\alpha)$ 一定有 $f(u,\alpha) = f(\alpha,u) = 0$. 同理有 $f(\beta,u) = f(u,\beta) = 0$. 因此

$$f(\alpha,\beta+u) = f(\alpha,\beta) \neq f(\beta,\alpha) = f(\beta+u,\alpha)$$

  于是一定有 $f(\beta+u,\beta+u) = 0$. 但是 $f(\beta+u,\beta+u) = f(u,u) \neq 0$, 矛盾，所以原命题正确.

- $3 \Rightarrow 4$. 为了证明该结论，我们借助定理 2.3 即线性空间不能写成其有限个真子空间的并这一结论. 对任意固定 $\alpha \in V$

$$W_\alpha = \{\beta \in V \mid f(\alpha,\beta) = -f(\beta,\alpha)\}, \quad U_\alpha = \{\beta \in V \mid f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)\}$$

  则对任意 $\beta,\gamma \in U_\alpha$ 和 $k,l \in \mathbb{F}$ 有

$$f(\alpha,k\beta+l\gamma) = kf(\alpha,\beta) + lf(\alpha,\gamma) = kf(\beta,\alpha) + lf(\gamma,\alpha) = f(k\beta+l\gamma,\alpha),$$

  即 $k\beta + l\gamma \in U_\alpha$, 于是 U_α 是 V 的子空间，同理可证 W_α 也是 V 的子空间，且由条件有 $V = W_\alpha \cup U_\alpha$, 于是 $W_\alpha = V$ 或者 $U_\alpha = V$. 再令

$$V_W = \{\alpha \in V \mid W_\alpha = V\}, \quad V_U = \{\alpha \in V \mid U_\alpha = V\}$$

  同理可证 V_W, V_U 都是 V 的子空间，且 $V = V_U \cup V_W$, 因此 $V = V_W$ 或者 $V = V_U$. 若 $V = V_W$, 则 f 是反对称的. 若 $V = V_U$, 则 f 是对称的，因此结论得证.

■

注 1.189. 事实上对于问题 1.188, 在 $2 \Rightarrow 3$ 的证明过程中, 已经将 4 也给证出, 或者说由于 4 条件比

3 强, 我们直接由 2 证 4. 如若 4 不成立, 则存在 $u, \alpha, \beta \in V$ 同时满足 $f(u,u) \neq 0, f(\alpha,\beta) \neq f(\beta,\alpha)$, 这就是上面所讨论的.

问题 1.190. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，以 $\mathbb{B}$ 表示 V 上所有双线性函数的集合，以 $\mathbb{S}, \mathbb{A}$ 分别表示 V 上上对称和反对称双线性函数的集合. 对于 $f, g \in \mathbb{B}, k \in \mathbb{F}, \alpha, \beta \in V$, 定义 $\mathbb{B}$ 中的加法和数乘如下：

$$(f+g)(\alpha,\beta) = f(\alpha,\beta) + g(\alpha,\beta).$$

$$(kf)(\alpha,\beta) = kf(\alpha,\beta).$$

1. 证明：$\mathbb{B}$ 对上述加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的 n^2 维线性空间;$\mathbb{S}, \mathbb{A}$ 分别为其子空间，且 $\mathbb{B} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{A}$.
2. 设 $g, h \in V^*$, 记 V 上的双线性函数 $g(\alpha)h(\beta)$ 为 $g \otimes h$, 称为 g, h 的张量积. 记 $V^* \otimes V^*$ 为 $\mathbb{B}$ 中形如 $g \otimes h$ 的双线性函数张成的子空间，证明：$V^* \otimes V^* = \mathbb{B}$, 即对任意 V 上的双线性函数 f, 都存在 V 上的线性函数 $g_i, h_i, i = 1, 2, \cdots, r$ 使得
$$f(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{r} g_i(\alpha) \otimes h_i(\beta).$$
3. 记 S^2V^*(或 $\wedge^2 V^*$) 为 $\mathbb{B}$ 中由形如 $g \otimes h + h \otimes g$(或 $g \otimes h - h \otimes g$) 的双线性函数生成的子空间，证明：$S^2V^* = \mathbb{S}$(或 $\wedge^2 V^* = \mathbb{A}$).

证明.

1. 只证明 $\mathbb{B} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{A}$. 对任意的 $f(\alpha,\beta) \in \mathbb{B}$, 其可以写成
$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(f(\alpha,\beta) + f(\beta,\alpha)) + \frac{1}{2}(f(\alpha,\beta) - f(\beta,\alpha))$$
从而 $\mathbb{B} = \mathbb{S} + \mathbb{A}$, 证明 $\mathbb{S} \oplus \mathbb{A}$ 是容易的.
2. 显然 $V^* \otimes V^* \subseteq \mathbb{B}$, 只需证明 $\dim(V^* \otimes V^*) = n^2$ 即可. 设 $g_1, \cdots, g_n$ 是 V^* 的一组基，下证 $g_i \otimes g_j, (1 \le i., j \le n)$ 线性无关. 记 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 $g_1, \cdots, g_n$ 的对偶基. 从而 $g_i \otimes g_j(\alpha_k, \alpha_l) = g_i(\alpha_k) g_j(\alpha_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$. 设 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} k_{ij} g_i \otimes g_j = 0$.(这是一个零双线性函数) 将其第一元和第二元分别取 $\alpha_i, \alpha_j, 1 \le i, j \le n$ 即
$$0 = \sum_{i,j}^{n} g_i \otimes g_j(\alpha_i, \alpha_j) = k_{ij}$$
从而 $k_{ij} = 0$. 因此其线性无关. 从而 $\dim V^* \otimes V^* = n^2$.
3. 容易发现 $S^2V^* \subseteq \mathbb{S}, \wedge^2 V^* \subseteq \mathbb{A}$, 和 1 相同的手段很容易看出 $V^* \otimes V^* = S^2V^* \oplus \wedge^2 V^*$. 从而
$$\mathbb{B} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{A} = V^* \otimes V^* = S^2V^* \oplus \wedge^2 V^*.$$
从而容易推出 $S^2V^* = \mathbb{S}, \wedge^2 V^* = \mathbb{A}$.

■

对于张量积的更多介绍, 参考 2.19 节.

问题 1.191. 证明如下问题:

1. 设 $B(X,Y)$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的对称双线性函数，对任意的 $X,Y,Z\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $B(XY,Z)=B(X,YZ)$, 证明：存在 $c\in\mathbb{F}$ 使得 $B(X,Y)=c\mathrm{tr}(XY)$.
2. 设 $B(X,Y)$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的反对称双线性函数，对任意的 $X,Y,Z\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $B(XY,Z)=B(X,YZ)$, 证明：$B(X,Y)\equiv 0$.

证明. 1. 设 $E_{ij},1\le i,j\le n$ 为基础矩阵，从而构成 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的一组基. 从而我们有

$$B(E_{ij}E_{kl},E_{tz})=B(E_{ij},E_{kl}E_{tz}),$$

于是当 $l\neq t,j=k$ 时有 $B(E_{il},E_{tz})=B(E_{tz},E_{il})=0$. 这意味着对于 $B(E_{ij},E_{kl})$, 当 $j\neq k$, 或者 $i\neq l$ 时 $B(E_{ij},E_{kl})=0$. 当 $l=t,j=k$ 时，我们有 $B(E_{il},E_{lz})=B(E_{ij},E_{jz})$. 综上所述，我们有

$$B(E_{ij},E_{kl})=\begin{cases}0, j\neq k\text{或者}i\neq l.\\ c, j=k, i=l\end{cases},$$

其中 $c=B(E_{ij},E_{ji})\in\mathbb{F},1\le i,j\le n$. 从而对任意的 $X=(x_{ij}),Y=(y_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 我们有

$$B(X,Y)=B\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}E_{ij},\sum_{k,l=1}^n y_{kl}E_{kl}\right)=\sum_{i,j=1}^n\sum_{k,l=1}^n x_{ij}y_{kl}B(E_{ij},E_{kl})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n cx_{ij}y_{ji}=c\mathrm{tr}(XY).$$

从而 $B(X,Y)=c\mathrm{tr}(XY)$.

2. 和 1 完全相同的手段，只不过由 $B(X,Y)$ 的反对称性，很容易推出 $c=0$. 所以 $B(X,Y)\equiv 0$.

∎

第 2 章

高等代数典型问题与知识拓展

2.1 Lagrange 插值公式

问题 2.1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 且当 $i \neq j$ 时,$a_i \neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$.

证明. 下面从不同角度给出证明 (先后顺序按照高等代数学习的大致顺序):

1. 令
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$
则 $f(a_i) = b_i$. 若 $g(x)$ 也满足条件, 则 $g(a_i) - f(a_i) = 0 (1 \leq i \leq n)$, 但是 $\deg(g(x) - f(x)) \leq n-1$, 从而 $g(x) = f(x)$.

2. 利用待定系数法. 设 $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$, 由 $f(a_i) = b_i$ 有
$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{n-1} a_1^{n-1} = b_1 \\ c_0 + c_1 a_2 + \cdots + c_{n-1} a_2^{n-1} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1 a_n + \cdots + c_{n-1} a_n^{n-1} = b_n \end{cases} \qquad (\diamondsuit)$$
将 $(\diamondsuit)$ 看成关于 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 的线性方程组, 其系数矩阵的行列式为
$$d = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$$
所以根据 Cramer 法则，方程有唯一解.

3. 考虑 $\mathbb{F}[x]_n$ 为次数小于 n 的域 $\mathbb{F}$ 上多项式全体, 则 $\dim \mathbb{F}[x]_n = n$. 令

$$F_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

设 $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i F_i(x) = 0$, 则依次代入 $a_1, \cdots, a_n$ 且由 $0 = F_i(a_j) = \delta_{ij}$ 可得 $b_i = 0$. 所以 $F_1(x), \cdots, F_n(x)$ 线性无关，构成 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基. 所以对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$, 存在唯一的 $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$ 使得 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i F_i(x)$. 且 $f(a_i) = b_i$. 这给出了 Lagrange 插值公式的另一种存在唯一性证明.

4. 定义线性映射 $\mathcal{A} : \mathbb{F}[x]_n \to \mathbb{F}^{1\times n}$ 为

$$\mathcal{A}(f(x)) = (f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n))$$

$\mathcal{A}$ 显然是单射, 且由于 $\dim \mathbb{F}[x]_n = \dim \mathbb{F}^{1\times n} = n$, 所以 $\mathcal{A}$ 是双射. 于是对任意 $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 存在唯一 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$, 满足 $\mathcal{A}(f(x)) = (b_1, \cdots, b_n)$, 即 $f(a_i) = b_i$.

5. 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n, a \in \mathbb{F}$, 定义

$$\upsilon_a(f(x)) = f(a),$$

则 υ_a 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的线性函数. 由 3 可知 $F_1(x), \cdots, F_n(x)$ 为 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基，且由于 $F_i(a_j) = \delta_{ij}$, 所以 $\upsilon_{a_1}, \cdots, \upsilon_{a_n}$ 为 $F_1(x), \cdots, F_n(x)$ 的对偶基. 由对偶基的唯一性 (参考问题1.178) 可证 Lagrange 插值公式的唯一性.

■

2.2 中国剩余定理

定理 2.2. 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x) \in \mathbb{F}[x]$ 两两互素,$r_1(x), \cdots, r_m(x) \in \mathbb{F}[x]$, 则存在 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 满足同余方程

$$\begin{cases} f(x) \equiv r_1(x) (\bmod f_1(x)) \\ f(x) \equiv r_2(x) (\bmod f_2(x)) \\ \qquad \vdots \\ f(x) \equiv r_m(x) (\bmod f_m(x)) \end{cases}$$

证明. 我们使用的是构造性证明，为此考虑从特殊到一般情形

- 若 $r_1(x) = r_2(x) = \cdots = r_m(x) = 0$, 则令 $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{m} f_i(x)$.

- 若 $r_k(x)=1$, 当 $j\neq k$ 时，$r_k(x)=0$, 令 $F_k(x)=\prod\limits_{j\neq k} f_j(x)$, 则 $F_k(x)$ 与 $f_k(x)$ 互素，因此存在 $u_k(x),v_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使得
$$F_k(x)u_k(x)+f_k(x)v_k(x)=1,$$
令 $f(x)=F_k(x)u_k(x)$ 即可.
- 对于一般情形，只需令
$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}u_k(x)r_k(x)F_k(x),$$

■

我们将在后面看到定理2.2的应用.

2.3 线性空间不能被其有限个子空间并覆盖

定理 2.3. 设 $V_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为线性空间 V 的真子空间, 证明：存在 $\alpha\in V$, 使得 $\alpha\notin\bigcup\limits_{i=1}^{s}V_i$.

证明. 不妨设 $\dim V=n$, 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基, 令
$$S=\left\{\beta_k=\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k^{n-1}\alpha_n|k\in\mathbb{N}^+\right\}$$
则
$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\1&2^{n-1}&3^{n-1}&\cdots&n^{n-1}\end{pmatrix}$$
所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关, 即 S 中任意 n 个不同的向量均构成 V 的一组基. 由于 V_i 最多只包含 $n-1$ 个 S 中的向量, 而 S 中有无限个向量, 从而一定存在 $\alpha\in V$, 使得 $\alpha\notin\bigcup\limits_{i=1}^{s}V_i$. ■

注 2.4. 定理 2.3 可尝试利用数学归纳法，并将结论推广为无限维线性空间的情形.

下面是定理 2.3 的几个应用

问题 2.5. 证明如下问题:

1. 设 $V_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为线性子空间 V 的真子空间, 则存在 V 的一组基, 使得其中每个向量都不在 $\bigcup\limits_{i=1}^{s}V_i$.
2. 设 $W_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是线性空间 V 的子空间, 且 $W_0\subseteq W_1\bigcup W_2\bigcup\cdots\bigcup W_s$, 则必存在 $i\in\{1,2,\cdots,s\}$ 使得 $W_0\subseteq W_i$.

3. 设 $\mathscr{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为线性空间 V 上的两两不同的非零线性变换, 则存在 $\alpha\in V$ 使得 $\mathscr{A}_1(\alpha),\mathscr{A}_2(\alpha),\cdots,\mathscr{A}_s(\alpha)$ 两两不同.

4. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 对任意的非零向量 $\alpha\in V$, 记 $m_\alpha(x)$ 为使得 $m_\alpha(\mathscr{A})\alpha=0$ 成立的次数最低的首一多项式, 称为 $\mathscr{A}$ 关于 α 的最小多项式, 证明：存在 $\alpha\in V$, 使得 $m_\alpha(x)=m_{\mathscr{A}}(x)$, 其中 $m_{\mathscr{A}}(x)$ 是 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

5. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 则 φ 的特征多项式与最小多项式相同当且仅当存在 $\alpha\in V$, 使得 $\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}^2(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)$ 构成 V 的一组基, 称为循环基.

证明. 1. 由前面讨论, 存在 $\alpha_1\notin\bigcup\limits_{i=1}^{s}V_1$. 存在 $\alpha_2\notin\bigcup\limits_{i=1}^{s}V_i\cup L(\alpha_1)$. 存在 $\alpha_3\notin\bigcup\limits_{i=1}^{s}V_i\cup L(\alpha_1,\alpha_2)$. 这个过程可以一直做下去, 从而可以得到 V 的一组基, 且满足上述条件.

2. 注意到

$$W_0=W_0\cap(W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_s)=(W_0\cap W_1)\cup(W_0\cap W_2)\cup\cdots(W_0\cap W_s)$$

. 即线性空间 W_0 可以写成有限个子空间 $W_0\cap W_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的并. 则必存在某个 W_i 使得 $W_0=W_0\cap W_i$, 即 $W_0\subseteq W_i$.

3. 记 $W_{ij}=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}_i-\mathscr{A}_j),1\le i<j\le s$. 从而 W_{ij} 是 V 的真子空间. 从而存在 $\alpha\in V$, 使得 $\alpha\notin\bigcup\limits_{i=1}^{s}W_{ij}$, 即 $\mathscr{A}_1(\alpha),\mathscr{A}_2(\alpha),\cdots,\mathscr{A}_s(\alpha)$ 两两不同.

4. 显然, 对任意的非零向量 $\alpha\in V$,$m_\alpha(x)|m_{\mathscr{A}}(x)$. 由于 $m_{\mathscr{A}}(x)$ 只有有限个因式, 因此当 α 取遍 V 时, 只有有限个 $m_{\alpha_1}(x),m_{\alpha_2}(x),\cdots,m_{\alpha_s}(x)$. 令

$$V_i=\{\alpha\in V|m_{\alpha_i}(\mathscr{A})\alpha=0\},$$

则 $V=\bigcup\limits_{i=1}^{s}V_i$. 于是存在某个 V_i, 使得 $V=V_i$, 即 $m_{\alpha_i}(x)=m_{\mathscr{A}}(x)$.

5. 必要性. 记 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为 $f(x)$, 由 4 存在 $\alpha\in V$, 使得 $m_\alpha(x)=m_{\mathscr{A}}(x)=f(x)$. 从而 $\deg(m_\alpha(x))=n$. 若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$$k_1\alpha+k_2\mathscr{A}(\alpha)+\cdots+k_n\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)=0$$

从而 α 适合非零多项式 $g(x)=k_nx^{n-1}+\cdots+k_2x+k_1$, 次数小于等于 $n-1$, 这与 α 关于 $\mathscr{A}$ 最小多项式的次数为 n 矛盾. 所以其线性无关, 可以构成 V 的一组基.
充分性. 若 $\deg(m_{\mathscr{A}}(x))\le n-1$, 将 $x=\mathscr{A}$ 代入, 两边作用 α 得 $0=m_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})\alpha$, 由 $\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}^2(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)$ 的线性无关性可得 $m_{\mathscr{A}}(x)=0$, 这与 $m_{\mathscr{A}(x)}$ 的取法矛盾. 因此 $\deg(m_{\mathscr{A}}(x))=n$, 即其最小多项式等于其特征多项式.

■

问题 2.6. (2024 复旦大学) 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,V_1, V_2 是 V 的两个 m 维线性子空间, 其中 $m < n$. 给出 k 维线性空间 U 的构造方法, 使得 $U \cap V_1 = U \cap V_2 = \{0\}$, 并求满足以上条件的最大的 k.

证明. 由定理 2.3 可知存在 $\alpha_1 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{2} V_i$, 当 $k = 1$ 时, 令 $U = L(\alpha_1)$. 若 $m + 1 < n$, 则由定理 2.3 可知存在 $\alpha_2 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i \oplus L(\alpha_1)$, 当 $k = 2$ 时, 令 $U = L(\alpha_1, \alpha_2)$. 持续此过程, 并断言 k 的最大值为 $n - m$. 若 $k > n - m$, 则由维数公式

$$\dim(U \cap V_1) = \dim U + \dim V_1 - \dim(U + V_1) > n - m + m - n = 0,$$

与 $U \cap V_1 = \{0\}$ 矛盾. ■

2.4 相似标准型应用

2.4.1 复数域上可交换问题讨论

问题 2.7. 证明如下问题:

1. 设 A 为 m 阶矩阵, B 为 n 阶矩阵, 矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解的充要条件是 A, B 没有公共特征值.

2. 设 $J = J(\lambda_0, n)$ 是特征值为 λ_0 的 n 阶 Jordan 块, 则与 J 可交换的都可写成 J 的次数不超过 $n - 1$ 的多项式. 进一步可以得到与 J 可交换全体构成的线性空间的维数为 n.

证明. 1. 充分性. 设 $f(x), g(x)$ 分别是 A, B 的特征多项式, 则 $(f(x), g(x)) = 1$. 因此存在 u, v 使得

$$f(A)u(A) + g(A)v(A) = I_n,$$

于是 $g(A)$ 可逆. 若 $AX = XB$, 则 $g(A)X = Xg(B) = 0$, 于是 $X = 0$. 下证必要性. 令

$$\varphi : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{m\times n}, X \mapsto AX - XB$$

设 A, B 的特征值分别为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m; \mu_1, \cdots, \mu_n$. 非零向量 α_i, β_j 满足 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, B'\beta_j = \mu_j\beta_j$. 则有

$$\varphi(\alpha_i\beta_j') = A(\alpha\beta_j') - (\alpha_i\beta_j')B = (\lambda_i - \mu_j)\alpha_i\beta_j',$$

因此 φ 的特征值为 $\lambda_i - \mu_j (1 \le i \le m; 1 \le j \le n)$. 所以由 $\mathrm{Ker}\varphi = \{O\}$ 可得 A, B 没有公共特征值.

2. 与 J 可交换当且仅当与 $J_0 = J(0,n)$ 可交换. 设 A 与 J_0 可交换，则经计算有 A 是形如

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

则 $A = a_1I_n + a_2J_0 + \cdots + a_nJ_0^{n-1} = a_1I_n + a_2(J-\lambda_0I_n) + \cdots + a_n(J-\lambda_0I_n)^{n-1}$. 由于 $(J(0,n))^{n-1} \neq 0, J^n(0,n) = 0$, 所以 $I_n, J_n(0), \cdots, J^{n-1}(0)$ 线性无关，因此与 J 可交换全体构成的线性空间的维数为 n.

■

问题 2.8. 设 A 是复数域上任一 n 阶方阵，则与 A 可交换的全体矩阵

$$C(A) = \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid AX = XA\}$$

构成 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间，试求 $C(A)$ 的维数.

证明. 设 P 是可逆阵，使得

$$P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}\{J(\lambda_1,k_1), J(\lambda_2,k_2), \cdots, J(\lambda_s,k_s)\}$$

为 A 的 Jordan 标准型. 则 $AX = XA \Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}XP) = (P^{-1}XP)(P^{-1}AP)$, 由于 X 与 $P^{-1}XP$ 有一一对应关系，因此不妨一开始便设 A 为 Jordan 标准型. 设 X 对应分块为

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{pmatrix}, \quad X_{ij} \in \mathbb{C}^{k_i\times k_j}$$

则

$$AX = XA \Leftrightarrow J(\lambda_i,k_i)X_{ij} = X_{ij}J(\lambda_j,k_j), \quad 1 \le i,j \le s.$$

下面讨论 $J(\lambda_i,k_i)X_{ij} = X_{ij}J(\lambda_j,k_j)$ 的维数.

- 假如 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则由问题 2.7 的 1 可知方程仅有零解，于是 $X_{ij} = 0$.
- 若 $\lambda_i = \lambda_j$, 则此时 $J(\lambda_i,k_i)X_{ij} = X_{ij}J(\lambda_j,k_j)X_{ij} \Leftrightarrow J(0,k_i)X_{ij} = X_{ij}J(0,k_j)$.

  1. 若 $k_i = k_s$, 则由问题 2.7 的 2 可知 X_{ij} 可以写成 $J(\lambda_i,k_i)$ 的多项式形式.

2. 若 $k_i < k_j$, 则由 $J(0,k_i)X_{ij} = X_{ij}J(0,k_j)$ 有

$$0 = J^{k_i}(0,k_i)X_{ij} = X_{ij}J^{k_i}(0,k_j) = X_{ij}\begin{pmatrix} O & O \\ I_{j-k} & O \end{pmatrix},$$

将 X_{ij} 分块为 $X_{ij} = (X_{k_i\times k_i}, O)$ 代入上式可得 $X_{ij} = (X_{k_i\times k_i}, O)$. 再将 X_{ij} 代入原始方程可得 $J(0,k_i)X_{k_i\times k_i} = X_{k_i\times k_i}J(0,k_i)$. 因此 $X_{k_i\times k_i} = f(J(\lambda_i,k_i))$, 因此 $X_{ij} = (f(J(\lambda_i,k_i)), O)$.

3. 若 $k_i > k_j$, 和上述完全类似的讨论，X_{ij} 是形如 $X_{ij} = \begin{pmatrix} f(J(\lambda_j,k_j)) \\ O \end{pmatrix}$. 的形式.

于是综上所述，$J(\lambda_i,k_i)X_{ij} = X_{ij}J(\lambda_j,k_j)X_{ij}$ 的解空间维数为

$$\deg((\lambda-\lambda_i)^{k_i}, (\lambda-\lambda_j)^{k_j}).$$

所以 $C(A)$ 的维数为

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\deg((\lambda-\lambda_i)^{k_i}, (\lambda-\lambda_j)^{k_j}).$$

■

注 2.9. 该结论可以推广为 $AX = XB$ 解空间的维数，其中 A, B 的阶数可以不同. 此外，从上述结果可以直接看出，对任意复矩阵 A, 有 $\dim C(A) \geq n$, , 且等号成立当且仅当 A 的特征多项式等于其极小多项式，即 A 属于同一特征值的 Jordan 块只有一个.

2.4.2 复数域上矩阵的 Voss 分解

问题 2.10. 证明如下问题:

1. 设有 n 阶 Jordan 块

$$J = J(\lambda,n) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

则 J 可以分解为两个对称矩阵的乘积，且可以指定其中一个矩阵为可逆阵.

2. Voss 分解任一复方阵都可分解为两个复对称阵的乘积.

3. 任一复方阵都相似于一个复对称阵.

证明. 1. 注意到

$$J=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 & \lambda\\ & \iddots & \lambda & \\ 1 & \iddots & & \\ \lambda & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & \lambda\\ & & \lambda & 1\\ & \iddots & \iddots & \\ \lambda & 1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

2. 设 A 是复方阵，P 是可逆阵，满足

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left\{J(\lambda_1,k_1),J(\lambda_2,k_2),\cdots,J(\lambda_s,k_s)\right\},$$

由于每个 $J(\lambda_i,k_i)$ 可以分解为两个对称阵乘积 $J(\lambda_i,k_i)=C_iD_i, i=1,2,\cdots,s$, 现在令

$$G=P\operatorname{diag}\left\{C_1,C_2,\cdots,C_s\right\}P^T,\quad H=(P^T)^{-1}\operatorname{diag}\left\{D_1,D_2,\cdots,D_s\right\}P^{-1},$$

于是 G,H 是对称阵，且 $A=GH$.

3. 设 A 是一复方阵，由 Voss 分解，存在对称阵 G,H 使得 $A=GH$, 并指定 H 可逆. 由复二次型的规范标准型理论，存在可逆复阵 S 使得 $H=S^TS$. 于是

$$SAS^{-1}=S(GS^TS)S^{-1}=SGS^T,$$

因此 A 相似于一个复对称阵.

■

2.4.3 可逆矩阵可开任意次方根

问题 2.11. 设 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的特征值, 证明: A 关于 λ_0 的 Jordan 块总数为 $n-r(\lambda_0I_n-A)$, 及对任意的正整数 k, 特征值为 λ_0 的 k 阶 Jordan 块 $J(\lambda_0,k)$ 在 A 的 Jordan 标准型 J 中出现的个数为

$$r\left((A-\lambda_0I_n)^{k-1}\right)+r\left((A-\lambda_0I_n)^{k+1}\right)-2r\left((A-\lambda_0I_n)^{k}\right)$$

.

证明. 设 P 是可逆阵, 使得

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left\{J(\lambda_1,r_1),J(\lambda_2,r_2),\cdots,J(\lambda_s,r_s)\right\}$$

是 A 的 Jordan 标准型. 注意到:

$$(A-\lambda_0I_n)^k=P\operatorname{diag}\left\{J^k(\lambda_1-\lambda_0,r_1),J^k(\lambda_2-\lambda_0,r_2),\cdots,J^k(\lambda_s-\lambda_0,r_s)\right\}P^{-1}$$

则

$$r\left((A-\lambda_0 I_n)^k\right)=\sum_{i=1}^{s} r(J^k(\lambda_i-\lambda_0,r_i))$$

- 当 $\lambda_i\neq\lambda_0$ 时,$r\left(J^k(\lambda_i-\lambda_0,r_i)\right)=r_i$.
- 当 $\lambda_i=\lambda_k$ 时，若 $r_i<k$, 则 $r\left(J^k(\lambda_i-\lambda_0,r_i)\right)=0$, 若 $r_i\geq k$ 时，$r\left(J^k(\lambda_i-\lambda_0,r_i)\right)=r_i-k$.

所以

$$r\left((A-\lambda_0 I_n)^{k-1}\right)-r\left((A-\lambda_0 I_n)^k\right)$$

为特征值为 λ_0 且阶数大于等于 k 的 Jordan 块数. 同理

$$r\left((A-\lambda_0 I_n)^k-r\left((A-\lambda_0 I_n)^{k+1}\right)\right)$$

为特征值为 λ_0 且次数大于等于 $k+1$ 的 Jordan 块的个数. 因此

$$r\left((A-\lambda_0 I_n)^{k-1}\right)+r\left((A-\lambda_0 I_n)^{k+1}\right)-2r\left((A-\lambda_0 I_n)^k\right)$$

是特征值为 λ_0 且阶数为 k 的 Jordan 块的个数. ∎

问题 2.12. 设有 n 阶 Jordan 块

$$J=J(\lambda,n)=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix},$$

1. 若 $\lambda\neq 0$, 求 J^m 的 Jordan 标准型,m 为非零整数.

2. 若 $\lambda=0$, 求 J^m 的 Jordan 标准型,m 为正整数.

3. 设 A 为 n 阶可逆复矩阵，m 为一正整数，证明：存在 n 阶矩阵 B, 使得 $A=B^m$.

证明. 1. (a) 当 $m\geq 1$ 时,J^m 的特征值为 λ^m. 做分解 $J=\lambda I_n+N$, 其中 $N=J(0,n)$. 则

$$J^m=(\lambda I_n+N)^m=\lambda^m I_n+C_m^1\lambda^{m-1}N+\cdots+N^m.$$

从而 $r(J^m-\lambda^m I_n)=r(C_m^1\lambda^{m-1}N+\cdots+N^m)=n-1$. 所以由问题 2.11 可知 J^m 关于 λ^m 的 Jordan 块数为 1. 从而 J^m 的 Jordan 标准型为 $J(\lambda^m,n)$.

(b) 当 $m=-1$ 时,J^{-1} 的特征值为 λ^{-1}. 而我们有

$$I_n=I_n-(-\lambda^{-1}N)^n=(\lambda I_n+N)(\lambda^{-1}I_n-\lambda^{-2}N+\cdots+(-1)^{n-1}\lambda^{-n}N^{n-1}).$$

从而

$$J^{-1} = \lambda^{-1}I_n - \lambda^{-2}N + \cdots + (-1)^{n-1}\lambda^{-n}N^{n-1}.$$

所以

$$r(J^{-1} - \lambda^{-1}I_n) = r(-\lambda^{-2}N + \cdots + (-1)^{n-1}\lambda^{-n}N^{n-1}) = n - 1.$$

从而属于特征值 λ^{-1} 的 Jordan 块个数为 1. 从而 J^{-1} 的 Jordan 标准型为 $J(\lambda^{-1}, n)$.

(c) 当 $m \le -1$ 时,$J^m = (J^{-1})^{-m}$ 的 Jordan 标准型为 $J(\lambda^m, n)$.

2. 当 $m \ge n$ 时，$J^m = 0$, 即是 J^m 的 Jordan 标准型. 当 $m < n$ 时，做带余除法 $n = mq+r, r < m$. 首先由于 $r(J^m) = n - m$. 可知 J^m 一共有 m 个 0Jordan 块. 当 $1 \le k < q$ 时,

$$r(J^m)^{k-1} + r(J^m)^{k+1} - 2r(J^m)^k = n - (mk - m) + n - (mk + m) - 2(n - mk) = 0.$$

从而没有相应的 Jordan 块. 当 $k = q$ 时

$$r(J^m)^{q-1} + r(J^m)^{q+1} - 2r(J^m)^q = n - (mq - m) + 0 - 2(n - mq) = n - mq + m - 2r = m - r.$$

当 $k = q + 1$ 时

$$r(J^m)^q + r(J^m)^{q+2} - 2r(J^m)^{q+2} = n - mq = r.$$

当 $k > q+1$ 时，显然没有相应的 Jordan 块. 从而 J^m 的标准型为 $\mathrm{diag}\{J_q(0), \cdots, J_{q+1}(0), \cdots\}$ 其中 q 阶 Jordan 块个数为 $m - r.q + 1$ 阶 Jordan 块的个数为 r 个.

3. 设 P 是可逆阵，使得

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\left\{J(\lambda_1, r_1), J(\lambda_2, r_2), \cdots, (\lambda_k, r_k)\right\}$$

为 A 的 Jordan 标准型. 由于 A 非异，所以 A 的所有特征值都非零. 对 A 的任一 Jordan 块 $J(\lambda_i, r_i)$, 取定 λ_i 的 m 次方根 μ_i 使得 $\mu_i^m = \lambda_i$. 由问题 2.12 的 1 可知 $J^m(\mu_i, r_i)$ 相似于 $J(\lambda_i, r_i)$, 即存在可逆阵 Q_i 使得 $J(\lambda_i, r_i) = Q_i^{-1}J^m(\mu_i, r_i)Q_i = (Q_i^{-1}J(\mu_i, r_i)Q_i)^m$. 令

$$\text{C=diag}\left\{Q_1^{-1}J(\mu_1, r_1)Q_1, Q_2^{-1}J(\mu_2, r_2)Q_2, \cdots, Q_k^{-1}J(\mu_k, r_k)Q_k\right\}.$$

从而 $J = C^m$. 从而 $A = PJP^{-1} = (PCP^{-1})^m$, 令 $B = PCP^{-1}$, 有 $A = B^m$.

■

2.4.4 迹零矩阵的讨论

问题 2.13. *设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵，且 $\mathrm{tr}(A) = 0$. 证明：*

1. A 相似于一个主对角元全为零的矩阵.

2. 存在 $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$, 使得 $A = XY - YX$.

3. 设 W 为 $\mathbb{K}^{n\times n}$ 中所有形如 $XY - YX$ 的矩阵生成的子空间，求 W 的维数.

证明. 1. 对阶数进行归纳. 若 $n=1$，则 $A=0$, 结论显然成立. 假设阶数小于 n 时结论成立. 注意到条件和结论在相似关系下不会发生变化. 不妨以开始便设 A 为有理标准型

$$A = \mathrm{diag}\left\{F(d_1(\lambda)), F(d_2(\lambda)), \cdots, F(d_k(\lambda))\right\}$$

其中 $d_i(\lambda), 1 \le i \le k$ 是 A 的所有非常数不变因子. 记 $\deg d_i(\lambda) = r_i$.

- 若 $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 1$, 则 $A = cI_n$, 由 trA=0 得 $c=0$. 从而 $A=0$.
- 若存在 $r_i > 1$. 则对换 A 的第 $(1,1)$ 分块和第 (i,i) 分块. 注意到这种对换是相似对换 (事实上也是合同对换) 从而对换后的矩阵的第 $(1,1)$ 元为零. 因此不妨一开始便设 $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ \beta & B \end{pmatrix}$. 此时 $B \in M_{n-1}(K)$ 且 $\mathrm{tr}B = 0$. 由假设可知存在可逆阵 Q 使得 $Q^{-1}BQ$ 为对角元素全为零的矩阵. 令 $P = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}$ 为 $\mathbb{K}$ 上的非异阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & O \\ O & Q^{-1}BQ \end{pmatrix}$ 的主对角元全为零, 结论得证.

2. 注意到题目条件和结论在相似变换 $A \mapsto P^{-1}AP, B \mapsto P^{-1}BP, C \mapsto P^{-1}CP$ 下不会发生变换. 因此不妨一开始便设 $C = (c_{ij})$ 的主对角元 $c_{ii} = 0.1 \le i \le n$. 取定 $A = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right\}$ 为 K 上的对角元互不相同的的对角阵. 设 $B = (x_{ij})$, 则 $AB - BA = C$ 等价于 $\lambda_i x_{ij} - \lambda_j x_{ij} = c_{ij}$. 当 $i=j$ 时上式恒成立, 因此 x_{ii} 可以任取. 当 $i \ne j$ 时，$x_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}$ 唯一确定. 因此一定存在数域 $\mathbb{K}$ 上的矩阵 A, B 使得 $AB - BA = C$.

3. 由 2 讨论可知
$$W = \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}A = 0\right\}.$$
所以容易验证 $E_{ij}(i \ne j), E_{ii} - E_{nn}(1 \le i \le n-1)$ 构成 W 的一组基，其中 E_{ij} 为基础矩阵. 因此 $\dim W = n^2 - 1$.

■

问题 2.14. 设 A 是 n 阶实对称阵，满足 $\mathrm{tr}A = 0$, 证明 : A 正交相似于一个对角元全为零的矩阵.

证明. 注意条件和结论在正交相似变换 $A \mapsto Q^{-1}AQ$ 下不会发生改变，因此不妨一开始便设 $A = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right\}$ 为 A 的正交相似标准型. 若 $A = O$, 结论显然成立. 否则存在 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $\lambda_i \ne \lambda_j$. 现在对阶数 n 进行归纳，假设当结论对于阶数小于 n 的情形成立, 现在考虑阶数为 n 的情形. 令 $\varepsilon = (1, 1, \cdots, 1)^T$, 则 $A\varepsilon = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^T$ 是非零向量，且

$$(\varepsilon, A\varepsilon) = \varepsilon' A \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

即 $\varepsilon, A\varepsilon$ 正交. 现将 $\varepsilon, A\varepsilon$ 标准化并扩张为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基记为 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 分别是 $\varepsilon, A\varepsilon$ 标准化后的向量. 令 $Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, 则 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A_1 \end{pmatrix}$, 其中 A_1 是 $n-1$ 阶实对称阵，且满足 $\mathrm{tr}A_1 = 0$, 则由归纳假设存在 $n-1$ 阶正交阵 H 使得 $H^{-1}A_1H = \Lambda$ 是对角元全为零的矩阵. 现在令 $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & H \end{pmatrix}$, 则 Q_1 是正交阵，且有

$$(QQ_1)^{-1}A(QQ_1) = \begin{pmatrix} 0 & \bigstar \\ \bigstar & \Lambda \end{pmatrix}$$

为对角元全为零的矩阵. 注意正交阵的乘积仍是正交阵，所以结论得证. ■

问题 2.15. 设 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{T \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det T = 1\}$, 对任意 $\mathbb{R}$ 上可微函数 $f_{ij}(t), i, j = 1, 2, \cdots, n$, 定义 $\mathbb{R}$ 到 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 的映射为

$$f(t) = (f_{ij}(t)), \qquad f(0) = I_n.$$

记 V 为所有满足条件的映射全体，对任意 $f(t) \in V$, 记 $f'(t) = (f'_{ij}(t))$.

1. 对任意 $f(t) \in V$, 称 $A = f'(0)$ 为 f 在 I_n 的切向量，证明：$\mathrm{tr}A = 0$.
2. 设 $f(t), g(t) \in V, k.l \in \mathbb{R}$, 证明：存在 $h(t) \in V$ 使得 $h'(0) = kf'(0) + lg'(0)$, 即所有切向量的全体构成 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的一个子空间，记为 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.
3. 证明：$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid tr(A) = 0\}$.
4. 试求所有 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ 使得对任意 $A, B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \varphi[A, B] = [\varphi(A), \varphi(B)]$.

证明. 1. 由题目条件我们有 $|f(t)| \equiv 1$, 从而

$$0 = m(t) = \frac{d|f(t)|}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial |f(t)|}{\partial f_{ij}(t)} f'_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{i1}(t) & f'_{i2}(t) & \cdots & f'_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

因此 $m(0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{ii}(0) = \mathrm{tr}A = 0$.

2. 显然 $f(kt)g(lt) \in V$, 并且根据矩阵乘法的定义不难验证上述定义的导数满足 Leibniz 法则. 令 $h(t) = f(kt)g(lt)$, 则我们有

$$h'(t) = kf'(t)g(t) + lg'(t)f(t),$$

从而 $h'(0) = kf'(0) + lg'(0)$.

3. 由 1 的讨论我们有 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \subseteq \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}A = 0\}$, 对任意的 $A \in \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}A = 0\}$, 我们定义 $f(t) = e^{tA}$, 从而 $f'(t) = Ae^{tA}$, 即 $f'(0) = A$. 此外

$$|f(t)| = |e^{tA}| = e^{\mathrm{tr}A} = e^0 = 1.$$

因此 $f(t) \in V$, 所以 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

4. 满足 $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B), \forall A, B \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, 的 φ 即是我们要求的. 定义

$$\varphi(A) = TAT^{-1}, \quad T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

从而此时 $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$.

■

2.4.5 AB 与 BA 的 Jordan 块关系讨论

问题 2.16. 设 A, B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 阶矩阵，则 AB 与 BA 有相同的非零 Jordan 块.

证明. 对于 AB 的任意非零特征值 λ 和正整数 $k(1 \le k \le n)$, 设 W_1, W_2 分别为 $(\lambda I_m - AB)^k = 0$ 和 $(\lambda_n - BA)^k = 0$ 的解空间. 注意到对任意 $X \in W_1$, 有

$$0 = B(\lambda I_m - AB)^k X = (\lambda I_n - BA)B(\lambda I_m - AB)^{k-1}X = \cdots = (\lambda I_n - BA)^k BX,$$

因此 $BX \in W_2$, 因此可以构造

$$\varphi : W_1 \to W_2, X \mapsto BX$$

则对任意 $0 = BX \in W_2$, 有

$$0 = (\lambda I_m - AB)^k X = (\lambda I_m - AB)^{k-1}(\lambda X) = \cdots = \lambda^k X$$

由 $\lambda \neq 0$, 所以 $X = 0$, 即 φ 是单射，则 $\dim W_1 \le \dim W_2$, 同理可证 $\dim W_2 \ge \dim W_1$, 于是 $\dim W_1 = \dim W_2$. 于是有

$$r(\lambda I_m - AB)^k - r(\lambda I_m - AB)^{k+1} = r(\lambda I_n - BA)^k - r(\lambda I_n - BA)^{k+1},$$

因此进一步有

$$
\begin{aligned}
&r(\lambda I_m - AB)^{k-1} + r(\lambda I_m - AB)^{k+1} - 2r(\lambda I_m - AB)^k \\
&= r(\lambda I_m - AB)^{k-1} - r(\lambda I_m - AB)^k - (r(\lambda I_m - AB)^k - r(\lambda I_m - AB)^{k+1}) \\
&= r(\lambda I_n - BA)^{k-1} - r(\lambda I_n - BA)^k - (r(\lambda I_n - BA)^k - r(\lambda I_n - BA)^{k+1}) \\
&= r(\lambda I_n - BA)^{k-1} + r(\lambda I_n - BA)^{k+1} - 2r(\lambda I_n - BA)^k
\end{aligned}
$$

由问题 2.11 可知结论得证. ∎

问题 2.17. 设 n 阶方阵 A,B 满足 $r(ABA)=r(B)$, 证明：AB 与 BA 相似.

证明. 1. 设 P,Q 为可逆阵，满足 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 A 的相抵标准型. 注意到条件和结论在相抵变换：$A\mapsto PAQ, B\mapsto Q^{-1}BP^{-1}$ 下不会发生改变，因此不妨一开始便设 A 为相抵标准型，记此时 $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ 为对应分块，则有 $r(ABA)=r(B)$ 有

$$
r\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = r(B_{11})
$$

即有 $r\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix} = r(B_{11}), r\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = r(B_{11})$. 因此存在方阵 M,N 使得 $B_{12}=B_{11}N, MB_{11}=B_{12}$. 于是 AB,BA 可通过相似变换变成 $\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 因此结论得证.

2. 首先 AB,BA 有相同的特征值. 由 Jordan 标准型理论，由问题 2.16 可知 AB,BA 有相同的非零 Jordan 块，因此只需证明对任意 $1\leq k\leq n$, 有 $r((AB)^k)=r((BA)^k)$. 由于

$$
r(ABA)=r(AB)=r(BA)=r(B)
$$

所以 $ABX=0\Leftrightarrow BX=0$, 从而对任意 $k\geq 2,(AB)^kX=0\Leftrightarrow B(AB)^{k-1}X=0$. 从而

$$
r((AB)^k)=r(B(AB)^{k-1})=r((BA)^{k-1}B)\geq r((BA)^k).
$$

同理 $Y^TBA=0\Leftrightarrow Y^TB=0$, 从而可证 $r((BA)^k)\geq r((AB))^k$, 所以结论得证.

∎

问题 2.18. 设 A,B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 阶矩阵，且 $|BA|\neq 0$, 证明：AB 可对角化当且仅当 BA 可对角化.

证明. 下面从不同角度给出解答

1. 设 BA 的 Jordan 标准型为 $\operatorname{diag}\{J(\lambda,k_1),J(\lambda_2,k_2),\cdots,J(\lambda_s,k_s)\}$, 其中 $\lambda_i\neq 0$. 此外，由于 $R(BA)=n$, 所以 A 是列满秩，于是 $ABX=0\Leftrightarrow BX=0$. 即有

$$R(AB)=R(B)=R(BA)=n,$$

因此由于 AB 与 BA 有相同的非零 Jordan 块，所以 AB 的 Jordan 标准型为

$$\operatorname{diag}\{J(\lambda_1,k_1),\cdots,J(\lambda_s,k_s),O\}$$

所以 AB 可对角化当且仅当 BA 可对角化.

2. 由于 AB 与 BA 有相同的非零 Jordan 块，所以只需证明 AB 关于特征值 0 的几何重数等于其代数重数. 由降阶公式

$$|\lambda I_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda I_n-BA|$$

所以 AB 关于特征值零的代数重数为 $m-n=m-R(AB)$ 等于其几何重数，所以结论得证.

3. 设 AB,BA 的极小多项式分别为 $g(\lambda),h(\lambda)$, 则有 $h(0)\neq 0$. 注意到 $(BA)^k=B(AB)^{k-1}A$, 所以 $g(BA)(BA)=Bg(AB)A=0$. 同理有 $h(AB)(AB)=0$, 因此有 $h(\lambda)\mid g(\lambda)\lambda,g(\lambda)\mid h(\lambda)\lambda$. 因此，若 BA 可对角化，则 $h(\lambda)$ 无重根，因此 $\lambda h(\lambda)$ 也没有重根，因此 AB 适合多项式无重根，即 AB 可对角化. 若 AB 可对角化，则 $g(\lambda)$ 无重根，由于 $h(0)\neq 0$, 所以 $h(\lambda)\mid g(\lambda)$, 所以 BA 也可对角化.

■

注 2.19. 问题 2.18 中条件 $|BA|\neq 0$, 不能少. 例如令 $0\neq A=\alpha,0\neq B=\beta'$, 若 $BA=\alpha'\beta=\operatorname{tr}(AB)=0$, 则由于 $n-R(AB)=n-1$, 所以 AB 有 $n-1$ 个 0Jordan 块，结合 $\operatorname{tr}(AB)=0,AB$ 的特征值只能都为零，因此 AB 的 Jordan 标准型为 $\operatorname{diag}\{0,\cdots,J_2(0)\}$ 不可对角化.

问题 2.20. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times m$ 阶矩阵，则 AB 与 BA 的零 Jordan 块最大阶数之差小于等于 1.

证明. 由问题 2.18 的证法 3 可证. ■

下面的问题说明 AB 与 BA 的零 Jordan 块最大阶数之差可以严格取到 1.

问题 2.21. 设 A,B 分别为 $n\times r,r\times n$ 阶矩阵，其中 $r<n$ $r(AB)=r$, 则 $m_1(x)=xm_2(x)$. 其中 $m_1(x),m_2(x)$ 分别是 AB 与 BA 的最小多项式.

证明. 首先有 $m_1(x)\mid xm_2(x)$. 另一方面，设 $m_1(x)=xf(x)$, 则有 $O=m_1(AB)=(AB)f(AB)=Af(BA)B$. 又因为 A,B 分别是列满秩和行满秩，分别有左逆和右逆，因此 $f(BA)=O$, 即 $xm_2(x)\mid m_1(x)$, 从而 $m_1(x)=xm_2(x)$. ■

2.5 根子空间分解及相关问题

问题 2.22. (**根子空间分解定理**) 设 $\mathscr{A}$ 是数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，设 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

其中 λ_i 互不相同，记 $R_{\lambda_i}=\left\{\alpha\in V\mid(\mathscr{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}(\alpha)=0\right\}$, 证明：

$$V=\mathrm{Ker}f(\mathscr{A})=R_{\lambda_1}\oplus R_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus R_{\lambda_s}.$$

证明. 由 Cayley-Hamilton 定理，有 $V=\mathrm{Ker}f(\mathscr{A})$, 且显然 $R_{\lambda_1}+\cdots+R_{\lambda_s}\subseteq V$. 记 $f_i(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}}$, 则由 $f_i(\lambda)$ 互素，存在 $u_1(\lambda),\cdots,u_s(\lambda)$ 使得对任意 $\alpha\in V$ 有

$$\alpha=f_1(\mathscr{A})u_1(\mathscr{A})\alpha+\cdots+f_s(\mathscr{A})u_s(\mathscr{A})\alpha,$$

注意到 $f_i(\mathscr{A})u_i(\mathscr{A})\alpha\in R_{\lambda_i}$, 所以有

$$V=R_{\lambda_1}+R_{\lambda_2}+\cdots+R_{\lambda_s}.$$

设 $0=\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\alpha_i\in R_{\lambda_i}$. 则两边作用 $f_i(\mathscr{A})$ 有 $0=f_i(\mathscr{A})\alpha_i$. 另一方面，由于 $(f_i(\lambda),(\lambda-\lambda_i)^{k_i})=1$, 所以存在 $u(\lambda),v(\lambda)$ 使得

$$\alpha_i=u(\mathscr{A})f_i(\mathscr{A})\alpha_i+v(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\alpha_i=0,$$

于是零向量表示唯一，因此有

$$V=R_{\lambda_1}\oplus R_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus R_{\lambda_s}.$$

■

卌 容易证明 $R_{\lambda_i}=\mathrm{Im}f_i(\mathscr{A})$, 所以上述直和分解等价于 $V=\bigoplus_{i=1}^{s}\mathrm{Im}(f_i(\mathscr{A}))$ 显然 R_{λ_i} 是 $\mathscr{A}$-子空间，且 $\mathscr{A}|_{R_{\lambda_i}}$ 的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$.

问题 2.23. (湖南师范大学 2024) 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，设 $(f,g)=1$, 证明：

$$\mathrm{Im}f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})=\mathrm{Im}f(\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}g(\mathscr{A}).$$

证明. 显然 $\mathrm{Im}f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})\subseteq\mathrm{Im}f(\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}g(\mathscr{A})$. 另一方面，由于 $(f,g)=1$, 则存在 u,v 使得 $fu+gv=1$. 对任意 $\gamma=f(\mathscr{A})\alpha=g(\mathscr{A})\beta\in\mathrm{Im}f(\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}g(\mathscr{A})$, 有

$$\begin{aligned}\gamma&=u(\mathscr{A})f(\mathscr{A})\gamma+v(\mathscr{A})g(\mathscr{A})\gamma\\&=u(\mathscr{A})f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})\beta+v(\mathscr{A})g(\mathscr{A})f(\mathscr{A})\alpha\in\mathrm{Im}f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Im} f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}) \supseteq \mathrm{Im} f(\mathscr{A}) \cap \mathrm{Im} g(\mathscr{A})$, 于是结论得证. ■

问题 2.24. (Fitting 分解) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\varphi \in \mathrm{End}(V)$, 证明：存在直和分解 $V = V_1 \oplus V_2$, 使得 V_1, V_2 是 φ 的不变子空间，且 $\varphi|_{V_1}$ 是可逆变换，$\varphi|_{V_2}$ 是幂零变换.

证明. 设 φ 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^k g(\lambda)$, 其中 $0 \le k \le n, g(0) \ne 0$. 记 $V_1 = \mathrm{Ker}\varphi^k, V_2 = \mathrm{Ker} g(\varphi)$, 则由 $(g(\lambda), \lambda^k) = 1$, 有 $V = V_1 \oplus V_2$. 由于 $\varphi|_{V_1}$ 特征多项式为 $\lambda^k, \varphi|_{V_2}$ 的特征多项式为 $g(\lambda)$, 即 $\varphi|_{V_1}$ 是可逆变换，$\varphi|_{V_2}$ 是幂零变换. ■

问题 2.25. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ 的最小多项式

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = p_1^{r_1}(\lambda) p_2^{r_2}(\lambda) \cdots p_s^{r_s}(\lambda),$$

其中 $p_1(\lambda), \cdots, p_s(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 是互不相同的首一不可约多项式,$r_i \ge 1, i = 1, 2, \cdots, s$. 令 $V_i = \mathrm{Ker} p_i^{r_i}(\mathcal{A}), i = 1, 2, \cdots, l$. 证明：对于 V 的任一 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 W, 均有

$$W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_s).$$

证明. 首先由问题 2.22 完全类似证明过程有

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

所以对任意 $0 \ne \alpha \in W$ 可唯一表示为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \alpha_i \in V_i$. 下面只需证明 $\alpha_i \in W$. 令 $g_i(\lambda) = \prod\limits_{i \ne j}^{s} p_j^{r_j}(\lambda), i = 1, 2, \cdots, s$. 则有 $g_i(\mathcal{A})\alpha_j = 0, i \ne j$. 所以

$$g_i(\mathcal{A})(\alpha) = g_i(\mathcal{A})(\alpha_1 + \cdots + \alpha_s) = g_i(\mathcal{A})(\alpha_i) \in W, \quad i = 1, , 2 \cdots, s.$$

又因为 $g_1(\lambda), \cdots, g_s(\lambda)$ 互素，所以存在 $u_1(\lambda), \cdots, u_s(\lambda) \in F[\lambda]$ 使得

$$u_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + u_s(\lambda)g_s(\lambda) = 1.$$

于是有 $\alpha_i = u_i(\mathcal{A})g_i(\mathcal{A})\alpha_i \in W$, 所以结论得证. ■

2.6 循环空间

2.6.1 向量的极小多项式和循环子空间

引理 2.26. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，对任意非零向量 $\alpha \in V$, 存在最小正整数 k, 使得 $\mathcal{A}^k$ 能够被 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha$ 线性表出，则 $C(\alpha) = L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha)$ 为 $\mathcal{A}$-子空间，称为由 α 生成的循环 $\mathcal{A}$-子空间，简称循环子空间,$\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha$ 称为 $C(\alpha)$ 的一个循环

基. 若存在 α 使得 $V = C(\alpha)$, 则称 V 是 $\mathcal{A}$-循环空间. 称满足 $m(\mathcal{A})\alpha = 0$ 的次数最小的首一多项式 $m_\alpha(\lambda)$ 为 $\mathcal{A}$ 关于 α 的极小多项式. 则有 $\deg m_\alpha(\lambda) = k$.

引理 2.27. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 的一组基, 则

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = [m_{\alpha_1}(\lambda), m_{\alpha_2}(\lambda), \cdots, m_{\alpha_n}(\lambda)]$$

引理 2.28. 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间,$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$, 若有直和分解

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s,$$

其中 $V_i(1 \le i \le s)$ 是 $\mathcal{A}$ 不变子空间, 则有

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = [m_{\mathcal{A}_1}(\lambda), m_{\mathcal{A}_2}(\lambda), \cdots, m_{\mathcal{A}_s}(\lambda)]$$

其中 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 表示 $\mathcal{A}$ 的极小多项式，$m_{\mathcal{A}_i}(\lambda)$ 为 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 上的最小多项式.

引理 2.27, 2.28 证明都很平凡，留给读者.

问题 2.29. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，给定非零向量 $\alpha \in V$, 记

$$K[\mathcal{A}]\alpha = \{f(\mathcal{A})(\alpha) \mid f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]\}$$

1. $K[\mathcal{A}]\alpha$ 即由 α 生成的循环子空间，且是包含 α 的最小 $\mathcal{A}$-子空间.
2. 记 $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}|_{K[\mathcal{A}]\alpha}$, 则 $f_{\mathcal{A}_\alpha}(\lambda) = m_{\mathcal{A}_\alpha}(\lambda) = m_\alpha(\lambda)$.
3. $\dim K[\mathcal{A}]\alpha = \deg m_\alpha(\lambda)$.
4. 若设 $m_\alpha(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, 则 $\mathcal{A}_\alpha$ 在循环基 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha$ 下的表示阵为
$$F(m_\alpha(\lambda)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$
称为关于多项式 $m_\alpha(\lambda)$ 的 Frobenius 块.

问题 2.30. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 的线性变换.

1. 若 $(m_{\alpha_1}(\lambda), m_{\alpha_2}(\lambda)) = 1$, 则 $m_{\alpha_1+\alpha_2}(\lambda) = m_{\alpha_1}(\lambda)m_{\alpha_2}(\lambda)$. 从而

$$K[\mathcal{A}](\alpha_1 + \alpha_2) = K[\mathcal{A}](\alpha_1) \oplus K[\mathcal{A}](\alpha_2)$$

2. 设 $m_\alpha(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda),\beta=f(\mathcal{A})(\alpha)$, 则 $m_\beta(\lambda)=g(\lambda)$.

3. 任意的 $\alpha_1,\alpha_2\in V$, 存在 $\beta\in V$, 使得 $m_\beta(\lambda)=[m_{\alpha_1}(\lambda),m_{\alpha_2}(\lambda)]$.

4. 存在 $\alpha\in V$, 使得 $m_\alpha(\lambda)=m_{\mathcal{A}}(\lambda)$.

证明. .

1. 因为 $(m_{\alpha_1}(\lambda),m_{\alpha_2}(\lambda))=1$, 则由 Bézout 定理, 存在多项式 $u(\lambda),v(\lambda)\in P[\lambda]$ 使得

$$u(\lambda)m_{\alpha_1}(\lambda)+v(\lambda)m_{\alpha_2}(\lambda)=1$$

则对任意 $\alpha\in K[\mathcal{A}](\alpha_1)\cap K[\mathcal{A}](\alpha_2)$, 有 $\alpha=u(\varphi)m_{\alpha_1}(\varphi)+v(\varphi)m_{\alpha_2}(\varphi)=0$. 从而 $K[\mathcal{A}](\alpha_1)\oplus k[\mathcal{A}](\alpha_2)$. 注意到

$$0=m_{\alpha_1+\alpha_2}(\mathcal{A})(\alpha_1+\alpha_2)=m_{\alpha_1+\alpha_2}(\mathcal{A})(\alpha_1)+m_{\alpha_1+\alpha_2}(\mathcal{A})(\alpha_2)$$

所以 $m_{\alpha_1+\alpha_2}(\mathcal{A})(\alpha_1)=-m_{\alpha_1+\alpha_2}(\mathcal{A})(\alpha_2)\in K[\mathcal{A}](\alpha_1)\cap K[\mathcal{A}](\alpha_2)$, 从而有 $m_{\alpha_1+\alpha_2}(\mathcal{A})(\alpha_1)=-m_{\alpha_1+\alpha_2}(\mathcal{A})(\alpha_2)=0$, 即 $m_{\alpha_1}(\lambda)|m_{\alpha_1+\alpha_2}(\lambda),m_{\alpha_2}(\lambda)|m_{\alpha_1+\alpha_2}(\lambda)$. 于是 $m_{\alpha_1}(\lambda)m_{\alpha_2}(\lambda)|m_{\alpha_1+\alpha_2}(\lambda)$. 另一方面显然有 $m_{\alpha_1+\alpha_2}(\lambda)|m_{\alpha_1}(\lambda)m_{\alpha_2}(\lambda)$. 从而 $m_{\alpha_1+\alpha_2}(\lambda)=m_{\alpha_1}(\lambda)m_{\alpha_2}(\lambda)$. 从而

$$\dim K[\mathcal{A}](\alpha_1+\alpha_2)=\deg m_{\alpha_1+\alpha_2}(\lambda)=\deg m_{\alpha_1}(\lambda)+\deg m_{\alpha_2}(\lambda)=\dim\left(K[\mathcal{A}]\alpha_1\oplus K[\mathcal{A}]\alpha_2\right).$$

而显然 $K[\mathcal{A}](\alpha_1+\alpha_2)\subseteq K[\mathcal{A}]\alpha_1\oplus K[\mathcal{A}]\alpha_2$, 因此有 $K[\mathcal{A}](\alpha_1+\alpha_2)=K[\mathcal{A}](\alpha_1)\oplus K[\mathcal{A}](\alpha_2)$.

2. 由于 $g(\mathcal{A})(\beta)=m_\alpha(\mathcal{A})(\alpha)=0$. 故 $m_\beta(\lambda)|g(\lambda)$. 另一方面, 设 $h(\mathcal{A})(\beta)=0$, 即 $h(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\alpha)=0$, 从而 $m_\alpha=f(\lambda)g(\lambda)|h(\lambda)f(\lambda)$, 从而 $g(\lambda)|h(\lambda)$. 因此 $m_\beta(\lambda)=g(\lambda)$.

3. 设有标准分解式

$$m_{\alpha_1}(\lambda)=P_1^{a_1}(\lambda)\cdots P_s^{a_s}(\lambda)P_{s+1}^{a_{s+1}}(\lambda)\cdots P_t^{a_t}(\lambda);$$

$$m_{\alpha_2}(\lambda)=P_1^{b_1}(\lambda)\cdots P_s^{b_s}(\lambda)P_{s+1}^{b_{s+1}}(\lambda)\cdots P_t^{b_t}(\lambda).$$

$$a_i+b_i>0;a_i\geq b_i,1\leq i\leq s;a_j<b_j,s+1\leq j\leq t.$$

令 $f_1(\lambda)=P_1^{a_1}(\lambda)\cdots P_s^{a_s}(\lambda),g_1(\lambda)=P_{s+1}^{a_{s+1}}(\lambda)\cdots P_t^{a_t}(\lambda);f_2(\lambda)=P_1^{b_1}(\lambda)\cdots P_s^{b_s}(\lambda),g_2(\lambda)=P_{s+1}^{b_{s+1}}\cdots P_t^{b_t}(\lambda)$. 从而 $(f_1(\lambda),g_2(\lambda))=1$, 且 $[m_{\alpha_1}(\lambda),m_{\alpha_2}(\lambda)]=f_1(\lambda)g_2(\lambda)$. 令 $\alpha_3=g_1(\mathcal{A})\alpha_1$, $\alpha_4=f_2(\mathcal{A})\alpha_2$, 由 2 知 $m_{\alpha_3}(\lambda)=f_1(\lambda),m_{\alpha_4}(\lambda)=g_2(\lambda)$. 令 $\beta=\alpha_3+\alpha_4$, 由 1 得 $m_\beta(\lambda)=m_{\alpha_3}(\lambda)m_{\alpha_4}(\lambda)=[m_{\alpha_1}(\lambda),m_{\alpha_2}(\lambda)]$.

4. 对 n 的个数进行归纳，假设小于 n 时，结论成立. 记 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 V 的一组基，则由引理 2.27 有

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda)=[m_{\alpha_1}(\lambda),m_{\alpha_2}(\lambda),\cdots,m_{\alpha_n}(\lambda)]=[m_{\alpha_1}(\lambda),[m_{\alpha_2}(\lambda),\cdots,m_{\alpha_n}(\lambda)]].$$

由归纳假设，存在 $\gamma \in V$ 使得 $m_\gamma(\lambda) = [m_{\alpha_2}(\lambda), \cdots, m_{\alpha_n}(\lambda)]$, 结合 3 可知存在 $\beta \in V$, 使得

$$m_\beta(\lambda) = [m_{\alpha_1}(\lambda), m_\gamma(\lambda)] = m_{\mathcal{A}}(\lambda).$$

■

注 2.31. 对任意 $\alpha \in V$, 设 $m_\alpha(\lambda) = h(\lambda)g(\lambda)$, 显然有 $C(g(\mathcal{A})\alpha) \subseteq C(\alpha) \bigcap \mathrm{Ker}h(\mathcal{A})$. 另一方面，对任意 $q(\mathcal{A})\alpha \in C(\alpha) \bigcap \mathrm{Ker}h(\mathcal{A})$, 则有 $q(\mathcal{A})h(\mathcal{A})\alpha = 0$, 于是 $h(\lambda)g(\lambda) \mid h(\lambda)q(\lambda)$, 即 $g(\lambda) \mid q(\lambda)$, 所以 $q(\mathcal{A})\alpha \in C(g(\mathcal{A})\alpha)$, 因此有 $C(g(\mathcal{A})\alpha) = C(\alpha) \bigcap \mathrm{Ker}h(\mathcal{A})$.

现考虑 $V = C(\alpha)$ 情形，则有 $C(g(\mathcal{A})\alpha) = \mathrm{Ker}h(\mathcal{A})$. 对任意 $\mathcal{A}$-子空间 W, 设 $\mathcal{A}|_W$ 上的特征多项式为 $v(\lambda)$, 且有

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = m_{\mathcal{A}}(\lambda) = m_\alpha(\lambda) = v(\lambda)u(\lambda)$$

那么对任意 $q(\mathcal{A})\alpha \in W$, 由 Cayley-Hamilton 定理有 $v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})\alpha = 0$, 于是有 $u(\lambda) \mid q(\lambda)$, 即 $q(\lambda)\alpha \in C(u(\mathcal{A})\alpha)$, 于是 $W \subseteq C(u(\mathcal{A})\alpha)$. 若记 $\beta = u(\mathcal{A})\alpha$, 由问题 2.30 的 2 有 $m_\beta(\lambda) = v(\lambda)$, 即

$$\dim C(u(\mathcal{A})\alpha) = \deg v(\lambda) = \dim W.$$

因此有 $W = C(u(\mathcal{A})\alpha) = \mathrm{Ker}v(\mathcal{A})$. 于是 $\mathcal{A}$ 所有不变子空间为

$$\{C(g(\mathcal{A})(\alpha)) \mid g(\lambda)\text{为}m_{\mathcal{A}}(\lambda)\text{的首一因式}\}$$

即 $\mathcal{A}$ 的不变子空间只有有限个. 再进一步，我们可以得到两个 V 为 $\mathcal{A}$-循环空间的充要条件为
(1)$\mathcal{A}$ 只有有限个不变子空间.
(2)$\mathcal{A}$ 的任一一个不变子空间 W, 都存在 $v(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$, 使得 $W = \mathrm{Ker}v(\mathcal{A})$.

2.6.2 线性空间的循环子空间直和分解

问题 2.32. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 给定非零向量 $\alpha \in V$, 若标准分解式

$$m_\alpha(\lambda) = P_1^{r_1}(\lambda)P_2^{r_2}(\lambda)\cdots P_l^{r_l}(\lambda).$$

记 $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}|_{K[\mathcal{A}]\alpha}$, 则存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ 使得

1. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l$
2. $K[\mathcal{A}]\alpha_j = \mathrm{Ker}P_j^{r_j}(\mathcal{A}_\alpha), 1 \le j \le l$
3. $K[\mathcal{A}]\alpha = K[\mathcal{A}]\alpha_1 \oplus K[\mathcal{A}]\alpha_2 \cdots \oplus K[\mathcal{A}]\alpha_t$
4. 记 $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}|_{K[\mathcal{A}]\alpha_j}$, 则 $f_{\mathcal{A}_j}(\lambda) = m_{\mathcal{A}_j}(\lambda) = m_{\alpha_j}(\lambda) = P_j^{r_j}(\lambda)$.

证明. .

1. 令 $g_i(\lambda)=\prod\limits_{j\neq i}P_j^{r_j}(\lambda), 1\le i\le l$. 则 $g_1(\lambda),g_2(\lambda),\cdots,g_l(\lambda)$ 互素, 因此存在 $u_1(\lambda),u_2(\lambda),\cdots,u_l(\lambda)\in P[\lambda]$, 使得
$$u_1(\lambda)g_1(\lambda)+u_2(\lambda)g_2(\lambda)+\cdots+u_lg_l(\lambda)=1.$$
从而 $\alpha=u_1(\mathcal{A})g_1(\mathcal{A})\alpha+\cdots+u_l(\mathcal{A})g_l(\mathcal{A})\alpha$. 令 $\alpha_j=u_j(\mathcal{A})g_j(\mathcal{A})\alpha, j=1,2,\cdots,l$. 则 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l$. 且容易验证 $K[\mathcal{A}]\alpha=K[\mathcal{A}]\alpha_1+K[\mathcal{A}]\alpha_2+\cdots+K[\mathcal{A}]\alpha_l$.

2. 由于 $P_j^{r_j}(\mathcal{A}_\alpha)\alpha_j=P_j^{r_j}(\mathcal{A})u_j(\mathcal{A})g_j(\mathcal{A})\alpha=u_j(\mathcal{A})m_\alpha(\mathcal{A})\alpha=0$. 从而 $K[\mathcal{A}]\alpha_j\subseteq \mathrm{Ker}P_j^{r_j}(\mathcal{A}_\alpha)$. 另一方面, 若 $f(\mathcal{A})\alpha\in\mathrm{Ker}P_j^{r_j}(\mathcal{A}_\alpha)$, 有
$$0=g_i(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\alpha=f(\mathcal{A})u_i(\mathcal{A})g_i(\mathcal{A})\alpha=f(\mathcal{A})\alpha_i,\quad i\neq j.$$
从而 $f(\mathcal{A})\alpha=f(\mathcal{A})(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l)=f(\mathcal{A})\alpha_j\in K[\mathcal{A}]\alpha_j$. 所以 $\mathrm{Ker}P_j^{r_j}(\mathcal{A}_\alpha)\subseteq K[\mathcal{A}]\alpha_j$, 于是 $\mathrm{Ker}P_j^{r_j}(\mathcal{A}_\alpha)=K[\mathcal{A}]\alpha_j$.

3. 设 $f_1(\mathcal{A})(\alpha_1)+f_2(\mathcal{A})(\alpha_2)+\cdots+f_l(\mathcal{A})(\alpha_l)=0$, 其中 $f_j(\mathcal{A})\alpha_j\in K[\mathcal{A}]\alpha_j, j=1,2,\cdots,l$. 注意到 $g_i(\mathcal{A})f_j(\mathcal{A})(\alpha_j), i\neq j$. 从而有
$$f_j(\mathcal{A})(\alpha_j)=\left(\sum_{k=1}^{l}u_k(\mathcal{A})g_k(\mathcal{A})\right)f_j(\mathcal{A})(\alpha_j)=u_j(\mathcal{A})g_j(\mathcal{A})f_j(\mathcal{A})(\alpha_j)=u_j(\mathcal{A})g_j(\mathcal{A})\left(\sum_{k=1}^{l}f_k(\mathcal{A})(\alpha_k)\right)=0.$$
即零向量表示唯一, 故为直和.

4. 由于 $m_{\alpha_j}(\lambda)|P_j^{r_j}(\lambda)$, 故可设 $m_{\alpha_j}(\lambda)=P_j^{a_j}(\lambda), a_j\le r_j$. 又由于 $m_\alpha(\lambda)=[m_{\alpha_1}(\lambda),m_{\alpha_2}(\lambda),\cdots,m_{\alpha_l}(\lambda)]$. 从而 $a_j=r_j, 1\le j\le l$.

■

注 2.33. 由于 $m_{\alpha_j}(\lambda)=P_j^{r_j}(\lambda)$, 下面证明 $K[\mathcal{A}]\alpha_j$ 不能再分解为非平凡 $\mathcal{A}$-子空间直和. 采用反证法, 设 $K[\mathcal{A}]\alpha_j=U_1\oplus U_2$, 记 $\mathcal{A}$ 限制在 U_i 上的线性变换为 $\mathcal{A}_i$, 则 $m_{\mathcal{A}_i}(\lambda)\mid m_{\alpha_j}(\lambda)$, 所以 $m_{\mathcal{A}_i}(\lambda)=P_j^{k_i}(\lambda)$, 不妨设 $r_j>k_1\ge k_2\ge 1$, 因此由引理 2.28 有 $m_{\alpha_j}(\lambda)=[m_{\mathcal{A}_1},m_{\mathcal{A}_2}]=P_j^{k_1}(\lambda)$ 矛盾. 所以上述直和分解是最优的.

设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, 设 $\mathcal{A}$ 的非常数不变因子为 $d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$, 则由有理标准型理论存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in V$, 使得
$$V=K[\mathcal{A}]\alpha_1\oplus K[\mathcal{A}]\alpha_2\oplus\cdots\oplus K[\mathcal{A}]\alpha_k.$$
其中 $f_{\mathcal{A}_i}(\lambda)=m_{\mathcal{A}_i}(\lambda)=m_{\alpha_i}(\lambda)=d_i(\lambda)(1\le i\le k)$. 设 $m_{\alpha_i}(\lambda)$ 的标准分解式 $m_{\alpha_i}(\lambda)=P_1^{r_{i_1}}(\lambda)P_2^{r_{i_2}}\cdots P_l^{r_{i_l}}, 1\le i\le k$. 其中 $0\le r_{1_j}\le r_{2_j}\le\cdots\le r_{k_j}, 1\le j\le l$. 根据问题 2.32 的 3 有
$$K[\mathcal{A}]\alpha_i=K[\mathcal{A}]\alpha_{i_1}\oplus K[\mathcal{A}]\alpha_{i_2}\oplus\cdots\oplus K[\mathcal{A}]\alpha_{i_l}, 1\le i\le k.$$

若 $r_{ii}=0$, 则 $\alpha_{ii}=0$; 分解式中满足 $r_{ij}>0$ 的 $P_j^{r_{ij}}(\lambda)$ 称为 $\mathcal{A}$ 的初等因子.

定理 2.34. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 V 的线性变换. 设 $\mathcal{A}$ 的初等因子组为 $P_j^{r_{ij}}(\lambda), 1\le i\le k, 1\le j\le l$. 则

1. $V=\bigoplus\limits_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le l}} K[\mathcal{A}]\alpha_{ij}$.
2. $\mathcal{A}|_{K[\mathcal{A}]\alpha_{ij}}$ 的特征多项式和极小多项式均为 $P_j^{r_{ij}}(\lambda)$. 且 $K[\mathcal{A}]\alpha_{ij}$ 不能再分解为非平凡 $\varphi-$子空间的直和.
3. $f_{\mathcal{A}}(\lambda)=P_1^{e_1}(\lambda)P_2^{e_2}(\lambda)\cdots P_l^{e_l}(\lambda), e_j=\sum\limits_{i=1}^k r_{ij}$. $m_{\mathcal{A}}(\lambda)=P_1^{r_{k1}}(\lambda)P_2^{r_{k2}}(\lambda)\cdots P_l^{r_{kl}}(\lambda)$, 即 $\mathcal{A}$ 的最后一个不变因子 $d_k(\lambda)$.
4. 存在 V 的一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的表示阵为分块对角阵, 对角分块为 Frobenius 块 $F(P_j^{ij}(\lambda)), 1\le i\le k, 1\le j\le l$.

2.6.3 循环空间的等价刻画

问题 2.35. 设有 n 阶分块对角阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k\end{pmatrix},$$

其中 A_i, B_i 是同阶方阵. 设 A_i 适合非零多项式 $g_i(x)$, 且 $g_i(x)$ 两两互素，且对每个 i, 存在 $f_i(x)$ 使得 $B_i=f_i(A_i)$, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $B=f(A)$.

证明. 由定理 2.2，存在 $h(x)=g_i(x)q_i(x)+f_i(x)$, 则有 $h(A_i)=f_i(A_i)=B_i$. 于是

$$h(A)=\operatorname{diag}\{h(A_1),h(A_2),\cdots,h(A_k)\}=\operatorname{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}=B.$$

若 $\deg(h(x))\le n-1$, 则证明已经做好. 否则，作带余除法 $h(x)=g(x)q(x)+f(x)$, 其中 $\deg(f(x))<n, g(x)$ 为 A 的特征多项式，根据 Cayley-Hamilton 定理 $f(A)=B$. ■

问题 2.36. 设 V 是 n 维复线性空间，$\mathscr{A}\in\operatorname{End}(V)$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

$\mathscr{A}$ 的不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$, 证明下面结论等价:

1. V 只有有限个不变子空间.

2. $\mathscr{A}$ 的特征子空间都是一维的.

3. $\mathscr{A}$ 的 Jordan 标准型中属于特征值 λ_i 的 Jordan 块只有一个.

4. $\mathscr{A}$ 的最小多项式等于 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

5. $\mathscr{A}$ 的属于 λ_i 的根子空间 $R_{\lambda_i}(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的循环子空间.

6. V 是 $\mathscr{A}$ 的循环空间，即存在 $\alpha \in V$ 使得 $\alpha, \mathscr{A}\alpha, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}\alpha$ 线性无关.

7. $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

8. 与 $\mathscr{A}$ 可交换的线性变换 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的多项式，即存在 $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $\mathscr{B} = f(\mathscr{A})$.

9. 对任意 $\mathscr{A}$-子空间 W, 存在多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $W = f(\mathscr{A})^{-1}(0)$.

证明. 部分命题比较简单，下面只讨论部分等价命题.

- $3 \Rightarrow 8$. 设 $\mathscr{A}$ 在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的表示阵为

  $$J = \operatorname{diag}\{J(\lambda_1, k_1), J(\lambda_2, k_2), \cdots, J(\lambda_s, k_s)\},$$

  其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互不相同. 对任意 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$, 设 $\mathscr{B}$ 在这组基下的表示阵为 B, 由问题 2.7 可知 B 一定是形如

  $$B = \operatorname{diag}\{B_1, B_2, \cdots, B_s\},$$

  且对每个 B_i, 存在 $f_i(x)$ 使得 $B_i = f_i(J(\lambda_i, k_i))$. 因为 $J(\lambda_1, k_1), \cdots, J(\lambda_s, k_s)$ 适合多项式互素，因此由问题 2.35 可知一定存在 $f(x)$ 使得 $B = f(J)$, 于是结论成立.

- $8 \Rightarrow 7$. 反证. 设 $\mathscr{A}$ 的非常数不变因子为 $d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda), k \geq 2$. 则 $\mathscr{A}$ 的有理标准型为

  $$F = \operatorname{diag}\{F(d_1(\lambda)), \cdots, F(d_k(\lambda))\}.$$

  现在构造

  $$B = \operatorname{diag}\{I_{n1}, O_{n2}, \cdots\}.$$

  显然 $BF = FB$. 所以存在多项式 $g(x)$ 使得 $B = g(F)$. 即 $g(F(d_1(\lambda))) = I_{n1}, g(F(d_2(\lambda))) = O_{n2}$. 显然不可能. 这是因为 $d_1(\lambda)|d_2(\lambda)|g(\lambda)$, 从而一定有 $g(F(d_1(\lambda))) = O_{n1}$, 矛盾.

- $3 \Rightarrow 1$. 设 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 互不相同. 则

$$V = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \cdots \oplus R_{\lambda_s}.$$

为 $\mathscr{A}$ 的根子空间分解. 由条件可知 $\mathscr{A}|_{R_{\lambda_i}}(i = 1, 2, \cdots, s)$ 在一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{k_i}$ 下的表示阵为

$$J(\lambda_i, k_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

现在令 $\mathscr{B}_i = \mathscr{A}|_{R_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{id}$, 则 W 是 $\mathscr{A}|_{R_{\lambda_i}}$-子空间当且仅当 W 是 $\mathscr{B}_i$-子空间. 注意到 $\mathscr{B}_i$ 在这组基下的表示阵为

$$J(0, k_i) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

即有

$$\varepsilon_1 \xrightarrow{\mathscr{B}_i} \varepsilon_2 \xrightarrow{\mathscr{B}_i} \cdots \xrightarrow{\mathscr{B}_i} \varepsilon_{k_i - 1} \xrightarrow{\mathscr{B}_i} \varepsilon_{k_i} \xrightarrow{\mathscr{B}_i} 0.$$

设 W 是 $\mathscr{B}_i$ 非零不变子空间，则 $\mathscr{B}_i|_W$ 的特征多项式为 λ^t, 其中 $1 \leq t \leq k_i$ 于是对任意 $\alpha = m_1\varepsilon_1 + \cdots + m_{k_i}\varepsilon_{k_i} \in W$, 由 Cayley-Hamilton 定理有

$$0 = \mathscr{B}_i^t(\alpha) = m_1\varepsilon_{1+t} + \cdots + m_{k_i - t}\varepsilon_{k_i},$$

从而 $m_1 = m_2 = \cdots = m_{k_i - t} = 0$. 所以 $W = L(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t)$, 因此 $\mathscr{A}|_{R_{\lambda_i}}$ 只有 $k_i + 1$ 个不变子空间，因此 $\mathscr{A}$ 只有 $(1 + k_1)(1 + k_2)\cdots(1 + k_s)$ 个不变子空间，是有限的.

- $1 \Rightarrow 2$. 假如 $\mathscr{A}$ 关于特征值 λ_i 的特征子空间维数大于等于 2. 则 $\mathscr{A}$ 有两个属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量 α_1, α_2, 令

$$W_k = L(\alpha_1 + k\alpha_2), \quad k \in \mathbb{Z},$$

则显然 W_k 是 $\mathscr{A}-$ 子空间，且两两互不相同，这与 $\mathscr{A}$ 仅有有限个不变子空间矛盾.

- $9 \Rightarrow 2$. 若 $\mathscr{A}$ 属于特征值 λ_i 的特征子空间维数大于等于 2, 则 $\mathscr{A}$ 属于特征值 λ_i 的特征子空

间 V_{λ_i} 至少有两个线性无关的向量记为 α_1,α_2, 现在令 $W=L(\alpha_1)$, 则 W 显然是 $\mathscr{A}$-子空间. 若存在 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $W=f(\mathscr{A})^{-1}(0)$, 则 $x-\lambda_i\mid f(x)$. 因此

$$V_{\lambda_i}=(\mathscr{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{-1}(0)\subseteq f(\mathscr{A})^{-1}(0)=W,$$

这与 $W\subset V_{\lambda_i}$ 矛盾.

■

2.6.4 双中心化子定理

定理 2.37. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换.

$$C(\mathcal{A})=\{\mathcal{B}\in\mathrm{End}(V)\mid\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}\},$$

称为 $\mathcal{A}$ 的中心化子,

$$C^2(\mathcal{A})=\{\mathcal{C}\in\mathrm{End}(V)\mid\mathcal{B}\mathcal{C}=\mathcal{C}\mathcal{B},\forall\mathcal{B}\in C(\mathcal{A})\}$$

称为 $\mathcal{A}$ 的双中心化子，则有 $C^2(\mathcal{A})=\mathbb{K}[\mathcal{A}]$.

2.7 Jordan-Chevalley 分解

问题 2.38. 设 $\mathbb{F}$ 为代数闭域，V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，x 为 V 上的线性变换，则存在 V 上的半单线性变换 x_s 和幂零线性变换 x_n 满足下面的条件:

1. $x=x_s+x_n,[x_s,x_n]=x_sx_n-x_nx_s=0$.
2. 存在常数项为零多项式 $p(x),q(x)$ 使得 $x_s=p(x),x_n=q(x)$.
3. 如果 x_s',x_n' 分别为半单和幂零线性变换使得 $x=x_s'+x_n',[x_s',x_n']=0$. 则必有 $x_s=x_s',x_n=x_n'$.

证明. 设 $f(\lambda)$ 是 x 的特征多项式，则由 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，$f(\lambda)$ 有分解

$$f(\lambda)=(\lambda-a_1)^{l_1}(\lambda-a_2)^{l_2}\cdots(\lambda-a_k)^{l_k},$$

其中 $a_i\in\mathbb{F},l_i\in\mathbb{N}^*(i=1,2,\cdots,k),a_i\neq a_j,(i\neq j)$. 若记 $R_{a_i}=\left\{v\in V\mid(x-a_i\mathrm{id})^{l_i}v=0\right\}$, 则我们有 R_{a_i} 是 x 不变子空间且有分解

$$V=R_{a_1}\oplus R_{a_2}\oplus\cdots\oplus R_{a_k},$$

若 $v \in R_{a_i}$, 定义线性变换 x_s 使得 $x_s|_{R_{a_i}} = a_i\mathrm{id}$, 从而 x_s 是半单的. 再令 $x_n = x - x_s$, 则有 $x_n^{l_i}(v) = (x - a_i\mathrm{id})^{l_i}(v) = 0$. 因此容易证明 x_n 是幂等变换. 此外注意到

$$x_s x_n(v) = x_s(x - x_s)(v) = a_i x(v) - a_i^2 v;$$

$$x_n x_s(v) = (x - x_s)x_s(v) = a_i(x - x_s)(v) = a_i x(v) - a_i^2 v,$$

所以 $[x_s, x_n] = 0$.

- 若存在 $a_i = 0$, 不妨设 $a_1 = 0$. 因为 $(\lambda - a_i)^{l_i}$ 互素，所以由定理 2.2 存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $p(\lambda)$ 满足
$$p(\lambda) \equiv a_i(\mathrm{mod}(\lambda - a_i)^{l_i}), 1 \leq i \leq k.$$
因此根据 $a_1 = 0$ 可知 $p(\lambda)$ 的常数项为零. 现考虑线性变换 $p(\lambda)$, 设 $v \in R_{a_i}$, 将 $p(\lambda)$ 写成 $p(\lambda) = p_i(\lambda)(\lambda - a_i)^{l_i} + a_i$, 从而
$$p(x)v = p_i(x)(x - a_i\mathrm{id})(v) + a_i v = a_i v = x_s v,$$
所以容易推出 $p(x) = x_s$. 由于 $x_n = x - x_s$, 所以 x_n 也可以写成 x 多项式形式，且常数项为零.

- 假如 $a_i \neq 0$, 就添加 λ, 做互素多项式 $\lambda, (\lambda - a_i)^{l_i}$ 的关于 $0, a_i$ 的同余多项式，其余和上述证明相同.

下面证明唯一性. 假如还存在满足条件的另一分解 $x = \tilde{x}_s + \tilde{x}_n$. 则满足

$$[\tilde{x}_s, x] = [\tilde{x}_n, x] = 0.$$

从而根据 x_s, x_n 都可以写成 x 的多项式，所以 $[\tilde{x}_s, x_s] = [\tilde{x}_n, x_n] = 0$. 于是 $\tilde{x}_s - x_s$ 也是幂零变换，$\tilde{x}_n - x_n$ 也是半单线性变换. 从而 $\tilde{x}_s - x_s = \tilde{x}_n - x_n$ 是既半单又幂零的线性变换，从而只能是零变换，这就证明了唯一性. ■

问题 2.39. *设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域，V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$M_1 \subseteq M_2$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的两个线性子空间，定义 $W = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, M_2] \subseteq M_1\}$. 又设 $x \in W$ 满足条件 $\mathrm{tr}(xy) = 0, \forall y \in W$, 证明: x 是幂零线性变换.*

证明. 因为 $\mathbb{F}$ 是特征为零的代数闭域，从而可以看成 $\mathbb{Q}$ 上的扩域，因此 $\mathbb{F}$ 可以看成 $\mathbb{Q}$-线性空间. 所以 x 是幂零变换当且仅当 x 的特征值全为零. 不妨设 x 的特征值为 $a_1, \cdots, a_n, E$ 为 $\mathbb{F}$ 的由 $a_1, \cdots, a_n$ 线性张成的 $\mathbb{Q}$-线性子空间. 下面我们要证明 $E = 0$, 为此只需证明任何由 E 到 $\mathbb{Q}$ 的线性映射一定为零. 由 Jordan 标准型理论，存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 使得 x 在这组基下的表示阵为上三角阵，且对角元为 $a_1, \cdots, a_n$. 设 $f \in E^*$ 为 f 到 $\mathbb{Q}$ 任一线性映射，定义 V 上的线性变换 y 使得 y 在这组基下的表示阵为 $A = \mathrm{diag}\{f(a_1), \cdots, f(a_n)\}$. 取定 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一组基 e_{ij} 使得 e_{ij} 在

$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的表示阵为 E_{ij} 是基础矩阵. 则 ad_y 在这 $\mathfrak{gl}(V)$ 的基 e_{ij} 下的表示阵为 $A\otimes I_n - I_n\otimes A$ 为对角阵且对角元为 $f(a_i)-f(a_j), 1\le i,j\le n$. 从而由 Lagrange 插值定理存在常数项为零的 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $g(x)$ 使得 $g(a_i-a_j)=f(a_i)-f(a_j)$. 设 $x=x_s+x_n$ 为 x 的 Jordan-Chevalley 分解，则我们有 $g(\mathrm{ad}_{x_s})=\mathrm{ad}_y$. 又因为 $\mathrm{ad}_x=\mathrm{ad}_{x_s}+\mathrm{ad}_{x_n}$, 且 ad_{x_s} 可以写成 ad_x 的多项式，所以 ad_y 也可以写成 ad_x 的多项式. 所以一定有 $[y,M_2]=\mathrm{ad}_y(M_2)\subseteq M_1$, 即 $y\in W$. 容易计算此时

$$\mathrm{tr}(xy)=\sum_{i=1}^n f(a_i)a_i=0.$$

两边作用 f 得 $\sum\limits_{i=1}^n f^2(a_i)=0$. 因此由 $f(a_i)$ 为有理数得 $f(a_i)=0$. 所以 $f=0$. ■

2.8 数乘变换的等价刻画

问题 2.40. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$, 证明以下结论等价：

1. $\mathscr{A}$ 是数乘变换.
2. $\forall\mathscr{B}\in\mathcal{L}(V),\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.
3. $\forall\mathscr{B}\in GL(V),\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.
4. $\mathscr{A}$ 在任何一组基下的表示阵相同.
5. 任意非零向量都是 $\mathscr{A}$ 的特征向量.
6. $\mathscr{A}$ 的最小多项式是一次的.
7. $\mathscr{A}$ 存在 $n+1$ 个特征向量，满足其中任何 n 个向量线性无关.
8. 对于给定 $1\le i\le n$, 有任意 i 维子空间都是 $\mathscr{A}$-子空间.

证明. 部分比较显然，下面讨论部分命题互推.

- $2\Rightarrow 1$. 取定 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 设 $\mathscr{A}$ 在这组基下的表示阵为 A. 现在设 $\mathscr{B}_{ij}\in\mathcal{L}(V)$ 在这组基下的表示阵为 E_{ij} 为基础矩阵. 则有 $E_{ij}A=AE_{ij}, 1\le i,j\le n$. 所以

$$a_{jk}E_{il}=E_{ij}(AE_{kl})=(E_{ij}E_{kl})A=\begin{cases}0, & j\ne k\\ E_{il}A, & j=k\end{cases}$$

  因此当 $j\ne k, a_{jk}=0$. 当 $j=k$ 时，$a_{jj}=a_{ll}$, 所以 A 是数量矩阵, 故 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

- $3\Rightarrow 1$. 只需注意到 E_n+E_{ij} 是可逆阵，由前面讨论可知结论成立.

- $4 \Rightarrow 1$. 在前面讨论基础上，条件等价于对任意 $P \in \mathrm{GL}(V)$, 有 $P^{-1}AP = A$, 即 $AP = PA$, 由 $3 \Rightarrow 1$ 可知结论成立.

- $5 \Rightarrow 1$. 首先 $\mathscr{A}$ 只有一个不同特征值. 若不然，则存在 α_1, α_2 是属于 $\mathscr{A}$ 的不同特征值特征向量，因此 $\alpha_1 + \alpha_2$ 必不可能是 $\mathscr{A}$ 的特征向量，矛盾了. 其次，$\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关特征向量 (任取 V 的一组基), 因此 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

- $6 \Rightarrow 1$. 由 Cayley-Hamilton 定理结论显然.

- $1 \Rightarrow 7$. 令 $e_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为单位列向量,$e_{n+1} = (1, 1, \cdots, 1)^T$, 则显然其中任意 n 个向量线性无关.

- $7 \Rightarrow 1$. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 为满足条件的特征向量，其所对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$, 记 $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1}$, 记 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots$ 下的表示阵为 $A_i, (i = 1, 2, \cdots, n+1)$. 则有
$$\mathrm{tr}\mathscr{A} = \mathrm{tr}A_i = \sigma - \lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n+1,$$
所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1}$, 所以 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

- $8 \Rightarrow 5$ 注意，$i = 1$ 时，条件 8 就是条件 5. 当 $2 \le i \le n$, 由于任意 i 维子空间都可以写成两个 $i+1$ 维子空间的交，而 $\mathscr{A}$ 的两个不变子空间的交仍然是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，所以一定能推出任意 1 维子空间都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，即 5 成立.

■

2.9 正交投影变换等价刻画

问题 2.41. 设 V 是 n 维欧式空间，$\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$, 满足
$$\mathscr{A}^2 = \mathscr{A},$$
则如下结论等价：

1. 对任意 $\alpha \in V, |\mathscr{A}(\alpha)| \le |\alpha|$.
2. $\mathscr{A}^{-1}(0) \perp \mathscr{A}(V)$.
3. $\mathscr{A}$ 是幂等对称变换.
4. $\mathscr{A}$ 是 V 到 $\mathscr{A}(V)$ 的正交投影变换.

证明. 下面的讨论，尽可能从更多角度出发.

- $1 \Rightarrow 2$. 下面着重讨论下该命题.

(a) 反证. 若存在 $\alpha \in \mathscr{A}^{-1}(0), \beta \in \mathscr{A}(V)$ 使得 $(\alpha,\beta) \neq 0$. 现在令 $\xi = \beta - \dfrac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$, 则 $\xi \perp \beta$ 且有

$$(\beta,\beta) = (\xi,\xi) + (\alpha,\beta)^2 > (\xi,\xi),$$

但是另一方面，由 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}, \beta \in \mathscr{A}(V)$, 则存在 $\gamma \in V$ 使得 $\mathscr{A}(\gamma) = \beta$. 于是有

$$\mathscr{A}(\xi) = \mathscr{A}\left(\beta - \frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\right) = \mathscr{A}^2(\gamma) = \mathscr{A}(\gamma) = \beta,$$

即

$$(\beta,\beta) = (\mathscr{A}(\xi), \mathscr{A}(\xi)) > (\xi,\xi),$$

与条件矛盾.

(b) 记 $\mathscr{A}$ 属于特征值 $0,1$ 的特征子空间为 V_0, V_1, 则有 $V = V_0 \oplus V_1$. 任取 $v_0 \in V_0, v_1 \in V_1$, 令 $v = v_0 + tv_1, t \in \mathbb{R}$, 则 $\mathscr{A}(v) = tv_1$. 于是由条件有

$$t^2(v_1,v_1) = (\mathscr{A}(v), \mathscr{A}(v)) \leq (v,v) = t^2(v_1,v_1) + (v_0,v_0) + 2t(v_0,v_1),$$

即有 $2t(v_0,v_1) + (v_0,v_0) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, 从而只能是 $(v_0,v_1) = 0$, 即有

$$V_0 \perp V_1 = \mathscr{A}^{-1}(0) \perp \mathscr{A}(V).$$

- $2 \Rightarrow 3$. 分别取 $\mathscr{A}(V)$ 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 和 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的一组标准正交基 $\varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n$, 则 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 构成 V 的一组标准正交基，且 $\mathscr{A}$ 在这组基下的表示阵为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 所以 $\mathscr{A}$ 是对称变换.

- $3 \Rightarrow 2$. 对任意 $\alpha \in \mathscr{A}^{-1}(0), \beta = \mathscr{A}(\gamma) \in \mathscr{A}(V)$, 有

$$0 = (\mathscr{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathscr{A}^*(\beta)) = (\alpha, \mathscr{A}(\beta)) = (\alpha, \mathscr{A}^2(\gamma)) = (\alpha, \mathscr{A}(\gamma)) = (\alpha,\beta),$$

  于是结论得证.

- $3 \Rightarrow 4$ 由正交投影定义可证.

- $1 \Rightarrow 3$. 设 $\mathscr{A}$ 在 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的表示阵为 A, 则条件等价于对任意 $X \in \mathbb{R}^n$,$(AX)'(AX) = X'A'AX \leq X'X$. 于是 $A'A$ 的特征值小于等于 1. 现在考虑 A 的奇异值分解，即存在正交阵 P,Q 使得 $A = P\Lambda Q$, 其中

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r, 0, \cdots, 0\},$$

  满足 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$. 设 $D = QP = (d_{ii})$ 仍为正交阵，且根据 $A^2 = A$ 我们有

$\Lambda D\Lambda = \Lambda$, 于是有 $d_{ii}\sigma_i^2 = \sigma_i (i = 1, 2, \cdots, r)$. 则根据 $|d_{ii}| \leq 1$, 所以 $\sigma_i \geq 1$. 所以 $A'A$ 的非零特征值为 $\sigma_i^2 \geq 1 (i = 1, 2, \cdots, r)$. 从而只能是 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_r = 1$. 因此

$$\mathrm{tr}(A'A) = r(A'A) = r(A) = r(A^2) = \mathrm{tr}A^2,$$

于是有

$$\mathrm{tr}((A - A')(A - A')') = \mathrm{tr}(AA' - A^2 - (A')^2 + A'A) = 2\mathrm{tr}(A'A) - 2\mathrm{tr}A^2 = 0.$$

即 $A' - A = 0$, 所以 $\mathscr{A}$ 是对称变换.

■

可稍作推广：

问题 2.42. 设 n 阶实方阵满足 $A^3 = A$, 证明：若对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 均有 $\alpha^T A^T A\alpha \leq \alpha^T \alpha$, 则 A 是对称矩阵.

2.10 Moore-Penrose 广义逆

引理 2.43. 设 W 是 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\mathbb{R}^n$ 在 W 上的正交投影变换记为 $\mathscr{A}_W$, 称 $\mathscr{A}_W$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$(标准单位列向量) 下的表示阵为正交投影矩阵，记为 P_W, 则

$$\mathscr{A}_W(\alpha) = P_W(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 W 的一组基，记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$, 注意到任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n, AX = \alpha$ 的最小二乘解为 $(A'A)^{-1}A'\alpha$, 因此 $\mathscr{A}_W(\alpha) = A(A'A)^{-1}A'\alpha$, 所以 $P_W = A(A'A)^{-1}A'$.

定理 2.44. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 记 A 的列空间为 $R(A)$, 则 A 的 Moore-Penrose 逆 (简称广义逆)$X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 满足

$$AX = P_{R(A)}, \quad XA = P_{R(X)}.$$

反之, 若 $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 满足上式，则称 X 为 A 的广义逆.

下面我们利用奇异值分解引出 Moore-Penrose 广义逆.

问题 2.45. 设 V, U 分别是 n, m 维欧式空间，$\varphi : V \mapsto U$ 为线性映射，求证：存在唯一的线性映射 $\psi : U \to V$ 使得其满足如下条件：

$$(1)\varphi\psi\varphi = \varphi; \qquad (2)\psi\varphi\psi = \psi; \qquad (3)\psi\varphi\text{和}\varphi\psi\text{都是自伴随算子}.$$

上述 ψ 称为 φ 的 Moore-Penrose 广义逆, 记为 $\varphi^\dagger$.

证明. 令 $\xi : (\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp} \mapsto \mathrm{Im}\varphi$ 为 φ 限制在 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的线性变换. 显然 ξ 是一个线性同构. 令

$$\psi(u)=\begin{cases}\xi^{-1}(u), & u\in \mathrm{Im}\varphi\\ 0, & u\in(\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}\end{cases}.$$

由于 $U=\mathrm{Im}\varphi\oplus(\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$, 从而 ψ 是 $U\to V$ 上的线性映射. 考虑 φ 的奇异值分解，设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$ 分别是 V,U 上的一组标准正交基，使得 φ 在这两组基下的表示阵为 $\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 其中 $S=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r\},\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r$ 为 φ 的所有奇异值. 则 $\varphi(e_i)=\sigma_i f_i(1\le i\le r);\varphi(e_j)=0(r+1\le j\le n)$. 容易验证

$$\mathrm{Ker}\varphi=L(e_{r+1},\cdots,e_n),\quad (\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp}=L(e_1,e_2,\cdots,e_r);$$

$$\mathrm{Im}\varphi=L(f_1,f_2,\cdots,f_r),\quad (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}=L(f_{r+1},\cdots,f_m);$$

并且有 $\psi(f_i)=\dfrac{1}{\sigma}e_i,(1\le i\le r);\psi(f_j)=0(r+1\le j\le m)$. 容易验证 ψ 满足上述三个条件，这就证明了 ψ 的存在性. 下证唯一性. 若 $\varphi^{\dagger},\varphi^{\#}$ 是 φ 的广义逆，重复利用上述三个条件可以证得其一定相等.

∎

值得注意的是 $\varphi^{\dagger}\varphi,\varphi\varphi^{\dagger}$ 分别在标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 下的表示阵为 $\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$ 和 $\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times m}$ 为幂等阵. 特别的当 $m=n$ 且 φ 为可逆线性变换，则 $\varphi^{\dagger}=\varphi^{-1}$, 所以线性映射的广义逆可以看成线性同构的逆的推广.

问题 2.45 的代数版本就是矩阵的 Moore-Penrose 广义逆. 设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵, 则存在唯一的 $n\times m$ 实矩阵 $A^{\dagger}$, 满足如下条件：

$$(1)AA^{\dagger}A=A;\qquad (2)A^{\dagger}AA^{\dagger}=A^{\dagger};\qquad (3)A^{\dagger}A\text{与}AA^{\dagger}\text{都是实对称阵}.$$

问题 2.46. 设 V,U 分别为 n,m 维欧式空间,$\varphi:V\to U$ 为线性映射,$\varphi^{\dagger}$ 为 φ 的广义逆. 证明：$\varphi^{\dagger}\varphi$ 是 V 到 $(\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp}$ 上的正交投影,$\varphi\varphi^{\dagger}$ 是 U 到 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的正交投影.

证明. 由问题 2.45 的证明过程可知，存在 V 的标准标准正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和 U 的一组标准正交基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$ 使得

$$\varphi(e_i)=\sigma_i f_i(1\le i\le r),\quad \varphi(e_i)=0(r+1\le i\le n);$$

$$\varphi^{\dagger}(f_j)=\frac{1}{\sigma_j}e_j(1\le j\le r),\quad \varphi^{\dagger}(f_j)=0(r+1\le j\le n).$$

所以 $\varphi^\dagger\varphi(e_i)=e_i(1\le i\le r),\varphi^\dagger\varphi(e_i)=0(r+1\le i\le n)$, 且 $(\mathrm{Ker}\varphi)^\perp=L(e_1,e_2,\cdots,e_r)$, 所以 $\varphi^\dagger\varphi$ 是 V 到 $(\mathrm{Ker}\varphi)^\perp$ 的正交投影. 同理可证 $\varphi\varphi^\dagger$ 是 U 到 $\mathrm{Im}\varphi$ 的正交投影. ■

问题 2.47. (上海交通大学 2023) 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 阶实矩阵，$r(A)=r$,

1. 证明：存在唯一的 $P\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 使得 $P^T=P=P^2,r(P)=r,PA=A$.

2. 求 P 的特征多项式与特征子空间.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\\0&0\end{pmatrix}$, 求 P 与矩阵 $B=(P,P)$ 的奇异值分解.

证明. .

1. 考虑 A 的奇异值分解 $A=N\begin{pmatrix}S&0\\0&0\end{pmatrix}_{m\times n}Q$, 其中 N,Q 为正交阵,$S=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r\},\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r$ 为 A 的所有奇异值. 令 $A^\dagger=Q'\begin{pmatrix}S^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}_{n\times m}N'$, 令 $P=AA^\dagger$. 则 P 满足上述条件. 下证明唯一性. 若 $P^\#$ 也满足题目条件，因为 $(P-I_m)A=0$, 若记 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$, 不妨设 A 前 r 个列向量线性无关，从而根据 $r(P)=r(A)$, 且 P 可对角化，我们有 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$, 其中 V_1 是 P 关于特征值 1 的特征子空间. 同理根据 $(P^\#-I_m)A=0$, 我们有 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 也是 $P^\#$ 关于特征值 1 的特征子空间. 又因为 $V=V_0\perp V_1$, 其中 V_0 是 P 属于特征值 0 的特征子空间，同时也是 $P^\#$ 关于特征值 0 的特征子空间. 从而对任意的 $\beta=\beta_1+\beta_0\in\mathbb{R}^m,\beta_1\in V_1,\beta_0\in V_0$ 我们有 $(P^\#-P)\beta=\beta_1-\beta_1=0$, 从而 $P^\#=P$, 这就证明了唯一性.

2. 由 (1) 显然 P 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^{m-r}(\lambda-1)^r$. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\alpha_i\in\mathbb{R}^m$ 为 A 的列分块，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为其中线性无关的列向量，则根据第一问的讨论，属于特征值 1 的特征子空间为 $L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})$, 将 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 正交化（不妨设本身就已经做好）再扩张为 $\mathbb{R}^m$ 的一组正交基 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_m$, 则 P 属于特征值 0 的特征子空间为 $L(\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_m)$.

3. 由条件可知 $A'A=\begin{pmatrix}2&4\\4&8\end{pmatrix}$, 从而 $|\lambda I_2-A'A|=\lambda(\lambda-10)$, 从而 $A'A$ 的特征值为 $0,10$. 令 $N=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$, 再令 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{pmatrix}$, 将其扩充为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基 $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 从而 $AN=Q\Lambda$, 其中 $\Lambda=$

$\begin{pmatrix}\sqrt{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 即 $A=Q\Lambda N'$, 令 $A^{\dagger}=N\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q'$, 则 $P=AA^{\dagger}=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q'=$ $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0&0&0\end{pmatrix}$. 从而 $B'B=\begin{pmatrix}P&P\\P&P\end{pmatrix}$, 显然 $r(B'B)=r(P)=r(A)=1$,1 是 $B'B$ 的特征值，从而 $B'B$ 的特征值为 1(1 重),0(5 重), 下面求法和上述相同，留给读者.

■

2.11 内射影与最小二乘解

问题 2.48. 设 V 为 n 维欧式空间,W 为 V 的子空间, 则给定 $\alpha\in V$, 存在唯一 $\gamma\in W$, 使得对任意 $\beta\in W$ 有 $(\alpha-\gamma,\alpha-\gamma)\le(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$.

证明. 对任意 $\alpha\in V$, 设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 其中 $\alpha_1\in W,\alpha_2\in W^{\perp}$, 则对任意 $\beta\in W$, 有

$$(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(\alpha_1+\alpha_2-\beta,\alpha_1+\alpha_2-\beta)=(\alpha_2,\alpha_2)+(\alpha_1-\beta,\alpha_1-\beta)\ge(\alpha_2,\alpha_2)$$

等号成立当且仅当 $\beta=\alpha_1$, 让 $\gamma=\alpha_1$ 即可. ■

将上述 γ 称为 α 在 W 中的内射影 (即 α 在 W 中的正交投影). 我们关心的是如何求出 γ. 设 $W=L(\eta_1,\cdots,\eta_s),\gamma=x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_s\eta_s$, 则由 $\alpha-\gamma\in W^{\perp}$, 所以 $(\eta_i,\alpha-\gamma)=0(1\le i\le s)$. 即有线性方程组

$$\begin{cases}(\eta_1,\eta_1)x_1+(\eta_1,\eta_2)x_2+\cdots+(\eta_1,\eta_s)x_s=(\eta_1,\alpha)\\(\eta_2,\eta_1)x_1+(\eta_2,\eta_2)x_2+\cdots+(\eta_2,\eta_s)x_s=(\eta_2,\alpha)\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\eta_s,\eta_1)x_1+(\eta_s,\eta_2)x_2+\cdots+(\eta_s,\eta_s)x_s=(\eta_s,\alpha)\end{cases},\quad(\clubsuit)$$

若 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 是正交向量组, 则方程组 ($\clubsuit$) 的系数矩阵为对角阵, 此时 $x_i=\dfrac{(\eta_i,\alpha)}{(\eta_i,\eta_i)}$, 即

$$\gamma=\frac{(\eta_1,\alpha)}{(\eta_1,\eta_1)}+\frac{(\eta_2,\alpha)}{(\eta_2,\eta_2)}+\cdots+\frac{(\eta_s,\alpha)}{(\eta_s,\eta_s)}$$

这实际就是 Gram-Schmidt 正交化中用到的公式.

对于一般情况, 取 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$, 设 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 在这组基下的坐标表示分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$,α 在这组基下的坐标记为 η. 从而 $(\eta_i,\eta_j)=A_i'A_j,(\eta_i,\beta)=A_i'\eta$. 所方程组 ($\clubsuit$) 等

价的转化成

$$\begin{pmatrix} A_1'A_1 & A_1'A_s & \cdots & A_1'A_s \\ A_2'A_1 & A_2'A_2 & \cdots & A_2'A_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_s'A_1 & A_s'A_1 & \cdots & A_s'A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1'\eta \\ A_2'\eta \\ \vdots \\ A_s'\eta \end{pmatrix}$$

若记 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_s)$, 则方程组 ($\clubsuit$) 可写成 $A'A\boldsymbol{x}=A'\eta$. 从而我们有

问题 2.49. 设 $W=L(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 为 n 维欧式空间 V 的子空间, 则 $\alpha\in V$ 在 W 上的内射影为

$$\gamma = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_s\eta_s$$

的充要条件是 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_s)^T$ 是线性方程组 $A'A\boldsymbol{x}=A'\eta$ 的解.

♯♯♯ 由于内射影总是存在的, 所以线性方程组 $A'A\boldsymbol{x}=A'\eta$ 总有解 (这点也可以通过纯粹的矩阵理论证明, 即证 $r(A'A\mid A'\eta)=r(A'A)$, 细节留给读者)

问题 2.50. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times m},\beta\in\mathbb{R}^n$, 且线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 无解. 称满足 $||\beta-A\boldsymbol{x}||^2=(\beta-A\boldsymbol{x})'(\beta-A\boldsymbol{x})$ 最小的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$ 为方程组 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 的最小二乘解. 证明：$\boldsymbol{x}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 的最小二乘解当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是方程组 $A'A\boldsymbol{x}=A'\beta$ 的解.

证明. 设 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_m),W=L(A_1,A_2,\cdots,A_m)=\mathrm{Im}A$(若将 A 看成 $\mathbb{R}^n$ 上线性映射)，取 $\mathbb{R}^n$ 内积为标准内积, 则由问题 2.48 可知 $\boldsymbol{x}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 的最小二乘解当且仅当 $A\boldsymbol{x}$ 是 β 在 W 上的内射影, 再由问题 2.49 当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是 $A'A\boldsymbol{x}=A\beta$ 的解. ■

♯♯♯$A'A\boldsymbol{x}=A'\beta$ 有唯一解当且仅当 A 是列满秩, 此时唯一解为 $\boldsymbol{x}=(A'A)^{-1}A'\beta$. 若 A 不是列满秩, 则对于方程 $A'A\boldsymbol{x}=A'\beta$ 的任意两个解 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$, 由内射影的唯一性有 $A\boldsymbol{x}_1=A\boldsymbol{x}_2$.

♯♯♯ 对于问题 2.50, 由问题 2.46 可知,$AA^\dagger\beta$ 是 β 到 $\mathrm{Im}A$ 的正交投影, 所以 $\boldsymbol{z}=A^\dagger\beta$ 是 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 的最小二乘解. 且对任意 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 的最小二乘解 $\boldsymbol{x}$, 即有 $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{z}$, 于是存在 $\boldsymbol{y}\in\mathrm{Ker}A$, 使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$. 由问题 2.45 的证明过程可知 $\boldsymbol{z}=A^\dagger\beta\in(\mathrm{Ker}A)^\perp$, 所以 $||\boldsymbol{x}||^2=||\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{z}||^2\geq||\boldsymbol{z}||^2$, 即 $\boldsymbol{z}=A^\dagger\beta$ 是 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 的最小二乘解中长度最小的.

2.12 半单线性变换与应用

2.12.1 半单变换理论基础

问题 2.51. 设 M,N 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的两个子空间且 $M\subseteq N,L$ 为 M 的一个补子空间，即有 $V=M\oplus L$. 证明：$N=M\oplus(N\cap L)$.

证明. 首先 $N\cap L\subseteq L$, 所以自然有 $M\oplus(N\cap L)$. 又因为 $M\subseteq N$, 所以 $V=N+L$. 显然 $M\oplus(N\cap L)\subseteq N$, 下面只需证明维数相等即可. 注意到

$$\dim M+\dim(N\cap L)=\dim M+\dim N+\dim L-\dim(N+L)=\dim M+\dim N-(n-\dim L)=\dim N.$$

所以结论得证. ■

定义 2.52. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，称 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是半单的，如果对任意 $\mathcal{A}$ 不变子空间 W, 有 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 U 满足 $V = W \oplus U$.

引理 2.53. 半单线性变换在不变子空间上的限制也是半单的.

证明. 设 $\mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$ 是半单的，W 是 $\mathcal{B}$ 的任一不变子空间，则对于 $\mathcal{B}|_W$ 的任一不变子空间 M, 自然 M 也是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间且 $M \subseteq W$. 于是存在 $\mathcal{B}$ 的不变子空间 L 使得 $V = M \oplus L$. 于是由问题 2.51 有 $W = M \oplus (W \cap L)$, 注意 $W \cap L$ 是 $\mathcal{B}|_W-$ 子空间, 所以结论得证. ■

问题 2.54. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{C} \in \mathrm{End}(V)$ 的最小多项式 $m_{\mathcal{C}}(\lambda) = p(\lambda)$ 在 F 上不可约，W 是 $\mathcal{C}-$ 子空间，证明：

1. $\deg p(\lambda) \mid n$.
2. 设 $\alpha \in V$, 称
$$C(\alpha) = \{g(\mathcal{C})(\alpha) \mid g(\lambda) \in F[\lambda]\}$$
为由 α 生成的 $\mathcal{C}-$ 循环不变子空间. 则 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V$, 有
$$C(\alpha_1) = C(\alpha_2) \text{或者} C(\alpha_1) \cap C(\alpha_2) = \{0\}.$$
3. 存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in W$, 使得 $W = \bigoplus_{i=1}^{k} C(\alpha_i)$.
4. $\mathcal{C}$ 是半单的.

证明. .

1. 由于 $\mathcal{C}$ 的特征多项式与最小多项式有相同的不可约因式，所以结论显然.
2. 对任意 $0 \neq \alpha \in V$, 首先证明 $f_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda) = m_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda)$, 其中 f, m 分别代表 $\mathcal{C}|_{C(\alpha)}$ 的特征多项式和最小多项式. 不妨设 $\alpha, \mathcal{C}\alpha, \cdots, \mathcal{C}^{k-1}\alpha$ 线性无关，$\alpha, \mathcal{C}\alpha, \cdots, \mathcal{C}^{k}(\alpha)$ 线性相关，于是 $\deg f_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda) = k$. 若 $\deg m_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda) \leq k-1$, 不妨就设为
$$m_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda) = \lambda^{k-1} + a_1\lambda^{k-2} + \cdots + a_{k-2}\lambda + a_{k-1},$$
由于 $m_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\mathcal{C})(\alpha) = 0$, 因为 $m_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda) \neq 0$, 这与 $\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha$ 线性无关矛盾. 再结合 $m_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda) \mid m_{\mathcal{C}}(\lambda)$, 所以只能是
$$f_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda) = m_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda) = m_{\mathcal{C}}(\lambda) = p(\lambda),$$

即任一非零循环 $\mathcal{C}-$ 子空间的维数均为 $\deg p(\lambda)$. 对任意 $\alpha_1,\alpha_2\in V$, 若 $C(\alpha_1)\cap C(\alpha_2)\neq\{0\}$, 由于 $C(\alpha_1)\cap C(\alpha_2)$ 是 $\mathcal{C}|_{C(\alpha_1)}-$ 子空间, 由于 $p(\lambda)$ 不可约，所以只能是

$$f_{\mathcal{C}|_{C(\alpha_1)\cap C(\alpha_2)}}(\lambda)=f_{\mathcal{C}|_{C(\alpha)}}(\lambda)=p(\lambda),$$

于是 $\dim C(\alpha_1)\cap C(\alpha_2)=\dim C(\alpha_1)=\dim C(\alpha_2)$, 所以 $C(\alpha_1)=C(\alpha_2)=C(\alpha_1)\cap C(\alpha_2)$.

3. 取 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in W$, 由于 $\mathcal{C}(\alpha_i)\in W$, 所以 $C(\alpha_i)$ 是 W 子空间，即有

$$W=C(\alpha_1)+C(\alpha_2)+\cdots+C(\alpha_m).$$

若 $C(\alpha_1)\cap C(\alpha_2)\neq\{0\}$, 则由 2 有 $C(\alpha_1)=C(\alpha_2)$, 所以舍弃一个，这样做下去，便会得到直和分解 $W=\bigoplus\limits_{i=1}^{k}C(\alpha_i)$, 其中 $k\leq m$.

4. 将 W 的一组基扩张为 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 则有

$$V=C(\alpha_1)+C(\alpha_2)+\cdots+C(\alpha_n),$$

与 3 类似可证.

■

问题 2.55. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{D}\in\mathrm{End}(V)$ 的最小多项式为 $m_{\mathcal{D}}(\lambda)=p^r(\lambda)$, 其中 $p(\lambda)\in F[\lambda]$ 是首一不可约多项式. 证明：$\mathcal{D}$ 半单当且仅当 $r=1$.

证明. 充分性问题 2.54 已证，下证必要性. 若 $r>1$, 令 $V_1=\mathrm{Ker}p(\mathcal{D})$, 则 V_1 是 $\mathcal{D}$ 的非平凡不变子空间. 由于 $\mathcal{D}$ 半单，存在 $\mathcal{D}-$ 子空间 V_2 使得 $V=V_1\oplus V_2$. 由 $p(\lambda)$ 不可约，则有 $m_{\mathcal{D}|_{V_1}}=p(\lambda)$. 又因为

$$m_{\mathcal{D}}(\lambda)=[m_{\mathcal{D}|_{V_1}}(\lambda),m_{\mathcal{D}|_{V_2}}(\lambda)],$$

所以 $m_{\mathcal{D}|_{V_2}}=p^r(\lambda)$. 于是存在 $\alpha\in V_2$, 使得 $\beta=p^{r-1}(\mathcal{D})(\alpha)\neq 0$. 此外 $p(\mathcal{D})(\beta)=m_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})(\beta)=0$, 所以 $\beta\in V_1\cap V_2$, 这与 $V_1\cap V_2=\{0\}$ 矛盾，所以 $r=1$. ■

定义 2.56. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$, 称 $\mathcal{A}-$ 子空间 W 是不可约的，如果 W 没有非平凡的 $\mathcal{A}-$ 子空间.

问题 2.57. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 W 是不可约 $\mathcal{A}-$ 子空间的充要条件是 $\mathcal{A}|_W$ 的特征多项式是不可约因式.

证明. 充分性. 若设 $f_{\mathcal{A}|_W}(\lambda)=p(\lambda),p(\lambda)\in F[\lambda]$ 是首一不可约因式，则对任意 $U\subseteq W$ 为 $\mathcal{A}$ 非零不变子空间. 首先有 $f_{\mathcal{A}|_U}(\lambda)\mid f_{\mathcal{A}|_W}(\lambda)$, 从而只能是 $f_{\mathcal{A}|_U}(\lambda)=p(\lambda)$, 于是 $U=W$, 即 W 是不可约 $\mathcal{A}-$ 子空间.

必要性. 设

$$f_{\mathcal{A}|_W}(\lambda)=p_1^{r_1}(\lambda)p_2^{r_2}(\lambda)\cdots p_s^{r_s}(\lambda),\quad r_i\geq 1, i=1,2,\cdots,s.$$

其中 $p_i(\lambda)$ 为互不相同的首一不可约因式. 则若令 $V_i=\mathrm{Ker}p_i^{r_i}(\mathcal{A})$, 则由问题 2.22 有

$$W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,$$

于是，若 $s\geq 2$, 则 W 显然是可约的. 否则可设

$$f_{\mathcal{A}|_W}(\lambda)=p^r(\lambda),$$

若 $r>1$, 任取 $0\neq\alpha\in\mathrm{Ker}p(\mathcal{A})$, 不妨设 $\deg p(\lambda)=k$, 则令 $U=L(\alpha,\mathcal{A}\alpha,\cdots,\mathcal{A}^{k-1}\alpha)$, 记 $m_\alpha(\lambda)$ 是满足 $m_\alpha(\mathcal{A})(\alpha)=0$ 次数最小的首一多项式. 由于 $p(\mathcal{A})(\alpha)=0$. 所以 $m_\alpha(\lambda)\mid p(\lambda)$, 从而只能是 $m_\alpha(\lambda)=p(\lambda)$. 于是 $\alpha,\cdots,\mathcal{A}^{k-1}(\alpha)$ 线性无关, 且 $\alpha,\cdots,\mathcal{A}^k\alpha$ 线性相关，于是自然 U 是 $\mathcal{A}-$ 子空间，且

$$\dim U=k=\deg p(\lambda)<\deg p^r(\lambda)=\dim W,$$

这与 W 不可约矛盾，所以 $r=1$, 即 $\mathcal{A}|_W$ 的特征多项式是不可约多项式. ■

注 2.58. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 则有以下命题等价：

1. *V 是不可约 $\mathcal{A}$-子空间 ($\mathcal{A}$ 只有非平凡不变子空间).*
2. *对任意 $0\neq\alpha\in V$, 都有 $V=C(\alpha)$.*
3. *$f(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式.*

问题 2.59. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$, 证明以下条件等价：

1. *$\mathcal{A}$ 是半单的.*
2. *$\mathcal{A}$ 的最小多项式没有重因式.*
3. *V 可以分解为不可约 $\mathcal{A}-$ 子空间的直和.*

证明. .

- $1\Rightarrow 2$. 设 $\mathcal{A}$ 的最小多项式为

$$m(\lambda)=p_1^{r_1}(\lambda)p_2^{r_2}(\lambda)\cdots p_s^{r_s}(\lambda_s),$$

  其中 $p_i(\lambda)$ 是不可约互不相同首一多项式. 令 $V_i=\mathrm{Ker}p_i^{r_i}(\lambda)$, 则 V_i 是 $\mathcal{A}-$ 子空间，由引理 2.53 可知 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 仍是半单的，所以 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 的最小多项式为 $p_i^{r_i}(\lambda)$ 没有重因式，于是结论得证.

- $2 \Rightarrow 3$. 记号与前面相同. 由于
$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s,$$
且 $m_{\mathcal{A}|_{V_i}}(\lambda) = p_i(\lambda)$, 所以由问题 2.54 的 3 可知, 存在 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{k_i}} \in V$ 使得 $V_i = \bigoplus_{j=1}^{k_i} C(\alpha_{i_j})$. 所以
$$V = \bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{j=1}^{k_i} C(\alpha_{i_j}).$$
由于 $C(\alpha_{ij})$ 是不可约 $\mathcal{A}-$ 子空间，于是结论得证.

- $3 \Rightarrow 1$. 设 V 可以分解为不可约 $\mathcal{A}-$ 子空间的直和，即有
$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$
对于 V 的任一 $\mathcal{A}-$ 子空间 W, 记
$$\Omega = \left\{U \mid U\text{是 } V \text{ 中 } \mathcal{A}-\text{ 子空间且} U \cap W = \{0\}\right\},$$
取 U_0 是 Ω 中维数最大的，断言 $V = W \oplus U_0$. 若不然，则存在 $V_i \not\subseteq U_0 \oplus W$. 由于 V_i 不可约，所以 $V_i \cap (W \oplus U_0) = \{0\}$, 于是 $W \cap (V_i \oplus U_0) = \{0\}$, 而 $\dim(V_i \oplus U_0) > \dim U_0$, 这与 U_0 的取法矛盾，于是 $V = U_0 \oplus W$, 即 $\mathcal{A}$ 是半单的.

■

♯♯♯ 特别地，半单在复数域 $\mathbb{C}$ 上与可对角化等价, 也可以说半单是可对角化在一般数域的推广.

问题 2.60. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 是 V 上线性变换，满足 $\mathcal{A}^m = \mathrm{id}$. 证明：对 V 的任一 φ 不变子空间 W, 存在 $\mathcal{A}$ 不变子空间 U, 使得 $V = W \oplus U$.

证明. 注意 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 整除 $\lambda^m - 1$, 后者没有重因式，所以 $m(\lambda)$ 也没有重因式，由问题 2.59 可知 $\mathcal{A}$ 半单，从而命题得证. ■

2.12.2 半单变换理论研究正规算子正交相似标准型

引理 2.61. V 是 n 维内积空间, 设 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是正规变换，W 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间，所以 $W, W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}^*$-子空间. 进一步，$\mathcal{A}|_W$ 也是正规变换.

证明. 若 V 是 n 维欧式空间, 设 $\dim W = k$. 取 W 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$, 将其扩张成 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, \cdots, \varepsilon_n$, 则 $\mathcal{A}$ 在这组基下的表示阵为 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$, 其中 $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$, 则由 $A'A = AA'$, 我们有
$$\begin{pmatrix} B'B & B'C \\ C'B & C'C + D'D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB' + CC' & CD' \\ DC' & DD' \end{pmatrix},$$

从而 $B'B = BB' + CC'$. 所以我们有 $\mathrm{tr}(CC') = 0$, 因此 $C = O$. 于是 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间，特别地我们有 $BB' = B'B$, 所以 $\mathcal{A}|_W$ 上也是正规变换. 若 V 是酉空间, 完全类似的可得 $\mathrm{tr}(CC^H) = 0$, 于是 $C = O$, 其中 C^H 为 C 的共轭转置. ■

引理 2.61 的几何证明参考问题 1.158.

借助 $V = W \oplus W^{\perp}$, 可知正规变换 $\mathcal{A}$ 都是半单的. 由于 $\mathbb{R}$ 上的不可约因式都是一次或者二次的，则有

引理 2.62. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的正规变换，则有正交直和分解

$$V = W_1 \perp W_2 \perp \cdots \perp W_k,$$

其中 $\dim W_i = 1$ 或者 $2, W$ 为不可约 $\mathcal{A}-$ 子空间.

容易验证二阶正规矩阵是对称阵或者形如

$$r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

其中 $r > 0, \sin\varphi \neq 0$. 于是有

定理 2.63. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的正规变换，则存在 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的表示阵为

$$\mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s, A_1, \cdots, A_k\},$$

其中 $A_i = r_i\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, r_i > 0, \sin\varphi_i \neq 0.$

接下来，对于特殊的实正规变换：对称变换，正交变换，反对称变换，具体讨论下其特征值情况，即可得到相应的在某组标准正交基下的表示阵的最简型. 用矩阵语言叙述，即可得到实对称阵，反对称阵，正交阵的正交相似标准型.

进一步, 由于 $\mathbb{C}$ 上的不可约因式都是一次的, 所以有

定理 2.64. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的正规变换, 则存在 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的表示阵为

$$\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

用矩阵的语言来说，就是任一复正规阵都酉相似于一个对角阵.

2.13 矩阵的 Hadamard 积

问题 2.65. 证明如下问题：

1. 设 α,β 都是 m 维列向量，γ,η 都是 n 维列向量，则

$$(\alpha\circ\beta)(\gamma\circ\eta)'=(\alpha\gamma')\circ(\beta\eta').$$

2. 若 A,B 都是 $m\times n$ 阶矩阵，则

$$r(A\circ B)\le r(A)r(B).$$

证明. 1. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{pmatrix}$, 则

$$(\alpha\circ\beta)(\gamma\circ\eta)'=\begin{pmatrix}a_1b_1\\a_2b_2\\\vdots\\a_mb_m\end{pmatrix}(r_1d_1,r_2d_2,\cdots,r_nd_n)=(a_ib_ir_jd_j)_{m\times n}=(a_ir_j)_{m\times n}\circ(b_id_j)_{m\times n}=(\alpha\gamma')\circ(\beta\eta').$$

2. 不妨设 $r(A)=r,r(B)=s$. 考虑 A,B 的满秩分解，即 A,B 可以写成

$$A=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\beta_i',B=\sum_{j=1}^{s}\gamma_j\eta_j',$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 和 $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ 是 m 维线性无关列向量组，$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 是 n 维线性无关的列向量组. 则

$$A\circ B=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\alpha_i\beta_i')\circ(\gamma_j\eta_j')=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\alpha_i\circ\gamma_j)(\beta_i\circ\eta_j)'$$

所以

$$r(A\circ B)=r\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\alpha_i\circ\gamma_j)(\beta_i\circ\eta_j)'\right)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}r\left((\alpha_i\circ\gamma_i)(\beta_i\circ\eta_j)'\right)\le rs=r(A)r(B).$$

■

注 2.66. 问题 2.65 的 2 可以从更高维观点来看，借助一个结论 $r(A\otimes B)=r(A)r(B)$, 而 $A\circ B$ 是 $A\otimes B$ 的子式，自然有 $r(A\circ B)\le r(A)r(B)$.

下面的问题叫做 Schur 乘积定理：

问题 2.67. *1. 若 A, B 都是半正定矩阵，则 $A \circ B$ 也是半正定矩阵.*

2. 若 A 是正定阵，B 是半正定阵且无零对角元，则 $A \circ B$ 是正定阵.

3. 若 A, B 都是正定阵，则 $A \circ B$ 也是正定阵.

4. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为互不相同的正数，$B = (b_{ij})$ 是 n 阶正定阵, 证明：n 阶方阵 $\left(\dfrac{b_{ij}}{a_i + a_j}\right)$ 是正定阵.

5. 证明 $A = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)$ 是正定阵.

证明. 1. 由 B 是半正定阵，存在矩阵 $T = (t_{ij})$, 使得 $B = T'T$. 则

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj}.$$

我们令 $Y_k = (t_{k1}x_1, t_{k2}x_2, \cdots, t_{kn}x_n)', A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 则我们有

$$\begin{aligned} X'(A \circ B)X = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} x_i x_j &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{kj} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} t_{ki} x_i \right) \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{kj} x_j Y_k' \alpha_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} Y_k' (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) Y_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k' A Y_k \geq 0. \end{aligned}$$

所以 $A \circ B$ 是半正定阵.

2. 我们只需要验证 $Y_k = 0, k = 1, 2, \cdots, n$ 当且仅当 $X = 0$. 因为 B 的对角元都不等于零，所以 B 的对角元都大于零. 即

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^2 > 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以 $t_{1i}, t_{2i}, \cdots, t_{ni}$ 不全为零，因此 $x_i = 0$, 从而 $X = 0$.

3. 3 条件比 2 强，所以成立.

4. (a) 令 $A = \left(\dfrac{1}{a_i + a_j}\right)_{n \times n}$, 只需证明 A 为正定阵. 这是 Cauchy 行列式，其顺序主子式也是 Cauchy 行列式，所以只需证明 $|A| > 0$.

$$|A| = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2}{\prod\limits_{i,j=1}^{n} (a_i + a_j)} > 0.$$

(b) 也可以利用分析的想法来解决此问题. 令

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

于是

$$\int_0^{+\infty}f(x_1e^{-a_1t},x_2e^{-a_2t},\cdots,x_ne^{-a_nt})dt=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie^{-a_it}\right)^2dt\geq 0.$$

等号成立当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie^{-a_it}=0,\forall t\in[0,+\infty)$. 即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. 另一方面

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f(x_1e^{-a_1t},x_2e^{-a_2t},\cdots,x_ne^{-a_nt})dt&=\int_0^{+\infty}\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_je^{-(a_i+a_j)t}dt\\&=\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\frac{-1}{a_i+a_j}(0-1)=X'AX.\end{aligned}$$

所以 A 是正定阵.

5. (a) 首先和上题一样，A 的顺序主子式都是 Cauchy 行列式，而

$$|A|=\frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(i-j)^2}{\prod\limits_{i,j=1}^{n}(i+j-1)}>0.$$

所以 A 是正定阵.

(b) 设 V 是次数小于 n 的实系数多项式全体构成的实线性空间. 定义 V 上的内积：任意 $f(x),g(x)\in V$,

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

容易验证其合理性. 注意到 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 是 V 的一组基，所以其 Gram 矩阵是正定阵. 注意到该 Gram 阵就是 $A=\left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)$, 所以 A 是正定阵.

■

注 2.68. 问题 2.67 的 1 可以从更高维的观点来看, 记

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B&a_{12}B&\cdots&a_{1n}B\\a_{21}B&a_{22}B&\cdots&a_{2n}B\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}B&a_{n2}B&\cdots&a_{nn}B\end{pmatrix}.$$

容易验证 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC\otimes BD)$ 所以 $A\otimes B=(A\otimes I_n)(I_n\otimes B)=(I_n\otimes B)(A\otimes I_n)$. 而 $I_n\otimes B$ 和 $A\otimes I_n$ 显然都是对称阵，且特征值都大于等于零. 所以 $I_n\otimes B, A\otimes I_n$ 都是半正定阵. 故 $A\otimes B$ 也是半正定阵. 注意到 $A\circ B$ 的所有主子式都是 $A\otimes B$ 的主子式，所以都大于等于零，于是 $A\circ B$ 也是半正定阵.

问题 2.69. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定阵，证明：

1. (Oppenheim 不等式)$|A\circ B|\ge |A|\prod\limits_{i=1}^n b_{ii}$, 其中 b_{ii} 为 B 的 (i,i) 元.
2. $|B|\le b_{nn}B\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n-1\\1&2&\cdots&n-1\end{pmatrix}$.
3. (Hadamard 不等式)$|A|\le \prod\limits_{i=1}^n a_{ii}$, 其中 a_{ii} 为 A 第 (i,i) 元.
4. $|A\circ B|\ge |A||B|$.
5. 设 $C=(c_{ij})$ 是 n 阶实矩阵, 则 $|C|^2\le \prod\limits_{j=1}^n\sum\limits_{i=1}^n c_{ij}^2$.

证明. 1. 对阶数进行归纳. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 假设当阶数小于 n 时，结论成立. 则有 $|A_{n-1}\circ B_{n-1}|\ge |A_{n-1}|\prod\limits_{i=1}^{n-1} b_{ii}$, 其中 A_{n-1},B_{n-1} 分别为 A,B 的 $n-1$ 阶顺序主子式. 令

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\ \vdots&&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}-\dfrac{|A|}{|A_{n-1}|}+\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{n-1}&\alpha\\ \alpha'&a_{nn}-\dfrac{|A|}{|A_{n-1}|}+\varepsilon\end{pmatrix},$$

其中 $\varepsilon>0$. 将最后一列看成两列之和进行展开可得:

$$|\tilde{A}|=|A|+\left(-\frac{|A|}{|A_{n-1}|}+\varepsilon\right)|A_{n-1}|=\varepsilon|A_{n-1}|>0.$$

所以 $\tilde{A}$ 是正定阵. 因此 $|\tilde{A}\circ B|$ 也是正定阵. 因此

$$|\tilde{A}\circ B|=|A\circ B|+b_{nn}\left(-\frac{|A|}{|A_{n-1}|}+\varepsilon\right)|A_{n-1}\circ B_{n-1}|>0$$

两边令 $\varepsilon\to 0$, 则有

$$|A\circ B|-b_{nn}\frac{|A|}{|A_{n-1}|}|A_{n-1}\circ B_{n-1}|\ge 0.$$

从而由归纳假设

$$|A\circ B|\ge b_{nn}\frac{|A|}{|A_{n-1}|}|A_{n-1}\circ B_{n-1}|\ge b_{nn}|A|\prod_{i=1}^{n-1}b_{ii}=|A|\prod_{i=1}^{n}b_{ii}.$$

2. 设 $B=\begin{pmatrix} B_{n-1} & \beta \\ \beta' & b_{nn}\end{pmatrix}$. 作合同变换：

$$B \mapsto \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ 0 & b_{nn}-\beta' B_{n-1}^{-1}\beta \end{pmatrix}$$

合同变换不会改变正定性，所以 $b_{nn}-\beta' B_{n-1}^{-1}\beta>0$. 由降阶公式：

$$|B|=|B_{n-1}|(b_{nn}-\beta' B_{n-1}^{-1}\beta)\le b_n B_{n-1}=b_{nn}B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1\end{pmatrix}$$

3. 将 (1) 中的 B 看作 I_n 即可. 或者利用 (2) 进行归纳.

4. 由 1,3 可知 $|A\circ B|\ge |A|\prod\limits_{i=1}^{n} b_{ii}\ge |A||B|$.

5. (a) 令 $D=(d_{ij})=C'C$, 则 $d_{jj}=\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}^2, j=1,2,\cdots,n$. 若 C 是可逆阵，则 $D=C'C$ 是正定阵. 从而由 Hadamard 不等式，我们有

$$|C^2|=|C'C|=|D|\le \prod_{j=1}^{n} d_{jj}=\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2$$

假如 C 不是可逆阵，显然有

$$0=|C^2|=|C'C|=|D|\le \prod_{j=1}^{n} d_{jj}=\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2.$$

(b) 事实上本题我们还可以换种角度思考：如果我们令 $C=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, 则 $D=C'C$ 可以看成是 $u_1,\cdots,u_n$ 在标准内积下的 Gram 阵. 若我们能证明 $|D|\le \prod\limits_{j=1}^{n}||u_j||^2$, 则结论显然成立.(当然这个结论本身就可以通过 Hadamard 不等式证明，下面给出从 Gram-Schmidt 正交化角度给出证明).
因为 D 是半正定阵，假如 D 是非正定的半正定阵，则 $0=|D|\le ||u_1||^2\cdots||u_n||^2$. 且等号成立当且仅当某个 $u_i=0$. 假如 D 是正定阵，则 $u_1,\cdots,u_n$ 线性无关. 令

$$v_i=u_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(u_i,v_j)}{||v_j||^2}v_j, i=1,2,\cdots,n.$$

从而由勾股定理，我们有

$$||u_i||^2=||v_i||^2+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(u_i,v_j)^2}{||v_j||^2}\ge ||v_i||^2.$$

此外我们知道 $(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)B$, 其中 B 是对角元全为 1 的上三角阵, 从而

$$D = B'G(v_1, v_2, \cdots, v_n)B,$$

因为 $|B| = 1$, 所以

$$|D| = |G(v_1, v_2, \cdots, v_n)| = ||v_1||^2||v_2||^2 \cdots ||v_n||^2 \le ||u_1||^2 \cdots ||u_n||^2.$$

等号成立当且仅当 $||v_i|| = ||u_i||$ 即 $v_i = u_i$, 所以 u_i 两两正交.

■

问题 2.70. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶半正定阵，则 $|A| \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证明. 对任意 $t > 0, tI_n + A$ 是正定阵，由问题 2.69 的 3 可知

$$|A + tI_n| \le (a_{11} + t)(a_{22} + t)\cdots(a_{nn} + t),$$

让 $t \to 0^+$ 即有 $|A| \le a_{11}\cdots a_{nn}$. ■

问题 2.71. 设 A, B 都是 n 阶半正定实对称阵，求证：$\frac{1}{n}\mathrm{tr}(AB) \ge |A|^{\frac{1}{n}}|B|^{\frac{1}{n}}$.

证明. 设 $B = C'C$, 则 $C'BC = (d_{ij})$ 是半正定阵，由问题 2.70 有

$$|A|^{\frac{1}{n}}|B|^{\frac{1}{n}} = |AC'C|^{\frac{1}{n}} = |C'AC|^{\frac{1}{n}} \le \left(\prod_{i=1}^{n} d_{ii}\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(AB).$$

■

2.14 镜面反射相关问题

引理 2.72. 对于 n 维 Euclid 空间 $V, \alpha \in V$ 非零，定义镜面反射为

$$S_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

从上面我们可以看出 S_α 将 α 本身映为 $-\alpha$, 将与 α 正交的向量映为其本身. 反过来，如果一个关于 α 的变换 $\mathscr{A}$，将 α 本身映为 $-\alpha$, 将与 α 正交的向量映为其本身，则 $\mathscr{A}$ 一定可以写成上述形式. 这是因为对任意的 $v = v_1 + v_2 \in V$, 其中$v_1 \in L(\alpha), v_2 \in L(\alpha)^\perp$, 则

$$\mathscr{A}(v) = v_2 - v_1 = (v_1 + v_2) - \frac{2(v_1 + v_2, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = v - \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

对于镜面反射，进一步讨论我们有：

问题 2.73. 1. 证明：S_α 是第二类正交变换 (行列式为 -1 的正交变换)，且在某组标准正交基下的矩阵为 $\operatorname{diag}\{-1, I_{n-1}\}$

2. 设 $\mathscr{A} \in \mathrm{O}(V)$, 则 $\mathscr{A}$ 为镜面反射当且仅当 $\dim V_1(\mathscr{A}) = n-1$, 其中 $V_1(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 关于特征值 1 的特征子空间.

3. 设 β, γ 是 V 中的不同向量，且 $|\beta| = |\gamma|$, 证明：存在镜面反射 S_α 使得 $S_\alpha(\beta) = \gamma$.

4. 证明：任意正交变换都可以写成镜面反射的乘积.

5. 设 $\alpha, \beta \in V$ 非零，试求 S_α 和 S_β 可交换的充要条件.

6. 设 $S_{\alpha_1}, \cdots, S_{\alpha_k}$ 是 V 上的 k 个互不相同且两两可交换的镜面反射，证明：$k \leq n$, 且等号成立当且仅当 $S_{\alpha_1} \cdots S_{\alpha_n} = -\mathrm{id}$.

7. 哪些正交变换可以写成两两可交换的镜面反射的乘积.

证明. 1. 将 α 扩张成 V 的一组正交基 $\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$, 则显然 S_α 在这组正交基下的表示阵为 $\operatorname{diag}\{-1, I_{n-1}\}$, 所以 $|S_\alpha| = -1$, 为第二类正交变换.

2. 必要性显然, 下证充分性. 由于 $\mathscr{A}$ 是半单的，所以 $\mathscr{A}$ 属于特征值 1 的代数重数为 $n-1$. 由于 $\mathscr{A}$ 的复特征值都是成对存在的，所以 $\mathscr{A}$ 必有特征值 -1, 且代数重数为 1. 设 α 是 $\mathscr{A}$ 属于特征值-1 的非零特征向量，从而 $V_1 = L(\alpha)^\perp$, 所以 $\mathscr{A}(\alpha) = -\alpha, \mathscr{A}(\beta) = \beta, \beta \in L(\alpha)^\perp$. 所以 $\mathscr{A}$ 是镜面反射.

3. 令 $\alpha = \beta - \gamma$, 下面验证 $S_\alpha(\beta) = \gamma$. 注意到

$$(\alpha, \alpha) = (\beta-\gamma, \beta-\gamma) = (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) - 2(\beta, \gamma) = 2(\beta, \beta) - 2(\beta, \gamma) = 2(\beta, \beta-\gamma).$$

所以

$$S_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta - \frac{2(\beta, \beta-\gamma)}{2(\beta, \beta-\gamma)}(\beta-\gamma) = \gamma.$$

4. 下面分别从代数和几何的角度给出证明.

(a) 对任意的 $\mathscr{A} \in O(V)$, 设 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组标准正交基下的表示阵为

$$\operatorname{diag}\{I_r, -I_s, A_1, \cdots, A_t\},$$

其中 $A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \sin\theta_i \neq 0$. 注意到

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & -\cos\theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = O_i(2)D(2),$$

这两个矩阵都是镜面反射阵，令

$$B_j = \operatorname{diag}\{I_r, 1, \cdots, -1, 1, \cdots, I_2, \cdots, I_2\}, r+1 \le j \le r+s,$$

即其第 (j, j) 元为 -1, 其余对角元全为 1. 再令

$$C_{i_1} = \operatorname{diag}\{I_r, I_s, I_2, \cdots, O_i(2), \cdots, I_2\}, 1 \le i \le t;$$

$$C_{i_2} = \operatorname{diag}\{I_r, I_s, I_2, \cdots, D(2), \cdots, I_2\}, 1 \le i \le t.$$

从而

$$B_{r+1} \cdots B_{r+s} C_{1_1} C_{1_2} \cdots C_{t_1} C_{t_2} = \operatorname{diag}\{I_r, -I_s, A_1, \cdots, A_t\}$$

设 $\mathscr{A}_i, 1 \le i \le n-r$ 分别在这组标准正交基下的表示阵为 $B_{r+1}, \cdots, B_{r+s}, \cdots, C_{t_2}$. 所以 $\mathscr{A}_i$ 都是镜面反射且 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cdots \mathscr{A}_{n-r}$.

♯♯♯ 这其实也是需要的最少的镜面反射的个数.(设 $\mathscr{A}$ 可以表示为 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cdots \mathscr{A}_k$, 其中 $\mathscr{A}_i$ 是关于 α_i 的镜面反射. 注意到 $L(\alpha_i)^{\perp} = \operatorname{Ker}(\mathscr{A}_i - I_v)$, 且 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(\mathscr{A}_i - I_v) \subseteq \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - I_v)$, 所以 $\dim \bigcap\limits_{i=1}^{k} L(\alpha_i)^{\perp} \le \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - I_v) = r$. 又因为 $\dim \bigcap\limits_{i=1}^{k} L(\alpha_i)^{\perp} = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)^{\perp} \ge n-k$. 所以 $n-k \le r$, 即 $k \ge n-r$.)

(b) 对任意的 $\mathscr{A} \in O(V)$, 对维数进行归纳. 当 $n=1$, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 维欧式空间成立，现考虑 n 维欧式空间, 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一组标准正交基. 由 3 可知存在镜面反射 $\mathscr{A}_1$ 使得 $\mathscr{A}_1(\mathscr{A}(\xi_1)) = \xi_1$. 由于 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}$ 仍然是正交变换，所以由归纳假设存在 $k-1$ 个镜面反射 $\mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_k$, 使得 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}|_{L(\xi_1)^{\perp}} = \mathscr{A}_2 \cdots \mathscr{A}_k$. 如果我们定义 $\mathscr{A}_i(\xi_1) = \xi_1$, 则 $\mathscr{A}_i$ 可以看成是 V 上的镜面反射，且满足 $\mathscr{A}_1\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 \cdots \mathscr{A}_k$. 则 $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*{}_1\mathscr{A}_2 \cdots \mathscr{A}_k$.

5. 首先证明 S_α 在任意一组标准正交基下的表示阵一定可以写成 $E_n - 2\gamma\gamma'$, 其中 $\gamma \in \mathbb{R}^n$. 对任意 V 的一组标准正交基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$, 在 (1) 的基础之上进行讨论, 设 Q 是 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 到 $\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n$ 的过度矩阵，则 Q 是正交阵. 设 $\mathscr{A}$ 在 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的表示阵为 A, 则有

$$E_n - 2\varepsilon_1\varepsilon_1' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ = Q'AQ.$$

其中 $\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0)'$, 从而 $A = Q(E_n - 2\varepsilon_1\varepsilon')Q' = E_n - 2(Q\varepsilon_1)(Q\varepsilon_1)'$, 令 $\gamma = Q\varepsilon_1$. 如果 S_α 和 S_β 可交换，则存在一组标准正交基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 使得 S_α, S_β 在这组基下的表示阵为对角阵, 不妨设为 $E_n - 2\gamma\gamma', E_n - 2\zeta\zeta'$, 其中 ζ, γ 是某个单位列向量，则根据

$$(E_n - 2\gamma\gamma')(E_n - 2\zeta\zeta') = (E_n - 2\zeta\zeta')(E_n - 2\gamma\gamma')$$

我们有 $\gamma(\gamma'\zeta)\gamma = \zeta(\zeta'\gamma)\gamma$, 即 $\gamma'\zeta = 0$ 或者 $\zeta = \gamma$. 若 $\zeta = \gamma$, 说明 α 和 β 对应成比例，此时

$S_\alpha = S_\beta$, 如果 $\gamma'\zeta = 0$, 则有 $S_\alpha(\eta_{i_1}) = -\eta_{i_1}, S_\beta(\eta_{i_2}) = -\eta_{i_2}, \eta_{i_1} \neq \eta_{i_2}$. 所以 α 与 β 正交.

6. 因为 $S_{\alpha_1}, \cdots, S_{\alpha_k}$ 互不相同，从而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 必定相互正交. 从而 $k \le n$. 当 $k = n$ 时，对任意的 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \in V$, 其中 $v_i \in L(\alpha_i)$, 则 $S_{\alpha_i}(v_j) = v_j, i \neq j, S_{\alpha_i}(v_j) = -v_j, j = i$. 因此我们有
$$S_{\alpha_1} \cdots S_{\alpha_n}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = -(v_1 + \cdots + v_n),$$
所以 $S_{\alpha_1} \cdots S_{\alpha_n} = -\mathrm{Id}$.

7. 没有复特征值的正交变换可以写成两两可交换的镜面反射的乘积.

■

问题 2.74. 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1$, 证明：存在 $A \in \mathrm{O}(n)$, 使得 $A = A'$, 且 A 的第一列为 $\boldsymbol{x}$.

证明. 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为单位列向量构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基. 因为 $||\boldsymbol{x}|| = ||\varepsilon_1|| = 1$, 由问题 2.73 的 3 可知存在镜面反射 S_α 使得 $S_\alpha(\varepsilon_1) = \boldsymbol{x}$. 令
$$A = (S_\alpha(\varepsilon_1), S_\alpha(\varepsilon_2), \cdots, S_\alpha(\varepsilon_n)) = (\boldsymbol{x}, S_\alpha(\varepsilon_2), \cdots, S_\alpha(\varepsilon_n))$$
由问题 2.73 的 1, 可知 S_α 是对称变换, 所以 $A = A'$. ■

2.15 Euclid 空间两两夹角为钝角的最大个数

问题 2.75. 设 V 是 n 维 Euclid 空间，$\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V$ 满足
$$(\gamma, \alpha_k) > 0, \quad (\alpha_i, \alpha_j) \le 0, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, \cdots, m\}, i \neq j.$$
证明：

1. $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.
2. n 维 Euclid 空间 V 中最多有 $n+1$ 个向量, 使得其两两夹角互为钝角.
3. n 维 Euclid 空间 V 中必有 $n+1$ 个向量, 使得其两两夹角互为钝角.

证明. .

1. 设 $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{R}$ 使得
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$
将此式按照系数的正负进行排列得到
$$\sum_{k_i > 0} k_i\alpha_i = \sum_{k_j < 0} -k_j\alpha_j.$$

从而

$$0 \geq \left(\sum_{k_i>0} k_i\alpha_i, \sum_{k_i>0} k_i\alpha_i\right) = \left(\sum_{k_i>0} k_i\alpha_i, \sum_{k_j<0} -k_j\alpha_j\right) = \sum(-k_j)k_i\left(\alpha_i, \alpha_j\right) \leq 0,$$

从而

$$\sum_{k_i>0} k_i\alpha_i = \sum_{k_j<0} -k_j\alpha_j = 0.$$

又因为

$$0 = \left(\gamma, \sum_{k_i>0} k_i\alpha_i\right) = \sum_{k_i>0} k_i\left(\gamma, \alpha_i\right) \geq 0,$$

所以 $k_i = 0$, 同理可证 $k_j = 0$, 因此 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in V$ 两两夹角为钝角，令 $\gamma = -\alpha_p$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ 满足 1 条件，所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ 线性无关，于是 $p-1 \leq n$, 即 $p \leq n+1$.

3.
   - 设 n 阶实对称阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} < 0(i \neq j)$. 可取 t 充分大，使得 $tE + A$ 是正定阵，因此不妨一开始便设 A 是正定阵. 因此一定存在 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得 V 在这组基下的度量矩阵为 A, 即 $A = ((\alpha_i, \alpha_j))$. 设 $X \in \mathbb{R}^n$ 满足 $AX = (-1, -1, \cdots, -1)^T$, 现在令

$$\alpha_{n+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X,$$

     则 $(\alpha_i, \alpha_{n+1}) = -1 < 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 两两之间夹角为钝角.
   - 取 V 的一组标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$, 现在令 $\alpha_1 = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)(n, -1, \cdots, -1)^T, \alpha_2 = (-1, n, \cdots, -1)^T, \cdots, \alpha_n = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)(-1, -1, \cdots, n)^T, \alpha_{n+1} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)(-1, -1, \cdots, -1)^T$. 则容易验证 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ 满足两两之间夹角为钝角.
   - 对 V 的维数进行归纳, 当 $n = 1$ 时，结论显然成立. 假设结论对于 $n-1$ 维欧式空间成立. 对于 n 维欧式空间，设 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 是 V 的一组标准正交基，则由归纳假设，存在

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n+1})$$

     满足 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 两两之间为钝角. 取 $t > 0$ 满足 $(\alpha_i + t\varepsilon_n, \alpha_j + t\varepsilon_n) < 0(i \neq j)$. 只需让 $t^2 < \min\limits_{i \neq j}\{-(\alpha_i, \alpha_j)\}$ 即可. 则

$$\alpha_1 + t\varepsilon_n, \alpha_2 + t\varepsilon_n, \cdots, \alpha_n + t\varepsilon_n, -\varepsilon_n$$

     满足两两之间为钝角.

■

问题 2.76. (四川大学 2018) 设 V 为 n 维欧式空间, $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 V 的一组基, 且满足 $(\alpha_i,\alpha_j)\le 0(1\le i\ne j\le n)$. 设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^n k_i\alpha_i\in V$ 满足 $(\alpha,\alpha_i)\ge 0(1\le i\le n)$. 证明: $k_i\ge 0, 1\le i\le n$.

证明. 反证. 假设存在 $k_j<0$, 设 $\alpha=\sum\limits_{k_i\ge 0}k_i\alpha_i+\sum\limits_{k_j<0}k_j\alpha_j$. 断言 $\sum\limits_{k_j<0}k_j\alpha_j=0$, 否则有

$$0<\left(\sum_{k_j<0}k_j\alpha_j,\sum_{k_j<0}k_j\alpha_j\right)=\left(\sum_{k_j<0}k_j\alpha_j,\alpha-\sum_{k_i\ge 0}k_i\alpha_i\right)=\sum_{k_j<0}k_j(\alpha_j,\alpha)+\sum_{k_i\ge 0,k_j<0}(-k_ik_j)(\alpha_j,\alpha_i)\le 0$$

矛盾. 于是 $\sum\limits_{k_j<0}k_j\alpha_j=0$, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关可得 $k_j=0$ 与假设矛盾. ■

2.16 Cayley 变换相关问题

问题 2.77. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 I_n+A 可逆, 称 $c(A)=(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$ 为 A 的 Cayley 变换.

1. 若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为反对称阵, 证明: I_n+A 可逆, $B=c(A)$ 是正交阵, 且 I_n+B 可逆.

2. 若 B 为 n 阶正交阵, 且 I_n+B 可逆, 证明: 存在反对称矩阵 A 使得 $B=c(A)$.

证明. 1. A 没有特征值 -1, 所以 I_n+A 可逆. 转置和求逆可交换次序, 所以

$$((I_n+A)^{-1})'=(I_n-A)^{-1},(I_n-A)'=(I_n+A),$$

且

$$(I_n-A)(I_n+A)^{-1}=(I_n+A)^{-1}(I_n-A).$$

所以 $B'B=I_n$, 即 B 是正交阵. 下面只需证 $BX=-X$ 仅有零解, 即 $(I_n-A)X=(-I_n-A)X$, 所以 $X=0$.

2. 注意到

$$\begin{aligned}c(B)'=(I_n+B')^{-1}(I_n-B')=(I_n+B')^{-1}(B'B-B')=(I_n+B')^{-1}B^{-1}(B-I_n)\\ =(B+I_n)^{-1}(B-I_n)=-c(B).\end{aligned}$$

所以 $c(B)$ 是反对称阵, 令 $A=c(B)$, 注意到 $c(B)(I_n+B)=I_n-B$, 即 $(I_n+c(B))B=I_n-C(B)$, 所以

$$B=(I_n+c(B))^{-1}(I_n-c(B))=c(c(B))=c(A).$$

■

由问题 2.77 可以看出 Cayley 变换建立起实反对称矩阵和没有特征值 1 的正交阵之间的一一对应关系.

问题 2.78. 设 A 为实对称阵,B 为实反对称阵,$A+B$ 可逆, 且 $AB=BA$, 则 $(A-B)(A+B)^{-1}$ 为正交阵.

♯♯♯ 问题 2.78 验证即可, 验证过程完全类似问题 2.77.

2.17 辛变换行列式为 1 的讨论

问题 2.79. 设 A,B 是 n 阶复矩阵，证明：

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB|\cdot|A-iB| = |A+iB|\cdot\overline{|A+iB|} \geq 0.$$

证明. 考虑分块矩阵的第三类初等变换：

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\times i+r_1} \begin{pmatrix} A+iB & iA-B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\times(-i)+c_2} \begin{pmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{pmatrix},$$

其中 r_1,c_1 分别代表第一行或列分块. 由于第三类初等变换不会改变行列式的值，所以结论得证.

■

引理 2.80. 设 W 是 n 维线性空间 V 的子空间，$f(\alpha,\beta)$ 为 V 上双线性函数，将 f 看作 W 上的双线性函数，记为 $f|_W$, 则有如下结论等价：

1. $f|_W$ 非退化，称 W 为非退化子空间.
2. $W\cap W^{\perp}=\{0\}$.
3. $V=W\oplus W^{\perp}$.
4. $W\cap {}^{\perp}W=\{0\}$
5. $V=W\oplus^{\perp} W$.

证明. 2、3 与 4、5 本质相同，下面只证明部分等价命题.

- $1\Rightarrow 2$.$\forall\alpha\in W\cap W^{\perp}$, 则有 $f(\beta,\alpha)=0,\forall\beta\in W$, 从而由 $f|_W$ 非退化，我们有 $\alpha=0$, 从而 $W\cap W^{\perp}=\{0\}$, 即 $W\oplus W^{\perp}$.

- $2\Rightarrow 3$. 对任意的 $\beta\in V$, 作线性映射

  $$\varphi: V\mapsto W^*,\quad \varphi(\beta)=g_\beta,$$

  其中 $g_\beta(\alpha)=f(\alpha,\beta),\forall\alpha\in W$. 则 $\mathrm{Ker}\varphi=W^{\perp}$. 由于 $W\cap W^{\perp}=\{0\}$, 则 $\varphi|_W$ 是单射. 又因为 $\dim W=\dim W^*$, 所以 $\varphi|_W$ 是线性同构. 因此对任意的 $g\in W^*$, 一定存在 $\alpha\in W$, 使得

$\varphi(\alpha)=g$. 因此 φ 是满射. 所以根据维数公式我们有

$$\mathrm{dimKer}\varphi+\mathrm{dimIm}\varphi=\mathrm{dim}W^{\perp}+\mathrm{dim}W^{*}=\mathrm{dim}W^{\perp}+\mathrm{dim}W=n.$$

■

引理 2.81. *设 f 是 V 上的双线性函数，则下列条件等价：*

1. *对任意的 $\alpha\in V$, 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$.*

2. *f 是反对称的.*

证明. $1\Rightarrow 2$. 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 我们有

$$0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\beta,\beta)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha).$$

从而 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$. 所以 f 是反对称的. 显然 $2\Rightarrow 1$. ■

但是只要 f 不恒为零，我们总有 $\alpha_1,\alpha_2\in V$ 使得 $f(\alpha_1,\alpha_2)\neq 0$. 也就是说对于反对称双线性函数，我们能找到一个二维的非退化子空间：

引理 2.82. *设 $f(\alpha_1,\alpha_2)\neq 0$, 记 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$, 则 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$.*

证明. 若 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\in V_1$,，满足对任意的 $\beta=t\alpha_1+s\alpha_2\in V_1$, 有 $f(\beta,\alpha)=0$, 即

$$0=f(t\alpha_1+s\alpha_2,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=(tk_2-sk_1)f(\alpha_1,\alpha_2)=0,$$

从而 $tk_1+sk_2=0$, 对一切 t,s 都成立. 所以 $k_1=k_2=0$, 即 $\alpha=0$, 从而 $f|_{V_1}$ 非退化，所以由引理 2.80 有 $V_1\oplus V_1^{\perp}$. 因此 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$. ■

假如 $f|_{V_1^{\perp}}$ 上不恒为零，则这个过程还是可以继续做下去，即有

定理 2.83. *存在 V 的直和分解*

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k\oplus V_0.$$

其中 V_i 两两正交，且 $V_1,\cdots,V_k$ 都是二维非退化子空间，而 $f|_{V_0}=0$.

上述分解的矩阵形式就是

定理 2.84. *设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维线性空间 V 上反对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 使得*

$$(f(\beta_i,\beta_j))=\mathrm{diag}\left\{S_2,\cdots,S_2,0,\cdots,0\right\},$$

其中 $S_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

用矩阵语言来说就是

定理 2.85. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 为反对称矩阵，则 A 合同于

$$\operatorname{diag}\{S_2,\cdots,S_2,0,\cdots,0\}$$

定义 2.86. 若 n 维实线性空间 V 上定义了非退化的反对称双线性函数 f, 则称 V 为辛空间.

由定义可以看出 n 一定为偶数.

定义 2.87. 设 V 是 $n=2m$ 维辛空间, 称 $\mathscr{A}\in\operatorname{End}(V)$ 为辛变换，若

$$f(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=f(\alpha,\beta).$$

引理 2.88. 设 $n=2m$ 维线性空间 V 上存在非退化反对称双线性函数 f, 则存在 V 的一组基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 使得 $(f(\gamma_i,\gamma_j))=J$, 其中 $J=\begin{pmatrix}O & I_m\\ -I_m & O\end{pmatrix}$.

证明. 由定理 2.85, 存在 V 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 使得

$$(f(\beta_i,\beta_j))=\operatorname{diag}\underbrace{\{S_2,S_2,\cdots,S_2\}}_{m}$$

将 $\beta_1,\cdots,\beta_{2m}$ 换个顺序变成 $\beta_1,\beta_3,\cdots,\beta_{2m-1},\beta_2,\cdots,\beta_{2m}$, 记为 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$. 则容易验证 f 在这组基下的度量阵为 J. ■

由定义不难验证, 若 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是辛变换，则 $\mathscr{A}^{-1},\mathscr{A}\mathscr{B}$ 也是辛变换, 从而 V 中辛变换全体构成 $\operatorname{GL}(V)$ 的子群, 记为 $\operatorname{Sp}(V)$. 对任意 $\mathscr{A}\in\operatorname{Sp}(V)$, 显然有 $|\mathscr{A}|=\pm1$, 进一步讨论我们有

问题 2.89. 设 V 为 $n=2m$ 维辛空间，$\mathscr{A}\in\operatorname{Sp}(V)$, 则一定有 $|\mathscr{A}|=1$.

证明. 设 f 为 V 上的非退化的反对称双线性函数，则由引理 2.88，存在 V 的一组基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 使得 f 在这组基下的度量阵为 $J=\begin{pmatrix}O & I_m\\ -I_m & O\end{pmatrix}$, 并记 $\mathscr{A}$ 在这组基下的表示阵为 A. 则由 $f(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=f(\alpha,\beta)$, 我们有 $A'JA=J$. 下证 $|A|=1$.

1. 由 Laplace 定理容易算出 $|J|=1$. 设 $A=\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}$, 则

$$JA+AJ=\begin{pmatrix}R & S\\ -P & -Q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-Q & P\\ -S & R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R-Q & S+P\\ -(S+P) & R-Q\end{pmatrix},$$

   由问题 2.79 可知 $|AJ+JA|\geq 0$. 注意到 $A'(AJ+JA)=J+A'AJ=(A'A+I_n)J$. 而 $I_n+A'A$ 是正定阵，所以 $|I_n+A'A|>0$. 因此 $|A'||AJ+JA|=|A'A+I_n|>0$, 所以 $|A|>0$, 从而 $|A|=1$.

2. 利用摄动原理. 首先将 A 做分块 $A=\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$, 代入 $A'JA=J$ 得

$$\begin{pmatrix} P' & R' \\ Q' & S' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P'R-R'P & P'S-R'Q \\ Q'R-S'P & Q'S-S'Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

从而我们有 $P'R=R'P, Q'S=S'Q, P'S-R'Q=I_m$. 若 P 是可逆阵，则

$$\begin{aligned} |A'| &= \begin{vmatrix} P' & R' \\ Q' & S' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P' & Q \\ 0 & S'-Q'(P')^{-1}R' \end{vmatrix} = |P'|\cdot|S'-Q'(P')^{-1}R'| \\ &= |P'(S-RP^{-1}Q)| = |P'S-R'Q| = |I_m| = 1. \end{aligned}$$

对于一般情况，构造可逆阵 $P_t'=P'+tX$, 使其满足 $P_t'R=R'P_t$. 由相抵标准型存在可逆阵 U,V 使得 $R=U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$. 令 $X=V'U^{-1}$, 即可满足条件. 因此我们有

$$\begin{vmatrix} P_t' & R' \\ Q' & S' \end{vmatrix} = |P_t'S-R'Q|.$$

注意到上式两边是关于 t 的多项式，从而是关于 t 的连续函数，令 $t\to 0$, 则有 $|A'|=1$. 所以 $|A|=1$.

■

2.18 商空间

对任意 $u\in U$, 称 $\{\alpha\in V \mid \mathscr{A}(\alpha)=u\}$ 为 u 的原像，记为 $\mathscr{A}^{-1}(u)$. 因此 U 中零向量的原像就是 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$, 这是 V 的子空间. 那么 U 中其他向量 u 的原像呢? 如果 $u\in \mathrm{Im}\mathscr{A}$, 则 u 的原像自然为空集. 因此我们只需要考虑 $u\in \mathrm{Im}\mathscr{A}$, 即存在 $\alpha\in V$ 使得 $u=\mathscr{A}(\alpha)$. 对任意 $\beta\in\mathscr{A}^{-1}(u)$, 我们有 $\mathscr{A}(\beta)=\mathscr{A}(\alpha)=u$, 即 $\beta-\alpha\in\mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 反之，对任意的 $\gamma\in\mathrm{Ker}\mathscr{A}, \mathscr{A}(\gamma+\alpha)=u$, 则 $\alpha+\gamma\in\mathscr{A}^{-1}(u)$, 从而我们有

问题 2.90. 设 $\mathscr{A}\in\mathrm{Hom}(V,U), u=\mathscr{A}(\alpha)\in\mathrm{Im}\mathscr{A}$, 则

$$\mathscr{A}^{-1}(u)=\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in\mathrm{Ker}\mathscr{A}\}$$

进一步，对任意 $u_1,u_2\in\mathrm{Im}\mathscr{A}, \mathscr{A}^{-1}(u_1)$ 和 $\mathscr{A}^{-1}(u_2)$ 或者相等，或者不相交. 因此 V 实际上就可以分解为不同的 $\mathscr{A}^{-1}(u)$ 的不交并. 这启发我们给出更一般的定义.

定义 2.91. 设 W 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的子空间，$\alpha,\beta\in V$, 如果 $\alpha-\beta\in W$, 则称 α,β 模 W 同

余，记为

$$\alpha \equiv \beta(\mathrm{mod} W).$$

称 V 中所有与 α 同余的向量的集合

$$\{\beta \in V \mid \alpha \equiv \beta(\mathrm{mod} W)\}$$

为 α 模 W 的同余类，记为 $\bar{\alpha}$ 或者 $\alpha + W$. 同余类中任一向量称为此类的代表元.

容易验证，两个同余类或者相等或者交是空集，也就是说不同同余类没有交集. 在同一个同余类里面的向量的地位相同，都可以作为这个同余类的代表元. 即 $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ 当且仅当 $\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} \neq \varnothing$ 当且仅当 $\alpha \equiv \beta(\mathrm{mod} W)$. 于是我们把同余类看成一个元素，把同余类全体记为 V/W, 称为 V 对 W 的商空间.

若 $\mathscr{A} \in \mathrm{Hom}(V, U)$, 则每一个 $u \in \mathrm{Im}\mathscr{A}$ 的原像都是 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 的一个同余类. 从而 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 与 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 之间存在一个一一对应关系. 因此 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 上的线性空间的结构可以自然的转移到 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 上. 这个可以推广到一般的情形，即我们在 V/W 上定义线性空间的结构.

问题 2.92. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，W 是 V 的子空间，以 V/W 表示 V 中元素模 W 的同余类的集合. 对任意 $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in V/W, k \in \mathbb{F}$, 定义 V/W 中加法和数乘如下：

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta}, \quad k \cdot \bar{\alpha} = \overline{k\alpha}.$$

则 V/W 构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间.

证明. 首先要验证这样定义的加法和数乘的合理性. 设 $\alpha_1 \equiv \alpha(\mathrm{mod} W), \beta_1 \equiv \beta(\mathrm{mod} W), k \in \mathbb{F}$, 则 $\alpha - \alpha_1 \in W, \beta - \beta_1 \in W, k(\alpha - \alpha_1) \in W$, 于是 $(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha + \beta) \in W, k(\alpha - \alpha_1) \in W$, 所以 $\overline{\alpha_1 + \beta_1} = \overline{\alpha + \beta}, \overline{k\alpha_1} = \overline{k\alpha}$. 所以这样定义的加法和数乘是合理的. 下面只需要验证其满足线性空间的八条性质. ■

由问题 2.92 可知 V/W 是一个线性空间，则我们自然可以考虑映射 $\pi : V \to V/W, \pi(\alpha) = \bar{\alpha}$, 容易验证这是一个线性映射，且是满射, 称 π 是 V 到 V/W 的商映射. 因此我们有

问题 2.93. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，W 是 V 的子空间，则

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

所以 V/W 的维数与 W 的任一补空间维数相同，事实上它俩是同构的, 且有

问题 2.94. 设 W 是 V 的子空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$, 其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 为 V 的一组基，则 $\bar{\alpha}_{k+1}, \bar{\alpha}_{k+2}, \cdots, \bar{\alpha}_n$ 是 V/W 的一组基当且仅当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

证明. 令 $V_1 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), V_2 = L(\bar{\alpha}_{k+1}, \cdots, \bar{\alpha}_n)$, 则 V 到 V/W 上的商映射 π 限制在 V_1 上的线性映射 $\pi|_{V_1} : V_1 \to V/W$ 也是线性映射，且它的像为 V_2. 所以我们有 $\mathrm{dim} V_1 = \mathrm{dim} V_2 + \mathrm{dim} W$.

因此 $\dim V_2 = \dim V/W$ 当且仅当 $\dim V_1 = \dim V$. 故 $\bar{\alpha}_{k+1}, \cdots, \bar{\alpha}_n$ 是 V/W 的一组基当且仅当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关. ■

问题 2.95. 设 V, U 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathscr{A} \in \mathrm{Hom}(V, U)$ 是满映射，则有 V 到商空间 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 的商映射 π 及 $V/\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 到 U 的同构 $\overline{\mathscr{A}}$ 使得 (假如 U 不是满射，则将 U 取 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$)

$$\overline{\mathscr{A}}\pi = \mathscr{A}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "\mathscr{A}"] & V/\mathrm{Ker}\mathscr{A} \arrow[r, two heads, "\overline{\mathscr{A}}"] & U \end{tikzcd}$$

证明. 定义

$$\overline{\mathscr{A}} : V/\mathrm{Ker}\mathscr{A} \mapsto U, \quad \overline{\mathscr{A}}(\overline{\alpha}) = \mathscr{A}\alpha.$$

首先验证该定义不依赖于代表元的选取. 若 $\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha}$, 即 $\alpha_1 - \alpha \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$, 从而 $\overline{\mathscr{A}}(\overline{\alpha_1} - \overline{\alpha}) = \overline{\mathscr{A}}(\overline{\alpha_1 - \alpha}) = \mathscr{A}(\alpha_1 - \alpha) = 0$. 由 $\overline{\mathscr{A}}$ 的定义容易看出 $\mathscr{A} = \overline{\mathscr{A}}\pi$. 下面验证 $\overline{\mathscr{A}}$ 是线性映射. 对任意的 $k, l \in \mathbb{F}, \alpha, \beta \in V$, 我们有

$$\overline{\mathscr{A}}(k\overline{\alpha} + l\overline{\beta}) = \mathscr{A}(k\alpha + l\beta) = k\mathscr{A}(\alpha) + l\mathscr{A}(\beta) = k\overline{\mathscr{A}}(\overline{\alpha}) + l\overline{\mathscr{A}}(\overline{\beta}).$$

所以 $\overline{\mathscr{A}}$ 是线性映射. 下面证明 $\overline{\mathscr{A}}$ 是线性同构. 由于维数相同，因此只需证明 $\overline{\mathscr{A}}$ 是单射即可. 若 α 满足 $\overline{\mathscr{A}}(\overline{\alpha}) = \mathscr{A}(\alpha) = 0$, 从而 $\alpha \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$, 所以 $\mathrm{Ker}\overline{\mathscr{A}} = \{\overline{0}\}$. ■

问题 2.96. 设 $\dim V/\mathbb{F} = n, W$ 为 $\mathscr{A}$-子空间. 对任意 $\bar{\alpha} \in V/W$, 定义:

$$\overline{\mathscr{A}} : V/W \to V/W, \quad \bar{\alpha} \mapsto \overline{\mathscr{A}\alpha}$$

则 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V/W)$, 称为 $\mathscr{A}$ 在 V/W 上的诱导变换.

证明. 若定义是合理的，则验证其是线性的是容易的. 若 $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, 则 $\alpha - \beta \in W$. 由于 W 是 $\mathscr{A}$-子空间，所以 $\mathscr{A}\alpha - \mathscr{A}\beta = \mathscr{A}(\alpha - \beta) \in W$, 所以 $\overline{\mathscr{A}\alpha} = \overline{\mathscr{A}\beta}$, 即定义是合理的. ■

下面给出商空间应用的两个例子，其证明也都可以使用纯粹的矩阵语言, 读者试证之.

问题 2.97. 设 $\dim V/\mathbb{F} = n, \mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{End}(V)$, 满足 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$, 则存在 V 的一组基，使得 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 在这组基下的矩阵同为上三角阵.

证明. 我们对 V 维数进行归纳，当维数为 1 时，结论平凡. 下假设 $\dim V < n$ 时，结论成立. 设 $\alpha \in V$ 满足 $\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha, \mathscr{B}\alpha = \mu\alpha$. 将 α 扩张为 V 的一组基 $\{\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\}$, 且有

$$\mathscr{A}(\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) = (\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \begin{pmatrix} \lambda & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{B}(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})=(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\begin{pmatrix}\mu & *\\ O & B_1\end{pmatrix}$$

设 $W=L(\alpha)$. 考虑 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在 V/W 上的诱导变换 $\overline{\mathscr{A}},\overline{\mathscr{B}}$, 则有

$$\overline{\mathscr{A}}(\overline{\alpha}_1,\cdots,\overline{\alpha}_{n-1})=(\overline{\alpha}_1,\cdots,\overline{\alpha}_{n-1})A_1$$

$$\overline{\mathscr{B}}(\overline{\alpha}_1,\cdots,\overline{\alpha}_{n-1})=(\overline{\alpha}_1,\cdots,\overline{\alpha}_{n-1})B_1$$

由 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$, 有 $A_1B_1=B_1A_1$, 于是 $\bar{\mathscr{A}}\bar{\mathscr{B}}=\bar{\mathscr{B}}\bar{\mathscr{A}}$, 则由归纳假设存在 $\bar{\gamma}_1,\cdots,\bar{\gamma}_{n-1}$ 使得 $\overline{\mathscr{A}},\overline{\mathscr{B}}$ 在这组基下的矩阵为上三角阵 $\widetilde{A}_1,\widetilde{B}_1$. 则由于 $\beta,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}$ 是 V 的一组基，且 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别在这组基下矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda & *\\ O & \widetilde{A}_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mu & *\\ O & \widetilde{B}_1\end{pmatrix}$ 是上三角阵，所以结论得证. ■

问题 2.98. 设 V 为 n 维 Euclid 空间，$\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$, 证明：存在 V 的子空间列

$$\{0\}=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_k=V$$

使得 V_i 都是 $\mathscr{A}-$ 子空间，且 $\dim V_i-\dim V_{i-1}=1$ 或 2，$i=1,2,\cdots,k$. 由此可得，任意 n 阶实矩阵都正交相似于一个准上三角阵，且对角块为一阶或二阶.

证明. 对 $\dim V=n$ 进行归纳. 当 $n=1$ 时，结论平凡. 假设维数小于 n 时结论成立. 首先取 $\mathscr{A}$ 特征多项式在实数域上的一个不可约因式 $p(x)$, 则 $\deg p(x)=1$ 或者 2. 由于 $p(\mathscr{A})$ 不可逆，所以 $\mathrm{Ker}p(\mathscr{A})\neq\{0\}$. 任取 $0\neq\alpha\in\mathrm{Ker}p(\mathscr{A})$, 若 $\deg p(x)=1$, 则 $V_1=L(\alpha)$ 为 1 维 $\mathscr{A}-$ 子空间. 若 $\deg p(x)=2$, 则 $V_1=L(\alpha,\mathscr{A}\alpha)$ 为 2 维 $\mathscr{A}-$ 子空间. 现在考虑 $\pi:V\to V/V_1$, 记 $\overline{\mathscr{A}}$ 为 $\mathscr{A}$ 在 V/V_1 上的诱导变换，由归纳假设存在满足条件的

$$\{\bar{0}\}=\overline{V}_1\subset\overline{V}_2\subset\ \cdots\subset\overline{V}_k=\overline{V}$$

其中 $\overline{V}_i$ 是 $\overline{\mathscr{A}}$ 的不变子空间. 取它们相对于商映射 $\pi:V\to V/V_1$ 的原像 $V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_k=V$ 从而得到

$$\{0\}=V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_k=V$$

并且任取 $v_i\in V_i$, 有

$$\pi\mathscr{A}(v_i)=\overline{\mathscr{A}}\pi(v_i)\in\overline{\mathscr{A}}(\overline{V}_i)\subset\overline{V}_i$$

所以 V_i 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，且满足 $\dim V_i-\dim V_{i-1}=1$ 或者 2. ■

2.19 线性空间与线性映射的张量积

在上节基础之上，我们来讨论线性空间与线性映射的张量积 (tensor product). 张量是代数研究中很重要的工具，它的定义有很多出发点，比如缩小一个线性空间，我们可以对线性空间作商，

但是如果想扩大一个线性空间，我们就可以作线性空间的张量. 以下讨论的定义是基于张量的泛性质

引理 2.99. 设 V, N, U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，φ 是 V 到 U 的线性映射, 若 $N \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$ 则存在 $\psi : V/N \to U$ 的线性映射使得如下交换图成立即 $\varphi = \psi \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, bend right, "\varphi"'] & V/N \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

证明. 自然定义 $\psi(\bar{v}) = \varphi(v)$. 若该映射的定义是合理的，容易验证其是线性的，且显然有 $\varphi = \psi \circ \pi$. 对于任意 $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, 有 $v_1 - v_2 \in N \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$, 因此 $0 = \varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = \psi(\bar{v}_1) - \psi(\bar{v}_2)$. 所以上述定义不依赖于代表元的选取. ■

设 V, W, U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，记集合 $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$. 称映射 $f : V \times W \to U$ 是双线性的，如果满足

$$\begin{cases} f(av_1 + v_2, w) = af(v_1, w) + f(v_2, w) \\ f(v, aw_1, w_2) = af(v, w_1) + f(v, w_2) \\ \forall a \in \mathbb{F}, v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W. \end{cases}$$

下面我们给出张量积的定义：

定义 2.100. 设 V, W, U, Z 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，若 $\otimes$ 是 $V \times N$ 到 U 的双线性映射满足对任意 $V \times W$ 到 N 的双线性映射 f, 都能找到唯一的 $U \to N$ 的线性映射 φ 使得 $f = \varphi \circ \otimes$, 即如下交换图成立，则称 U 是 $V \times W$ 的张量积.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, hook, "\otimes"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & U \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

下面我们先来说明张量积的存在性，即构造出满足上述条件的 U. 首先我们考虑由 $V \times W$ 中有序对生成的线性空间

$$V \oplus W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(v_1, w_i) \mid n \geq 1, (v_i, w_i) \in V \times W \right\}$$

一个自然的想法是定义 $\otimes : V \times W \to V \oplus W, \quad (v, w) \mapsto 1 \cdot (v, w)$. 但是容易证明此时 $\otimes$ 不具有双线性 (主要因为 $1 \cdot (av, w) \neq a \cdot (v, w)$)，为了强行使得 $\otimes$ 具有双线性，我们考虑商去 $V \oplus W$ 的如

下子空间 N, 其中 N 是有以下两类所有元素生成的空间：

$$\begin{cases}(av_1+v_2,w)-a(v_1,w)-1\cdot(v_2,w)\\(v,aw_1+w_2)-a(v,w_1)-1\cdot(v,w_2)\end{cases}$$

此时定义 $\otimes: V\times W\to(V\oplus W)/N,\quad (v,w)\mapsto 1\cdot(v,w)+N$, 将 $1\cdot(v,w)+N$ 记为 $v\otimes w$. 则有

$$\begin{cases}(av_1+v_2)\otimes w=a(v_1\otimes w)+v_2\otimes w\\v\otimes(aw_1+w_2)=a(v\otimes w_1)+v\otimes w_2\end{cases}$$

即 $\otimes$ 是双线性映射. 此外对任意 $f:V\times W\to U$ 的双线性映射，首先定义 $\varphi_1(1\cdot(v,w))=f((v,w))$. 其次注意

$$\varphi_1(1\cdot(av_1-v_2,w)-a(v_1,w)-1\cdot(v_2,w))=f((av_1-v_2,w)-a(v_1,w)-(v_2,w))=0$$

同理可证

$$\varphi_1(1\cdot(v,aw_1+w_2)-a(v,w_1)-1\cdot(v,w_2))=f((v,aw_1+w_2)-a(v,w_1)-(v,w_2))=0$$

即 $N\subseteq\mathrm{Ker}\varphi_1$. 由引理2.99有如下交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, two heads, "\otimes"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & V\oplus W/N \arrow[d, dashed, "\varphi"] & V\oplus W \arrow[l, two heads, "\pi"'] \arrow[dl, bend left, "\varphi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

即此时 $\varphi: v\otimes w\mapsto\varphi_1(1\cdot(v,w))=f(v,w)$. 并且 $(V\oplus W)/N=\left\{\sum_i v_i\oplus w_i\right\}$（是由单张量生成的）. 若还存在 ψ 使得 $f=\psi\circ\otimes$. 则有 $\psi(v\otimes w)=\varphi(v\otimes w)$, 从而有 $\varphi=\psi$. 于是 $(V\oplus W)/N$ 就是 $V\times W$ 的张量积, 记为 $V\otimes W$.

下面研究 $V\otimes W$ 的维数与一组基. 设 $\dim V/\mathbb{F}=n,\dim W/\mathbb{F}=n,\{v_1,\cdots,v_n\},\{w_1,\cdots,w_n\}$ 分别为 V,W 的一组基. 则对任意 $x\in V\otimes W$, 有

$$x=\sum_{k=1}^m\widetilde{v}_k\otimes\widetilde{w}_k=\sum_{k=1}^m\left(\sum_{i=1}^n a_{k_i}v_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^n b_{k_j}w_i\right)=\sum_{i,j=1}^n\left(\sum_{k=1}^m a_{k_i}b_{k_j}\right)(v_i\otimes w_j).$$

另一方面若设

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_i\otimes w_j=\sum_{i=1}^n v_i\otimes\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j\right)=0.$$

设 $\alpha_i\in V^*(1\le i\le n)$ 满足 $\alpha_i(v_j)=\delta_{ij}$. 定义线性映射 $\beta_i:V\otimes W\to W,\quad v\otimes w\mapsto\alpha_i(v_i)w,(1\le$

$i \le n$) 于是若 $\sum_{j=1}^{n} v_j \otimes y_j = 0$, 则有

$$0 = \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} v_i \otimes y_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_i (v_j \otimes y_j) = y_i = 0$$

所以 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = 0 (1 \le i \le n)$. 再利用 $w_1, \cdots, w_n$ 线性无关，所以 $a_{ij}(1 \le i, j \le n) = 0$, 于是 $\{v_i \otimes w_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$ 是 $V \otimes W$ 的一组基，所以 $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$.

定理 2.101. *设 V, W, X 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，如果存在 $V \times W$ 到 X 的双线性映射 φ 使得对任何线性空间 U 以及任何 $V \times W$ 到 U 的双线性映射 η, 存在唯一的由 X 到 U 的映射 ψ 使得 $\eta = \psi \circ \varphi$, 则 X 与 $V \otimes W$ 同构.*

证明. 首先令 $U = V \otimes W, \eta = \otimes$. 由条件，存在唯一 X 到 $V \otimes W$ 的映射 ψ_1 使得 $\otimes = \psi_1 \circ \varphi$. 此外，还存在唯一 $V \otimes W \to X$ 的线性映射 ψ_2, 使得 $\varphi = \psi_2 \circ \otimes$. 于是有如下交换图成立

$$\begin{tikzcd}
X \\
V \otimes W \arrow[u, dashed, "\psi_2"] \\
X \arrow[u, dashed, "\psi_1"] & V \times W \arrow[l, two heads, "\varphi"'] \arrow[uul, bend right, "\varphi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& V \otimes W \\
& X \arrow[u, dashed, "\psi_1"'] \\
V \times W \arrow[r, two heads, "\otimes"] \arrow[uur, bend left, "\otimes"] & V \otimes X \arrow[u, dashed, "\psi_2"']
\end{tikzcd}$$

容易看出上面交换图分别用 id_X 和 $\mathrm{id}_{V \otimes W}$ 代替 $\psi_2 \circ \psi_1$ 和 $\psi_1 \circ \psi_2$ 后仍然可交换，从而由唯一性有 $\psi_2 \circ \psi_1 = \mathrm{id}_X, \psi_1 \circ \psi_2 = \mathrm{id}_{V \otimes W}$, 所以 X 与 $V \otimes W$ 线性同构. ■

定理2.101说明张量积在同构意义下是唯一的. 在前面的讨论中，我们从抽象的定义出发，给出了张量积的存在性构造，但是不容易看清张量积到底是什么，下面我们给出一个具体的张量积的例子.

引理 2.102. *设 V, U 分别是域 $\mathbb{F}$ 上的 n, m 维线性空间，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组基，任意取定 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in U$, 存在唯一 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$ 使得 $\varphi(\alpha_i) = \beta_i (1 \le i \le n)$.*

引理 2.102 证明平凡，留给读者.

记 $P(V, W)$ 为域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V, W 上的双线性函数全体，在 $P(V, W)$ 上定义加法和数乘如下：

$$(f + g)(v, w) = f(v, w) + g(v, w); \quad (kf)(v, w) = kf(v, w)$$

容易验证 $P(V, W)$ 在上述加法和数乘之下构成域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 记 V^*, W^* 分别为 V, W 的对偶空间，对于 $\alpha \in V, \beta \in W$, 定义 $\alpha \otimes \beta$ 如下：

$$\alpha \otimes \beta (f, g) = f(\alpha) g(\beta), \quad \forall f \in V^*, g \in W^*.$$

容易验证 $\alpha\otimes\beta\in P(V^*,W^*)$. 现在定义 $\sigma:V\times W\to P(V^*,W^*)$, $\quad(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\otimes\beta$. 则容易验证 σ 对于 V 与 W 是双线性的. 进一步

问题 2.103. $P(V^*,W^*)$ 是 $V\times W$ 的一个张量积.

证明. 设 U 是域 $\mathbb{F}$ 上的任意一个线性空间，$\varphi:V\times W\to U$ 是一个双线性映射,$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 与 $\{\eta_1,\cdots,\eta_m\}$ 分别是 V 与 W 的一组基. 利用对偶基性质容易证明：$\{\varepsilon_i\otimes\eta_j\mid 1\le i\le n;1\le j\le m\}$ 是 $P(V^*,W^*)$ 的一组基. 令

$$\varphi(\varepsilon_i,\eta_j)=\gamma_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m.$$

则由引理 2.102 存在唯一线性映射 $\psi:P(V^*,W^*)\to U$ 使得

$$\psi(\varepsilon_i\otimes\eta_j)=\gamma_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m.$$

于是我们有

$$\psi\sigma(\varepsilon_i,\eta_j)=\varphi(\varepsilon_i,\eta_j)=\gamma_{ij}.$$

由双线性有 $\psi\sigma=\varphi$. 若还存在 ψ_1 使得 $\psi_1\sigma=\varphi$. 于是有 $\psi_1(\varepsilon_i\otimes\eta_j)=\gamma_{ij}$, 由 ψ 的唯一性有 $\psi=\psi_1$. 所以 $P(V^*,W^*)$ 构成 $V\times W$ 的一个张量. ■

定理 2.104. 设 V_1,V_2,V_3 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，则

$$\psi_1:(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\to V_1\otimes(V_2\otimes V_3),\quad(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma\mapsto\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)$$

$$\psi_2:V_1\otimes V_2\to V_2\otimes V_1,\quad\alpha\otimes\ \mapsto\beta\otimes\alpha$$

都是线性同构.

证明. 只证 ψ_1 是线性同构，类似可证 ψ_2 是线性同构. 设 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\},\{\eta_1,\cdots,\eta_m\},\{\gamma_1,\cdots,\gamma_s\}$ 分别是 V_1,V_2,V_3 的一组基，于是

$$(\varepsilon_i\otimes\eta_j)\otimes\gamma_k\text{和}\varepsilon_i\otimes(\beta_j\otimes\gamma_k),\quad 1\le i\le n;1\le j\le m;1\le k\le s.$$

分别是 $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$ 和 $V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$ 的一组基. 于是定义 ψ_1 的作用为：

$$\psi_1((\varepsilon_i\otimes\varepsilon_j)\otimes\gamma_k)=\varepsilon_i\times(\beta_j\otimes\gamma_k),\quad 1\le i\le n;1\le j\le m;1\le k\le s.$$

则 ψ_1 就是满足定理条件的线性同构. ■

定理 2.104 给出了张量积的结合律，仿照上述定理我们在考虑多个线性空间的张量积时，可以

不用括弧，即设 $V_1, \cdots, V_m$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，我们可以作它们的张量积为

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m.$$

下面我们来定义线性变换的张量积

定理 2.105. 设 V, W 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathscr{A} : V \to V, \mathscr{B} : W \to W$ 是两个线性变换，于是存在唯一的线性变换 $\mathscr{D} : V \otimes W \to V \otimes W$ 使得

$$\mathscr{D}(\alpha \otimes \beta) = (\mathscr{A}\alpha) \otimes (\mathscr{B}\beta), \quad \forall \alpha \in V, \beta \in W.$$

证明. 定义映射 $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ 为

$$\varphi(\alpha, \beta) = \mathscr{A}(\alpha) \otimes \mathscr{B}(\beta), \quad , \forall \alpha \in V, \beta \in W.$$

容易验证 φ 是双线性映射，由张量积的定义存在唯一线性变换 $\mathscr{D} : V \otimes W \to V \otimes W$ 为

$$\mathscr{D}(\alpha \otimes \beta) = \varphi(\alpha, \beta) = \mathscr{A}(\alpha) \otimes \mathscr{B}(\beta)$$

■

将上述线性变换变换 $\mathscr{D}$ 称为 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的张量积，记为 $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. 上述线性变换的张量积自然可以推广为线性映射的张量积，不做过多讨论. 现在设 A 为 $n \times n$ 阶矩阵，B 为 $m \times m$ 阶矩阵, 定义 $A \otimes B = (a_{ij}B)$ 为 A, B 的张量积，又称 Kronecker 积. 若设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 在 V, W 的一组基 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}, \{\eta_1, \cdots, \eta_m\}$ 下的表示阵分别为 A, B. 则不难验证 $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ 在

$$\varepsilon_1 \otimes \eta_1, \cdots, \varepsilon_1 \otimes \eta_m, \varepsilon_2 \otimes \eta_1, \cdots, \varepsilon_2 \otimes \eta_m, \cdots, \varepsilon_n \otimes \eta_1, \cdots, \varepsilon_n \otimes \eta_m$$

下的表示阵为 $A \otimes B$. 下面给出 $A \otimes B$ 的基本性质

定理 2.106. 设 A, B 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵，则 $A \otimes B$ 满足 *(以下均假设矩阵加法和乘法都有意义)*

1. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C, A \otimes (B + C) = A \otimes C + A \otimes B.$
2. $(kA) \otimes B = k(A \otimes B) = A \otimes (kB).$
3. $(A \otimes C)(B \otimes D) = (AB) \otimes (CD).$
4. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$
5. $I_m \otimes I_n = I_{mn}.$

6. 若 A, B 都是可逆阵，则 $A\otimes B$ 可逆，且

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}.$$

7. 若 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，则 $|A\otimes B|=|A|^n|B|^m$.

8. 若 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，则 $\operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}A\cdot\operatorname{tr}B$.

9. $r(A\otimes B)=r(A)\cdot r(B)$.

证明. 这里只证明性质 9, 在这里承认性质 3,6 正确. 不妨设 $r(A)=r, r(B)=s$, 则存在可逆阵 P,Q,R,S 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix},\quad RBS=\begin{pmatrix} I_s & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

由 $P\otimes R, Q\otimes S$ 均是非异阵，且

$$(P\otimes R)(A\otimes B)(Q\otimes S)=(PAQ)\otimes(RBS)=\begin{pmatrix} I_{rs} & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

所以 $r(A\otimes B)=r(A)r(B)$. ■

问题 2.107. 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，将 $\mathbb{F}$ 看成 $\mathbb{F}$ 上的一维线性空间，可以作张量积 $\mathbb{F}\otimes V$, 证明：$\mathbb{F}\otimes V\cong V$.

证明. 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 V 的一组基, 则 $1\otimes\alpha_i(1\le i\le n)$ 是 $\mathbb{F}\otimes W$ 一组基. 显然映射 $\varphi: F\times V\to V,(k,\alpha)\mapsto k\alpha,\quad k\in\mathbb{F},\alpha\in V$ 是双线性的，所以存在唯一线性映射 $\mathscr{A}: F\otimes V\to V$ 使得 $\mathscr{A}(k\otimes v)=k\alpha$. 并且由于 $\mathscr{A}(1\otimes\alpha_i)=\alpha_i$, 所以 $\mathscr{A}$ 是线性同构. ■

问题 2.108. (线性空间的复化) 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间, 考虑 $\mathbb{C}\otimes V$ 是 $\mathbb{R}$ 上 $2n$ 维线性空间. 对任意 $z_0\in\mathbb{R}$, 定义 $z_0(z\otimes\alpha)=z_0z\otimes\alpha$, 则容易验证在上述运算下 $\mathbb{C}\otimes V$ 构成 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 若 $\varepsilon_i(1\le i\le n)$ 为 V 一组基，则 $1\otimes\varepsilon_i(1\le i\le n)$ 是 $\mathbb{C}\otimes V$ 作为 $\mathbb{C}$ 上线性空间的一组基.

2.20 置换矩阵与对称群

我们称有限集合 T 到自身的一个双射称为 T 上的一个置换（Permutation）, 集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体置换构成的集合记为 S_n. 对任意 $\sigma\in S_n,(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 S 的一个全排列. 反过来，对任意 S 的全排列 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$, 定义 $\sigma(i)=k_i(1\le i\le n)$, 因此 n 元置换的个数，就是 $1,2,\cdots,n$ 所有全排列的个数，即 $\sharp S=n!$.

设 $\sigma,\tau\in S_n,\tau$ 与 σ 的乘积定义为 $\tau\sigma(i)=\tau(\sigma(i))(1\le i\le n)$, 则 $\sigma\tau\in S_n$ 且结合律. 设 $e: S\to S$ 为恒等映射，则 $e\in S_n$. 因为 $\sigma: S\to S$ 是双射，所以 $\sigma^{-1}: S\to S$ 也是双射，且 $\sigma^{-1}\sigma=e$. 因此 S_n 关于上述乘法构成一个群，称为 n 阶对称群.

定义 2.109. 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 n 维标准单位列向量，$\sigma \in S_n$, 定义矩阵

$$P_\sigma = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$$

为相伴于置换 σ 的 n 阶置换矩阵

不难看出置换矩阵的一种等价定义是：n 阶方阵 P 的每行每列只有一个元素非零, 且非零元均为 1. 容易验证第一类初等矩阵，基础循环阵，反单位阵等都是置换矩阵. 进一步讨论我们有

问题 2.110. 设 $\tau, \sigma \in S_n$, 则

1. $P_{\tau\sigma} = P_\tau P_\sigma, P_e = I_n, P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1} = P'_\sigma$.
2. AP_σ 的列向量是 A 的列向量的一个置换, 即 AP_σ 的列第 i 列是 A 的第 $\sigma(i)$ 列.$P'A$ 的行向量是 A 的行向量的一个置换, 即 $P'_\sigma A$ 的第 i 列是 A 的第 $\sigma(i)$ 列.

所以 n 阶置换矩阵全体 $\mathcal{P}_n$ 关于矩阵乘法构成一个群，且为正交群 $O(n)$ 子群. 并且若定义 $P: S_n \to \mathcal{P}_n, \sigma \mapsto P_\sigma$, 则 P 是群同构.

问题 2.111. 试求所有与所有置换矩阵全体可交换的 n 阶方阵.

证明. 若 A 与全体置换矩阵可交换，则首先有 $AJ = JA$, 其中 $J = \begin{pmatrix} O & I_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}$ 为基础循环矩阵，由于 $J^{n-1} - I_n \neq 0, J^n - I_n = 0$, 所以 J 的特征多项式等于极小多项式，因此存在 $f(x)$ 使得 $A = f(J)$, 即 A 是循环矩阵. 又因为初等矩阵 $P_{ij} \in \mathcal{P}_n$, 所以有 $AP_{ij} = P_{ij}A$, 经计算有 A 的非主对角元全相等. 另一方面，$BP_\sigma = P_\sigma B$, 其中 B 是元素全为 1 的矩阵, 所以 $A = aI_n + B$, 即与 $\mathcal{P}_n$ 中全体元素可交换的 n 阶矩阵 $A = (a\delta_{ij} + b), a, b \in \mathbb{C}$. ■

下面关于对称群，稍作拓展. 对称群 S_n 中的一个 n 元置换 σ 可以记为

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ \sigma(j_1) & \sigma(j_2) & \cdots & \sigma(j_n) \end{pmatrix}.$$

从而一个 n 元置换有 $n!$ 种记法.

对于 n 元置换 σ, 给定 $i_1 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 记 $i_2 = \sigma(i_1), i_3 = \sigma(i_2) = \sigma^2(i_1), \cdots$, 这个序列必然会重复，设 i_k 是第一个重复出现的数且 $i_k = i_j$. 于是 $\sigma^{k-1}(i_1) = \sigma^{j-1}(i_1)$, 故 $\sigma^{k-j}(i_1) = i_1$, 因此 $i_{k-j+1} = i_1$. 由 k 的选取可知 $j = 1$. 为了更好地描述置换，首先引入如下概念

定义 2.112. 设 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$, 若 $\sigma \in S_n$ 满足

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \cdots, \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1, \sigma(k) = k, \forall k \notin \{i_1, \cdots, i_r\},$$

则称 σ 为 S_n 中的一个 r-轮换，记为 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r)$. 称 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 为轮换 σ 中的文字，r 称为轮换 σ 的长. 特别地，2-轮换 (ij) 称为对换，1-轮换实际上就是恒等置换.

容易看出 S_n 中的 r-轮换 σ 的阶是 r, 即 $\langle\sigma\rangle = \left\{e, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{r-1}\right\}$, 其中 e 是恒等置换. 任意一个 r-轮换都可以有 r 种表示方法即

$$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r) = (i_2 i_3 \cdots i_1) = \cdots = (i_r i_1 \cdots i_{r-1}).$$

定义 2.113. 在 S_n 中，如果若干个轮换间没有共同文字，则称它们是不相交的轮换.

由定义显然有 S_n 中的两个不相交的轮换是可交换的.

定理 2.114. S_n 中的任何元素 σ 都可表示为 S_n 中一些不相交轮换之积，如果不记次序，则表示唯一.

证明. 取 $a \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 作序列

$$a = \sigma^0(a), \sigma(a), \sigma^2(a), \cdots,$$

其中 σ^0 是恒等置换 e. 这个序列一定包含重复的文字，记 $\sigma^m(a)$ 是第一个与前面相重复的文字，我们前面已经说明过一定与 a 重复，即 $\sigma^m(a) = a$. 作轮换

$$\sigma_1 = (a, \sigma(a), \cdots \sigma^{m-1}(a))$$

则 σ 与 σ_1 在文字 $a, \sigma(a), \cdots, \sigma^{m-1}(a)$ 上的作用相同. 假如此时 $m = n$, 则 $\sigma = \sigma_1, \sigma$ 已经表示为一个轮换. 若 $m < n$, 则取 $b \notin \left\{a, \sigma(a), \cdots, \sigma^{m-1}(a)\right\}$, 仿照上面的方法再做一个轮换

$$\sigma_2 = (b, \sigma(b), \cdots, \sigma^{l-1}(b)),$$

则 σ 与 σ_2 在文字 $b, \sigma(b), \cdots, \sigma^{l-1}(b)$ 上的作用相同, 并且由 σ 是双射显然 σ_1 与 σ_2 不相交. 这样继续下去，直到 $1, 2, \cdots, n$ 用完为止，得到有限个不相交的轮换 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s$ 使得

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_s.$$

注意到，由于对 a, b 等的选择可以不同，选择的先后可以不同，所以上述轮换的次序也可以不同. 但任一文字 c 所在的轮换是唯一的，即 $(c, \sigma(c), \cdots)$, 因此任一 n 元置换 σ 表示为不相交的轮换乘积时如果不计次序则表示唯一. ■

问题 2.115. 所有 n 阶置换矩阵均可对角化

证明. 若 σ 是一个 r-轮换，且 $i_1, \cdots, i_r$ 为 σ 的文字, 记其对应的 P_σ 是轮换矩阵. 将 P_σ 看成 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换, 取 $\mathbb{C}^n$ 一组基 $e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}, e_{i_{r+1}}, \cdots, e_{i_n}$, 其中 $i_{r+1}, \cdots, i_n$ 为 $\{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i_1, \cdots, i_r\}$ 的任一全排列，则有

$$P_\sigma(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}, e_{i_{r+1}, \cdots, e_{i_n}}) = (e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}, e_{i_{r+1}, \cdots, e_{i_n}}) \begin{pmatrix} A & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & & & & 1\\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix},$$

所以 A 可对角化，于是 P_σ 也对角化. 定理 2.114 同样说明任意置换矩阵都可以写成一些不相交的轮换矩阵的乘积，且由于不相交的轮换矩阵可交换，所以可以同时对角化 (证明参考问题 1.187 的 2 过程)，因此任一置换矩阵都可对角化. ■

下面我们给出一利用简单群论知识的证明. 首先引入如下引理

引理 2.116. (Lagrange 定理) *设 G 是有限群，$H<G$, 则有*

$$|G|=|G:H|\cdot|H|.$$

其中 $|G:H|$ 表示作陪集空间 G/H 的元素个数. 所以 G 子群的阶是 G 的阶的因子.

引理 2.116 的证明是简单的，只需注意到 G 是一些 H 陪集的不交并，每个陪集的元素都是 $|H|$.

利用引理 2.116, 对任意 $P_\sigma\in\mathcal{P}_n$, 设 $H=\langle P_\sigma\rangle$, 则有 $|H|\mid n!$. 所以一定有 $(P_\sigma)^{n!}=I_n$, 即 P_σ 适合多项式无重根，所以 P_σ 可对角化.

定理 2.117. *任一 n 元置换都可以写成一些对换的乘积.*

证明. 注意到任何一个 r-轮换 $(i_1i_2\cdots i_r)$ 都可以写成

$$(i_1i_2\cdots i_r)=(i_1i_r)(i_1i_{r-1})\cdots(i_1i_3)(i_1i_2),$$

因此任一个 r-轮换都可以写成 $r-1$ 个对换的乘积, 所以结论得证. ■

所以任一置换矩阵都可以写成若干个第一类初等矩阵 P_{ij} 的乘积. 一个比较难的问题是

问题 2.118. *由于 $W=L(\alpha),\alpha=(1,1,\cdots,1)'$ 是 $\mathcal{P}_n$ 中所有元素公共不变子空间，证明存在 $\mathcal{P}_n$ 中所有元素的公共不变子空间 W', 使得 $\mathbb{R}^n=W\oplus W'$.*

证明. 设 $(,)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中标准内积，定义

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{P_\sigma\in\mathcal{P}_n}(P_\sigma\alpha,P_\sigma\beta),\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$$

显然 $\langle,\rangle$ 是对称双线性函数，且

$$\langle\alpha,\alpha\rangle\geq(\alpha,\alpha)\geq0$$

等号成立当且仅当 $\alpha=0$. 所以 $\langle,\rangle$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的内积. 又因为对任意 $P_\tau\in\mathcal{P}_n$,

$$\langle P_\tau\alpha,P_\tau\beta\rangle=\sum_{P_\sigma\in\mathcal{P}_n}(P_\sigma P_\tau\alpha,P_\sigma P_\tau\beta)=\sum_{P_\sigma\in\mathcal{P}_n}(P_\sigma\alpha,P_\sigma\beta)=\langle\alpha,\beta\rangle$$

所以 P_τ 是内积 $\langle,\rangle$ 下的正交变换，由于 W 是 P_τ 不变子空间，所以由引理 2.61 可知 $W^\perp$ 也是 P_τ 不变子空间, 让 $W'=W^\perp$ 即可. ■

上面的问题我们可以抽象出来，并推广到一般数域上.

问题 2.119. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, $G=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m\}\subseteq\mathrm{GL}(V)$, 满足 $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\in G$. 若 W 是 G 中所有元素公共不变子空间, 则存在 G 中所有元素公共不变子空间 W', 使得 $V=W\oplus W'$.

对于一般数域上的线性空间未必存在内积，所以需换种思维方式

证明. (表示论的方法) 容易验证，对任意 $\mathcal{A}\in G,\mathcal{A}^{-1}\in G$, 即 G 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群. 设 U 是 W 的任一补子空间，$\mathcal{B}_0$ 是 $V\to W$ 的投影，现在构造 $\mathcal{B}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{\mathcal{A}_i\in G}\mathcal{A}_i\mathcal{B}_0\mathcal{A}_i^{-1}$, 则对任意 $\mathcal{A}_j\in G$, 有

$$\mathcal{A}_j\mathcal{B}\mathcal{A}_j^{-1}=\frac{1}{m}\sum_{\mathcal{A}_i\in G}(\mathcal{A}_j\mathcal{A}_i)\mathcal{B}_0(\mathcal{A}_j\mathcal{A}_i)^{-1}=\frac{1}{m}\sum_{\mathcal{A}_i\in G}\mathcal{A}_i\mathcal{B}_0\mathcal{A}_i^{-1}=\mathcal{B}$$

即 $\mathcal{A}_j\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}_j$. 对任意 $v\in V,\mathcal{A}_i\mathcal{B}_0\mathcal{A}_i^{-1}(v)\in W$, 所以 $\mathcal{B}(v)\in W$, 且对任意 $x\in W,\mathcal{A}_i\mathcal{B}_0\mathcal{A}_i^{-1}(x)=x$, 即 $\mathcal{B}$ 就是 V 到 W 的一个投影，于是有 $V=W\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{B}$. 又因为 $\mathrm{Ker}\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}_j(1\le j\le m)$ 的不变子空间，让 $W'=\mathrm{Ker}\mathcal{B}$ 即可. ■

2.21 三维空间的旋转与 Euler 角

本节我们来简单讨论下三维空间旋转 : $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})=\left\{T\in\mathbb{R}^3\mid TT'=I_n,\det T=1\right\}$. 下面我们将体会到为什么称 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 为旋转.

问题 2.120. 如果 V 是三维 Euclid 空间，$\mathscr{A}\in\mathrm{SO}(V)$, 则存在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的表示阵为下面三个矩阵中的一个：

$$I_3,\mathrm{diag}\left\{1,-1,-1\right\},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

当然，前两种情况可以统一为第三种形式，分别取 $\theta=0,\pi$ 即可. 因此，$\mathscr{A}$ 实际上是绕 ε_1 确定的直线旋转 θ 角度. 利用上面的标准型，我们也可以得到一般 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 的形式.

问题 2.121. 任何三阶特殊正交阵都可以写成如下形式：

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=B_\varphi C_\theta B_\psi$$

其中

$$0\le\theta\le\pi,-\pi\le\varphi,\psi\le\pi.$$

称 φ,ψ,θ 为 Euler 角.

证明. 在 V 中取标准内积，则 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 V 的一组标准正交基. 对任意的 $T\in\mathrm{SO}(3)$, 记 $T=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ 为 T 的列分块，则 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 也是 V 的一组标准正交基. 我们关心从 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 的过度阵. 我们将其分为三步，首先将 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 绕 ε_3 旋转 φ 角，即

$$(\eta_1,\eta_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

然后将 $\eta_1,\eta_2,\varepsilon_3$ 绕 η_1 旋转 θ 角，使得 ε_3 变为 ε_3', 即

$$(\eta_1,\xi_2,\varepsilon_3')=(\eta_1,\eta_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

最后将 $\eta_1,\xi_2,\varepsilon_3'$ 绕 ε_3' 旋转 ψ 角，使得 η_1 变为 ε_1',ξ_2 变为 ε_2', 即

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')=(\eta_1,\xi_2,\varepsilon_3')\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

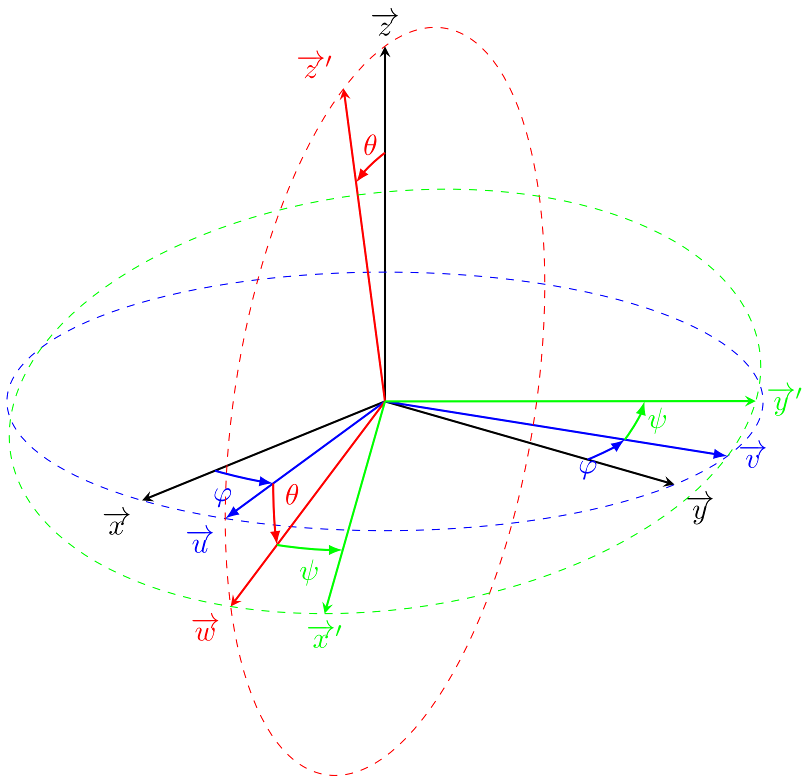
从而从 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 的过度阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

■

简单来讲，描述三维空间的旋转不像二维空间那么容易，Euler 提出了一种方法：若记 Oxy

平面与 $Ox'y'$ 平面的交线为 N(nodal line). 则旋转的过程可以分为三步，首先绕 z 轴将 x 轴转到 N 轴，再绕 N 轴将 z 轴转到 z' 轴, 最后绕 z' 轴将 N 轴转到 x' 轴. 三个旋转的合成示意如下:



$SO_3(\mathbb{R})$ 作为 $O_3(\mathbb{R})$ 的子群，想弄清楚其群结构，不是那么简单. 下面我们利用问题 2.121 结果证明

$$SU_2/\{\pm I_2\} \simeq SO_3(\mathbb{R}).$$

若记

$$SU_2 = \{g \in M_2(\mathbb{C}) \mid gg^* = I_2, \det g = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

其中 g^* 表示 g 的共轭转置. 则我们有

定理 2.122. *存在 $SU_2 \to SO_3(\mathbb{R})$ 的满同态.*

证明. 首先考虑

$$M_2^+ = \{H \in M_2(\mathbb{C}) \mid H = H^*, \mathrm{tr} H = 0\} = \left\{ H_{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

为 $\mathbb{R}$ 上的实线性空间.

$$h_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\quad h_2=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix},\quad h_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

为 M_2^+ 的一组基. 若记 $H_{\boldsymbol{x}}=x_1h_1+x_2h_2+x_3h_3,\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^3$. 则 M_2^+ 与 $\mathbb{R}^3$ 有一一对应关系.

现在令 g 是 SU_2 的一个固定元，定义映射

$$\Phi_g^+:H_{\boldsymbol{x}}\mapsto gH_{\boldsymbol{x}}g^{-1}.$$

因为迹在相似关系下不会改变，且 $(gH_{\boldsymbol{x}}g)^*=g^*H_{\boldsymbol{x}}(g^{-1})^*=gH_{\boldsymbol{x}}g^{-1}$, 从而

$$\Phi_g^+(H_{\boldsymbol{x}})=\begin{pmatrix}y_3&y_1+iy_2\\y_1-iy_2&-y_3\end{pmatrix}=H_{\boldsymbol{y}}\in M_2^+$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T\in\mathbb{R}^3$, 所以 Φ_g^+ 是 $M_2^+\to M_2^+$ 的线性映射. 设 Φ_g^+ 在 h_1,h_2,h_3 下的矩阵为 Φ_g, 则 $\Phi_g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\boldsymbol{x}\mapsto\Phi_g\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 满足

$$(\Phi_g(\boldsymbol{x}),\Phi_g(\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=y_1^2+y_2^2+y_3^2=-\det\Phi(H_{\boldsymbol{x}})=-\det gH_{\boldsymbol{x}}g^{-1}=-\det H_{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}),$$

所以 $\Phi_g\in\mathrm{O}_3$. 并且由定义不难验证 $\Phi_{gg'}^+=\Phi_g^+\Phi_{g'}^+$, 所以 $\Phi_{gg'}=\Phi_g\Phi_{g'}$. 则

$$\Phi:\mathrm{SU}_2\to\mathrm{O}_3,\quad g\mapsto\Phi_g$$

是 SU_2 到 $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ 的群同态. 而

$$\mathrm{Ker}\Phi=\left\{g\in\mathrm{SU}_2\mid gH=Hg,\forall H\in M_2^+\right\}=\{g\in\mathrm{SU}_2\mid gh_i=h_ig,j=1,2,3\}$$

计算可得 $\mathrm{Ker}\Phi=\{\pm I_2\}$. 此外对任意 $g\in\mathrm{SU}_2$, 存在酉阵 u 使得 $g=ub_\varphi u^{-1}$, 其中 b_φ 形如

$$b_\varphi=\begin{pmatrix}e^{\frac{i\varphi}{2}}&0\\0&e^{\frac{-i\varphi}{2}}\end{pmatrix}\in\mathrm{SU}_2$$

而

$$\Phi_{b_\varphi}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B_\varphi\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

所以

$$\det\Phi_g=\det\Phi(ub_\varphi u^{-1})=\det\Phi_u\Phi_{b_\varphi}B_{u^{-1}}=\det\Phi_u\Phi_{b_\varphi}(\Phi_u)^{-1}=\det\Phi_{b_\phi}=1,$$

因此 $\mathrm{Im}\Phi \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. 另一方面，取 $c_\theta = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2$, 经计算有 $\Phi_{c_\theta} = C_\theta \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. 所以对任意 $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, 由问题 2.121 有

$$A = B_\varphi C_\theta B_\psi = \Phi_{b_\varphi}\Phi_{c_\theta}\Phi_{b_\psi} = \Phi_{b_\varphi c_\theta b_\psi} \in \mathrm{Im}\Phi$$

故 $\mathrm{Im}\Phi = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. 于是 Φ 是 SU_2 到 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 的满同态，且同态核是 $\{\pm I_2\}$. ■

进一步，由同态基本定理我们有 $\mathrm{SU}_2/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. 而群 SU_2 的结构是简单的，其拓扑同胚于三维实空间的球面 $\mathbb{S}^3$. 因此有

定理 2.123. (群 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 的几何表示) *群 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 拓扑同胚于三维射影实空间 $\mathbb{RP}^3$.*

注 2.124. 定理 2.122 满同态的寻找事实上可以利用四元数组给出一个更简洁完美的平替方案，这里不过多深入讨论, 具体细节可以参考微信公众号:通数达理–《从复数到 Hamilton 四元数》

第 **3** 章

复旦大学每周一题

3.1 17 级高等代数每日一题

3.1.1 17 级高等代数 I 每日一题

[问题 2017A01] 设

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & \cdots & 3n-2 \\ 1 & 5 & 9 & \cdots & 4n-3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $n \geq 2, A_{ij}$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式. 证明：$|\boldsymbol{A}| = \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

证明. 只需证明 $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{J}'| = 0$, 其中 $\boldsymbol{J} = (1, 1, \cdots, 1)'$. 注意前两行对应成比例，所以结论得证. ■

[问题 2017A02] 设 $|\boldsymbol{A}|$ 为 n 阶行列式，其中 n 为奇数，且 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有元素都是整数. 证明：若对任意的 $1 \leq i \leq n, a_{ii}$ 都是偶数，且对任意的 $1 \leq i < j \leq n, a_{ij} + a_{ji}$ 都是偶数，则 $|\boldsymbol{A}|$ 也是偶数.

证明. 令反对称阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 满足

$$b_{ij} = \begin{cases} 0\text{或者}1, \quad 1 \leq i < j \leq n. \\ 0, \quad i = j. \\ 0\text{或者}-1, \quad 1 \leq j < i \leq n \end{cases}$$

其中当 a_{ij}, a_{ji} 都是奇数时，$b_{ij} \neq 0$, 当 a_{ij}, a_{ji} 都是偶数时，$b_{ij} = b_{ji} = 0$. 则 $|\boldsymbol{A}| \equiv |\boldsymbol{B}| (\text{mod} 2)$. 由于奇数阶反对称阵行列式为零，所以 $|\boldsymbol{A}|$ 为偶数. ■

[问题 2017A04] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 2 阶方阵，满足 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA},\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$ 和 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$, 证明：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

证明. 注意条件和结论在相似变换:$\boldsymbol{C}\mapsto\boldsymbol{P^{-1}CP},\boldsymbol{B}\mapsto\boldsymbol{P^{-1}BP},\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{P^{-1}AP}$ 下不会发生改变，因此不妨一开始便设 $\boldsymbol{C}$ 为 Jordan 标准型. 首先容易证明 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C^2})=0$, 即 $\boldsymbol{C}$ 为幂零阵. 若 $\boldsymbol{C}\neq 0$, 则 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, 此时由于 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{BC},\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AC}$, 所以存在多项式 $g(x),f(x)$ 使得 $\boldsymbol{A}=f(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{B}=g(\boldsymbol{C})$, 于是 $\boldsymbol{C}=f(\boldsymbol{C})g(\boldsymbol{C})-g(\boldsymbol{C})f(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$, 矛盾. ■

[问题 2017A05] 设

$$f_i(x)=a_{in}x^n+a_{i,n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{i,1}x+a_{i,0}(0\le i\le n),$$

其中 $a_{ij}(0\le 1,j\le n)$ 都是整数. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是对应的 $n+1$ 阶方阵，证明：
(1) 对任意的整数 $x,f_0(x),f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 的最大公因数都要整除 $|\boldsymbol{A}|$.
(2) 存在 $n+1$ 阶整数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=I_{n+1}$ 的充要条件是,存在 $n+1$ 个不同的整数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$, 使得 $n+1$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}=(f_i(x_j))_{0\le i,j\le n}$ 满足 $|\boldsymbol{C}|=\pm\prod\limits_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

证明. (1). 将 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 j 列乘以 $x^j(1\le j\le n)$ 加到第一列得

$$|\boldsymbol{A}|=f_0(x)A_{11}+f_2(x)A_{21}+\cdots+f_n(x)A_{n1}$$

所以结论得证.
(2) 注意到

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}&\cdots&a_{0n}\\a_{10}&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,0}&a_{n,1}&\cdots&a_{n,n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_0&x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_0^n&x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X},$$

注意到 $|\boldsymbol{X}|=\prod\limits_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$. 所以等价于证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$. 必要性，显然，下证充分性. 若 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$, 则 $\boldsymbol{A^{-1}}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$ 也为整数矩阵，所以令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A^{-1}}$. ■

[问题 2017A12] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为 n 阶实方阵，$\boldsymbol{S}$ 为 n 阶实反对称阵，a 为非零实数，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CD}=a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{S}$. 证明：$\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{B'C'}$ 是可逆阵.

证明. 首先 $a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{S}$ 无零特征值，所以可逆. 于是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均是可逆阵. 设 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{BP}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆阵，则只需证明 $\boldsymbol{P'}(\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{B'C'})$ 是可逆阵. 而

$$\boldsymbol{P'}(\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{B'C'})=\boldsymbol{P'}(a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{S})\boldsymbol{P}+a\boldsymbol{I_n}-\boldsymbol{S}$$

设 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{P'}(\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{B'C'})\boldsymbol{x}=0$, 方程两边左乘 $\boldsymbol{x}^T$ 得 $a(\boldsymbol{Px})^T(\boldsymbol{Px})+a\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=0$, 所以 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Px})^T(\boldsymbol{Px})=0$, 因此 $\boldsymbol{x}=0$, 即方程仅有零解，所以结论得证. ■

[问题 2017A13]任取 $\mathbb{K}$ 中 n^2 个不同的数 $a_{ij}(1\le i,j\le n)$, 存在 a_{ij} 的全排列 $a_1,\cdots,a_{n^2}$ 使得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n^2-n+1} & a_{n^2-n+2} & \cdots & a_{n^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

证明. 我们对 n 进行归纳. 当 $n=2$ 时，先取到 $a_1+a_2\neq 0$, 则 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}=(a_1-a_2)(a_1+a_2)\neq 0$, 所以 $B=\{(a_1,a_2),(a_2,a_1)\}$ 是 $\mathbb{K}^2$ 的一组基. 注意到 $(a_3,a_4)\neq 0$, 则由基扩张定理，必可从基 B 中选取一个基向量，不妨设 (a_1,a_2), 使得 $\{(a_1,a_2),(a_3,a_4)\}$ 仍是 $\mathbb{K}^2$ 的一组基. 因此 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\neq 0$. 假设 $n-1$ 时结论成立. 现在证 n 的情形. 记 $\omega_k(0\le k\le n-1)$ 为 $x^n=1$ 的单位根. 先取 $a_1,\cdots,a_n$ 满足

$$a_1+a_2\omega_k+a_3\omega_k^2+\cdots+a_n\omega_k^{n-1}\neq 0,\quad 0\le k\le n-1$$

首先一定可以取到满足上述条件的 $a_1,\cdots,a_n$. 例如任意取定 $a_2,\cdots,a_n$, 则不满足上述条件的 a_1 至多有 n 个，所以一定可以取到. 若记 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-1} \\ 1 & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 则令 $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{I}_n+a_2\boldsymbol{J}+\cdots+a_n\boldsymbol{J}^{n-1}=f(\boldsymbol{J})$ 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $f(\omega_k)\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是非异阵，因此 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 构成 $\mathbb{K}^n$ 的一组基. 由归纳假设，可以从剩余的 n^2-n 个数中选取 $(n-1)^2$ 个数的全排列，使得

$$\begin{vmatrix} a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n^2-n+2} & \cdots & a_{n^2} \end{vmatrix}\neq 0$$

从而在剩余的 $n-1$ 个数中，任意选定排列记为 $a_{n+1},\cdots,a_{n^2-n+1}$, 均可使得 $n-1$ 个行向量 $(a_{n+1},\cdots,a_{2n}),\cdots,(a_{n^2-n+1},\cdots,a_{n^2})$ 是线性无关的. 则由基扩张定理，可以从 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 中选取一个基向量，不妨设为 β_1, 使得 $\{(a_1,\cdots,a_n),\cdots,(a_{n^2-n+1},\cdots,a_{n^2})\}$ 构成 $\mathbb{K}^n$ 的一组基，从而结论得证. ■

[问题 2017A15](1) 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 $n(n\ge 2)$ 维线性空间 V 上的线性变换，证明：若 V 中只有平凡的 $\boldsymbol{\varphi}-$ 子空间，则 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 的同构.
(2). 设 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 $2n+1(n\ge 1)$ 维线性空间 V 上的两个非零线性变换，满足 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$. 证明：$V$ 中既有非平凡 $\boldsymbol{\varphi}-$ 子空间，也有非平凡的 $\boldsymbol{\psi}-$ 不变子空间.
(3) 举例说明：当 V 的维数为偶数时，(2) 的结论一般不成立.

证明. (1). 由条件有 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}=\{0\}$ 或者 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}=V$. 若 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}=V$, 则 $\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{0}$, 则任意 V 的一维子空间都是 $\boldsymbol{\varphi}-$ 子空间，矛盾. 所以 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 的自同构.

(2). 在等式 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}=-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}$ 同时取行列式有 $|\boldsymbol{\varphi}||\boldsymbol{\psi}|=-|\boldsymbol{\varphi}||\boldsymbol{\psi}|$, 所以 $|\boldsymbol{\varphi}|=0$ 或者 $|\boldsymbol{\psi}|=0$. 不妨设 $|\boldsymbol{\varphi}|=0$, 则 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}\neq\{0\}$ 为非平凡 $\boldsymbol{\varphi}-$ 子空间. 任取 $\alpha\in\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}$, 有 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi})(\alpha)=0$, 即 $\boldsymbol{\psi}(\alpha)\in\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}$, 所以 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}$ 也是非平凡 $\boldsymbol{\psi}-$ 子空间.

(3) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, 则容易验证 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 但是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0,|\boldsymbol{B}|\neq 0$. ■

3.1.2 17 级高等代数 II 每周一题

[问题 2018S02] 设 $M_n(\mathbb{K})$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵全体构成的线性空间，

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&1&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

$M_n(\mathbb{K})$ 上的线性变换 $\boldsymbol{\eta}$ 定义为 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{PX'P}$, 试求 $\boldsymbol{\eta}$ 的全体特征值和特征向量.

证明. 注意到 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P'},\boldsymbol{P^2}=\boldsymbol{I}_n$. 所以 $\boldsymbol{\eta}^2(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{PX'P})'\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}$, 所以 $\boldsymbol{\eta}^2=\boldsymbol{I}_v$. 因此 $\boldsymbol{\eta}$ 的特征值为 ± 1. 注意到对于任意 $1\leq i\leq j\leq n$, 令 $\boldsymbol{PX}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E_{ji}}$, 则 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X}_{ij})=\boldsymbol{X}_{ij}$. 同理，对于 $1\leq i<j\leq n$, 令 $\boldsymbol{PY_{ij}}=\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}$, 则 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{Y}_{ij})=\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji})=-\boldsymbol{Y}_{ij}$. 所以

$$\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}):1\leq i\leq j\leq n\}$$

为 $\boldsymbol{\eta}$ 关于特征值 1 的特征子空间的一组基.

$$\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}):1\leq i<j\leq n\}$$

为 $\boldsymbol{\eta}$ 关于特征值 -1 的特征子空间的一组基. ■

[问题 2018S04] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维复列向量，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A\alpha\beta'}$. 试求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可对角化的充要条件.

证明. 首先 $R(\boldsymbol{B})\leq 1$. 不难看出 $\boldsymbol{B}$ 可对角化的充要条件是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A\alpha\beta'})\neq 0$. 或者 $\boldsymbol{A\alpha\beta'}=\boldsymbol{O}$. 当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 时，条件与结论平凡. 下面考虑 $R(\boldsymbol{B})=1$ 的情形.

首先 $\boldsymbol{B}$ 有 $n-1$ 个 0Jordan 块. 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\neq 0$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $0,0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$. 因此 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\}$. 即 $\boldsymbol{B}$ 可对角化. 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=0$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,0,\cdots,\boldsymbol{J}(0,2)\}$, 其中 $\boldsymbol{J}(0,2)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 不可对角化. ■

[问题 2018S05] 设 $\boldsymbol{C}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵，证明：
(1) $\boldsymbol{C}$ 是幂零阵当且仅当 $\boldsymbol{C}$ 的特征值全为零.
(2) 若 $r(\boldsymbol{C})=1$, 则 $\boldsymbol{C}$ 是幂零阵当且仅当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})=0$.
(3) 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})=0$ 且存在数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式，以及 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}})=0(1\le i\le n-1)$ 成立，则必有 $r(\boldsymbol{C})\neq 1$.

证明. 只讨论 (3). 若 $r(\boldsymbol{C})=1$, 则由 (2) 可知 $\boldsymbol{C}$ 是幂零阵. 首先不难看出 A 是非异阵，所以 $r(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}})=1$ 因此 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}(0\le i\le n-1)$ 都是幂零阵, 即 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}$ 的特征值都为零. 不妨设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$, 则由

$$|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}|=\lambda^{n-1}(\lambda-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{\alpha})$$

有 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{\alpha}=0$, 则 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{\alpha}=0$. 由于 $\mathrm{Ker}\boldsymbol{C}=n-1$, 所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关. 于是存在不全为零的数 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{K}$ 使得

$$g(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\alpha})=a_n\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{\alpha}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-2}}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

若记 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 则 $(g(\lambda),f(\lambda))\neq 1$, 且 $f(\lambda)\neq g(\lambda)$, 这与 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 上不可约矛盾. ■

[问题 2018S06](1) 设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}_n$, 其中 m 是正整数，证明：$\boldsymbol{A}$ 在复数域上可对角化.
(2) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换，满足 $\boldsymbol{\varphi}^m=\boldsymbol{I}_V$, 其中 m 是正整数. 设 $W=\{\boldsymbol{v}\in V\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\}$ 为 V 的子空间，线性变换 $\boldsymbol{\psi}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{\varphi}^i$, 证明：

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\psi})=\dim W.$$

证明. 只讨论 (2). 由 (1) 可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 可对角化，即存在 V 的一组基，使得 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示阵为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_n\}$, 其中 $\lambda_i=1(1\le i\le r),\lambda_j\neq 1$ 且 $\lambda_j^m=1(r+1\le j\le n)$. 因此有 $1+\lambda_j+\cdots+\lambda_j^{m-1}=0$. 所以

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\psi})=\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_k^i\right)+\sum_{j=r+1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_j^i\right)=\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_k^i\right)=r$$

而由于 $\boldsymbol{\varphi}$ 可对角化，所以几何重数等于代数重数，即 $\dim W=r=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\psi})$. ■

[问题 2018S08] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换，$f(\lambda),m(\lambda)$ 分别是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征多项式和极小多项式. 如果存在 V 的 $\boldsymbol{\varphi}-$ 子空间 V_1,V_2 使得

$$V=V_1\oplus V_2,\quad \dim V_1<\dim V,\dim V_2<\dim V$$

则称 V 是 $\boldsymbol{\varphi}-$ 可分解的，否则称 V 是 $\boldsymbol{\varphi}-$ 不可分解的. 证明：V 是 $\boldsymbol{\varphi}-$ 不可分解的充要条件是 $f(\lambda)=m(\lambda)=p(\lambda)^k$, 其中 $p(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式，$k\geq 1$.

证明. 必要性. 设 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 上的标准因式分解为

$$f(\lambda)=p_1(\lambda)^{k_1}p_2(\lambda)^{k_2}\cdots p_s(\lambda)^{k_s},\quad k_i\geq 1, s\geq 1.$$

其中 $p_1(\lambda),\cdots,p_s(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互不相同的不可约多项式. 若 $s\geq 2$, 则令 $g(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{p_1(\lambda)^{k_1}}$, 于是 $(g(\lambda),p_1(\lambda)^{k_1})=1$, 因此不难证明 $V=\mathrm{Ker}g(\boldsymbol{\varphi})\oplus\mathrm{Ker}p_1(\boldsymbol{\varphi})^{k_1}$. 这与 V 是 $\boldsymbol{\varphi}-$ 不可分解的矛盾，所以可设 $f(\lambda)=p(\lambda)^k$. 考虑 $\boldsymbol{\varphi}$ 的有理标准型可知 $f(\lambda)=m(\lambda)=p(\lambda)^k$.

充分性. 反证. 若 V 是 $\boldsymbol{\varphi}-$ 可分解的，则 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 V 的一组基下的表示阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$, 因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 至少有两个初等因子，这与 $f(\lambda)=m(\lambda)=p(\lambda)^k$ 矛盾. ■

[问题 2018S15] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是乘法可交换的 n 阶实对称阵，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆，证明：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}.$$

证明. 反证. 若 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})=2\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{I}_n$. 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 为实对称阵，则存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q'CQ}=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right\},\quad \boldsymbol{QC^{-1}Q}=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}\right\}$$

但是注意不存在 λ_i 使得 $\lambda_i+\dfrac{1}{\lambda_i}=-1$, 矛盾. ■

[问题 2018S16] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称阵，满足 $a_{ij}\geq 0(1\leq i,j\leq n)$. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值，证明：存在某个特征值 $\lambda_j=\max\limits_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$.

证明. 不妨设 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$. 对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|=\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j\right|\leq\sum_{i,j=1}^n a_{ij}|x_i||x_j|=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\leq\lambda_n\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}=\lambda_n\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}.$$

其中 $\boldsymbol{y}=(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)^T$. 则对任意 $1\leq i\leq n$, 设 $\boldsymbol{\alpha_i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_i 的特征向量，即 $\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_i$. 因此

$$|\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_i|=|\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i|\leq\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_i.$$

于是有 $\lambda_n\geq\max\limits_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|\geq\lambda_n$, 因此结论得证. ■

3.2 18 级高等代数每周一题

3.2.1 18 级高等代数 I 每周一题

[问题 2018A01] 计算下列 $n+1$ 阶行列式的值：

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n-1}n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

证明. 考虑构造函数

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\cdot\prod_{i=1}^{n}(a_i-x).$$

两边求导有

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 2x & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ nx^{n-1} & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\ne i}(a_j-x)\cdot(-1)\right)$$

因此

$$|\boldsymbol{A}| = f'(-1) = -\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{i=1}^{n}(a_i+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+1}.$$

∎

[问题 2018A02]设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 个复数，满足：

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = r. \\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2 = r. \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\cdots+\lambda_n^{n+1} = r. \end{cases}$$

其中 $r\in[0,n]$ 为整数. 证明：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 r 个 1，$n-r$ 个零.

证明. 令 $\lambda_{n+1}=1$, 则可将原方程组整理为

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n-r\lambda_{n+1}=0.\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2-r\lambda_{n+1}^2=0.\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\cdots+\lambda_n^{n+1}-r\lambda_{n+1}^{n+1}=0\end{cases}$$

反证，若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中并非是有 r 个 1，$n-r$ 个 0，则可在上述方程中去掉取值为零的 λ_i, 再将取值相同的非零 λ_i 合并，重新作为 λ_i^j 前面的系数. 最后可得到的方程组中 λ_i 的取值非零且互不相同. 即有

$$\begin{cases}\lambda_{i_1}k_1+\lambda_{i_2}k_2+\cdots+\lambda_{i_s}k_s+\lambda_{n+1}k_{s+1}=0\\ \lambda_{i_1}^2k_1+\lambda_{i_2}^2k_2+\cdots+\lambda_{i_s}^2k_s+\lambda_{n+1}^2k_{s+1}=0\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_{i_1}^{n+1}k_1+\lambda_{i_2}^{n+1}k_2+\cdots+\lambda_{i_s}^{n+1}k_s+\lambda_{n+1}^{n+1}k_{s+1}=0\end{cases}\qquad(\heartsuit)$$

(i) 若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中并非有 r 个 1，则 $\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_s},\lambda_{n+1}$ 互不相同，$s\geq 0,k_i\geq 1$. 将 $(\heartsuit)$ 看成关于 $k_1,\cdots,k_{s+1}$ 的线性方程组，其有非零解. 但是只考虑前 $s+1$ 个方程，其系数矩阵行列式为 $\lambda_{n+1}\cdot\prod\limits_{1\leq k<j\leq s}(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_k})\prod\limits_{k=1}^{s}\lambda_{i_k}\prod\limits_{1\leq k\leq s}(\lambda_{n+1}-\lambda_{i_k})\neq 0$ 矛盾，所以结论得证.

(ii) 若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中有 r 个 1，则 $\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_s}$ 互不相同，$s\geq 1.k_i\geq 1(1\leq i\leq s),k_{s+1}=0$. 此时考虑前 s 个方程，其系数矩阵行列式为 $\prod\limits_{1\leq k<j\leq s}(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_k})\prod\limits_{k=1}^{s}\lambda_{i_s}\neq 0$ 也矛盾.

∎

[问题 2018A03]设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，b 为常数，方阵 $\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b)$.
(1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式之和等于 $\boldsymbol{B}$ 的所有代数余子式之和.
(2) 进一步假设 $\boldsymbol{A}$ 是偶数阶反对称阵，证明：$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

证明. (1) 不难看出

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\boldsymbol{A}_{ij}=\sum_{i,j=1}^n\boldsymbol{B}_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1,n} & 1\\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2,n} & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{n,n} & 1\end{vmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij},\boldsymbol{B}_{ij}$ 分别是 $|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|$ 的第 (i,j) 元的代数余子式，所以结论得证.

(2) 注意
$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + b\sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ij}$$
只需证明 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ij} = 0$. 注意到
$$\boldsymbol{A}_{ij} = (\boldsymbol{A'})_{ji} = (-\boldsymbol{A})_{ji} = (-1)^{n-1}\boldsymbol{A}_{ji} = -\boldsymbol{A}_{ji},$$
于是结论得证. ■

[问题 2018A05] 设 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维实列向量，试构造 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 满足以下两个条件：

(1)$\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

(2) 对任一满足 $\boldsymbol{\alpha'\gamma} = 0$ 的 n 维列向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 均有 $\boldsymbol{A\gamma} = \boldsymbol{\gamma}$.

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一组基础解系. 则容易证明 $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}\}$ 线性无关构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 是非异阵. 现在构造 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{P}^{-1}$, 则
$$\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta})$$
所以 $\boldsymbol{A}$ 满足题目条件. ■

[问题 2018A06] 试求下列 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的秩，其中：

(1)$a_{ij} = \cos(\alpha_i - \beta_j)$.

(2)$a_{ij} = 1 + x_i y_i$.

证明. 只讨论 (1) 注意到 $a_{ij} = \cos(\alpha_i - \beta_j) = \cos\alpha_i \cos\beta_j + \sin\alpha_i \sin\beta_j$. 所以
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{BC}$$
所以 $r(\boldsymbol{A}) \leq 2$.

(i) 若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) = 0$.

(ii) 若 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ 且 $r(\boldsymbol{B}) = 1$ 或者 $r(\boldsymbol{C}) = 1$, 则 $1 \leq r(\boldsymbol{A}) \leq \min\{r(\boldsymbol{B}), r(\boldsymbol{C})\} = 1$.

(iii) 若 $r(\boldsymbol{B}) = 2$ 且 $r(\boldsymbol{C}) = 2$, 则由 Sylvester 秩不等式可得 $r(\boldsymbol{A}) \geq r(\boldsymbol{B}) + r(\boldsymbol{C}) - 2 = 2$, 所以 $r(\boldsymbol{B}) = 2$. ■

[问题 2018A08] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶非异阵，满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{BA}) = \boldsymbol{O}$. 证明：线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{BA})\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任意的 n 维列向量.

证明. 记 V 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间. 令

$$W=\left\{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha}\text{为任意 n 维列向量}\right\}$$

则显然 $W\subseteq V$. 只需证明 $\dim W=r(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=\dim V=n-r(\boldsymbol{A})$. 一方面，由 Sylvester 秩不等式

$$0=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}))\geq r(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A})-n,$$

即 $n-r(\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$. 另一方面

$$r(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{C})-r(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\geq n-r(\boldsymbol{A})$$

所以 $r(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A})$, 于是结论得证. ■

[问题 2018A14] 设 p 是奇素数，证明：多项式 $f(x)=(p-1)x^{p-2}+(p-2)x^{p-3}+\cdots+2x+1$ 在有理数域上不可约.

证明. 注意到 $f(x)=(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x^p-1}{x-1}\right)$ 令 $x=y+1$, 则有

$$f(x)=g(y)=(y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots+C_p^{p-2}y+C_p^{p-1})'=(p-1)y^{p-2}+(p-2)C_p^1y^{p-3}+\cdots+2C_p^{p-3}+C_p^{p-2}$$

由 Eisenstein 判别法可知 $g(y)$ 在有理数域上不可约，从而 $f(x)$ 在有理数域上也不可约. ■

3.2.2 18 级高等代数 II 每周一题

[问题 2019S01] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵，满足 $(\boldsymbol{A}')^m=\boldsymbol{A}^k$, 其中 m,k 是互异的正整数. 证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或单位根.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则由条件有 $\{\lambda_1^m,\lambda_2^m,\cdots,\lambda_n^m\}=\left\{\lambda_1^k,\lambda_2^k\cdots,\lambda_n^k\right\}$. 只需证明 λ_1 为 0 或者单位根即可. 记 $i_0=1$, 存在 $1\leq i_1\leq n$ 使得 $\lambda_1^m=\lambda_{i_1}^k$. 存在 $1\leq i_2\leq n$, 使得 $\lambda_{i_1}^m=\lambda_{i_2}^k,\cdots$ 这样做下去就可以得到对任意正整数 l, 有 $\lambda_1^{m^l}=\lambda_{i_l}^{k^l}$. 由于特征值的指标集有限，所以存在非负正整数 $r<s$ 使得 $\lambda_{i_r}=\lambda_{i_s}$. 两边同时 k^s 次方得 $\lambda_1^{m^rk^{s-r}}=\lambda_1^{m^s}$. 若 $\lambda_1\neq 0$, 则有 $\lambda_1^{m^s-m^rk^{s-r}}=1$, 即 λ_1 是单位根. ■

[问题 2019S08] 设 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足：对任意的正整数 $k,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k)=r(\boldsymbol{A})$. 证明：对任意的正整数 $k,\boldsymbol{A}^k$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

证明. 首先由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k)=r(\boldsymbol{A}),k\geq 1$ 能够解出 $\boldsymbol{A}$ 有 $r=r(\boldsymbol{A})$ 个特征值 1，$n-r$ 个特征值 0. 则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\left\{J(1,k_1),\cdots,J(1,k_s),0,\cdots,0\right\}$, 即 0Jordan 块都是 1 阶的，否则与 $r(\boldsymbol{A})=r$ 矛盾. 由于 $J(1,k_i)^k$ 的的 Jordan 标准型为 $J(1,k_i)$，所以结论得证. ■

3.3 19 级高等代数每周一题

3.3.1 19 级高等代数 I 每周一题

[问题 2019A10] 求下列数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V_1, V_2, V_3 的维数和一组基 (表示为基础矩阵的线性组合)：

(1)$V_1 = \{\boldsymbol{X} \in M_{2n}(\mathbb{K}) \mid \boldsymbol{X'J} + \boldsymbol{JX} = \boldsymbol{O}\}$, 其中 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(2)$V_2 = \{\boldsymbol{X} \in M_{2n+1}(\mathbb{K}) \mid \boldsymbol{X'M} + \boldsymbol{MX} = \boldsymbol{O}\}$, 其中 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(3)$V_3 = \{\boldsymbol{X} \in M_{2n}(\mathbb{K}) \mid \boldsymbol{X'N} + \boldsymbol{NX} = \boldsymbol{O}\}$, 其中 $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

证明. (1) 设 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \in V_1$ 为对应分块代入 $\boldsymbol{X'J} + \boldsymbol{JX} = \boldsymbol{O}$ 有

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}' \\ -\boldsymbol{D}' & \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{D} \\ -(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}') & \boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}.$$

从而有 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C'}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B'}, \boldsymbol{D} = -\boldsymbol{A'}$. 所以不难看出 $\dim V_1 = 2n^2 + n$. $\boldsymbol{E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{n+j,n+i}(1 \leq i,j \leq n)$; $\boldsymbol{E}_{i,i+n}(1 \leq i \leq n)$; $\boldsymbol{E}_{i,j+n} + \boldsymbol{E}_{j,i+n}(1 \leq i < j \leq n)$; $\boldsymbol{E}_{i+n,i}(1 \leq i \leq n)$; $\boldsymbol{E}_{i+n,j} + \boldsymbol{E}_{n+j,i}(1 \leq i < j \leq n)$ 为 V_1 的一组基. 同理可以解决 (2)(3). ■

3.3.2 19 级高等代数 II 每周一题

[问题 2020S06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵，$f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 证明：$\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 可对角化.

证明. 必要性. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，满足 $\boldsymbol{A\alpha}_i = \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i (1 \leq i \leq n)$. 注意到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix} = (\lambda_i + f(\lambda_i)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ -\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix} = (\lambda_i - f(\lambda_i)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ -\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix}$$

容易验证 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ -\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix} (1 \leq i \leq n)$ 线性无关，所以 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 有 $2n$ 个线性无关的特征向量，所以可对角化.

充分性. 考虑如下相似变换：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A})\\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})$ 均可对角化. 又因为 $\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})$ 可交换，从而其可同时对角化，即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_2$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}_1,\boldsymbol{\Lambda_2}$ 为对角阵, 因此有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Lambda}_1+\boldsymbol{\Lambda}_2)$ 为对角阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. ■

3.4 20 级高等代数每周一题

3.4.1 20 级高等代数 II

[问题 2021S03] 设 $V=M_n(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的集合.
(1) 将 V 看成是复线性空间，V 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 定义为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{J}\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{J}$ 是基础循环矩阵，试求 $\boldsymbol{\varphi}$ 的全体特征值和对应的特征向量.
(2) 将 V 看成是实线性空间，V 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 定义为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\overline{\boldsymbol{X}}$, 其中 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的共轭矩阵，试求 φ 的全体特征值和对应的特征向量.

证明. (1) 记 $\omega_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}(0\le k\le n-1)$ 为 $\boldsymbol{J}$ 的特征值. 则 $\boldsymbol{\alpha}_k=(1,\omega_k,\cdots,\omega_k^{n-1})'$ 是 $\boldsymbol{J}$ 关于特征值 ω_k 的特征值 ω_k 的特征向量. 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值为 ω_k(各 n 重)，$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{e}_j'(1\le j\le n)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 关于特征值 ω_k 的特征向量.

(2) 注意到 $\boldsymbol{\varphi}^2=\boldsymbol{I}_v$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值只可能为 ±1. 并且若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+i\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}$, 则有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 同理若 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=-\boldsymbol{X}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 关于特征值 1 的线性无关特征向量为 $\{\boldsymbol{E}_{ij}(1\le i,j\le n)\}$, 关于特征值 -1 的线性无关的特征向量为 $\{i\boldsymbol{E}_{ij}(1\le i,j\le n)\}$. ■

[问题 2021S06] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩等于 2，请用 $\boldsymbol{M}$ 的特征值的相关条件给出 $\boldsymbol{M}$ 可对角化的充要条件.

证明. 设 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的满秩分解. 则

$$|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{M}|=|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}|=\lambda^{n-2}|\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}|$$

若 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ 为奇异阵，则 $\boldsymbol{M}$ 关于特征值 0 的代数重数大于 $n-2$, 其几何重数为 $n-r(\boldsymbol{M})=n-2$, 所以 $\boldsymbol{M}$ 不可对角化. 若 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ 为非异阵，则 $\boldsymbol{M}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ 可对角化. 而二阶复方阵 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ 有两个不同特征值或者 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ 为纯量阵 $c\boldsymbol{I}_2$. ■

[问题 2021S07] 设 a_0, a_1, a_2 为有理数，使得

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 + a_2 & a_1 + a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 + a_2 \end{pmatrix}$$

为奇异阵. 证明：$a_0 = a_1 = a_2 = 0$

证明. 令 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} = a_0\boldsymbol{I}_3 + a_1\boldsymbol{J} + a_2\boldsymbol{J}^2$. 记 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Q}_2[x]$. 注意到 $\boldsymbol{J}$ 的特征多项式为 $g(x) = x^3 - x - 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，且由条件有 $(f(x), g(x)) \neq 1$. 从而只能是 $g(x) \mid f(x)$, 由于 $\deg(f(x)) \leq 2$, 从而只能是 $f(x) = 0$, 即 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. ■

[问题 2021S08] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换. 证明：若 $\boldsymbol{\varphi}$ 有 r 维不变子空间，则 $\boldsymbol{\varphi}$ 必有 $n - r$ 维不变子空间.

证明. 设 U 是 r 维 $\boldsymbol{\varphi}$ 不变子空间，取定 U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示阵为 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 由于 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{M}'$ 相似，则 $\boldsymbol{\varphi}$ 在某组基 $\{\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 下的表示阵为 $\boldsymbol{M}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 则容易验证 $W = L(\boldsymbol{f}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{f}_n)$ 是 $n - r$ 维 $\boldsymbol{\varphi}$ 不变子空间. ■

[问题 2021S09] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $n(n \geq 2)$ 阶方阵，已知 $\boldsymbol{AB}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}(0, n)$, 试求 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型.

证明. 由条件有 $\boldsymbol{AB}$ 的特征多项式和极小多项式均为 λ^n, 所以 $\boldsymbol{BA}$ 的特征多项式也为 λ^n. 并且 $\boldsymbol{BA}$ 的最小多项式为 λ^{n-1} 或者 λ^n. 若 $\boldsymbol{BA}$ 的最小多项式为 $\lambda^k (k \leq n-2)$, 则 $(\boldsymbol{AB})^k(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^k\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$. 这与 $\boldsymbol{AB}$ 的最小多项式为 λ^n 相矛盾. 因此 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}(0, n)$ 或者 $\{\boldsymbol{J}(0, n-1), 0\}$. 哪种情况取决于 $\boldsymbol{BA}$ 的秩是 $n - 1$ 还是 $n - 2$. ■

[问题 2021S10] 设 S 是某些 n 阶方阵构成的集合，满足如下条件：
(1)$\boldsymbol{I}_n \in S$.
(2) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in S$, 则 $\boldsymbol{AB} \in S$.
(3) 对任意 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in S, (\boldsymbol{AB})^3 = \boldsymbol{BA}$ 成立.
证明：S 中的矩阵可以同时对角化，并且 S 是有限集合.

证明. 对任意 $\boldsymbol{A} \in S$, 取 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n$, 由 (2) 可知 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式无重根，因此 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 所以对任意 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in S$, 由 (2)$\boldsymbol{AB} \in S$, 因此有 $(\boldsymbol{AB})^3 = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 所以 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. 所

以利用归纳法不难证明 S 中矩阵可以同时对角化. 且由于 S 中元素的特征值只可能是 $0,\pm1$, 所以 $\sharp S \le 3^n$，即 S 为有限集. ∎

[问题 2021S14] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶正定实对称阵，$\boldsymbol{A}^{-1}=(b_{ij})$. 证明：$a_{ii}b_{ii}\ge 1(1\le i\le n)$, 并且等号全部成立当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵.

证明. 由 $\boldsymbol{A}>0$, 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的 Cholesky 分解，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是对角元全为正数的上三角阵. 再记 $C^{-1}=(d_{ij})$, 则

$$a_{ii}b_{ii}=\left(\sum_{k=1}^{n}c_{ki}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}d_{ik}^2\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}c_{ki}d_{ik}\right)^2=1$$

∎

[问题 2021S15] 设 n 维欧式空间 V 中 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两之间的距离都是 $d>0$. 令 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_0(1\le i\le n)$, 证明：

(1)$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=\dfrac{d^2}{2}(1\le i\ne j\le n)$.

(2)$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的一组基.

证明. (1) 注意 $(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)=d^2,(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\beta}_j)=d^2(1\le i,j\le n)$ 所以 $(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=\dfrac{d^2}{2}(1\le i\ne j\le n)$.
(2) 设 $x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$ 满足 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A}=((\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)),\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$. 由于 $|A|=(n+1)d^{2n}/2^n>0$, 所以方程仅有零解，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关构成 V 的一组基. ∎

[问题 2021S18] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实幂等阵，证明：$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的非零特征值都大于等于 1.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r,0,\cdots,0\}$, 其中 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r>0$. 则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{Q}$, 所以 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 $\sigma_i^2(1\le i\le r)$. 因此只需证明 $\sigma_r\ge 1$. 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}$, 即 $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}$. 若记 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}=(b_{ij})\in O(n)$, 则有 $\sigma_r^2b_{rr}=\sigma_r$, 从而 $\sigma_rb_{rr}=1$, 于是 $\sigma_r=b_{rr}^{-1}\ge 1$. 因此结论得证. ∎

注：利用上题结论可以给出正交投影变换的一个等价刻画的证明：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实幂等矩阵，若对任意的实列向量 $\boldsymbol{x}$, 均有 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵. 详细证明可以参考问题 2.41 的 $1\Rightarrow 3$ 过程