SOOCHOW UNIVERSITY

Author: livi

Date: Spring 2026

Lie 代数

Notes on Lie Algebra

$$
\begin{tikzcd}
F^n \arrow[rrr, "\mathcal{M}_{\mathbf{v}'}^{\mathbf{w}'}(T)"] \arrow[dr, "\varphi_{\mathbf{v}'}"] \arrow[dd, "P_{\mathbf{v}'}^{\mathbf{v}}"'] & & & F^m \arrow[dl, "\varphi_{\mathbf{w}'}"'] \arrow[dd, "P_{\mathbf{w}'}^{\mathbf{w}}"] \\
& V \arrow[r, "T"] & W & \\
F^n \arrow[ur, "\varphi_{\mathbf{v}}"'] \arrow[rrr, "\mathcal{M}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}(T)"'] & & & F^m \arrow[ul, "\varphi_{\mathbf{w}}"]
\end{tikzcd}
$$

前言

该讲义为自用笔记,

内容翻译自朱富海老师编写的 Lie 代数

仅供学习与交流使用.

目录

前言

本书是南开大学代数类课程整体规划系列教材的第三本, 主要讲述特征为零的代数闭域上的半单 Lie 代数理论以及实半单 Lie 代数的基础知识. 我们假定读者系统学习过数学类专业的高等代数和抽象代数课程, 不过一般的特征为零的代数闭域上的半单 Lie 代数理论和复半单 Lie 代数理论完全是一样的, 因此读者也可以学完高等代数后直接学习本课程, 只需用数域来代替一般的域, 而用复数域代替特征为零的代数闭域即可. 另一方面, 南开大学数学伯苓班多年的教学实践表明, Lie 代数虽然从理论上不是非常深入, 但其中包含的很多技巧却需要较高的数学素养才能真正把握, 因此我们建议读者最好在学完抽象代数后再开始本课程的学习.

全书共 5 章. 第 0 章讲述一些预备知识, 包括 Jordan-Chevalley 分解、线性空间的张量积和实线性空间的复化等内容, 一般的教材中, 这些内容是根据需要安排在各章节中, 这样做的好处是与正文中的一些重要概念和定理的关系比较清楚, 但是考虑到这些内容不但在 Lie 代数理论中有用, 而且在其他课程中也经常会提到, 因此我们统一安排在前面, 这样可以给读者一个系统的学习机会, 形成统一的印象.

1 预备知识

本章介绍本书需要的一些预备知识, 我们一方面回忆以前学过的若干线性代数的知识, 另一方面介绍线性空间的张量积以及实线性空间的复化, 这些知识将在后面研究 Lie 代数的性质时得到应用, 熟悉这些内容的读者可以跳过本章直接进入第 1 章. 关于线性代数的内容, 读者可以参考文献 [1]; 而有关抽象代数的群、环、域理论, 读者可以参看文献 [2].

1.1 Jordan-Chevalley 分解

本节我们将回忆线性代数中非常重要的 Jordan-Chevalley 分解定理, 回忆一下, 设 $\mathbb{F}$ 是一个代数闭域,V 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间,x 是 V 上的一个线性变换, 称为半单的, 如果存在 V 的一组基使得 x 在这组基下的矩阵为对角矩阵. 这等价于 V 等于 x 的特征子空间的直和, 或者 x 的最小多项式没有重根, 此外, 我们称线性变换 x 为幂零的, 如果存在正整数 k 使得 $x^k = 0$.

思考题 1.1. 设 x_1, x_2 都是半单 (幂零) 的, 试问 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 是否也是半单 (幂零) 的?

思考题 1.2. 试证明: 若一个线性变换既是半单的, 又是幂零的, 则 $x = 0$.

下面我们来证明 Jordan-Chevalley 分解定理, 这一定理在 Lie 代数的研究中有非常重要的应用, 注意本书中除非特殊说明, 线性空间都是有限维的.

定理 1.1 (Jordan-Chevalley 分解)**.** 设 $\mathbb{F}$ 为代数闭域,V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, x 为 V 上的线性变换, 则存在 V 上的半单线性变换 x_s 和幂零线性变换 x_n 满足下面的条件:

(1) $x = x_s + x_n$, $[x_s, x_n] = x_sx_n - x_nx_s = 0$;

(2) 存在常数项为零的多项式 $p(\lambda), q(\lambda)$ 使得 $x_s = p(x), x_n = q(x)$;

(3) 如果 x_s', x_n' 分别为半单和幂零线性变换, 而且满足 $x = x_s' + x_n'$, $[x_s', x_n'] = 0$, 则必有 $x_s = x_s', x_n = x_n'$.

特别地, 满足条件 (1) 的分解是唯一的, 称为 x 的 Jordan-Chevalley 分解. 称 x_s, x_n 分别为 x 的半单部分和幂零部分.

证明. 设 $f(\lambda)$ 为 x 的特征多项式, 则因为 $\mathbb{F}$ 是代数闭域, $f(\lambda)$ 有分解

$$f(\lambda) = (\lambda - a_1)^{l_1}(\lambda - a_2)^{l_2} \cdots (\lambda - a_k)^{l_k},$$

其中 $a_i \in \mathbb{F}$, $l_i \in \mathbb{N}^*(i = 1, 2, \ldots, k)$, 且当 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$. 设 V_i 为线性变换 $(x - a_i\mathrm{id})^{l_i}$ 的核, 则有直和分解 (见下面的思考题)

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

若 $v\in V_i$, 则 $(x-a_i\mathrm{id})^{l_i}(v)=0$, 因此

$$\begin{aligned}(x-a_i\mathrm{id})^{l_i}(x(v))&=(x-a_i\mathrm{id})^{l_i}(x-a_i\mathrm{id})(v)+(x-a_i\mathrm{id})^{l_i}(a_iv)\\&=(x-a_i\mathrm{id})^{l_i+1}(v)+a_i(x-a_i\mathrm{id})^{l_i}(v)\\&=0.\end{aligned}$$

因此 V_i 是 x 的不变子空间, 现在我们定义线性变换 x_s 使得 $x_s|_{V_i}=a_i\mathrm{id}$, 且 $x_n=x-x_s$, 则对任何 $v\in V_i$, 有 $x_n^{l_i}(v)=(x-a_i\mathrm{id})^{l_i}(v)=0$, 而且 $x_sx_n(v)=x_s(x-x_s)(v)=x_sx(v)-a_i^2v=a_ix(v)-a_i^2v$, $x_nx_s(v)=(x-x_s)(x_s(v))=(x-x_s)(a_iv)=a_ix(v)-a_i^2v$. 这说明 x_s 是半单的, x_n 是幂零的, 而且 $x=x_s+x_n$, $[x_s,x_n]=0$.

为了说明 x_s,x_n 能写成 x 的多项式, 我们需要一些抽象代数中关于多项式的结果, 下面分两种情况来考虑:

1) 存在 i 使得 $a_i=0$. 不妨设 $a_1=0$. 因 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 互不相同, 故 $(\lambda-a_i)^{l_i}$ $(1\le i\le k)$ 是互素的, 由中国剩余定理 (参见文献 [?],§2.4, 习题 22), 存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $p(\lambda)$ 满足条件 $p(\lambda)\equiv a_i \pmod{(\lambda-a_i)^{l_i}}$, $1\le i\le k$. 注意到 $a_1=0$, 故 $p(\lambda)$ 的常数项为 0. 现在考虑线性变换 $p(x)$. 设 $v\in V_i$, 将 $p(\lambda)$ 写成 $p(\lambda)=p_1(\lambda)(\lambda-a_i)^{l_i}+a_i$, 其中 $p_1(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda]$ 则 $p(x)(v)=p_1(x)(x-a_i\mathrm{id})^{l_i}(v)+a_iv=a_iv$. 由此容易看出 $x_s(v)=p(x)(v)$, $\forall v\in V$. 于是 $x_s=p(x)$, $x_n=q(x)$, 其中 $q(\lambda)=\lambda-p(\lambda)$ 的常数项也是 0.

2) $a_i\neq 0$, $\forall i$. 这时 $\lambda,(\lambda-a_i)^{l_i}$ $(1\le i\le k)$ 是互素的, 故存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $p(\lambda)$ 满足条件 $p(\lambda)\equiv a_i \pmod{(\lambda-a_i)^{l_i}}$, $1\le i\le k$, 且 $p(\lambda)\equiv 0 \pmod{\lambda}$. 类似 1) 可以证明, $x_s=p(x)$, $x_n=q(x)$, 其中 $q(\lambda)=\lambda-p(\lambda)$, 而且这时 $p(\lambda),q(\lambda)$ 的常数项也是 0.

最后我们证明唯一性, 假定存在另一个分解 $x=\tilde{x}_s+\tilde{x}_n$, 其中 $\tilde{x}_s$ 是半单的, $\tilde{x}_n$ 是幂零的, 且有 $[\tilde{x}_s,\tilde{x}_n]=0$, 则 $[\tilde{x}_s,x]=[\tilde{x}_n,x]=0$, 于是 $[x_s,\tilde{x}_s]=0$, $[x_n,\tilde{x}_n]=0$.

于是线性变换 $x_s-\tilde{x}_s=\tilde{x}_n-x_n$ 既是半单的又是幂零的, 因此 $x_s-\tilde{x}_s=\tilde{x}_n-x_n=0$. 故 $\tilde{x}_s=x_s$, $\tilde{x}_n=x_n$. 至此定理证毕. ■

思考题 1.3. 试回忆高等代数中线性变换的根子空间分解, 并证明这一分解对于一般的域也成立.

下面我们给出 Jordan-Chevalley 分解定理的一些应用.

设 $\mathbb{F},V$ 如上,x 为 V 上的线性变换, 我们将 V 上全体线性变换组成的集合记为 $\mathfrak{gl}(V)$, 则 $\mathfrak{gl}(V)$ 在加法和纯量乘法下也是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 定义 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的线性变换 $\mathrm{ad}\,x$ 为 $\mathrm{ad}\,x(y)=xy-yx$, $y\in\mathfrak{gl}(V)$.

如果 x 是 V 上的半单线性变换, 则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 使得 x 在这组基下的矩阵为对角矩阵 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. 现在取定 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一组基为 $e_{ij}(1\le i,j\le n)$, 其中 e_{ij} 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 E_{ij}(即在第 i 行第 j 列处为 1, 其余元素全为 0 的矩阵). 则容易验证 $\mathrm{ad}\,x(e_{ij})=(a_i-a_j)e_{ij}$. 这说明 $\mathrm{ad}\,x$ 也是半单的.

思考题 1.4. 试证明若 x 是幂零线性变换, 则 $\mathrm{ad}\,x$ 也是幂零的.

思考题 1.5. 对于线性变换 x, y, 定义线性变换 $[x, y] = xy - yx$. 试证明作为 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的线性变换, 有 $\operatorname{ad}[x, y] = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y]$.

现在设 $x = x_s + x_n$ 为 V 上线性变换 x 的 Jordan-Chevalley 分解, 则 $\operatorname{ad} x_s$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的半单线性变换, $\operatorname{ad} x_n$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的幂零线性变换, 且 $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$. 又由 $[x_s, x_n] = 0$ 可以得到 $[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = 0$. 因此由 Jordan-Chevalley 分解定理, $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ 是 $\operatorname{ad} x$ 的 Jordan-Chevalley 分解, 这证明了

定理 1.2. 设 $x = x_s + x_n$ 为 V 上的线性变换 x 的 Jordan-Chevalley 分解, 则 $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上线性变换 $\operatorname{ad} x$ 的 Jordan-Chevalley 分解.

最后我们证明一个结果, 这在后面我们证明重要的 Cartan 准则时非常有用.

定理 1.3. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域,V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $M_1 \subseteq M_2$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的两个线性子空间, 定义 $W = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, M_2] \subseteq M_1\}$. 又设 $x \in W$ 满足条件 $\operatorname{tr}(xy) = 0$, $\forall y \in W$. 则 x 一定是幂零线性变换.

证明. 因 $\mathbb{F}$ 的特征为零, 可以将 $\mathbb{F}$ 看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 的扩域, 故可以将 $\mathbb{F}$ 看成 $\mathbb{Q}$-线性空间, 因 $\mathbb{F}$ 是代数闭域, x 是幂零线性变换当且仅当 x 的特征值全为零, 为此设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$(可能重复) 为 x 的全体特征值,E 为 $\mathbb{F}$ 的由 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 线性张成的 $\mathbb{Q}$-线性子空间, 下面我们证明 $E = 0$, 为此只需证明任何由 E 到 $\mathbb{Q}$ 的线性映射一定为零.

由 Jordan 标准形理论, 存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, 使得 x 在 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为上三角矩阵, 而且对角线上的元素为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$. 设 $f \in E^*$, 我们定义 V 上的线性变换 y 使得它在 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $\operatorname{diag}(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$. 取定 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一组基 e_{ij} 如上, 则上面的讨论说明 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的线性变换 $\operatorname{ad} y$ 在基 $e_{ij}(1 \le i, j \le n)$ 下的矩阵为对角矩阵而且对角线上的元素为 $f(a_i) - f(a_j)$, $1 \le i, j \le n$.

由 Lagrange 插值定理 (参见文献 [1]), 存在 $\mathbb{F}$ 上常数项为零的多项式 $g(t)$ 使得 $g(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ (注意, 如果对某些 $i \ne j$ 有 $a_i = a_j$ 则上述条件自动满足). 设 $x = x_s + x_n$ 为 x 的 Jordan-Chevalley 分解, 则由上面的讨论有 $\operatorname{ad} y = g(\operatorname{ad} x_s)$.

因 $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ 为 $\operatorname{ad} x$ 的 Jordan-Chevalley 分解, 故 $\operatorname{ad} x_s$ 可以写成 $\operatorname{ad} x$ 的常数项为零的多项式, 于是 $\operatorname{ad} y$ 也是 $\operatorname{ad} x$ 的常数项为零的多项式, 因此有 $y \in W$, 于是由定理的条件我们得到 $\operatorname{tr}(xy) = 0$. 简单计算容易看出 $\operatorname{tr}(xy) = \sum_{i=1}^n f(a_i) a_i$.

因此 $\sum_{i=1}^n f(a_i) a_i = 0$. 用线性函数 f 作用到上式两边我们得到 $\sum_{i=1}^n f(a_i)^2 = 0$. 注意到 $f(a_i)$ 是有理数, 因此 $f(a_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 从而 $f = 0$. 至此定理证毕. ■

习题 1.1

1. 设 $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. 在线性空间 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 中定义线性变换 $\mathrm{ad}(x)$ 为 $\mathrm{ad}(x)(y) = xy - yx$. 试求出 $\mathrm{ad}(x)$ 的半单部分和幂零部分.
2. 设 x 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间上的线性变换, $x = x_s + x_n$ 为其 Jordan-Chevalley 分解, 试证明 x 为可逆线性变换当且仅当 x_s 为可逆线性变换. 当 x 可逆时, 用 x_s^{-1}, x_n 表示 x 的逆.
3. 设 x 为实线性空间 V 上的线性变换, x 称为半单的, 如果存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 使得 x 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为对角矩阵, 试问实数域上 Jordan-Chevalley 分解定理是否成立?
4. 设 $\mathcal{M}$ 为由复线性空间 V 上的若干线性变换组成的复线性空间, 已知 $\mathcal{M}$ 中的所有元素都是半单的, 而且 $xy = yx, \forall x, y \in \mathcal{M}$. 试证明 V 可以分解成子空间直和

$$V = V_{f_1} \oplus V_{f_2} \oplus \cdots \oplus V_{f_s}$$

   其中 $f_i \in \mathcal{M}^*$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 而且

$$V_{f_i} = \{v \in V \mid x(v) = f_i(x)v, \forall x \in \mathcal{M}\}.$$

5. 设 x, y 为特征为 0 的代数闭域上的线性空间上的线性变换, 且 x, y 交换, 即 $xy = yx$. 试证明 $(x+y)_s = x_s + y_s, (x+y)_n = x_n + y_n$.
6. 试举例说明, 如果没有交换的条件, 则上题的结论不一定成立。

1.2 线性空间的张量积

本节我们介绍线性空间的张量积的概念和基本性质, 张量是现代数学中的重要工具, 在代数学、几何学、拓扑学等众多领域都有重要应用.

我们先介绍对偶空间的张量积, 设 V, W 为域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间, V^*, W^* 分别为 V, W 的对偶空间, 将 $V \times W$ 到 $\mathbb{F}$ 上的双线性函数的全体记为 $L(V, W)$, 则在 $L(V, W)$ 上可以定义加法和纯量乘法为

$$(l_1 + l_2)(v, w) = l_1(v, w) + l_2(v, w), \quad l_1, l_2 \in L(V, W), v \in V, w \in W,$$

$$(al)(v, w) = al(v, w), \quad a \in \mathbb{F}, l \in L(V, W), v \in V, w \in W.$$

则 $L(V, W)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 将 $L(V, W)$ 称为 V^* 与 W^* 的张量积, 记为 $V^* \otimes W^*$.

让我们来看看 $V^* \otimes W^*$ 的结构. 设 $v^* \in V^*$, $w^* \in W^*$, 则定义 $V \times W$ 上的双线性函数 $v^* \otimes w^*$ 为

$$v^* \otimes w^*(v, w) = v^*(v)w^*(w), \quad v \in V, w \in W.$$

于是 $L(V, W)$ 包含了所有形如 $v^* \otimes w^*(v^* \in V^*, w^* \in W^*)$ 的元素, 现在分别取定 V 和 W 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. 设 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ 和 $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_m^*$ 分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 的对偶基. 对 $l \in V^* \otimes W^*$, 记 $l_{ij} = l(\alpha_i, \beta_j)$, 则对任何 $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n, \beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_m\beta_m$, 有

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta) &= l\left(\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum_{j=1}^m b_j\beta_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j l(\alpha_i, \beta_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j l_{ij}. \end{aligned}$$

另一方面, 容易验证

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m l_{ij}\alpha_i^* \otimes \beta_j^*\right)(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j l_{ij}.$$

因此, 有

$$l = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m l_{ij}\alpha_i^* \otimes \beta_j^*.$$

此外容易证明 $\alpha_i^* \otimes \beta_j^*(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ 是线性无关的, 因此 $\alpha_i^* \otimes \beta_j^*$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ 是 $V^* \otimes W^*$ 的一组基, 故 $\dim V^* \otimes W^* = \dim V^* \cdot \dim W^*$. 特别地,$V^* \otimes W^*$ 中的任何一个元素都可以写成形如 $v^* \otimes w^*(v^* \in V^*, w^* \in W^*)$ 的元素的有限和.

思考题 1.6. *试举例说明存在 V, W 以及 $V^* \otimes W^*$ 中元素不能写成 $v^* \otimes w^*(v^* \in V^*, w^* \in W^*)$ 的形式.*

现在我们定义 V,W 的张量积, 注意到 V,W 可以看成 V^*,W^* 的对偶空间, 因此利用上面的方法可以定义 $V\otimes W$. 空间 $V\otimes W$ 中任何元素都可以写成形如 $v\otimes w(v\in V,w\in W)$ 的元素的有限和, 而且 $\dim V\otimes W=\dim V\cdot\dim W$.

张量积也可以形式地定义, 设 $\mathbb{F},V,W$ 如上, 我们定义线性空间 U 为由所有有序对 $(v,w)(v\in V,w\in W)$ 张成的线性空间, 换句话说,U 中每个元素都是形如 $(v,w)(v\in V,w\in W)$ 的元素的有限和 (有时我们将这一线性空间称为 V 与 W 的直和, 记为 $V\oplus W$). 考虑 U 中由所有形如

$$(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w),\quad (kv_1,w)-k(v_1,w)\quad (v_1,v_2\in V,w\in W,k\in\mathbb{F}),$$

$$(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2),\quad (v,lw_1)-l(v,w_1)\quad (v\in V,w_1,w_2\in W,l\in\mathbb{F})$$

的元素张成的线性子空间 U_1. V 与 W 的张量积也可以定义为商空间 U/U_1. 对于 $v\in V,w\in W$ 我们将 (v,w) 所在的等价类记为 $v\otimes w$.

思考题 1.7. 试证明上述形式的张量积定义与前面的张量积定义是等价的.

张量积最重要的性质就是线性空间双线性映射的泛性, 这也经常当作张量积的定义.

定理 1.4. 设 V,W 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $V\otimes W$ 为 V,W 的张量积, $\otimes$ 为 $V\times W$ 到 $V\otimes W$ 的双线性映射, 即 $\otimes(v,w)=v\otimes w,v\in V,w\in W$, 则对任何 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 U 以及任何由 $V\times W$ 到 U 的双线性映射 ϕ, 存在唯一的由 $V\otimes W$ 到 U 的线性映射 ψ, 使得 $\phi=\psi\circ\otimes$, 也就是有交换图

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\phi"'] & V\otimes W \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

证明. 我们先证明映射 ψ 的存在性, 为此采用张量积的形式定义, 对于 $v\in V,w\in W$, 先定义 $\psi(v\otimes w)=\phi(v,w)$, 再将 ψ 线性扩充到 $V\otimes W$ 上, 我们先验证上述定义的合理性, 如果 $v_1,v_2\in V(w_1,w_2\in W)$ 使得 $v_1\otimes w_1=v_2\otimes w_2$, 则在上面的形式定义中有 $(v_1,w_1)-(v_2,w_2)\in U_1$, 但是由 ϕ 的双线性性容易看出, 对于任何 U_1 中的元素 $\tilde{u}$, $\phi(\tilde{u})=0$. 因此 $\psi(v_1\otimes w_1)=\psi(v_2\otimes w_2)$. 从而 ψ 的定义是合理的, 显然有 $\phi=\psi\circ\otimes$. 这就证明了映射的存在性.

唯一性的证明留给读者. ■

定理 1.5. 设 V,W,X 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 如果存在 $V\times W$ 到 X 的双线性映射 ρ 使得对于任何线性空间 U 以及任何 $V\times W$ 到 U 的双线性映射 ϕ, 存在唯一的由 X 到 U 的线性映射 ψ 使得 $\phi=\psi\circ\rho$, 则 X 与 $V\otimes W$ 同构.

证明. 首先令 $U = V\otimes W$, 由条件, 存在由 X 到 $V\otimes W$ 的映射 ψ_1 使得 $\otimes = \psi_1\circ\rho$, 亦即有交换图:

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\otimes"'] & X \arrow[d, dashed, "\psi_1"] \\ & V\otimes W \end{tikzcd}$$

又由定理 1.4, 存在由 $V\otimes W$ 到 X 的线性映射 ψ_2 使得 $\rho = \psi_2\circ\otimes$. 即有交换图:

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\rho"'] & V\otimes W \arrow[d, dashed, "\psi_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

这样就得到两个交换图:

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & X \arrow[d, "\psi_2\circ\psi_1"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\otimes"'] & V\otimes W \arrow[d, "\psi_1\circ\psi_2"] \\ & V\otimes W \end{tikzcd}$$

容易看出上面的两个交换图中分别用 id_X 和 $id_{V\otimes W}$ 代替 $\psi_2\circ\psi_1$ 和 $\psi_1\circ\psi_2$ 后仍然交换, 于是由唯一性得到 $\psi_2\circ\psi_1 = id_X, \psi_1\circ\psi_2 = id_{V\otimes W}$. 这里 id_X 表示集合 X 的恒等变换, 因此 ψ_1 是由 X 到 $V\otimes W$ 的线性同构. ■

一般我们将满足上述定理条件的双线性映射 ρ 与线性空间 X 写成一个对 (ρ, X), 称为 V, W 的一个张量积.

思考题 1.8. 试证明对于域 $\mathbb{F}$ 上任意线性空间 V, W, $V\otimes W$ 与 $W\otimes V$ 同构.

张量积的概念当然可以推广到多个线性空间的情形, 我们将具体的定义过程留给读者作为思考题, 下面介绍对称张量与反对称张量.

设 V 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $n\in\mathbb{N}$, 考虑张量积 $W = \overbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}^{n个}$. 我们可以在 W 上定义对称群 S_n 的一个作用, 对于 $\sigma\in S_n$, $v_i\in V, 1\le i\le n$, 我们定义 $\sigma(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n) = v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n)}$, 将这个定义线性扩充到 W 上就得到群 S_n 在 W 上的一个作用. 一个 W 中元素 w 称为对称张量, 如果对任何 $\sigma\in S_n$ 有 $\sigma(w) = w$; 称为反对称张量, 如果 $\sigma(w) = s(\sigma)w$, 这里 $s(\sigma)$ 是置换 σ 的符号, 即若 σ 是偶置换, $s(\sigma) = 1$; 若 σ 是奇置换, $s(\sigma) = -1$. 显然, 对称张量组成的集合在加法和纯量乘法下构成 $W = \overbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}^{n个}$ 的一个线性子空间; 同样地, 全体反对称张量在加法和纯量乘法下也构成 $W = \overbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}^{n个}$ 的子空间.

思考题 1.9. 求出上述两个子空间的维数.

习题 1.2

1. 试证明定理 1.4 中的唯一性.
2. 考虑张量积 $V \otimes V$, 将对称张量组成的子空间记为 $\mathcal{S}$, 反对称张量组成的子空间记为 $\mathcal{A}$. 试证明 $V \otimes V = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.
3. 试证明张量积运算满足结合律, 即对任何线性空间 U, V, W, 有 $(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$.
4. 设 V_1, V_2, W 为域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, 试证明 $(V_1 \oplus V_2) \otimes W \simeq V_1 \otimes W \oplus V_2 \otimes W$.
5. 设 V_1, V_2 为域 $\mathbb{F}$ 上有限维线性空间, 证明 $End(V_1) \otimes End(V_2) \simeq End(V_1 \otimes V_2)$. 其中 $End(V)$ 表示线性空间 V 的所有线性变换组成的线性空间.
6. 设 f_1, f_2 分别为线性空间 U_1 到 V_1, U_2 到 V_2 的线性映射, 证明存在唯一的线性映射 $f : U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2$ 使得对任何 $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, f(u_1 \otimes u_2) = f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)$.
7. 设 V_1, V_2 为域 $\mathbb{F}$ 上有限维线性空间, $x_1, \ldots, x_s \in V_1$ 线性无关, $y_1, \ldots, y_s \in V_2$, 且 $\sum_{i=1}^{s} x_i \otimes y_i = 0$, 试证明 $y_1 = y_2 = \cdots = y_s = 0$.
8. 证明对任何线性空间 U, V, $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$.
9. 设 $\mathbb{F}$ 为域, $A \in \mathbb{F}^{m_1 \times n_1}, B \in \mathbb{F}^{m_2 \times n_2}$, 定义 A, B 的 Kronecker 积为下面的 $(m_1 m_2) \times (n_1 n_2)$ 矩阵
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n_1}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n_1}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1}B & a_{m_1 2}B & \ldots & a_{m_1 n_1}B \end{pmatrix}.$$
试证明 $(\rho, \mathbb{F}^{(m_1 m_2) \times (n_1 n_2)})$ 为 $\mathbb{F}^{m_1 \times n_1}, \mathbb{F}^{m_2 \times n_2}$ 的一个张量积, 其中 $\rho(A, B) = A \otimes B$.
10. 设 A, B 分别为 m, n 阶复方阵, 且 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, B 的全部特征值为 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, 试求 $\mathrm{tr}(A \otimes B), \det(A \otimes B)$ 和 $A \otimes B$ 的全部特征值.
11. 试证明对任何复方阵 A, B, $A \otimes B$ 与 $B \otimes A$ 相似.

1.3 实线性空间的复化

本节我们介绍实线性空间的复化以及相关的一些知识. 我们知道, 若 V 是一个复线性空间, 则 V 也可以看成实线性空间, V 中的加法就是原来的加法, 而数乘就是将作为复线性空间的数乘限制到实数域上. 作为实线性空间, V 的维数是它作为复线性空间的维数的两倍, 如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 作为复线性空间的一组基, 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \sqrt{-1}\varepsilon_1, \sqrt{-1}\varepsilon_2, \ldots, \sqrt{-1}\varepsilon_n$ 是 V 作为实线性空间的一组基. 一个自然的问题是, 什么样的实线性空间可以由一个复线性空间用以上的方法得到? 为此我们引入实线性空间的容许复结构的概念.

定义 1.1. *设 V 为一个实线性空间, J 为 V 上的一个线性变换, 若 J 满足条件 $J^2 = -id_V$, 则称 J 为 V 上的一个容许复结构.*

思考题 1.10. *试证明, 如果实线性空间 V 上存在容许复结构, 则 $\dim V$ 一定是偶数.*

如果实线性空间 V 上存在容许复结构 J, 则可以在 V 上定义数乘为

$$(a + b\sqrt{-1})v = av + bJ(v), \quad a, b \in \mathbb{R}, v \in V.$$

容易验证, 在原有的加法和上述数乘下, V 成为一个复线性空间, 为方便, 我们将这一复线性空间记为 $\tilde{V}$. 显然, 将上述过程应用到复线性空间上, 就得到了实线性空间 V.

思考题 1.11. *设 V 为实线性空间, J 为容许复结构, $\tilde{V}$ 为相应的复线性空间. 证明 $\tilde{V}$ 的一个复线性变换一定是 V 的一个实线性变换, 试举例说明 V 的线性变换不一定是 $\tilde{V}$ 的复线性变换.*

现在我们证明下面的结果.

命题 1.6. *设 V 为实线性空间, J 为容许复结构, $\tilde{V}$ 为相应的复线性空间, 则 V 上的一个实线性变换 $\mathcal{A}$ 是 $\tilde{V}$ 的一个复线性变换当且仅当 $\mathcal{A} \circ J = J \circ \mathcal{A}$.*

证明. 若 $\mathcal{A}$ 是 $\tilde{V}$ 上的复线性变换, 则对任何 $v \in \tilde{V}$ 以及 $a + b\sqrt{-1}, a, b \in \mathbb{R}$ 有

$$\mathcal{A}((a + b\sqrt{-1})v) = (a + b\sqrt{-1})\mathcal{A}(v).$$

这说明

$$\mathcal{A}(av + bJ(v)) = a\mathcal{A}(v) + bJ \circ \mathcal{A}(v).$$

特别地, 在上式取 $a = 0, b = 1$, 则对任何 $v \in V$ 有 $\mathcal{A} \circ J(v) = J \circ \mathcal{A}(v)$. 注意到作为集合 $V = \tilde{V}$, 故 $\mathcal{A} \circ J = J \circ \mathcal{A}$.

反过来的结论类似可证, 我们略去其细节. ■

现在我们介绍实线性空间的复化的概念. 设 V 为一个实线性空间, 考虑直和 $W = V \oplus V$. 容易看出 W 上的变换 $J : (x, y) \mapsto (-y, x)$ $(x, y \in V)$ 是 W 的实线性变换, 而且 $J^2 = -id_W$. 因此 J 是一个容许复结构, 这样我们就可以用上面的方法将 W 看成一个复线性空间 $\tilde{W}$, 称它为 V 的复化, 记为 V^C.

显然, 如果我们定义 $v \mapsto (v,0), v \in V$, 则它是 V 到 V^C 的实线性映射, 而且是单射, 因此 V 可以看成 V^C 的实线性子空间 $\{(v,0) \mid v \in V\}$. 下面的命题给出了 V 与 V^C 更多的联系.

命题 1.7. 设 V 为实线性空间, V^C 为 V 的复化, 则

(1) 任何 $w \in V^C$ 都可以唯一表示成 $w = u + \sqrt{-1}v, u, v \in V$.

(2) 若 $a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}, u + \sqrt{-1}v \in V^C, u, v \in V$, 则

$$(a + b\sqrt{-1})(u + \sqrt{-1}v) = au - bv + \sqrt{-1}(bu + av).$$

(3) 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基, 则也是 V^C 的一组基, 从而 $\dim V^C = \dim V$.

证明. (1) 因为 $v \in V$ 等同于 $(v,0) \in V^C$, 故对任何 $v \in V$, 有 $J(v) = J(v,0) = (0,v)$, 这说明 $(u,v) = (u,0) + (0,v) = (u,0) + J(v,0)$ 与 $u + \sqrt{-1}v$ 对应, 即 $(u,v) = u + \sqrt{-1}v$. 唯一性显然成立.

(2) 直接计算即得.

(3) 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基, 则对任何复数 $a_1 + b_1\sqrt{-1}, a_2 + b_2\sqrt{-1}, \ldots, a_n + b_n\sqrt{-1}$, 若

$$(a_1 + b_1\sqrt{-1})\varepsilon_1 + (a_2 + b_2\sqrt{-1})\varepsilon_2 + \cdots + (a_n + b_n\sqrt{-1})\varepsilon_n = 0,$$

可得

$$(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n) + \sqrt{-1}(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n) = 0,$$

故

$$a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n = 0.$$

由此我们得到 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. 从而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 在 V^C 中线性无关, 再由 (1) 可知 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V^C 的一组基. ■

最后我们指出, 实线性空间的复化这一概念在微分几何、代数学等多个领域都有应用. 本书我们主要利用这一概念来研究实半单 Lie 代数的结构和分类.

习题 1.3

1. 试证明任何偶数维实线性空间一定存在容许复结构.
2. 设 V 为域 $\mathbb{F}_1$ 上的线性空间, $\mathbb{F}_2$ 为域 $\mathbb{F}_1$ 的扩张, 则 $\mathbb{F}_2$ 也可以看成域 $\mathbb{F}_1$ 上的线性空间. 作为 $\mathbb{F}_1$ 上线性空间, V 与 $\mathbb{F}_2$ 有张量积, 记为 $V \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{F}_2$. 试证明, 若 $\mathbb{F}_2$ 是 $\mathbb{F}_1$ 的有限扩张, 则作为 $\mathbb{F}_1$ 上线性空间, $\dim(V \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{F}_2) = \dim V \cdot [\mathbb{F}_2 : \mathbb{F}_1]$.
3. 设 V 为实线性空间, $W = V^C$. 试证明: 作为实线性空间, $W \simeq V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
4. 将复数域 $\mathbb{C}$ 看成实线性空间, 其张量积记为 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; 另一方面, 复数域 $\mathbb{C}$ 作为复线性空间也有张量积, 记为 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \tilde{W}$, 试问 $\tilde{W} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 是否成立?

5. 设复线性空间 V 的一组基为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, 试分别求出 $V \otimes_{\mathbb{C}} V$ 和 $V \otimes_{\mathbb{R}} V$ 的一组基.
6. 设 V 是有限维实线性空间, V^C 是其复化, J 是对应的容许复结构, 试举例说明, 存在 V 上的实线性变换 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathcal{A}$ 不是 V^C 的复线性变换, 并找出 V 上一个实线性变换是 V^C 上复线性变换的充分必要条件.

2 Lie 代数的基本概念

本章我们将讲述 Lie 代数的基本理论. Lie 理论, 主要包括 Lie 群理论和 Lie 代数理论, 是 19 世纪后期由挪威数学家 Sophus Lie 首先发展起来的一个数学分支, 到现在已经成为现代数学中最核心的领域之一. 这一理论不但本身非常严密, 而且与其他领域联系紧密. 事实上,Lie 理论现在不但已经被应用到包括微分几何、微分方程、调和分析、数论、数学物理等领域中, 而且在理论物理、机器人学、控制论、信息学等其他领域中也已经找到应用. 由于 Lie 代数本身已经成为一门非常庞大的理论体系, 我们只讲述其中最基本也是最经典的部分.

2.1 Lie 代数的定义

本节我们给出 Lie 代数的定义和若干常见的例子. 一般来说, 一个域 $\mathbb{F}$ 上的代数是指 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间 $\mathcal{A}$. 在 $\mathcal{A}$ 上除线性空间本身的加法以外, 还定义了一种二元运算 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}, (a_1,a_2)\mapsto a_1a_2$. 这个二元运算对于每个变量都是线性的 (即双线性性), 此外还满足若干别的特殊的条件. 例如, 结合代数就要求上述二元运算满足结合律. 从这个意义上说, 我们接触到的很多线性空间都是结合代数. 例如, 对于任何域 $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ 上的所有 $n\times n$ 矩阵组成的集合 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 在矩阵的加法和乘法下构成一个结合代数; 如果 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, 那么 V 上所有线性变换组成的集合 $\mathrm{End}(V)$ 在线性变换的加法和乘法下也构成一个结合代数.

思考题 2.1. 试定义结合代数的子代数、理想、同态与同构的概念, 并证明上面出现的结合代数 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 与 $\mathrm{End}(V)$ 是同构的.

思考题 2.2. 试找出结合代数的一些子代数的例子.

细心的读者也许已经发现,$\mathbb{F}^{n\times n}$ 中很多重要的子空间都不是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 作为结合代数的子代数, 例如其中所有迹为零的矩阵组成的集合, 所有反对称矩阵组成的集合, 等等都是如此. 因此数学中必须研究一些不满足结合律的代数. 下面的例子提示我们, 有一类代数是非常重要的.

例 2.1. 在微分几何中经常会研究一些由光滑函数组成的集合及其相关的问题. 作为最简单的情形, 将欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上所有光滑函数的集合记为 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 它自然是实线性空间 (虽然是无穷维的). 一个 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的线性映射 D 称为 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的一个导子, 如果满足条件:

$$D(fg)=D(f)g+fD(g),\quad f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

将 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上所有导子的集合记为 Γ, 那么 Γ 也是一个实线性空间. 读者可以自己举例说明两个导子的乘积 (复合映射) 可以不是导子, 因此普通的乘法是无法定义 Γ 上的代数结构的, 但是容易验证, 如果我们定义运算:

$$[D_1,D_2]=D_1D_2-D_2D_1,\quad D_1,D_2\in\Gamma,$$

则 $[D_1, D_2] \in \Gamma$. Γ 在这一运算下成为微分几何中非常重要的一类代数, 这就是由 $\mathbb{R}^n$ 上光滑向量场组成的 Lie 代数.

让我们分析一下上面的代数的运算特点. 首先, 容易看出, 对任何 $D_1, D_2 \in \Gamma$, 有 $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$, 这一等式称为反对称性; 其次, 对任何 $D_1, D_2, D_3 \in \Gamma$, 有

$$\begin{aligned}
&[D_1,[D_2,D_3]] + [D_2,[D_3,D_1]] + [D_3,[D_1,D_2]] \\
&= [D_1, D_2D_3 - D_3D_2] + [D_2, D_3D_1 - D_1D_3] + [D_3, D_1D_2 - D_2D_1] \\
&= D_1D_2D_3 - D_1D_3D_2 - D_2D_3D_1 + D_3D_2D_1 + D_2D_3D_1 - D_2D_1D_3 - D_3D_1D_2 \\
&\quad + D_1D_3D_2 + D_3D_1D_2 - D_3D_2D_1 - D_1D_2D_3 + D_2D_1D_3 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

这一等式称为 Jacobi 恒等式.

思考题 2.3. 试在结合代数上定义导子的概念, 并模仿上面的运算定义导子集合上的一种运算, 说明其满足 Jacobi 恒等式.

在实际中, 我们会见到很多满足反对称性和 Jacobi 恒等式的代数运算, 这些例子抽象出来就得到 Lie 代数的定义.

定义 2.1. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 如果在 $\mathfrak{g}$ 上定义了一个二元运算 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, 记为 $(x, y) \mapsto [x, y]$, 称为括号运算, 满足下面的条件:

(LA1) (双线性性) $[x, y]$ 对 x 和 y 都是线性的;

(LA2) (反交换性) 对所有 $x \in \mathfrak{g}$, $[x, x] = 0$;

(LA3) (Jacobi 恒等式) 对任何 $x, y, z \in \mathfrak{g}$, $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$.

则称 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为交换 (或 Abel) 的, 若 $[x, y] = 0, \forall x, y \in \mathfrak{g}$. 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的维数即指作为线性空间的维数.

显然, 对于任何线性空间 V, 定义 $[x, y] = 0$, 则 V 成为一个交换 Lie 代数, 这是一个平凡的例子.

思考题 2.4. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, 则由 (LA2) 容易导出, 对任何 $x, y \in \mathfrak{g}$ 有 $[x, y] = -[y, x]$. 那么这个条件是否和 (LA2) 等价?

下面我们给出子代数、理想、同态与同构的定义.

定义 2.2. 若 $\mathfrak{h}$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的线性子空间, 且对任何 $x, y \in \mathfrak{h}$, 我们有 $[x, y] \in \mathfrak{h}$, 则称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数; 如果子代数 $\mathfrak{h}$ 还满足对任何 $x \in \mathfrak{h}$ 及 $y \in \mathfrak{g}$ 有 $[x, y] \in \mathfrak{h}$, 则称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想.

定义 2.3. 设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ 为线性映射. 如果对任何 $x, y \in \mathfrak{g}$ 都有 $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, 则称 ϕ 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}'$ 的一个同态; 如果一个同态还是线性同构, 则称为同构, 这时称 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 是同构的, 记为 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$.

类似地, 我们当然可以定义单同态和满同态的概念, 将在 2.2 节详细研究同态与理想的基本性质. 作为一个例子, 下面我们给出 1 维和 2 维 Lie 代数在同构意义下的分类.

例 2.2. 对于任何域 $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ 上的 1 维 Lie 代数在同构意义下只有一个. 事实上, 由 (LA1), (LA2) 我们看出, 对任何 $x \in \mathfrak{g}, x \neq 0$ 及 $a, b \in \mathbb{F}$, 有 $[ax, bx] = ab[x, x] = 0$, 因此 $[x, y] = 0, \forall x, y \in \mathfrak{g}$. 由此容易导出我们的结论.

下面我们讨论 2 维的情形. 交换的 2 维 Lie 代数一定存在而且在同构意义下是唯一的. 若 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{F}$ 上非交换的 2 维 Lie 代数, 则可取 $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$ 使得 $[x_1, x_2] \neq 0$. 显然 x_1, x_2 一定线性无关, 因此组成 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 于是我们可设 $[x_1, x_2] = a_1x_1 + a_2x_2$.

其中 a_1, a_2 至少有一个非零, 不妨设 $a_1 \neq 0$. 令 $x = [x_1, x_2] = a_1x_1 + a_2x_2, y = \dfrac{x_2}{a_1}$, 则有 $[x, y] = x$ 而且 x, y 仍然是线性无关的. 这说明在同构意义下非交换的 2 维 Lie 代数也只有一个.

总之, 任何域 $\mathbb{F}$ 上的 2 维 Lie 代数在同构意义下只有两个, 其中一个为交换 Lie 代数, 另一个为非交换的, 而且存在一组基 x, y 使得 $[x, y] = x$.

下面思考题的答案, 读者可以在学习了后面的内容后自己得到. 当然, 如果读者现在就独立找出答案, 对于训练自己的科研探索能力是非常有益的.

思考题 2.5. 上面我们看到, 对于 1 维和 2 维情形, 任何域上的 Lie 代数的分类结果都是一样的. 那么这个结论对于一般的维数是否成立? 特别地, 实 3 维 Lie 代数的分类和复 3 维 Lie 代数的分类的类数是否会一样多?

下面我们给出更多 Lie 代数的例子.

例 2.3. 任何结合代数上都可以定义 Lie 代数的结构. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的一个结合代数, 乘法运算为 $(x, y) \mapsto xy$. 我们定义一个括号运算为 $[x, y] = xy - yx$, 则容易验证 $\mathfrak{g}$ 在 $[\cdot, \cdot]$ 下成为一个 Lie 代数. 特别地, 我们知道, 若 V 为线性空间, 则 V 上所有线性变换的集合在映射的复合运算下成为一个结合代数, 由此我们得到一个 Lie 代数, 记为 $\mathfrak{gl}(V)$, 称为 V 上的一般线性 Lie 代数.

此外, 域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $n \times n$ 矩阵组成的集合 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 在矩阵的加法和纯量乘法下成为线性空间, 再加上矩阵的乘法, 则成为 $\mathbb{F}$ 上的一个结合代数, 因此也有 Lie 代数的结构, 记为 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, 也称为 $\mathbb{F}$ 上的一般线性 Lie 代数.

思考题 2.6. 试证明, 如果 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, 则 $\mathfrak{gl}(V)$ 与 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 同构, 从而上面例子中的名称并不会出现矛盾.

通过研究一般线性 Lie 代数的子代数, 我们将得到大量重要的 Lie 代数的例子.

例 2.4. 将 $\mathbb{F}$ 上所有的 $n \times n$ 上三角矩阵的集合记为 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$, 则 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ 是 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 的子代数; 将 $\mathbb{F}$ 上所有的严格上三角 (即对角线上元素为零) 矩阵的集合记为 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$, 则 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 是 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ 的子代数. 此外容易看出,$\mathbb{F}$ 上所有 $n \times n$ 对角矩阵组成的集合 $\mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$ 也是 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ 的子代数, 它是一个 n 维的交换 Lie 代数.

例 2.5. 设 $\mathcal{A}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上一个代数, 乘法为 $(a, b) \mapsto ab$, D 为 $\mathcal{A}$ 上一个线性变换. 称 D 为 $\mathcal{A}$ 上的一个导子, 如果对任何 $a, b \in \mathcal{A}$, 有 $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. 将 $\mathcal{A}$ 上所有导子组成的集合记为 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, 则容易验证 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 作为线性空间的一般线性 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ 的子代数,

称为 $\mathcal{A}$ 上的导子代数.

作为一种特殊情形, 若 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的一个 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 上的所有导子组成的集合 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的子代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 的导子代数. 此外, 对任何 $x \in \mathfrak{g}$ 我们定义 $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y]$, 则利用 Jacobi 恒等式容易验证 $\mathrm{ad}\, x$ 是一个导子, 称为 $\mathfrak{g}$ 的由 x 定义的内导子. $\mathfrak{g}$ 上所有内导子的集合 $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$ 构成的 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ 一个子代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 的内导子代数.

思考题 2.7. 设 $\mathfrak{g}$ 为非交换的 2 维 Lie 代数, 试证明 $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

下面我们给出的四类 Lie 代数, 一般文献上称为古典 Lie 代数.

例 2.6. (1) 容易证明, 对任何 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 我们有 $\mathrm{tr}([A, B]) = \mathrm{tr}(AB - BA) = 0$. 特别地, 如果我们将所有迹为 0 的 $\mathbb{F}$ 上 $n \times n$ 矩阵的集合记为 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, 则 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ 成为 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 的子代数, 称为 $\mathbb{F}$ 上的特殊线性 Lie 代数.

类似地, 如果 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, 则 V 上所有迹为 0 的线性变换的集合 $\mathfrak{sl}(V)$ 构成 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, 它与 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ 同构, 因此也称为 V 上的特殊线性 Lie 代数.

(2) 对于任何固定的 $M \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, 考虑集合

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \mid Mx + x^t M = 0\}$$

则容易验证 $\mathfrak{g}$ 成为 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 的子代数. 特别地, 当

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$$

时, 我们得到 Lie 代数 $\mathfrak{so}(2l + 1, \mathbb{F})$; 当

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$$

时, 我们得到 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{F})$; 当

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

时, 我们得到 Lie 代数 $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{F})$.

Lie 代数 $\mathfrak{so}(k, \mathbb{F})$ ($k = 2l$ 或$2l + 1$) 称为正交 Lie 代数, $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{F})$ 称为辛 Lie 代数.

思考题 2.8. 试分别给出上面例子中四类古典 Lie 代数的一组基, 并计算它们的维数.

最后我们给出一些 3 维实 Lie 代数的例子.

例 2.7. 设 $\mathfrak{g}$ 为 3 维实线性空间,X, Y, Z 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 定义

$$[X, Y] = 2Z, \quad [X, Z] = -2Y, \quad [Y, Z] = 2X, \tag{2.1}$$

并将上述括号运算通过双线性和反对称性扩张到 $\mathfrak{g}$ 上的任何两个元素, 则容易证明 $[\cdot, \cdot]$ 满足 Jacobi 恒等式, 因此 $\mathfrak{g}$ 成为一个 3 维实 Lie 代数, 这是著名的 3 维特殊酉 Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$.

如果在 (2.1) 中将括号运算定义为

$$[X, Y] = 2Y, \quad [X, Z] = -2Z, \quad [Y, Z] = X, \tag{2.2}$$

我们将得到另外一个实 3 维 Lie 代数, 它与前面介绍的特殊线性 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 同构.

思考题 2.9. 试证明, 上述例子中的两个实 Lie 代数不同构.

思考题 2.10. 试证明, 如果 $\mathfrak{g}$ 为 3 维复线性空间,X, Y, Z 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 则利用 (2.1) 和 (2.2) 都可以定义 $\mathfrak{g}$ 上 Lie 代数的结构, 此时得到的两个 Lie 代数都是与 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 同构的.

习题 2.1

1. 在 Lie 代数 $\mathfrak{t}(2, \mathbb{F})$ 中取一组基为 $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 试计算 $\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y, \operatorname{ad} z$ 在这组基下的矩阵.

2. 试证明: 在 Lie 代数的定义中 (LA1), (LA2) 成立的前提下,Jacobi 恒等式与下面的两个等式都是等价的:

(LA3') $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

(LA3") $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]], \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维 Lie 代数, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 设

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k \varepsilon_k,$$

其中 $C_{ij}^k \in \mathbb{F}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 关于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 的结构常数, 试证明

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0, \quad \forall i, j, k,$$

$$\sum_{m=1}^{n} (C_{ij}^m C_{mk}^l + C_{jk}^m C_{mi}^l + C_{ki}^m C_{mj}^l) = 0, \quad \forall i, j, k, l.$$

4. 设 V 为域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基, 设 $\mathbb{F}$ 中元素 $C_{ij}^k (1 \leq i, j, k \leq n)$ 满足上题的两个等式, 定义 V 上括号运算为

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k \varepsilon_k, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

试证明 V 在上述括号运算下成为一个 Lie 代数.

5. 试分别在四类古典 Lie 代数中找出一组基并求出相应的结构常数.

6. 试在同构意义下给出域 $\mathbb{F}$ 上的所有包含一个 2 维 Abel 子代数的 3 维 Lie 代数的分类.

7. 设 $\mathfrak{g}$ 为代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的有限维 Lie 代数, $x \in \mathfrak{g}$. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 为 $\operatorname{ad} x$ 的全体特征值, $E_{\lambda_i} (i = 1, 2, \ldots, s)$ 为对应的特征子空间, 试证明 $\sum_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数.

8. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维 Lie 代数, 定义 $C(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$. 试证明 $C(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 称为 $\mathfrak{g}$ 的中心.

9. 若 $\mathfrak{h}$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的中心, σ 是 $\mathfrak{g}$ 到 Lie 代数 $\mathfrak{k}$ 的同构, 则 $\sigma(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{k}$ 的中心.

10. 试证明任何 $n(n > 1)$ 维 Lie 代数的中心都不能是 $n - 1$ 维的.

11. 试构造一个 4 维复 Lie 代数使得其中心是 2 维的.

12. 试证明 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 在向量的叉积运算下构成一个 Lie 代数, 并求出 $\mathbb{R}^3$ 的标准基在这一 Lie 代数中的结构常数.

13. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 $2n + 1$ 维线性空间, $\{c, e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ 为一组基, 在 $\mathfrak{g}$ 上定义双线性的括号运算满足条件:

$$\begin{aligned}
[c, e_i] &= [e_i, c] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
[c, f_i] &= -[f_i, c] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
[e_i, f_j] &= -[f_j, e_i] = \delta_{ij} c, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \\
[c, c] &= [e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

试证明在上述运算下 $\mathfrak{g}$ 成为一个 Lie 代数, 并求出其中心. ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时, 称上述 Lie 代数为 Heisenberg Lie 代数).

14. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数,f 为 $\mathfrak{g}$ 上的一个线性函数. 一个 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{m}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的在 f 处的一个极化 (这时也称 $\{\mathfrak{m}, f\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个极化), 如果 $f([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = 0$, 而且 $\mathfrak{m}$ 是满足上述条件的最大子代数. 此外, 若 $\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个子代数, 称三元组 $\{\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-, f\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个双极化, 如果满足条件:

(D1) $f([\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^+]) = f([\mathfrak{g}^-, \mathfrak{g}^-]) = 0$;

(D2) $f([x, \mathfrak{g}]) = 0$ 当且仅当 $x \in \mathfrak{g}^+ \cap \mathfrak{g}^-$;

(D3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ + \mathfrak{g}^-$.

试证明: 若 $\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-$ 为 $\mathfrak{g}$ 的两个子代数, $f \in \mathfrak{g}^*$, 则 $\{\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-, f\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个双极化当且仅当 $\{\mathfrak{g}^+, f\}, \{\mathfrak{g}^-, f\}$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的极化且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ + \mathfrak{g}^-$.

15. 试证明: 若 $\{\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-, f\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个双极化, 则 $\dim \mathfrak{g}^+ = \dim \mathfrak{g}^-$, 而且 $\dim \mathfrak{g} - \dim(\mathfrak{g}^+ \cap \mathfrak{g}^-)$ 是偶数.

2.2 Lie 代数的同态

本节我们研究 Lie 代数同态的基本性质, 我们将会看到, 一个 Lie 代数的任何一个同态像都与该 Lie 代数的某个商 Lie 代数同构, 反之亦然. 作为出发点, 首先介绍商 Lie 代数的定义. 假定 $\mathfrak{h}$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个理想, 则在商线性空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上定义括号运算为

$$[x+\mathfrak{h}, y+\mathfrak{h}] = [x,y]+\mathfrak{h}, \quad x,y\in\mathfrak{g}.$$

容易验证上述定义是合理的, 而且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 在上述括号运算下构成 Lie 代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 对理想 $\mathfrak{h}$ 的商 Lie 代数.

设 ϕ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{k}$ 的同态, 定义同态 ϕ 的核为

$$\ker\phi = \{x\in\mathfrak{g} \mid \phi(x)=0\}.$$

容易看出 $\ker\phi$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 显然, ϕ 为单同态当且仅当 $\ker\phi = 0$.

下面的定理称为 Lie 代数的同态基本定理.

定理 2.1. 设 ϕ 为域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 Lie 代数 $\mathfrak{k}$ 的满同态, $\mathfrak{n}=\ker\phi$, 则

(1) $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}\simeq\mathfrak{k}$;

(2) ϕ 建立了 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\mathfrak{n}$ 的子代数与 $\mathfrak{k}$ 的子代数之间的双射;

(3) 上面的对应将理想变成理想;

(4) 若 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且包含 $\mathfrak{n}$, 则有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\simeq\mathfrak{k}/\phi(\mathfrak{h})$.

证明. (1) 作为 Lie 代数的同态, ϕ 也是将 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 看成交换群到 $\mathfrak{k}$ 作为交换群的群同态, 因此由群的同态基本定理 (参见文献 [2],§1.4) 存在商群 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 到群 $\mathfrak{k}$ 的群同构, 其定义为 $\overline{\phi}(x+\mathfrak{n})=\phi(x)$. 显然, 作为集合, 商 Lie 代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 与商群 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是一样的, 因此我们只需证明 $\overline{\phi}$ 是线性同构, 而且保持括号运算. 对任何 $a\in\mathbb{F}$ 及 $x\in\mathfrak{g}$,

$$\overline{\phi}(a(x+\mathfrak{n})) = \overline{\phi}(ax+\mathfrak{n}) = \phi(ax) = a\phi(x) = a\overline{\phi}(x+\mathfrak{n}),$$

因此 $\overline{\phi}$ 是线性同构. 此外, 对任何 $x,y\in\mathfrak{g}$, 有

$$\begin{aligned}\overline{\phi}([x+\mathfrak{n}, y+\mathfrak{n}]) &= \overline{\phi}([x,y]+\mathfrak{n})\\ &= \phi([x,y]) = [\phi(x),\phi(y)]\\ &= [\overline{\phi}(x+\mathfrak{n}), \overline{\phi}(y+\mathfrak{n})],\end{aligned}$$

因此 $\overline{\phi}$ 是 Lie 代数同构.

(2) 由群的同态基本定理, 作为交换群, ϕ 建立了 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\mathfrak{n}$ 的子群到 $\mathfrak{k}$ 的子群之间的双射: $\mathfrak{h}\to\phi(\mathfrak{h})$, 其逆映射为 $\mathfrak{h}'\to\phi^{-1}(\mathfrak{h}')$. 若 $\mathfrak{h}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\mathfrak{n}$ 的子代数, 则对任何 $a\in\mathbb{F}$ 及 $h\in\mathfrak{h}_1$, $a\phi(h)=\phi(ah)\in\phi(\mathfrak{h}_1)$, 因此 $\phi(\mathfrak{h}_1)$ 是 $\mathfrak{k}$ 的线性子空间. 此外对任何 $x',y'\in\phi(\mathfrak{h}_1)$, 取

定 $x, y \in \mathfrak{h}_1$, 使得 $\phi(x) = x', \phi(y) = y'$, 则有 $[x', y'] = [\phi(x), \phi(y)] = \phi([x, y]) \in \phi(\mathfrak{h}_1)$. 因此 $\phi(\mathfrak{h}_1)$ 是 $\mathfrak{k}$ 的子代数. 同样可以证明, 若 $\mathfrak{k}_1$ 为 $\mathfrak{k}$ 的子代数, 则 $\phi^{-1}(\mathfrak{k}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数.

(3) 的证明与 (2) 类似, 留给读者.

(4) 由 (3), $\phi(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{k}$ 的理想, 因此 $\mathfrak{k}/\phi(\mathfrak{h})$ 是一个商 Lie 代数. 将 $\mathfrak{k}$ 到 $\mathfrak{k}/\phi(\mathfrak{h})$ 的自然同态记为 π' , 则 $\pi' \circ \phi$ 是由 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{k}/\phi(\mathfrak{h})$ 的满同态, 而

$$\begin{aligned}\ker(\pi' \circ \phi) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \pi'(\phi(x)) = 0\}\\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \phi(x) \in \phi(\mathfrak{h})\}\\ &= \mathfrak{h},\end{aligned}$$

其中用到了 (2) 中建立的双射. 于是由 (1) 得到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{k}/\phi(\mathfrak{h})$. ■

设 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且 $\mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{h}_1$, 考虑 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2$ 的自然同态 π, 则 $\pi(\mathfrak{h}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\ker \pi = \mathfrak{h}_2$ 的理想, 于是由上述定理之 (4) 我们得到

推论 2.2. 若 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且 $\mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{h}_1$, 则有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 \simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2)/(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_2)$.

下面我们介绍理想直和的概念, 并给出另一个同态定理. 设 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_s$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则容易验证线性子空间的和 $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \cdots + \mathfrak{h}_s$ 还是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 称为理想 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_s$ 的和. 如果线性空间的和 $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \cdots + \mathfrak{h}_s$ 是直和, 则称 $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \cdots + \mathfrak{h}_s$ 为 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_s$ 的理想直和, 记为 $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_s$.

容易看出任意多个 (可以无穷) 理想的交还是理想. 现在我们证明

命题 2.3. 若 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则 $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$.

证明. 考虑 $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ 到 $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1$ 的自然同态 π, 则有 $\pi(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) = (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1$. 设 ϕ 为 π 在 $\mathfrak{h}_2$ 上的限制, 则 $\phi(\mathfrak{h}_2) = (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1$. 由同态基本定理 $\phi(\mathfrak{h}_2) \simeq \mathfrak{h}_2/\ker\phi$, 而 $\ker\phi = \{x \in \mathfrak{h}_2 \mid \phi(x) = \pi(x) = 0\} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. 故 $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$. ■

下面我们给出一些理想和商代数的例子, 并引出可解与幂零 Lie 代数的概念.

例 2.8. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, 则 $\operatorname{ad}\mathfrak{g} = \{\operatorname{ad}x \mid x \in \mathfrak{g}\}$ 是 $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ 的理想. 我们称形如 $\operatorname{ad}x(x \in \mathfrak{g})$ 的导子为内导子, 而其他的导子为外导子. 商代数 $\operatorname{Der}\mathfrak{g}/\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 称为外导子代数.

例 2.9. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, 对于 $\mathfrak{g}$ 的两个子代数 $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$, 我们令 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ 为所有形如 $[x, y](x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{k})$ 的元素的有限线性组合组成的集合. 容易看出 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 称为 $\mathfrak{g}$ 的导代数. 现在我们归纳定义 $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}]$, $i = 2, 3, \ldots$. 则容易看出 $\mathfrak{g}^{(i)}(i = 0, 1, 2, \ldots)$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 称为 $\mathfrak{g}$ 的导出列. 称 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为可解 Lie 代数, 如果存在正整数 k 使得 $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$.

思考题 2.11. 试计算例 2.7 和思考题 2.10 中的实 3 维和复 3 维 Lie 代数的导出列, 并判断这些 Lie 代数是否可解.

例 2.10. 类似上面的例子，我们定义 $\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^i=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{i-1}], i=2,3,\ldots$. 则容易看出 $\mathfrak{g}^i(i=0,1,2,\ldots)$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想，称为 $\mathfrak{g}$ 的降中心列. 称 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为幂零 Lie 代数，如果存在正整数 k 使得 $\mathfrak{g}^k=0$. 容易看出，对任何 $i\geq 0$, 我们有 $\mathfrak{g}^{(i)}\subseteq\mathfrak{g}^i$. 因此一个幂零 Lie 代数一定是可解的，但是反过来的结论是不对的. 事实上，2 维非交换 Lie 代数显然是可解的，但它不是幂零的.

例 2.11. 现在我们利用同态基本定理来定义 Lie 代数的另外一个理想序列，即升中心列. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数，则 $\mathfrak{g}$ 的中心定义为

$$C(\mathfrak{g})=\{x\in\mathfrak{g}\mid [x,y]=0,\forall y\in\mathfrak{g}\}.$$

显然 $C(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 我们定义 $C_0(\mathfrak{g})=0$, $C_1(\mathfrak{g})=C(\mathfrak{g})$. 设 π_1 为 $\mathfrak{g}$ 到商代数 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 的自然同态，则由定理 2.1, 存在唯一的 $\mathfrak{g}$ 的包含 $\ker\pi_1=C(\mathfrak{g})$ 的理想与 $C(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}))$ 对应，我们将这一理想记为 $C_2(\mathfrak{g})$. 由定理 2.1 的证明可知，事实上 $C_2(\mathfrak{g})=\pi_1^{-1}(C(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})))$. 现在我们假定已经定义好了 $\mathfrak{g}$ 的理想 $C_i(\mathfrak{g})$, 记 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/C_i(\mathfrak{g})$ 的自然同态为 π_i. 同样由定理 2.1, 存在 $\mathfrak{g}$ 的包含 $\ker\pi_i=C_i(\mathfrak{g})$ 的唯一的理想与 $\mathfrak{g}/C_i(\mathfrak{g})$ 的理想 $C(\mathfrak{g}/C_i(\mathfrak{g}))$ 对应，我们将这一理想记为 $C_{i+1}(\mathfrak{g})$, 即 $C_{i+1}(\mathfrak{g})=\pi_i^{-1}(C(\mathfrak{g}/C_i(\mathfrak{g})))$. 这样归纳定义下去，我们就得到 $\mathfrak{g}$ 的一个理想序列

$$C_0(\mathfrak{g})\subseteq C_1(\mathfrak{g})\subseteq C_2(\mathfrak{g})\subseteq\ldots$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的升中心列.

思考题 2.12. 试计算 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, $\mathfrak{su}(2)$ 和 2 维非交换 Lie 代数的升中心列.

例 2.12. 在例 2.4 中，设 $n\geq 2$, 则 $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ 是 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ 的子代数，但不是 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ 的理想，而 $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ 是 $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ 的理想，商代数 $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})/\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ 与 $\mathfrak{d}(n,\mathbb{F})$ 同构.

例 2.13. 设 K 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的线性子空间，K 在 $\mathfrak{g}$ 中的正规化子定义为

$$N_{\mathfrak{g}}(K)=\{x\in\mathfrak{g}\mid [x,K]\subseteq K\}.$$

利用 Jacobi 恒等式容易证明，$N_{\mathfrak{g}}(K)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 如果 K 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，则 K 是 $N_{\mathfrak{g}}(K)$ 的理想，而且 $N_{\mathfrak{g}}(K)$ 是 $\mathfrak{g}$ 中包含 K 且以 K 为理想的最大子代数. 若 $K=N_{\mathfrak{g}}(K)$, 我们称 K 为自正规子代数.

类似地，若 X 为 $\mathfrak{g}$ 的非空子集，则 X 在 $\mathfrak{g}$ 中的中心化子定义为

$$C_{\mathfrak{g}}(X)=\{x\in\mathfrak{g}\mid [x,y]=0,\forall y\in X\}.$$

容易证明 $C_{\mathfrak{g}}(X)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，而且 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})=C(\mathfrak{g})$.

习题 2.2

1. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想, 试证明 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 为交换 Lie 代数当且仅当 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$.
2. 试证明可解 Lie 代数的子代数和同态像一定是可解 Lie 代数, 上述结论对于幂零 Lie 代数成立吗?
3. 设 $\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{n}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上 Lie 代数, 若存在 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{h}$ 同构, 而商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{k}$ 同构, 则称 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{k}$ 通过 $\mathfrak{h}$ 的扩张, $\mathfrak{n}$ 称为扩张的核. 试证明可解 Lie 代数通过可解 Lie 代数的扩张一定是可解 Lie 代数.
4. 试举例说明, 幂零 Lie 代数通过幂零 Lie 代数的扩张不一定是幂零 Lie 代数.
5. 设域 $\mathbb{F}$ 上 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是通过 $\mathfrak{h}$ 的扩张, $\mathfrak{n}$ 是扩张核, 若 $\mathfrak{n} \subseteq C(\mathfrak{g})$, 则称此扩张为中心扩张. 试证明, 如果 $\mathfrak{n},\mathfrak{h}$ 都是幂零 Lie 代数, 且 $\mathfrak{g}$ 是通过 $\mathfrak{n}$ 的中心扩张, 则 $\mathfrak{g}$ 也是幂零 Lie 代数.
6. 设 $\mathfrak{h}$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 证明 $\mathfrak{h}$ 的导出列或降中心列中的任何一项都是 $\mathfrak{g}$ 的理想.
7. 证明: 若 $\mathbb{F}$ 的特征为 2, 则 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ 是幂零 Lie 代数.
8. 一个幂零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为二步幂零的, 如果 $\mathfrak{g}^1 \neq 0$, 而 $\mathfrak{g}^2 = 0$. 试给出维数小于等于 4 的二步幂零 Lie 代数的分类.

2.3 幂零 Lie 代数

本节我们研究幂零 Lie 代数的基本性质, 特别是要证明幂零 Lie 代数的判别定理——Engel 定理.

回忆一下, 一个域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为幂零的, 如果存在正整数 k 使得 $\mathfrak{g}^k=0$. 由定义容易看出, $\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数当且仅当存在自然数 k 使得对任何 $x_i\in\mathfrak{g}$, $i=1,2,\ldots,k$ 我们有 $\operatorname{ad}x_1\operatorname{ad}x_2\cdots\operatorname{ad}x_k=0$. 此外容易看出, 幂零 Lie 代数的理想直和还是幂零 Lie 代数, 下面的引理非常有用:

引理 2.4. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维 Lie 代数, 若 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是幂零 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 也是幂零 Lie 代数.

证明. 由条件, 存在正整数 l 使得 $(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}))^l=0$, 即 $\mathfrak{g}^l\subseteq C(\mathfrak{g})$, 这样就得到

$$\mathfrak{g}^{l+1}\subseteq[\mathfrak{g},C(\mathfrak{g})]=0.$$

因此 $\mathfrak{g}$ 也是幂零 Lie 代数. ■

现在我们给出 Lie 代数幂零的几个等价条件.

定理 2.5. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的有限维 Lie 代数, 则下面的条件等价:

(1) $\mathfrak{g}$ 为幂零 Lie 代数;

(2) 存在 $\mathfrak{g}$ 的理想序列 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_1\supset\mathfrak{g}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_s=0$, 使得

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_j]\subseteq\mathfrak{g}_{j+1},\quad j=0,1,\ldots,s-1;$$

(3) 存在 $\mathfrak{g}$ 的理想序列 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_1\supset\mathfrak{g}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_s=0$, 使得

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_j]\subseteq\mathfrak{g}_{j+1},\quad j=0,1,\ldots,s-1,$$

$$\dim\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1}=1,\quad j=0,1,\ldots,s-1;$$

(4) 存在正整数 k, 使得 $C_k(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$, 其中 $C_j(\mathfrak{g})(j=0,1,\ldots)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的升中心列.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的, 因为 $\mathfrak{g}$ 的降中心列就满足 (2) 的条件.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_k=0$ 为满足条件 (2) 的理想序列, 如果对于某个 $l,1\le l\le k$ 我们有 $\dim\mathfrak{g}_{l-1}/\mathfrak{g}_l>1$, 任取 $\mathfrak{g}_{l-1}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$ 使得 $\dim\mathfrak{g}_l<\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}_{l-1}$, 且 $\mathfrak{g}_l\subset\mathfrak{h}$, 则由 $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_{l-1}]\subseteq\mathfrak{g}_l\subseteq\mathfrak{h}$, 知 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想, 而且理想序列

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_{l-1}\supset\mathfrak{h}\supset\mathfrak{g}_l\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_k=0$$

也满足 (3) 的条件, 但是

$$\dim\mathfrak{g}_{l-1}/\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}_{l-1}/\mathfrak{g}_l,\quad \dim\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_l<\dim\mathfrak{g}_{l-1}/\mathfrak{g}_l.$$

由于 $\mathfrak{g}$ 为有限维 Lie 代数, 故经过有限次后可以得到满足 (3) 的理想序列.

(3) $\Rightarrow$ (4) 我们先证明, 如果 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_s = 0$ 是满足 (3) 中条件的理想序列, 则一定有 $\mathfrak{g}_{s-j} \subseteq C_j(\mathfrak{g})$. 事实上, $j=0$ 时结论显然成立, 若当 $j=k$ 时成立, 则当 $j=k+1$ 时, 由 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{s-k-1}] \subseteq \mathfrak{g}_{s-k}$ 得

$$\pi_k([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{s-k-1}]) \subseteq \pi_k(\mathfrak{g}_{s-k}) \subseteq \pi_k(C_k(\mathfrak{g})) = 0,$$

即

$$[\pi_k(\mathfrak{g}), \pi_k(\mathfrak{g}_{s-k-1})] = 0.$$

因此

$$\pi_k(\mathfrak{g}_{s-k-1}) \subseteq C(\pi_k(\mathfrak{g})) = C(\mathfrak{g}/C_k(\mathfrak{g}))$$

从而 $\mathfrak{g}_{s-k-1} \subseteq C_{k+1}(\mathfrak{g})$. 这证明了我们的断言, 特别地, 取 $j=s$ 得到 $C_s(\mathfrak{g}) \supseteq \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, 故 $C_s(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, 因此 (4) 成立.

(4) $\Rightarrow$ (1) 考察升中心列 $C_i(\mathfrak{g})$ 对于 $C(\mathfrak{g})$ 的商代数 $C_i(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g})$. 因 $C_1(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}) = 0$ 故

$$C_2(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}) = \pi_1^{-1}(C(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})))/C(\mathfrak{g}) = C_1(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})).$$

假定 $i \geq 2$, 且 $C_i(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}) = C_{i-1}(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}))$, 则由

$$(C_{i+1}(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}))/(C_i(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g})) \simeq C_{i+1}(\mathfrak{g})/C_i(\mathfrak{g})$$

可得

$$C_{i+1}(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}) = C_i(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})).$$

由此我们得到

$$C_{s-1}(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})) = C_s(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}).$$

现在我们对 k 用归纳法来证明 $\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数, 不妨设 $\mathfrak{g} \neq 0$, 若 $k=1$ 则 $\mathfrak{g} = C_1(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{g})$ 是交换 Lie 代数, 自然是幂零的. 假定结论对于 $k=l$ 成立, 则当 $k=l+1$ 时, 由上式知 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是幂零的, 由引理 2.4, $\mathfrak{g}$ 也是幂零的, 故结论对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都成立, 因此 (1) 得证. ■

下面我们来证明著名的 Engel 定理, 上面我们提到, 如果 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的幂零 Lie 代数, 则存在自然数 k 使得对任何 $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$ 都有 $\operatorname{ad} x_1 \operatorname{ad} x_2 \cdots \operatorname{ad} x_k = 0$. 特别地, 对任何 $x \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad} x$ 一定是 $\mathfrak{g}$ 上的幂零线性变换, 满足这样的条件的 Lie 代数称为 ad-幂零的. Engel 定理是说, 上述结论反过来也是正确的, 即一个 ad-幂零的 Lie 代数一定是幂零的, 为了证明这一定理, 我们先做一些准备工作.

思考题 2.13. 证明: 一个 ad-幂零 Lie 代数的子代数或商代数也是 ad-幂零的.

思考题 2.14. 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上有限维线性空间, 且 x 是 V 上的幂零线性变换, 证明 $\operatorname{ad} x$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的幂零线性变换.

引理 2.6. 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的真子代数 $\mathfrak{m}$ 称为极大真子代数, 如果包含 $\mathfrak{m}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的子代数只有 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{g}$. 如果 $\mathfrak{h}$ 是极大真子代数且是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则必有 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$.

证明. 用反证法, 假定 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$, 则商 Lie 代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中存在 1 维真子代数 $\mathbb{F}(w+\mathfrak{h})$, $w \notin \mathfrak{h}$. 考虑 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的自然同态 π, 则由同态基本定理, $\mathfrak{g}$ 中一定存在包含 $\mathfrak{h}$ 的子代数 $\mathfrak{l}$ 使得 $\pi(\mathfrak{l}) = \mathbb{F}(w+\mathfrak{h})$, 于是 $\mathfrak{l}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的真子代数, 且 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}, \mathfrak{h} \neq \mathfrak{l}$, 这是矛盾. 因此 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$. ■

思考题 2.15. 如果不假设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 上述引理的结论还成立吗?

命题 2.7. 设 V 为域 $\mathbb{F}$ 上的 $n(n \geq 1)$ 维线性空间, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, 如果 $\mathfrak{g}$ 中元素都是 V 上的幂零线性变换, 则存在 V 中非零向量 v 使得 $x(v) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$.

证明. 我们对 $\mathfrak{g}$ 的维数 $\dim \mathfrak{g}$ 作归纳证明, 若 $\dim \mathfrak{g} = 0$ 或 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 结论是显然的. 假定 $k \geq 2$, 且结论对于 $\dim \mathfrak{g} < k$ 成立, 设 $\dim \mathfrak{g} = k$, 任取 $\mathfrak{g}$ 的真子代数 $\mathfrak{k}$, 则对任何 $x \in \mathfrak{k}$, 由思考题 2.14, $\operatorname{ad} x$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的幂零线性变换, 因此它在 $\mathfrak{g}$ 上的限制也是 $\mathfrak{g}$ 上的幂零线性变换. 又因为 $\operatorname{ad} x$ 保持 $\mathfrak{k}$ 不变, 所以诱导出商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 上的一个线性变换, 它自然也是幂零的. 因 $\dim \mathfrak{k} < \dim \mathfrak{g}$ 由归纳假设可知, 存在 $x+\mathfrak{k} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, $x+\mathfrak{k} \neq 0$ (即 $x \notin \mathfrak{k}$) 使得对任何 $y \in \mathfrak{k}$, 有 $\operatorname{ad} y(x+\mathfrak{k}) = 0$, 故 $[y,x] \in \mathfrak{k}$. 这说明 $\mathfrak{k} \neq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$.

现在取定一个 $\mathfrak{g}$ 的真子代数 $\mathfrak{h}$ 使得 $\dim \mathfrak{h}$ 达到最大, 则由上面的推理知道 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, 也就是说, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 于是由引理 2.6, 我们有 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$. 取定 $z \in \mathfrak{g}$, $z \notin \mathfrak{h}$, 则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{F}z$.

由归纳假设, V 的线性子空间 $V_1 = \{v \in V \mid x(v) = 0, \forall x \in \mathfrak{h}\}$ 是非零的. 因 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 对任何 $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}$ 及 $w \in V_1$, 有

$$y(x(w)) = x(y(w)) - [x,y](w) = x(0) - 0 = 0,$$

这说明 V_1 是 $\mathfrak{g}$ 的公共不变子空间, 特别有 $z(V_1) \subset V_1$. 作为 V_1 上的幂零线性变换, 存在 $w \in V_1$, $w \neq 0$ 使得 $z(w) = 0$, 于是对任何 $x \in \mathfrak{g}$, 有 $x(w) = 0$. 至此命题得证. ■

现在我们可以证明 Engel 定理了.

定理 2.8 (Engel 定理). 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是 ad-幂零的.

证明. 必要性前面已经证明, 下证充分性. 我们对 $\dim \mathfrak{g}$ 用归纳法, 若 $\dim \mathfrak{g} \leq 1$, 结论自然成立. 假设 $k \geq 1$, 且当 $\dim \mathfrak{g} \leq k$ 时, 结论是成立的. 那么当 $\dim \mathfrak{g} = k+1$ 时, 由于 $\mathfrak{g}$ 是 ad-幂零的, $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的子代数 $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ 全部由幂零线性变换组成, 由命题 2.7, 存在 $y \in \mathfrak{g}$, $y \neq 0$ 使得对任何 $x \in \mathfrak{g}$, 有 $\operatorname{ad} x(y) = 0$, 即 $[x,y] = 0$. 这说明 $\mathfrak{g}$ 的中心非零. 现在考虑商代数 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$, 则 $\dim \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}) \leq k$, 且 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 也是 ad-幂零的. 由归纳假设, $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是幂零的, 于是由引理 2.4, $\mathfrak{g}$ 也是幂零的, 因此结论对 $\dim \mathfrak{g} = k+1$ 也成立. 这就完成了定理的证明. ■

习题 2.3

1. 设 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的两个幂零理想, 试证明 $\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想, 从而 $\mathfrak{g}$ 中必存在唯一一个幂零理想, 它包含 $\mathfrak{g}$ 的任何幂零理想, 这个理想称为 $\mathfrak{g}$ 的幂零根基.

2. 设 $\mathfrak{n}$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零根基, 试问商 Lie 代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 的幂零根基是否一定为零? 证明你的结论.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, 且不是幂零的, 试证明 $\mathfrak{g}$ 一定包含一个二维非交换 Lie 代数.

4. 设 $\mathfrak{g}$ 为幂零 Lie 代数, $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的真子代数, 试证明 $\mathfrak{k}\subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ 且 $\mathfrak{k}\neq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$.

5. 试证明任何非零的幂零 Lie 代数至少存在一个外导子.

6. 试构造一个可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 使得 $\mathfrak{g}$ 的任何导子都是内导子.

7. 设 $\mathfrak{g}$ 为幂零 Lie 代数, $\dim\mathfrak{g}=k$, 试证明存在 $\mathfrak{g}$ 的理想序列 $\mathfrak{g}_k=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_{k-1}\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_1\supset\mathfrak{g}_0=0$ 使得 $\dim\mathfrak{g}_i=i$.

8. 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为完备 Lie 代数, 如果 $\mathfrak{g}$ 的所有导子都是内导子而且 $\mathfrak{g}$ 的中心为零. 试证明 2 维非交换 Lie 代数是完备的, 而且对任何特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$, $\mathfrak{sl}(l,\mathbb{F})(l\geq 2)$ 是完备的.

9. 试证明任何非零的幂零 Lie 代数都存在余维数为 1 的理想.

10. 试给出复数域上 3 维幂零 Lie 代数的分类.

11. 试证明任何 4 维幂零 Lie 代数一定有 3 维交换理想.

12. 设 $\mathfrak{g}$ 为特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的有限维 Lie 代数, $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的极大子代数 (即若 $\mathfrak{k}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 且 $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{k}$ 则必有 $\mathfrak{k}=\mathfrak{h}$ 或 $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}$), 且 $\mathfrak{h}$ 为可解 Lie 代数, 试证明 $\dim\mathfrak{g}=\dim\mathfrak{h}+1$.

2.4 可解 Lie 代数与 Lie 定理

本节我们将证明可解 Lie 代数的 Lie 定理. 与幂零 Lie 代数的研究一样, 我们先给出 Lie 代数可解的几个等价条件. 与前面一样, 本节涉及的 Lie 代数都是有限维的.

定理 2.9. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, 则下面的四个条件等价:

(1) $\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数;

(2) 存在 $\mathfrak{g}$ 中的理想序列 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_s = 0$, 使得商代数 $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$ 是交换 Lie 代数;

(3) 存在 $\mathfrak{g}$ 中的子代数序列 $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}'_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}'_r = 0$ 使得 $\mathfrak{g}'_{i+1}$ 是 $\mathfrak{g}'_i$ 的理想, 且商代数 $\mathfrak{g}'_i/\mathfrak{g}'_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$ 是交换的;

(4) 存在 $\mathfrak{g}$ 的子代数序列 $\mathfrak{g}''_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}''_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}''_t = 0$ 使得 $\mathfrak{g}''_{i+1}$ 是 $\mathfrak{g}''_i$ 的理想, 且 $\dim \mathfrak{g}''_i/\mathfrak{g}''_{i+1} = 1$, $i = 0, 1, \ldots, t-1$.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的, 因为 $\mathfrak{g}$ 的导出列就满足 (2) 的条件.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然成立.

(3) $\Rightarrow$ (4) 如果 $\mathfrak{g}$ 中存在子代数序列 $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}'_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}'_r = 0$ 满足 (3) 的条件, 而且存在 j 使得 $\dim \mathfrak{g}'_j/\mathfrak{g}'_{j+1} > 1$, 则我们可取 $\mathfrak{g}'_j$ 的一个线性子空间 $\mathfrak{h}'$ 使得 $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{g}'_{j+1}$, 且 $\mathfrak{h}' \neq \mathfrak{g}'_j$, $\mathfrak{h}' \neq \mathfrak{g}'_{j+1}$. 因为 $\mathfrak{g}'_{j+1}$ 是 $\mathfrak{g}'_j$ 的理想且 $\mathfrak{g}'_j/\mathfrak{g}'_{j+1}$ 是交换的, 所以 $[\mathfrak{g}'_j, \mathfrak{g}'_j] \subseteq \mathfrak{g}'_{j+1}$. 于是

$$[\mathfrak{g}'_j, \mathfrak{h}'] \subseteq [\mathfrak{g}'_j, \mathfrak{g}'_j] \subseteq \mathfrak{g}'_{j+1} \subseteq \mathfrak{h}',$$

从而 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{g}'_j$ 的理想. 另一方面, $\mathfrak{g}'_{j+1}$ 自然是 $\mathfrak{h}'$ 的理想, 且 $\dim \mathfrak{g}'_j/\mathfrak{h}' < \dim \mathfrak{g}'_j/\mathfrak{g}'_{j+1}$, $\dim \mathfrak{h}'/\mathfrak{g}'_{j+1} < \dim \mathfrak{g}'_j/\mathfrak{g}'_{j+1}$. 因 $\mathfrak{g}$ 是有限维的, 这一步骤经过有限次后就可以得到满足 (4) 的子代数序列.

(4) $\Rightarrow$ (1) 如果 $\mathfrak{g}$ 中存在子代数序列 $\mathfrak{g}''_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}''_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}''_t = 0$ 满足 (4) 的条件, 则 $\dim \mathfrak{g}''_{t-1} = 1$ 从而是可解的. 若 $1 \leq j \leq t-1$, 且 $\mathfrak{g}''_j$ 是可解的, 则因 $\mathfrak{g}''_{j-1}$ 是可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}''_{j-1}/\mathfrak{g}''_j$ 通过可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}''_j$ 的扩张, 从而也是可解的. 这样递推下去就得到 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ 也是可解的. ■

下面我们将证明著名的 Lie 定理. 从本质上来说, Engel 定理之所以成立, 是因为对于一个有限维线性空间以及一个由幂零线性变换组成的 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 中元素存在公共的特征向量. 下面的 Lie 定理说明, 类似的结论对于可解 Lie 代数也成立, 不过这里我们需要假定基域 $\mathbb{F}$ 是特征为 0 的代数闭域. 我们先证明一个引理.

引理 2.10. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的域, V 为 $\mathbb{F}$ 上的非零线性空间, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的可解子代数, $\mathfrak{k}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的余维数为 1 的理想, 且存在 $w \in V$, $w \neq 0$, 使得 $y(w) = \lambda(y)w$, $\forall y \in \mathfrak{k}$, 其中 λ 为 $\mathfrak{k}$ 上的线性函数, 则对任何 $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{k}$, 我们有 $\lambda([x, y]) = 0$.

证明. 固定 $x \in \mathfrak{g}$, $x \neq 0$. 设 l 为最小的使得 $w, x(w), x^2(w), \ldots, x^l(w)$ 线性相关的正整数, 则

$l \geq 1$. 记 $W_0 = 0$, 且对于 $i > 0$ 令 W_i 为由 $w, x(w), \dots, x^{i-1}(w)$ 线性生成的 V 的子空间. 则容易看出 $\dim W_l = l$, 且 $W_l = W_{l+1} = \dots$, 而且 $x(W_l) = W_l$.

现设 $y \in \mathfrak{k}$, 则我们有 $y(w) = \lambda(y)w$,

$$y(x(w)) = [y,x](w) + x(y(w)) = -\lambda([x,y])w + \lambda(y)x(w).$$

因此 $y(w) - \lambda(y)w \in W_0$, $y(x(w)) - \lambda(y)x(w) \in W_1$. 一般地, 如果对所有 $i \leq j$, 以及 $y \in \mathfrak{k}$ 都有

$$y(x^i(w)) - \lambda(y)x^i(w) \in W_i,$$

则有

$$y(x^{j+1}(w)) - \lambda(y)x^{j+1}(w) = -[x,y](x^j(w)) + x(y(x^j(w))) - \lambda(y)x^{j+1}(w).$$

由假设, 存在 $w_1, w_2 \in W_j$ 使得

$$-[x,y](x^j(w)) = -\lambda([x,y])x^j(w) + w_1, \quad y(x^j(w)) = \lambda(y)(x^j(w)) + w_2,$$

于是

$$y(x^{j+1}(w)) - \lambda(y)x^{j+1}(w) = -\lambda([x,y])x^j(w) + w_1 + x(w_2) \in W_{j+1}.$$

由此我们得到两个结论: W_l 是 $\mathfrak{k}$ 中元素的公共不变子空间; 对任何 $y \in \mathfrak{k}$, y 在 W_l 的基 $w, x(w), \dots, x^{l-1}(w)$ 下的矩阵为对角线上元素等于 $\lambda(y)$ 的上三角矩阵.

现在我们来完成引理的证明. 上面的结论说明对任何 $y \in \mathfrak{k}$, 我们有 $\operatorname{tr}(y|_{W_l}) = l\lambda(y)$, 而如果 $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{k}$ 则 $[x,y]|_{W_l} = (xy - yx)|_{W_l}$ 的迹必须为 0, 因此我们有 $l\lambda([x,y]) = 0$. 因为 $\mathbb{F}$ 的特征为 0, 所以 $\lambda([x,y]) = 0$. ■

定理 2.11. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域, V 为 $\mathbb{F}$ 上的非零线性空间, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个可解子代数, 则存在 $v \in V, v \neq 0$ 及 $\mathfrak{g}$ 上线性函数 λ 使得 $x(v) = \lambda(x)v$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

证明. 不妨设 $\mathfrak{g} \neq 0$, 我们对 $\dim \mathfrak{g}$ 用归纳法, 若 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 结论自然成立. 下设当 $\dim \mathfrak{g} \leq k$ 时结论成立, 并设 $\dim \mathfrak{g} = k+1$, 并将证明分成三步来完成.

(1) 我们先证明 $\mathfrak{g}$ 中一定存在余维数为 1 的理想. 事实上, 因为 $\mathfrak{g}$ 可解, 我们有 $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. 任取 $\mathfrak{g}$ 中包含 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 的余维数为 1 的线性子空间 $\mathfrak{k}$, 则有

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{k}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{k},$$

因此 $\mathfrak{k}$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的余维数为 1 的理想.

(2) 取定步骤 (1) 中的理想 $\mathfrak{k}$. 如果 $\dim \mathfrak{k} = 0$, 则 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 结论自然成立. 设 $\dim \mathfrak{k} > 0$, 则由 $\mathfrak{k}$ 可解以及归纳假设, 存在 V 中非零向量 v_1 及 $\mathfrak{k}$ 上的线性函数 λ 使得 $x(v_1) = \lambda(x)v_1$, $\forall x \in \mathfrak{k}$. 现在令

$$W = \{w \in V \mid x(w) = \lambda(x)w, \forall x \in \mathfrak{k}\}$$

则 W 是 V 的非零线性子空间.

(3) 我们断定, W 是 $\mathfrak{g}$ 中元素的公共不变子空间, 即 $x(W)\subseteq W$, $\forall x\in\mathfrak{g}$. 事实上, 对任何 $x\in\mathfrak{g}, w\in W$ 及 $y\in\mathfrak{k}$ 有

$$y(x(w)) = -[x,y](w) + x(y(w)) = -\lambda([x,y])w + x(\lambda(y)w) = \lambda(y)x(w),$$

这里我们用到了引理 2.10 的结论 $\lambda([x,y])=0$. 上式说明 $x(w)\in W$, 因此断言成立.

现在我们取定 $z\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{k}$, 于是有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathbb{F}z$, 且 $z(W)\subseteq W$. 作为代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的非零线性空间 W 上的线性变换, z 一定存在特征根和相应的特征向量 w_1, 于是容易验证 w_1 满足定理的条件, 因此结论对于 $\dim\mathfrak{g}=k+1$ 也成立. 至此定理得证. ■

现在我们可以证明 Lie 定理了.

定理 2.12 (Lie 定理). *设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域, V 为 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的可解子代数, 则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 使得对任何 $x\in\mathfrak{g}$, x 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为上三角矩阵.*

证明. 我们对 V 的维数用归纳法, 若 $\dim V=1$, 结论自然成立. 假设当 $\dim V=n-1$ 时成立, 那么当 $\dim V=n$ 时, 由定理 2.11, 存在 $w\in V, w\neq 0$ 以及 $\mathfrak{g}$ 上线性函数 λ 使得

$$x(w)=\lambda(x)w.$$

这说明 $V_1=\mathbb{F}w$ 是 $\mathfrak{g}$ 的公共不变子空间, 于是任何 $x\in\mathfrak{g}$ 都诱导出商空间 V/V_1 上的一个线性变换 $\tilde{x}$, 而集合 $\{\tilde{x}\mid x\in\mathfrak{g}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的同态像, 因此是 $\mathfrak{gl}(V/V_1)$ 的可解子代数. 由归纳假设, 存在 V/V_1 的一组基 $\tilde{\varepsilon}_2,\tilde{\varepsilon}_3,\dots,\tilde{\varepsilon}_n$ 使得对任何 $x\in\mathfrak{g}$, $\tilde{x}$ 在这组基下的矩阵为上三角矩阵. 现在取定 $\tilde{\varepsilon}_i$ 中的代表元 ε_i, $i=2,3,\dots,n$, 且令 $\varepsilon_1=w$, 则容易验证 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基, 而且任何 $x\in\mathfrak{g}$ 在这组基下的矩阵为上三角矩阵. 这说明结论对于 $\dim V=n$ 也成立, 至此定理证毕. ■

思考题 2.16. *仔细比较 Engel 定理与 Lie 定理就可以发现, Engel 定理对于基域没有任何要求, 而 Lie 定理要求基域 $\mathbb{F}$ 是特征为零的代数闭域. 请说明这里的原因, 并举例说明 Lie 定理对于特征为零的非代数闭域不成立, 对于特征不为零的代数闭域也不成立.*

Lie 定理有一个重要的推论, 这在研究某些问题时非常有用.

推论 2.13. *设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域, 则 $\mathbb{F}$ 上的一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 幂零.*

证明. 注意到 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是交换 Lie 代数, 因而可解; 如果 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 幂零, 则 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 也可解, 于是 $\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 通过可解 Lie 代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的扩张, 因而可解.

反之, 如果 $\mathfrak{g}$ 可解, 则 $\{\operatorname{ad}x\mid x\in\mathfrak{g}\}$ 作为 $\mathfrak{g}$ 的同态像, 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的可解子代数. 于是由 Lie 定理, 存在 $\mathfrak{g}$ 的一组基使得对任何 $x\in\mathfrak{g}$, $\operatorname{ad}x$ 在这组基下的矩阵为上三角矩阵. 因此对任何

$x, y \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad}[x,y] = \operatorname{ad} x \operatorname{ad} y - \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x$ 在这组基下的矩阵为严格上三角矩阵. 这说明 $\operatorname{ad}[x,y]$ 是幂零线性变换, 于是 $\operatorname{ad}[x,y]$ 在其不变子空间 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上的限制也是幂零的, 也就是说, Lie 代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是 ad-幂零的, 故由 Engel 定理, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是幂零的. ■

习题 2.4

1. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为 p 的代数闭域, V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 试证明, 若 $p > \dim V$, 则 Lie 定理的结论对于 V 仍然成立.
2. 设 $\mathfrak{g}$ 为特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的可解 Lie 代数, $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的幂零根基, τ 为 $\mathfrak{g}$ 上的导子. 试证明 $\tau(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n}$.
3. 设 $\mathfrak{g}$ 为特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的可解 Lie 代数, $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的幂零根基. 试证明 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$.
4. 试举例说明上题的结论对于非可解 Lie 代数不成立.
5. 设 $\mathfrak{g}$ 为特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的可解 Lie 代数, $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的真子代数. 试证明存在 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}_1$, 使得 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1$ 且 $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{h} + 1$.
6. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ 的可解子代数. 试证明 $\dim \mathfrak{g} \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$.
7. 设 $n \geq 2$, $\mathfrak{g}$ 为由所有 n 阶复上三角矩阵组成的 Lie 代数, 令

$$\mathfrak{g}^+ = \{(a_{ij}) \in \mathfrak{g} \mid a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0\},$$

$$\mathfrak{g}^- = \{(a_{ij}) \in \mathfrak{g} \mid a_{12} = a_{23} = \cdots = a_{n-1,n} = 0, \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}.$$

定义 $\mathfrak{g}$ 上线性函数 f 为

$$f((a_{ij})) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1}, \quad (a_{ij}) \in \mathfrak{g}.$$

试证明 $\{\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-, f\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个双极化, 且当 $n \geq 3$ 时, $\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-$ 作为 Lie 代数不同构.

2.5 半单 Lie 代数

本节我们介绍半单 Lie 代数的概念和基本性质, 并给出一些判别定理. Lie 代数理论的一个最重要的成果就是半单 Lie 代数的分类, 因此本节的内容是非常重要的.

首先给出半单 Lie 代数的定义. 设 $\mathbb{F}$ 为域, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, 因为任何两个可解理想的和还是可解理想, 所以 $\mathfrak{g}$ 中一定存在一个最大的可解理想, 称为 $\mathfrak{g}$ 的根基, 记为 $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$. 称 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为半单 Lie 代数, 如果 $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}=0$.

思考题 2.17. 试计算 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的根基, 从而证明它是半单 Lie 代数.

半单 Lie 代数的定义可以减弱, 事实上, 我们有

引理 2.14. 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 半单当且仅当 $\mathfrak{g}$ 不包含非零交换理想.

证明. 必要性是显然的, 因为一个非零交换理想必然是非零可解理想. 反之, 如果 $\mathfrak{g}$ 不是半单的, 则 $\mathfrak{h}=\operatorname{Rad}\mathfrak{g}\neq 0$. 因为 $\mathfrak{h}$ 是理想, 容易看出 $\mathfrak{h}^{(1)}=[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ 也是理想, 故对任何 $l\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{h}^{(l)}$ 也是理想. 又 $\mathfrak{h}$ 是可解的, 因此存在 $k\geq 1$, 使得 $\mathfrak{h}^{(k-1)}\neq 0$ 而 $\mathfrak{h}^{(k)}=0$. 这说明 $\mathfrak{h}^{(k-1)}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非零交换理想, 因此引理成立. ■

按照上面的定义来判断一个 Lie 代数是否半单是非常麻烦的, 因为一般来说计算一个 Lie 代数的根基非常困难. 下面我们引进 Lie 代数的 Killing 型的概念, 并利用它给出 Lie 代数半单的一个充分必要条件. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, 定义

$$B(x,y)=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y),\quad x,y\in\mathfrak{g}.$$

则 B 是 $\mathfrak{g}$ 上的对称双线性函数, 称为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 (或 Cartan-Killing 型). 值得注意的是, 除了双线性性和对称性外, Killing 型还满足条件 (称为不变性)

$$B([x,y],z)+B(y,[x,z])=0,\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

这是因为

$$\begin{aligned}
B([x,y],z)+B(y,[x,z])&=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}[x,y]\operatorname{ad}z)+\operatorname{tr}(\operatorname{ad}y\operatorname{ad}[x,z])\\
&=\operatorname{tr}((\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y-\operatorname{ad}y\operatorname{ad}x)\operatorname{ad}z)+\operatorname{tr}(\operatorname{ad}y(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}z-\operatorname{ad}z\operatorname{ad}x))\\
&=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y\operatorname{ad}z-\operatorname{ad}y\operatorname{ad}x\operatorname{ad}z)+\operatorname{tr}(\operatorname{ad}y\operatorname{ad}x\operatorname{ad}z-\operatorname{ad}y\operatorname{ad}z\operatorname{ad}x)\\
&=0.
\end{aligned}$$

思考题 2.18. 设 $\mathfrak{h}$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, $B_{\mathfrak{g}}$, $B_{\mathfrak{h}}$ 分别为 $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ 的 Killing 型, 试证明 $B_{\mathfrak{h}}$ 是 $B_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制.

思考题 2.19. 设 $\mathfrak{h},\mathfrak{g}$ 如上, $\mathfrak{h}^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}\mid B_{\mathfrak{g}}(x,y)=0,\forall y\in\mathfrak{h}\}$. 试证明 $\mathfrak{h}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

Killing 型的一个重要的应用是可以用来刻画可解 Lie 代数和半单 Lie 代数, 下面的两个定理称为 Cartan 准则.

定理 2.15 (Cartan 可解准则). 设 $\mathfrak{g}$ 为特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $B(x,[y,z])=0, \forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

证明. 设 $\mathfrak{g}$ 为可解 Lie 代数, 则由 Lie 定理, 存在 $\mathfrak{g}$ 的一组基使得对任何 $x\in\mathfrak{g}$, $\operatorname{ad}x$ 的矩阵都是上三角矩阵. 因此对任何 $y,z\in\mathfrak{g}$, $\operatorname{ad}[y,z]=\operatorname{ad}y\operatorname{ad}z-\operatorname{ad}z\operatorname{ad}y$ 的矩阵是严格上三角矩阵. 这样 $\operatorname{ad}x\operatorname{ad}[y,z]$ 对应的矩阵也是严格上三角矩阵, 因此 $B(x,[y,z])=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}[y,z])=0$.

反之, 设 $B(x,[y,z])=0,\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$. 我们先证明 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的可解子代数, 为此只需证明 $[\operatorname{ad}\mathfrak{g},\operatorname{ad}\mathfrak{g}]=\operatorname{ad}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是幂零的. 我们利用定理 1.1.3 (即原书中的定理 0.1.8) 来证明. 设 $M_1=[\operatorname{ad}\mathfrak{g},\operatorname{ad}\mathfrak{g}]$, $M_2=\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. 定义 $M=\{W\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\mid [W,M_2]\subseteq M_1\}$, 则我们有 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}\subseteq M$. 又对任何 $\operatorname{ad}[x,y]\in M_1$, 以及 $Z\in M$, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\operatorname{ad}[x,y]Z)&=\operatorname{tr}((\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y-\operatorname{ad}y\operatorname{ad}x)Z)\\&=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}yZ)-\operatorname{tr}(\operatorname{ad}y\operatorname{ad}xZ)\\&=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}yZ)-\operatorname{tr}(\operatorname{ad}xZ\operatorname{ad}y)\\&=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x[\operatorname{ad}y,Z])=0,\end{aligned}$$

其中最后一步是因为由假设我们有 $[\operatorname{ad}y,Z]\in M_1=[\operatorname{ad}\mathfrak{g},\operatorname{ad}\mathfrak{g}]$. 这样由定理 1.1.3 的结论我们得到 $\operatorname{ad}[x,y]$ 是幂零线性变换, 从而 $[\operatorname{ad}\mathfrak{g},\operatorname{ad}\mathfrak{g}]$ 是幂零 Lie 代数, 故 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数.

现在我们考虑满同态 $\operatorname{ad}:\mathfrak{g}\to\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, 则同态的核恰为 $\mathfrak{g}$ 的中心. 因此 $\mathfrak{g}$ 是 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 的中心扩张. 因 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 可解, 故 $\mathfrak{g}$ 也可解. ■

定理 2.16 (Cartan 半单准则). 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 为半单的当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是非退化的.

证明. 设 $\mathfrak{g}$ 是半单的, 则 $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}=0$. 令

$$\mathfrak{r}=\{x\in\mathfrak{g}\mid B(x,y)=0,\forall y\in\mathfrak{g}\}.$$

容易验证 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 注意到对任何 $x,y,z\in\mathfrak{r}$, 我们有 $B(x,[y,z])=0$, 因此 $\mathfrak{r}$ 是可解的, 于是 $\mathfrak{r}\subseteq\operatorname{Rad}\mathfrak{g}=0$. 故 $\mathfrak{r}=0$, 于是 B 是非退化的.

反之, 假设 B 是非退化的, 我们证明 $\mathfrak{g}$ 不包含非零的交换理想, 于是由引理 2.14 就得到我们的结论. 用反证法, 若不然, 设 $\mathfrak{i}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的非零交换理想, 则对任何 $x\in\mathfrak{i},y,z\in\mathfrak{g}$, 有

$$(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y)^2(z)=[x,[y,[x,[y,z]]]].$$

因为 $\mathfrak{i}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 有 $[x,[y,z]]\in\mathfrak{i}$, 故 $[y,[x,[y,z]]]\in\mathfrak{i}$. 又 $\mathfrak{i}$ 是交换的, 故

$$[x,[y,[x,[y,z]]]]=0.$$

这说明 $\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y$ 是幂零线性变换, 从而 $B(x,y)=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y)=0$. 这与 B 非退化矛盾. ■

上面给出了判断一个 Lie 代数可解和半单的方法, 下面来研究一下半单 Lie 代数的结构, 我们先给出一个定义.

定义 2.4. 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为单 Lie 代数, 如果没有非平凡理想而且 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\neq 0$.

由定义, 单 Lie 代数的根基一定为零, 因此单 Lie 代数一定是半单的. 特别地, 任何可解或幂零 Lie 代数都不是单 Lie 代数. 值得注意的是, 1 维 Lie 代数虽然没有非平凡理想, 却不是单 Lie 代数.

思考题 2.20. 试构造一个 Lie 代数, 它既不是可解的也不是半单 Lie 代数.

下面我们来研究一下半单 Lie 代数的结构. 如果半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 不是单的, 则存在非平凡理想 $\mathfrak{g}_1$, 令

$$\mathfrak{g}_1^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}\mid B_{\mathfrak{g}}(x,y)=0,\forall y\in\mathfrak{g}_1\}$$

则容易验证 $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 因为 $B_{\mathfrak{g}}$ 是非退化的, 故有 $\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_1^{\perp}=0$, 且 $\dim\mathfrak{g}_1+\dim\mathfrak{g}_1^{\perp}=\dim\mathfrak{g}$, 从而 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 为理想直和. 又因为 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 都是理想, 所以 $B_{\mathfrak{g}_1},B_{\mathfrak{g}_1^{\perp}}$ 分别是 $B_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 的限制. 这说明 $B_{\mathfrak{g}_1},B_{\mathfrak{g}_1^{\perp}}$ 也都是非退化的, 于是 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 也都是半单 Lie 代数. 因为 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 的维数都小于 $\mathfrak{g}$ 的维数, 这一过程继续下去我们就得到:

定理 2.17. 任何一个半单 Lie 代数都能分解成单理想的直和.

现在我们考虑上述定理中分解的唯一性. 假定 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s$ 是半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的分解, 其中 $\mathfrak{g}_i(1\leq i\leq s)$ 都是单理想. 现在设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个最小的非零理想, 那么上面的推理说明 $\mathfrak{h}$ 一定是半单的. 由于 $\mathfrak{h}$ 是最小理想, 不可能有非平凡理想, 因此 $\mathfrak{h}$ 是单理想. 但 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 而且不为零 (否则将有 $\mathfrak{h}\subseteq C(\mathfrak{g})$, 矛盾), 因此有 $\mathfrak{h}=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]$. 另一方面

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_1]+[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_2]+\cdots+[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_s].$$

于是一定存在 $i, 1\leq i\leq s$ 使得 $\mathfrak{h}=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_i]$ 而 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_j]=0$, $j\neq i$. 又 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_i]\subseteq\mathfrak{g}_i$, 故 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_i$. 这说明上面的分解中出现的单理想其实都是 $\mathfrak{g}$ 的非零极小理想, 因此除了顺序外, 这些单理想一定是唯一的. 这就证明了:

定理 2.18. 一个半单 Lie 代数分解成单理想的直和, 如果不计顺序, 则分解是唯一的.

本节的最后我们考虑半单 Lie 代数的导子. 因为半单 Lie 代数的中心为零, 所以同态 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 是同构. 这说明 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 也是半单 Lie 代数, 因此其 Killing 型也是非退化的. 又由前面的讨论知道, 对任何 $\mathfrak{g}$ 的导子 $\delta, x\in\mathfrak{g}$ 有 $[\delta,\mathrm{ad}\,x]=\mathrm{ad}(\delta(x))$, 因此 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ 的理想. 这说明 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 B_1 是 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 B_2 在 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}\times\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 上的限制. 现在考虑 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ 的理想

$$\mathfrak{t}=\{\delta\in\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}\mid B_2(\delta,\mathrm{ad}\,x)=0,\forall x\in\mathfrak{g}\}.$$

如果 $\delta_1 \in \mathfrak{t} \cap \operatorname{ad}\mathfrak{g}$, 则有 $B_2(\delta_1, \operatorname{ad}x) = B_1(\delta_1, \operatorname{ad}x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$. 由于 B_1 是非退化的, 我们得到 $\delta_1 = 0$, 因此 $\mathfrak{t} \cap \operatorname{ad}\mathfrak{g} = 0$. 又因为 $\mathfrak{t}$ 和 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 都是 $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ 的理想, 我们得到 $[\mathfrak{t}, \operatorname{ad}\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{t} \cap \operatorname{ad}\mathfrak{g} = 0$. 特别地, 对任何 $\delta \in \mathfrak{t}$ 及 $x \in \mathfrak{g}$, 有 $\operatorname{ad}(\delta(x)) = 0$, 由 $\mathfrak{g}$ 的中心为零我们得到 $\delta(x) = 0$. 这说明 $\mathfrak{t} = 0$. 因此 $\operatorname{Der}\mathfrak{g} = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$. 这证明了下面的定理:

定理 2.19. 一个半单 Lie 代数的导子一定是内导子.

思考题 2.21. 在 Cartan 准则中我们都假设域 $\mathbb{F}$ 是特征为零的代数闭域, 但是后面的各个定理中都没有提到这个条件. 那么本节的哪些定理对域的条件可以减弱? 特别地, 试讨论本节的结论对于实数域是否成立.

最后我们介绍一下实半单 Lie 代数的一些基本性质. 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个实 Lie 代数, 则可以在 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^C$ 上定义 Lie 括号如下: 对 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{g}$ 定义

$$[x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2] = [x_1, x_2] - [y_1, y_2] + \sqrt{-1}([y_1, x_2] + [x_1, y_2]).$$

容易验证在上述 Lie 括号运算下 $\mathfrak{g}^C$ 成为一个复 Lie 代数, 称为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复化. 反之, 如果 $\mathfrak{k}$ 为一个复 Lie 代数, $\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{k}$ 作为实 Lie 代数的子代数, 而且满足条件 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{k}_0$, 则称 $\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{k}$ 的一个实形式. 显然, 若 $\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{k}$ 的实形式, 则 $\mathfrak{k}_0^C = \mathfrak{k}$. 此外, 若 $\mathfrak{g}^C$ 是 $\mathfrak{g}$ 的复化, 则 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}^C$ 的一个实形式.

思考题 2.22. 试举例说明, 存在复 Lie 代数, 有两个实形式 $\mathfrak{k}_{0,1}, \mathfrak{k}_{0,2}$ 作为实 Lie 代数不同构.

一般说来, 复 Lie 代数的实形式是不唯一的, 那么一个实 Lie 代数的复化和它本身有什么联系呢? 下面的引理给出了这方面的一个重要信息.

引理 2.20. 设 $\mathfrak{g}_0$ 为实 Lie 代数, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的复化, 将 $\mathfrak{g}$ 看成实 Lie 代数, 记为 $\tilde{\mathfrak{g}}$. 设 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$ 的 Killing 型分别为 $B_0, B, \tilde{\mathfrak{B}}$, 则

$$\begin{aligned} B_0(x, y) &= B(x, y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}_0, \\ \tilde{B}(x, y) &= 2\operatorname{Re}(B(x, y)), \quad \forall x, y \in \tilde{\mathfrak{g}}, \end{aligned}$$

这里 Re 表示一个复数的实部.

证明. 取定 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 而

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \sqrt{-1}\varepsilon_1, \sqrt{-1}\varepsilon_2, \ldots, \sqrt{-1}\varepsilon_n$$

是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的一组基. 设 $x, y \in \mathfrak{g}_0$, 且 $\mathfrak{g}_0$ 的线性变换 $\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)$ 在上述基下的矩阵为 A, 则作为 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换, $\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)$ 在上述基下的矩阵也是 A, 因此第一个结论成立.

现在设 $x, y \in \mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}$, 而且作为 $\mathfrak{g}$ 上线性变换, $\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $B + \sqrt{-1}C$, 其中 $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 则直接计算容易看出, 作为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上线性变换, $\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)$ 在基

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \sqrt{-1}\varepsilon_1, \sqrt{-1}\varepsilon_2, \ldots, \sqrt{-1}\varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

由此可知第二个结论成立. ■

上述引理的一个重要推论是:

定理 2.21. 一个实 Lie 代数是半单的当且仅当它的复化是半单的.

习题 2.5

1. 计算 2 维非交换 Lie 代数的 Killing 型.
2. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, K 为 $\mathfrak{g}$ 上的双线性函数, 称为不变的, 如果
$$K([x,y],z) + K(y,[x,z]) = 0, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$
称 K 为对称的, 如果 $K(x,y) = K(y,x), \forall x,y \in \mathfrak{g}$. 试证明 2 维非交换 Lie 代数上存在对称的非退化不变双线性型.
3. 设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. 试证明 $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ 上存在对称的非退化不变双线性型.
4. 试证明一个幂零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型满足 $B(x,y) = 0, \forall x,y \in \mathfrak{g}$.
5. 试举例说明, 存在可解 Lie 代数其 Killing 型不等于 0, 而且存在可解非幂零的 Lie 代数, 其 Killing 型为 0.
6. 设 ϕ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 的满同态, $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基, 试证明 $\phi(\mathfrak{r})$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的根基.
7. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域, 试证明 $\mathbb{F}$ 上的一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是可解的当且仅当 $B(x,x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.
8. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基, $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 试证明 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是半单 Lie 代数当且仅当 $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$.
9. 设 $\mathfrak{g}$ 为特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的半单 Lie 代数, 称 $u \in \mathfrak{g}$ 为半单元 (幂零元), 如果 $\mathrm{ad}(u)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的半单 (幂零) 线性变换. 试证明对任何 $x \in \mathfrak{g}$ 存在唯一 $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$, 使得 $x = x_s + x_n$, x_s, x_n 分别是 $\mathfrak{g}$ 上的半单元和幂零元, 而且 $[x_s, x_n] = 0$ (以后我们将上面的分解 $x = x_s + x_n$ 称为 Jordan-Chevalley 分解, 而 x_s, x_n 分别称为 x 的半单部分和幂零部分).
10. 设 $\mathbb{F}, \mathfrak{g}$ 同上题, 将 $\mathfrak{g}$ 分解成单理想的直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$. 设 $x \in \mathfrak{g}$ 有分解 $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, $x_i \in \mathfrak{g}_i, 1 \le i \le r$. 又 $x = s + n$ 为 x 的 Jordan-Chevalley 分解, 且 s, n 分别有分解 $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_r$, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$, $s_i, n_i \in \mathfrak{g}_i$, $1 \le i \le r$. 试证明对任何 i, $x_i = s_i + n_i$ 恰为 x_i 的 Jordan-Chevalley 分解.

11. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})(n \geq 2)$, $\mathfrak{i}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个理想, 证明:

(1) 若存在 $i \neq j$ 使得 $E_{ij} \in \mathfrak{i}$ 则一定有 $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$. (提示: 取特殊元素反复作用)

(2) 若 $\mathfrak{i}$ 包含一个非零的对角矩阵, 则一定存在 $i \neq j$ 使得 $E_{ij} \in \mathfrak{i}$.

(3) $\mathfrak{g}$ 为单 Lie 代数.

12. 证明 $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})(n \geq 3, n \neq 4)$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})(n \geq 3)$ 都是单 Lie 代数.

13. 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为完全 Lie 代数, 如果 $\mathfrak{g}$ 满足 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. 试证明半单 Lie 代数一定是完全的, 而可解 Lie 代数或幂零 Lie 代数都不是完全的.

14. 试举例说明完全 Lie 代数不一定是半单 Lie 代数, 也不一定是完备 Lie 代数.

2.6 Lie 代数的表示

本节我们介绍 Lie 代数的表示的基本知识. 表示理论是现代数学中重要的研究课题, 而且应用广泛. 在 Lie 代数的理论中, 表示理论不但本身是一个重要分支, 而且经常是解决一些重要问题的基本工具. 例如, 半单 Lie 代数的分类的出发点就是 3 维 Lie 代数的表示的结构和分类.

我们先给出 Lie 代数表示的定义.

定义 2.5. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 一个 $\mathfrak{g}\times V$ 到 V 的映射 ρ 称为 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的一个表示, 如果满足条件:

(1) $\rho(ax+by,v)=a\rho(x,v)+b\rho(y,v), \quad \forall x,y\in\mathfrak{g}, v\in V, a,b\in\mathbb{F}$;

(2) $\rho(x,av+bw)=a\rho(x,v)+b\rho(x,w), \quad \forall x\in\mathfrak{g}, v,w\in V, a,b\in\mathbb{F}$;

(3) $\rho([x,y],v)=\rho(x,\rho(y,v))-\rho(y,\rho(x,v)), \quad \forall x,y\in\mathfrak{g}, v\in V$.

一般我们将上述表示记成 (ρ,V), 有时也称为 $\mathfrak{g}$ 的一个模.

值得注意的是, 有时我们将表示 (ρ,V) 中的映射 ρ 省略, 直接说是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示 (或表示空间、模), 而将 $\rho(x,v)$ 记为 $x\cdot v$ 或 xv. 此外, 由定义可以看出, 如果 (ρ,V) 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 那么由 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{gl}(V)$ 的映射 φ:

$$\varphi(x)=\rho(x,\cdot): v\mapsto\rho(x,v), \quad v\in V$$

就是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个 Lie 代数同态; 反之, 如果我们有一个由 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{gl}(V)$ 的同态 φ, 则由 $\mathfrak{g}\times V$ 到 V 的映射 ρ:

$$\rho(x,v)=\varphi(x)(v), \quad x\in\mathfrak{g}, v\in V$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示. 从这个意义上说, Lie 代数的表示就是一种特殊的同态. 不过值得注意的是, 表示的语言非常方便, 因此 Lie 代数的表示是一个独立而且重要的分支, 在 Lie 代数的表示的研究中有很多独立的方法.

另外需要注意, 表示的定义中并没有要求 V 是有限维线性空间这一限制. 事实上, 现在研究的表示大多数都是无限维的, 不过本书中我们只考虑有限维表示. 下面给出一些表示的例子.

例 2.14. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的映射 $(x,y)\mapsto \mathrm{ad}\,x(y)=[x,y]$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 作为线性空间上的一个表示, 称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示.

例 2.15. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. 定义映射 $\rho:\mathfrak{g}\times\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ 为

$$\rho(A,v)=Av, \quad A\in\mathfrak{g}, v\in\mathbb{F}^n.$$

这里我们将 $\mathbb{F}^n$ 中的元素写成列向量的形式, 而 Av 表示矩阵乘法. 则 $(\rho,\mathbb{F}^n)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的表示, 称为 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ 的标准表示或自然表示.

下面我们介绍子表示和不可约表示等重要概念, 为了叙述方便有时我们采用模的语言.

定义 2.6. 设 (ρ, V) 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的模, W 为 V 的子空间. 如果对任何 $x \in \mathfrak{g}, w \in W$ 有 $\rho(x, w) \in W$, 则称 W 为 V 的子模. 显然, 0 和 V 本身都是 V 的子模, 称为平凡子模. 一个 $\mathfrak{g}$ 的表示称为不可约表示 (或不可约模), 如果它没有非平凡子模. 称表示 (ρ, V) 为忠实表示, 如果由 $\rho(x, v) = 0, \forall v \in V$ 可以推出 $x = 0$. 这等价于由 (ρ, V) 对应的 Lie 代数的同态 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 的核为 0, 或者说是单同态.

思考题 2.23. 试问例 2.14 中的表示什么时候是不可约的? 什么时候是忠实的? 并判断例 2.15 中的表示是否不可约, 是否为忠实表示.

思考题 2.24. 设 $\mathfrak{g}$ 为非交换幂零 Lie 代数, 试证明 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示一定不是不可约的.

本节我们主要介绍由已知的表示构造新的表示的方法, 先介绍表示的直和与对偶表示等概念. 下面这个定理的证明比较简单, 留作习题.

定理 2.22. 设 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的两个表示, $V = V_1 \oplus V_2$ 为线性空间 V_1, V_2 的直和. 定义 $\mathfrak{g} \times V$ 到 V 的映射 ρ 为 $\rho(x, v_1 + v_2) = \rho_1(x, v_1) + \rho_2(x, v_2)$, 则 (ρ, V) 为 $\mathfrak{g}$ 的表示, 称为表示 (ρ_1, V_1) 和 (ρ_2, V_2) 的直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$.

定理 2.23. 设 (ρ, V) 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, V^* 为 V 的对偶空间. 定义 $\mathfrak{g} \times V^*$ 到 V^* 的映射 ρ^* 为

$$\rho^*(x, f)(v) = -f(\rho(x, v)), \quad x \in \mathfrak{g}, f \in V^*, v \in V.$$

则 (ρ^*, V^*) 为 $\mathfrak{g}$ 的表示, 称为 (ρ, V) 的对偶表示 (对偶模), 记为 V^*.

证明. 显然满足定义 2.5 中的条件 (1) 和 (2). 又对任何 $x, y \in \mathfrak{g}$, 以及 $f \in V^*, v \in V$ 有

$$\begin{aligned}
\rho^*([x, y], f)(v) &= -f(\rho([x, y], v)) \\
&= -f(\rho(x, \rho(y, v)) - \rho(y, \rho(x, v))) \\
&= \rho^*(x, f)(\rho(y, v)) - \rho^*(y, f)(\rho(x, v)) \\
&= -\rho^*(y, \rho^*(x, f))(v) + \rho^*(x, \rho^*(y, f))(v) \\
&= [\rho^*(x, \rho^*(y, f)) - \rho^*(y, \rho^*(x, f))](v).
\end{aligned}$$

因此

$$\rho^*([x, y], f) = \rho^*(x, \rho^*(y, f)) - \rho^*(y, \rho^*(x, f)).$$

这说明 (ρ^*, V^*) 满足定义 2.5 中的条件 (3), 从而是 $\mathfrak{g}$ 的表示. ■

定义 2.7. 设 (ρ, V) 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, 如果对任何 V 的子表示 W_1 存在另一个子表示 W_2 使得 $V = W_1 \oplus W_2$, 则称 (ρ, V) 为完全可约的.

思考题 2.25. 试证明半单 Lie 代数的伴随表示是完全可约的. 试举例说明, 存在可解 Lie 代数, 其伴随表示不是完全可约的.

值得注意的是, 按照定义, 不可约表示都是完全可约的. 此外由定义可以看出, 如果一个 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示 V 是完全可约的, 则一定可以写成有限个不可约表示的直和. Lie 代数理论中一个非常重要的结果是 Weyl 定理, 这是说任何半单 Lie 代数的表示都是完全可约的. 本书不会证明一般情形, 但是我们将在后面讨论一下复半单和实半单 Lie 代数的情形. 下面给出表示之间的同态与同构的定义.

定义 2.8. 设 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的两个表示, ϕ 为由 V_1 到 V_2 的线性映射. 如果对任何 $x \in \mathfrak{g}, v \in V_1$ 有 $\phi(\rho_1(x, v)) = \rho_2(x, \phi(v))$, 则称 ϕ 为同态. 如果一个同态还是线性同构, 则称该同态为同构.

表示理论的一个核心研究课题就是 Lie 代数的表示在同构意义下的分类, 本书中将会涉及最基本的内容. 下面的 Schur 引理在研究 Lie 代数的表示中是一个强大的武器.

定理 2.24 (Schur 引理)**.** 设 $\mathfrak{g}$ 为代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, (ρ, V) 为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示, ϕ 为 (ρ, V) 到自身的同态, 则存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得 $\phi = \lambda \mathrm{id}$.

证明. 由于 $\mathbb{F}$ 是代数闭域, 因此 $\phi: V \to V$ 作为线性变换存在特征值 $\lambda \in \mathbb{F}$. 考虑 ϕ 的特征子空间

$$W = E_\lambda(\phi) = \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\},$$

则对任何 $x \in \mathfrak{g}$ 以及 $w \in W$, 有

$$\phi(\rho(x, w)) = \rho(x, \phi(w)) = \rho(x, \lambda w) = \lambda \rho(x, w).$$

这说明 $\rho(x, w) \in W$, 从而 W 是 V 的子模. 因 $W \neq 0$ 且不存在非平凡子模, 故 $W = V$. 因此 $\phi = \lambda \mathrm{id}$. ∎

最后我们介绍表示的张量积.

定理 2.25. 设 $(\rho_1, V), (\rho_2, W)$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的两个表示, $V \otimes W$ 为线性空间 V 和 W 的张量积. 定义 $\mathfrak{g} \times (V \otimes W)$ 到 $V \otimes W$ 的映射 $\rho_1 \otimes \rho_2$ 为

$$\rho_1 \otimes \rho_2(x, v \otimes w) = \rho_1(x, v) \otimes w + v \otimes \rho_2(x, w), \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V, w \in W, \tag{2.3}$$

而且

$$\rho_1 \otimes \rho_2(x, v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2) = \rho_1 \otimes \rho_2(x, v_1 \otimes w_1) + \rho_1 \otimes \rho_2(x, v_2 \otimes w_2), \quad v_i \in V, w_i \in W. \tag{2.4}$$

则 $(\rho_1 \otimes \rho_2, V \otimes W)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的表示, 称为表示 (ρ_1, V) 和 (ρ_2, W) 的张量积. 作为模一般简记

为 $V \otimes W$.

证明. 由于张量积 $V \otimes W$ 中任何元素都可以表示成形如 $v \otimes w$ $(v \in V, w \in W)$ 的元素的有限和, 因此由 (2.3) 和 (2.4) 可以唯一确定由 $\mathfrak{g} \times (V \otimes W)$ 到 $V \otimes W$ 的映射. 显然映射 $\rho_1 \otimes \rho_2$ 满足定义 2.5 中的条件 (1) 和 (2). 又对任何 $x, y \in \mathfrak{g}, v \in V, w \in W$, 有

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \otimes \rho_2([x, y], v \otimes w) \\
=&\rho_1([x, y], v) \otimes w + v \otimes \rho_2([x, y], w) \\
=&(\rho_1(x, \rho_1(y, v)) - \rho_1(y, \rho_1(x, v))) \otimes w + v \otimes (\rho_2(x, \rho_2(y, w)) - \rho_2(y, \rho_2(x, w))) \\
=&\rho_1(x, \rho_1(y, v)) \otimes w + v \otimes \rho_2(x, \rho_2(y, w)) - [\rho_1(y, \rho_1(x, v)) \otimes w + v \otimes \rho_2(y, \rho_2(x, w))] \\
=&\rho_1 \otimes \rho_2(x, \rho_1 \otimes \rho_2(y, v \otimes w)) - \rho_1 \otimes \rho_2(y, \rho_1 \otimes \rho_2(x, v \otimes w)).
\end{aligned}$$

由此我们容易看出 $\rho_1 \otimes \rho_2$ 满足定义 2.5 的条件 (3). 至此定理得证. ■

习题 2.6

1. 设 $(\rho_1, V), (\rho_2, W)$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的两个表示. 记 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 为所有由 V 到 W 的线性映射组成的集合, 则 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 上可以定义加法和纯量乘法使之成为线性空间. 定义 $\mathfrak{g} \times \mathrm{Hom}(V, W)$ 到 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 的映射
$$\rho(x, f)(v) = \rho_2(x, f(v)) - f(\rho_1(x, v)), \quad x \in \mathfrak{g}, f \in \mathrm{Hom}(V, W), v \in V.$$
试证明 $(\rho, \mathrm{Hom}(V, W))$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示.
2. 设 (ρ, V) 为特征为零的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, β 为 V 上的对称双线性函数. 称 β 为不变双线性型, 如果满足条件
$$\beta(\rho(x, v), w) + \beta(v, \rho(x, w)) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v, w \in V.$$
试证明, 如果 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示, 而且存在非退化的不变双线性型, 则在相差一个非零常数倍的意义下, 这样的非退化不变双线性型是唯一的.
3. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域, 前面我们已经证明 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ 是单 Lie 代数. 利用第 2 题的结论证明 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是 $B(x, y) = 2n\mathrm{tr}(xy)$.
4. 利用类似第 3 题的方法证明 $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ $(n \geq 3, n \neq 4)$ 的 Killing 型是 $B(x, y) = (n - 2)\mathrm{tr}(xy)$. 并直接证明上述结论对 $n = 4$ 也成立.
5. 证明 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ $(n \geq 3)$ 的 Killing 型是 $B(x, y) = 2(n + 1)\mathrm{tr}(xy)$.
6. 设 V 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的模, W 为 V 的子模. 试证明商空间 V/W 上存在 $\mathfrak{g}$-模的结构, 称为 V 对 W 的商模.

7. 设 ϕ 为 $\mathfrak{g}$-模 V 到 W 的满同态, $\ker\phi$ 为映射 ϕ 的核. 试证明 $\ker\phi$ 是 V 的子模, 而且商模 $V/\ker\phi$ 与 W 同构.
8. 设 V 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的模, V_1, V_2 为 V 的子模. 证明 $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子模, 而且 $(V_1 + V_2)/V_2$ 与 $V_1/(V_1 \cap V_2)$ 同构.

3 复半单 Lie 代数的 Dynkin 图

从现在开始我们主要考虑半单 Lie 代数的分类问题. 本章考虑复半单 Lie 代数的分类, 我们将介绍 Dynkin 图的理论. 粗略地说, 给定一个复半单 Lie 代数及其一个极大环面子代数, 我们都能构造出一个 Dynkin 图. 后面的章节我们将证明, 复半单 Lie 代数的 Dynkin 图与极大环面子代数的选取无关, 而且两个同构的复半单 Lie 代数一定会有相同的 Dynkin 图.

在研究复半单 Lie 代数的结构后, 我们将抽象出欧几里得空间中根系的概念, 并从抽象的角度来对根系进行研究. 特别地, 每一个根系都有一个 Dynkin 图与之对应, 我们将给出不可约根系的 Dynkin 图的完全分类, 而且给出这些 Dynkin 图的实现. 进一步, 后续内容将要证明, 在本章的分类定理中出现的任一图一定是某个复单 Lie 代数的 Dynkin 图; 而且如果两个复半单 Lie 代数具有相同的 Dynkin 图, 则这两个 Lie 代数一定同构. 因此本章的分类事实上也就给出了复半单 Lie 代数的分类. 值得注意的是, Dynkin 图以及半单 Lie 代数的分类理论在复数域上来考虑和在一般的特征为零的代数闭域上来考虑没有任何区别, 因此本章和后续章节的结果也给出了一般的特征为零的代数闭域上半单 Lie 代数的分类.

3.1 Casimir 元

半单 Lie 代数分类的一个重要技巧就是 Lie 代数的表示, 例如, 有关 3 维单 Lie 代数的表示的结果就在这里起着决定性的作用. 本节介绍与半单 Lie 代数表示密切相关的 Casimir 元的概念. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 n 维复半单 Lie 代数, (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的一个忠实表示, 定义 $\mathfrak{g}$ 上的双线性型

$$\beta(x, y) = \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)), \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

引理 3.1. *β 是 $\mathfrak{g}$ 上的不变双线性型, 且非退化.*

证明. 首先证明 β 是不变双线性型. 事实上, 对任意 $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\beta([x, y], z) &= \mathrm{tr}(\rho([x, y])\rho(z)) = \mathrm{tr}([\rho(x), \rho(y)]\rho(z)) \\ &= \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(y)\rho(x)\rho(z)) \\ &= \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(x)\rho(z)\rho(y)) \\ &= \mathrm{tr}(\rho(x)[\rho(y), \rho(z)]) = \mathrm{tr}(\rho(x)\rho([y, z])) \\ &= \beta(x, [y, z]).\end{aligned}$$

现在定义 $S = \{x \in \mathfrak{g} \mid \beta(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$. 由 β 的不变性知, S 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 下面证明 $\rho(S)$ 是可解的, 为此只需证明 $[\rho(S), \rho(S)] = \rho([S, S])$ 是幂零的. 设 $M_1 = [\rho(S), \rho(S)]$, $M_2 = \rho(S)$, 定义

$$M = \{W \in \mathfrak{gl}(V) \mid [W, M_2] \subseteq M_1\}$$

易知 $\rho(S) \subseteq M$. 又对任意 $x, y \in S$, 以及 $Z \in M$, 有

$$\mathrm{tr}(\rho([x, y])Z) = \mathrm{tr}(\rho(x)[\rho(y), Z]) = 0.$$

其中最后一步成立是因为 $[\rho(y), Z] \in M_1$. 由定理 2.15 证明过程中的结论 (即原书定理 0.1.8) 知 $\rho([x,y])$ 是幂零线性变换, 从而 $[\rho(S), \rho(S)]$ 是幂零 Lie 代数, 故 $\rho(S)$ 是可解 Lie 代数. 因为 ρ 是忠实表示, 由上面的证明知 S 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想, 进而 $S = 0$, 即 β 是非退化的. ∎

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 由引理 3.1 知, 存在 $\mathfrak{g}$ 的另一组基 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 使得

$$\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

定义 V 上的线性变换

$$c_\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\rho(y_i).$$

思考题 3.1. 试证明 c_ρ 与基的选取无关.

定理 3.2. 对任意的 $x \in \mathfrak{g}$,

$$c_\rho \rho(x) = \rho(x) c_\rho.$$

进一步, $\operatorname{tr}(c_\rho) = \dim \mathfrak{g}$. 特别地, 如果 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示, 则

$$c_\rho = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V} \mathrm{id}.$$

证明. 对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 令 $[x, x_i] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $[x, y_i] = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j$. 因为 $\beta([x, x_i], y_j) = -\beta(x_i, [x, y_j])$, 故 $a_{ij} = -b_{ji}$. 进而

$$[x, y_i] = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j.$$

由引理 3.1,

$$\begin{aligned}
[\rho(x), c_\rho] = \left[\rho(x), \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\rho(y_i)\right] &= \sum_{i=1}^{n} [\rho(x), \rho(x_i)\rho(y_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} ([\rho(x), \rho(x_i)]\rho(y_i) + \rho(x_i)[\rho(x), \rho(y_i)]) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\rho(x_j)\rho(y_i) + b_{ij}\rho(x_i)\rho(y_j)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

即 $c_\rho \rho(x) = \rho(x) c_\rho$. 此外

$$\operatorname{tr}(c_\rho) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\rho(y_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}(\rho(x_i)\rho(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, y_i) = \dim \mathfrak{g}.$$

进一步, 如果 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示, 则由 Schur 引理 (定理 2.24), $c_\rho = \lambda \mathrm{id}$. 故

$$\operatorname{tr}(c_\rho) = \lambda \dim V = \dim \mathfrak{g},$$

于是 $\lambda = \dfrac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V}$. ∎

> 注记 3.1. 我们将 c_ρ 称为表示 (ρ, V) 的 Casimir 元.

习题 3.1

1. 考虑 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的自然表示 $(\rho,\mathbb{C}^2)$ 的 Casimir 元 c_ρ, 直接验证 $c_\rho = \frac{3}{2}\mathrm{id}$.
2. 将上题推广到一般情形, 即计算 $\mathfrak{sl}(l,\mathbb{C})$ 的自然表示的 Casimir 元.
3. 试计算 $\mathfrak{sl}(l,\mathbb{C})$ 的伴随表示的 Casimir 元.
4. 设 (ρ, V) 为复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的非零模, 试证明 $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$ 而且 $\mathrm{tr}(\rho(x)) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$.
5. 设 ρ 是复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个非忠实表示, 则 $\ker\rho$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 从而是 $\mathfrak{g}$ 分解成单理想直和中的部分理想的直和. 设 $\mathfrak{g}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的分解中剩下的单理想的直和 (因此 $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{g}/\ker\rho$). 则 $\rho' = \rho|_{\mathfrak{g}'}$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的忠实表示, 因此可以定义 $(\mathfrak{g}', \rho')$ 的 Casimir 元 $c_{\rho'}$. 试证明 $c_{\rho'}\rho(x) = \rho(x)c_{\rho'}, \forall x \in \mathfrak{g}$. 以后也将 $c_{\rho'}$ 称为 (V,ρ) 的 Casimir 元.
6. (J. P. Serre) 设 V 为复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的模, V_1 为 V 的非平凡子模, 定义
$$H_0 = \{T \in \mathrm{Hom}(V, V_1) \mid T|_{V_1} = 0\};$$
$$H_1 = \{T \in \mathrm{Hom}(V, V_1) \mid \exists c \in \mathbb{C}, T|_{V_1} = c\,\mathrm{id}_{V_1}\}.$$
证明 H_0, H_1 都是 $\mathrm{Hom}(V, V_1)$ 的子模, 并证明, 如果存在 $T \in H_1$, 使得 $x \cdot T = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$, 且 $T|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}$, 则存在 V 的子模 V_2 使得 $V = V_1 \oplus V_2$.
7. 试证明: 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 V 是完全可约的, 当且仅当对于 V 的任何非平凡子模 V_1, 存在子模 V_2 使得 $V = V_1 \oplus V_2$.

3.2 Weyl 定理及其应用

前面我们提到, 半单 Lie 代数分类的一个重要工具就是 Lie 代数的表示理论. 本节我们给出表示理论中非常重要的 Weyl 定理, 这是复半单 Lie 代数表示理论中的最重要的定理之一, 我们还将给出该定理若干重要的应用.

为了证明 Weyl 定理, 我们先做一些准备工作.

引理 3.3. 设 (ρ, V) 为复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, W 为 V 的余维数为 1 的不可约子模, 则存在 V 的子模 W' 使得 $V = W \oplus W'$.

证明. 不妨设 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的忠实表示, 因为否则我们考虑 $\mathfrak{g}$ 对于 ρ 的核的商代数的表示即可. 因 W 是子模, 故商空间 V/W 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 但 $\dim V/W = 1$, 于是 V/W 为 $\mathfrak{g}$ 的平凡表示, 这说明 $\forall x \in \mathfrak{g}, \rho(x)(V) \subseteq W$. 设 c 为表示 (ρ, V) 的 Casimir 元, 则由定义, c 是形如 $\rho(x)(x \in \mathfrak{g})$ 的元素的乘积的线性组合, 从而 $c(V) \subseteq W$. 于是 c 导出商空间 V/W 上的一个线性变换 (仍记为 c), 因此 c 是 V/W 上的零变换. 另一方面, 由于 W 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约模, 由 Schur 引理, 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $c|_W = \lambda \mathrm{id}_W$. 我们断定 $\lambda \neq 0$, 因为否则就有 $\mathrm{tr}(c) = 0$, 与定理 3.2 的结论矛盾.

现在考虑 c 作为 V 上线性变换的核 $\ker c$, 则显然 $\ker c$ 是 V 的子模, 且 $\dim \ker c = 1$. 另一方面, 由上面的分析可知 $W \cap \ker c = 0$. 于是 $V = W \oplus \ker c$. 至此引理证毕. ■

下面的引理中去掉了 W 是不可约子模的条件.

引理 3.4. 设 (ρ, V) 为复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, W 为 V 的余维数为 1 的子模, 则存在 V 的子模 W' 使得 $V = W \oplus W'$.

证明. 对 $\dim W$ 的维数用归纳法, 若 $\dim W = 1$, 则 $\dim V = 2$. 注意到 $W, V/W$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的 1 维模, 故都是平凡模, 于是对任何 $x \in \mathfrak{g}, v \in V$, 有 $\rho(x)(v) \in W$. 从而对任何 $x, y \in \mathfrak{g}, v \in V$, 有 $\rho(x)\rho(y)(v) = 0$. 这说明 $\rho([x,y]) = 0$ 即 $\rho([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$. 但因 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数, 有 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. 因此 (ρ, V) 是平凡模, 结论自然成立.

现在假定结论对于 $\dim W \leq n-1$ 成立. 设 $\dim W = n$. 由引理 3.3, 我们只需对 W 为可约表示的情形来证明, 这时存在 W 的不可约子模 W_1, 使得 $0 < \dim W_1 < \dim W$. 于是商模 W/W_1 的维数 $\leq n-1$, 而且是商模 V/W_1 的子模. 注意到 $\dim(W/W_1) = \dim W - \dim W_1 = \dim V - 1 - \dim W_1 = \dim(V/W_1) - 1$, 由归纳假设, 存在 V/W_1 的子模 V_1/W_1 使得 $V/W_1 = W/W_1 \oplus V_1/W_1$. 这里 V_1 是 V 的子模, 且 $W_1 \subseteq V_1$. 因 $\dim V_1/W_1 = 1$, 故 W_1 在 V_1 中余维数为 1, 由归纳假设, 存在 V_1 的子模 W_2 使得 $V_1 = W_1 \oplus W_2$.

现在我们证明 $V = W \oplus W_2$. 事实上, 对任何 $v \in V$, 由 $V/W_1 = W/W_1 \oplus V_1/W_1$ 可知存在 $w_1 \in W, v_1 \in V_1$, 使得 $v + W_1 = (w_1 + W_1) + (v_1 + W_1)$, 即 $v - w_1 - v_1 \in W_1$. 另一方面, 由 $V_1 = W_1 \oplus W_2$, 存在 $w_1' \in W_1 \subset W, w_2 \in W_2$ 使得 $v_1 = w_1' + w_2$. 于是 $v - w_1 - w_1' - w_2 \in W_1 \subset W$, 从而 $v - w_2 \in W$. 这说明 $V = W + W_2$. 另一方面, 由 $V/W_1 = W/W_1 \oplus V_1/W_1$ 知 $W \cap V_1 \subseteq W_1$,

从而 $W \cap W_2 \subseteq W_1$, 故 $W \cap W_2 \subseteq W_1 \cap W_2 = 0$. 于是 $V = W \oplus W_2$. 故结论对于 $\dim W = n$ 也成立. 引理得证. ■

定理 3.5 (Weyl 定理)**.** 复半单 Lie 代数的有限维表示是完全可约的.

证明**.** 设 V 为复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, 如果 V 是不可约的, 结论已经成立. 若 V 可约, 则存在 V 的非平凡子模 V_1. 下面我们给出的证明事实上也给出了习题 3.1 第 6 题的一个解答. 我们分几步来证明, 定义

$$H_0 = \{T \in \mathrm{Hom}(V, V_1) \mid T|_{V_1} = 0\},$$

$$H_1 = \{T \in \mathrm{Hom}(V, V_1) \mid \exists c \in \mathbb{C}, T|_{V_1} = c\,\mathrm{id}_{V_1}\}.$$

(1) H_0, H_1 都是 $\mathfrak{g}$-模 $\mathrm{Hom}(V, V_1)$ 的子模, 且对任何 $x \in \mathfrak{g}, x(H_1) \subseteq H_0$. 事实上, 设 $f \in H_1$, 则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $f|_{V_1} = \lambda \mathrm{id}_{V_1}$, 于是对任何 $x \in \mathfrak{g}, v \in V_1$, 有 $(x \cdot f)(v) = x(f(v)) - f(x(v)) = x(\lambda v) - \lambda x(v) = 0$, 故 $x \cdot f \in H_0$.

(2) $\dim H_1/H_0 = 1$. 任取 V_1 在 V 中的补子空间 V_1' (不一定是子模), 定义 $f_1 : V \to V_1$, 使得 $f_1(v + v') = v, v \in V_1, v' \in V_1'$, 可知 $f_1 \in H_1, f_1 \notin H_0$. 此外, 若 $f_2 \in H_1$, 设 $f_2|_{V_1} = \lambda_2 \mathrm{id}_{V_1}$, 则显然 $f_2 - \lambda_2 f_1 \in H_0$. 故结论成立.

(3) 由引理 3.4, 存在 H_1 的维数为 1 的子模 H_1' 使得 $H_1 = H_0 \oplus H_1'$. 取定 H_1' 的一组基 g, 不妨设 $g|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}$. 考虑 g 作为线性空间 V 到 V_1 的线性映射的核 $\ker g$. 我们断定 $\ker g$ 是 V 的子模. 事实上, 对任何 $x \in \mathfrak{g}, u \in \ker g$, 因为 H_1' 是 H_1 的 1 维子模, 所以 $x \cdot g = 0$. 于是 $g(x(u)) = x(g(u)) - (x \cdot g)(u) = x(0) - 0 = 0$. 故结论成立.

(4) 任取 $v \in V$, 则 $g(v) \in V_1$. 因此 $g(v - g(v)) = g(v) - g(g(v)) = g(v) - g(v) = 0$, 故 $v - g(v) \in \ker g$. 故 $V = V_1 + \ker g$. 又若 $w \in V_1 \cap \ker g$, 则由 $g|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}$, $w = g(w) = 0$. 故 $V = V_1 \oplus \ker g$.

至此定理证毕. ■

注记 3.2. Weyl 定理最初是由 Weyl 用 Lie 群的方法证明的, 将 Lie 代数的表示化成 Lie 群的问题. 这个定理的证明相当于证明任何紧 Lie 群的有限维表示都是完全可约的, 而这可以由经典的 Weyl 酉技巧 (Weyl's Unitary Trick) 得到: 任何紧 Lie 群的有限维表示空间上都存在不变内积, 从而任何子模的正交补也是子模. 很显然, 这个证明方法不能推广到一般的域上. 本节给出的证明是 Serre 给出的, 这是一个纯代数的证明, 因此可以毫无困难地推广到任何特征为零的代数闭域上.

下面给出 Weyl 定理的一个应用. 回忆一下在预备知识中介绍过的 Jordan-Chevalley 分解定理: 如果 $\mathcal{A}$ 是有限维复线性空间上的线性变换, 则存在唯一的半单线性变换 $\mathcal{A}_s$ 和幂零

线性变换 $\mathcal{A}_n$ 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_n$, 且 $[\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_n] = \mathcal{A}_s\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{A}_s = 0$, 分别称 $\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_n$ 为 $\mathcal{A}$ 的半单部分和幂零部分. 现在我们进一步证明:

定理 3.6. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的复半单子代数, 其中 V 是有限维复线性空间, 则 $\mathfrak{g}$ 包含其任意元素的半单部分和幂零部分.

证明. 设 $x \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, 且 $x = x_s + x_n$ 是 x 的 Jordan-Chevalley 分解. 自然地, (id, V) 是 $\mathfrak{g}$-模. 对任意的 V 的 $\mathfrak{g}$-子模 W, 定义

$$\mathfrak{g}_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid y(W) \subset W, \mathrm{tr}(y|_W) = 0\}.$$

可以验证, $\mathfrak{g}_W$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数. 因为 $\mathfrak{g}$ 是半单的, 所以 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_W$, 因此 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g}_W)$ 是 $\mathfrak{g}$-模. 将 V 的所有子模组成的集合记为 $\mathcal{S}$. 定义

$$\mathfrak{g}' = N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) \cap \bigcap_{W \in \mathcal{S}} \mathfrak{g}_W.$$

容易看出, $x_s, x_n \in \mathfrak{g}'$ 且 $\mathfrak{g}'$ 是 $\mathfrak{g}$-模. 由 Weyl 定理, 存在 $\mathfrak{g}$-模 M 使得

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus M.$$

故 $[\mathfrak{g}, M] \subseteq \mathfrak{g} \cap M = 0$. 由 Weyl 定理, $\mathfrak{g}$-模 V 是完全可约的, 即可以分解成

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m,$$

其中 W_i 是 V 的 $\mathfrak{g}$ 不可约子模. 于是由 Schur 引理, 对任意 $y \in M$ 以及 W_i, 存在常数 λ_i, 使得 $y|_{W_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{W_i}$. 由 M 以及 $\mathfrak{g}'$ 的定义知 $y|_{W_i} = 0$. 故 $y|_V = 0$, 即 $y = 0$. 进而 $M = 0$ 且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. 因此, $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$. ∎

定理 3.6 中考虑的是复半单线性 Lie 代数的元素的 Jordan-Chevalley 分解. 对于一般的复半单 Lie 代数, 有下面的命题.

命题 3.7. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, 则对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 存在唯一确定的 $s, n \in \mathfrak{g}$ 使得 $x = s + n$, 其中 $[s, n] = 0$ 且 $\mathrm{ad}\, s$ 是半单的, $\mathrm{ad}\, n$ 是幂零的.

证明. 对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 令 $\mathrm{ad}\, x = (\mathrm{ad}\, x)_s + (\mathrm{ad}\, x)_n$ 是 $\mathrm{ad}\, x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的 Jordan-Chevalley 分解. 我们首先断定 $(\mathrm{ad}\, x)_s, (\mathrm{ad}\, x)_n \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, 这一结论的证明作为思考题留给读者. 由定理 2.19, 存在 $s, n \in \mathfrak{g}$ 使得

$$(\mathrm{ad}\, x)_s = \mathrm{ad}\, s, \quad (\mathrm{ad}\, x)_n = \mathrm{ad}\, n.$$

同时 $\mathrm{ad}\,[s, n] = [\mathrm{ad}\, s, \mathrm{ad}\, n] = [(\mathrm{ad}\, x)_s, (\mathrm{ad}\, x)_n] = 0$. 又因为 $\ker \mathrm{ad} = C(\mathfrak{g}) = 0$, 故 s, n 是唯一确定的, 且 $[s, n] = 0$. ∎

思考题 3.2. 对于复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的任意元素 x, 证明 $(\mathrm{ad}\, x)_s, (\mathrm{ad}\, x)_n \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

命题 3.7 中的分解 $x=s+n$ 称为 x 的抽象 Jordan-Chevalley 分解, s,n 分别称为 x 的半单部分和幂零部分.

思考题 3.3. 设 V 为复线性空间, $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的复半单子代数, 则对任意的 $x\in\mathfrak{g}$, x 有 Jordan-Chevalley 分解和抽象的 Jordan 分解. 试证明这两种分解是一致的.

最后我们证明一个有用的推论.

推论 3.8. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, (ρ,V) 是 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示. 如果 $x=s+n$ 是 $x\in\mathfrak{g}$ 的抽象的 Jordan 分解, 则 $\rho(x)=\rho(s)+\rho(n)$ 是 $\rho(x)$ 的 Jordan-Chevalley 分解.

证明. 首先, $\rho(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的半单子代数. 由 Jordan-Chevalley 分解和抽象的 Jordan 分解的一致性, 只需要证明 $\mathrm{ad}(\rho(x))=\mathrm{ad}(\rho(s))+\mathrm{ad}(\rho(n))$ 是 $\mathrm{ad}(\rho(x))$ 的 Jordan-Chevalley 分解, 即证明 $\mathrm{ad}(\rho(s))$ 半单, $\mathrm{ad}(\rho(n))$ 幂零, 且

$$[\mathrm{ad}(\rho(s)),\mathrm{ad}(\rho(n))]=0.$$

容易看出

$$[\mathrm{ad}(\rho(s)),\mathrm{ad}(\rho(n))]=\mathrm{ad}([\rho(s),\rho(n)])=\mathrm{ad}(\rho([s,n]))=0.$$

下证 $\mathrm{ad}(\rho(s))$ 半单. 考虑 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathrm{ad}\,s$ 的特征子空间分解

$$\mathfrak{g}=E_{\lambda_1}(\mathrm{ad}\,s)\oplus E_{\lambda_2}(\mathrm{ad}\,s)\oplus\cdots\oplus E_{\lambda_r}(\mathrm{ad}\,s).$$

其中 $E_{\lambda_i}(\mathrm{ad}\,s)=\{y\in\mathfrak{g}\mid \mathrm{ad}\,s(y)=\lambda_i y\}$. 对任意 $y\in E_{\lambda_i}(\mathrm{ad}\,s)$, 有

$$\mathrm{ad}(\rho(s))(\rho(y))=[\rho(s),\rho(y)]=\rho([s,y])=\lambda_i\rho(y).$$

因此, $\mathrm{ad}(\rho(s))$ 半单. 同理可以证明 $\mathrm{ad}(\rho(n))$ 幂零. ■

习题 3.2

1. 设 $\mathfrak{g}$ 为复数域上的可解 Lie 代数, 证明 $\mathfrak{g}$ 的任何不可约表示都是 1 维的.
2. 一个域上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为约化 Lie 代数, 如果它的根基 $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ 等于它的中心 $C(\mathfrak{g})$. 试证明: $\mathfrak{g}$ 是约化 Lie 代数当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示是完全可约的. 特别地, 若 $\mathfrak{g}$ 为约化 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 是 $C(\mathfrak{g})$ 和 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的理想直和: $\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})\oplus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, 而且若 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\neq 0$, 则 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是半单的.
3. 利用上题证明, 2.1 节给出的所有古典 Lie 代数都是半单的.
4. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的根基, 试证明 $[\mathfrak{r},\mathfrak{g}]$ 等于使得 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 为约化 Lie 代数的 $\mathfrak{g}$ 的最小理想 $\mathfrak{a}$.
5. 设 $\mathfrak{g}_1$ 为复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数, 且 $x\in\mathfrak{g}_1$. 试证明在 $\mathfrak{g}_1$ 中的 Jordan-Chevalley 分解和在 $\mathfrak{g}$ 中的 Jordan-Chevalley 分解是一致的.

3.3 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示

3 维复单 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示理论是复半单 Lie 代数分类的重要工具. 本节讨论 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维表示, 并给出有限维不可约表示的分类. 考虑 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一组基:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $[H,X]=2X, [H,Y]=-2Y, [X,Y]=H$. 设 (ρ,V) 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维表示, 因为 $\mathrm{ad}\,H$ 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 上的半单线性变换, 由推论 3.8 知, $\rho(H)$ 是 V 上的半单线性变换, 因此

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

其中, $V_{\lambda_i} = \{v \in V \mid \rho(H)(v) = \lambda_i v\}$. 现在我们给出一个定义.

定义 3.1. *如果 $V_\lambda \neq 0$, 则 λ 称为表示 (ρ,V) 的权, V_λ 称为属于权 λ 的权空间.*

设 $v \in V_\lambda$, 则

$$\begin{aligned}\rho(H)(\rho(X)(v)) &= [\rho(H),\rho(X)](v) + \rho(X)(\rho(H)(v)) \\ &= \rho([H,X])(v) + \lambda\rho(X)(v) \\ &= (\lambda+2)\rho(X)(v),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(H)(\rho(Y)(v)) &= [\rho(H),\rho(Y)](v) + \rho(Y)(\rho(H)(v)) \\ &= \rho([H,Y])(v) + \lambda\rho(Y)(v) \\ &= (\lambda-2)\rho(Y)(v).\end{aligned}$$

也就是说, 下面的引理成立:

引理 3.9. *若 $v \in V_\lambda$, 则 $\rho(X)(v) \in V_{\lambda+2}$ 且 $\rho(Y)(v) \in V_{\lambda-2}$.*

由此引理以及 V 是有限维的, 存在权 λ, 即 $V_\lambda \neq 0$, 使得

$$\rho(X)(v) = 0, \quad \forall v \in V_\lambda.$$

定义 3.2. *权空间 V_λ 中的非零向量 v 称为极大向量, 如果 $\rho(X)(v) = 0$.*

上面的讨论说明, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的任意有限维表示必存在极大向量. 由 Weyl 定理 (定理 3.5) 知, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维表示是完全可约的, 即任意有限维表示是不可约表示的直和, 因此 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维表示的研究归结于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示的研究. 下面的定理描述了 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示的结构.

定理 3.10. 假设 (ρ, V) 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示, $v_0 \in V_\lambda$ 是一个极大向量, 定义

$$v_{-1} = 0, \quad v_i = \frac{1}{i!}(\rho(Y))^i(v_0) \quad (i \geq 0).$$

则下面的结论成立:

(1) $\rho(H)(v_i) = (\lambda - 2i)v_i$;

(2) $\rho(Y)(v_i) = (i+1)v_{i+1}$;

(3) $\rho(X)(v_i) = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$;

(4) 令 $S = \{t \mid v_t \neq 0 \text{ 且} v_{t+1} = 0\}$, m 是集合 S 的最小整数, 则 $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ 线性无关, 且张成线性空间 V;

(5) $\lambda = m$. 即极大向量对应的权是整数 $\dim V - 1$, 称为 V 的最高权.

证明. 由引理 3.9 知, $v_i \in V_{\lambda-2i}$, 即 (1) 式成立. 因为

$$\rho(Y)(v_i) = \frac{1}{i!}(\rho(Y))^{i+1}(v_0) = (i+1)\frac{1}{(i+1)!}(\rho(Y))^{i+1}(v_0) = (i+1)v_{i+1},$$

因此 (2) 式成立. 下面用归纳法证明 (3) 式成立. 当 $i = 0$ 时, 等式显然成立. 假设 $i = k$ 时, 等式成立, 即 $\rho(X)(v_k) = (\lambda - k + 1)v_{k-1}$. 则当 $i = k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
(k+1)\rho(X)(v_{k+1}) &= \rho(X)(\rho(Y)(v_k)) \\
&= [\rho(X), \rho(Y)](v_k) + \rho(Y)(\rho(X)(v_k)) \\
&= \rho(H)(v_k) + (\lambda - k + 1)\rho(Y)(v_{k-1}) \\
&= (\lambda - 2k)v_k + k(\lambda - k + 1)v_k \\
&= (k+1)(\lambda - k)v_k.
\end{aligned}$$

这证明了 (3) 式成立.

下面我们证明 (4). 首先由 m 的取法知, 对任意的 $0 \leq i \leq m$, $v_i \neq 0$. 由 (1), v_i 是 $\rho(H)$ 的特征值为 $\lambda - 2i$ 的特征向量, 故由线性代数的知识, $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ 线性无关. 以 V_1 表示由 $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ 线性生成的 V 的子空间. 上面的讨论说明, V_1 是 V 的子表示, 且不为零. 因 (ρ, V) 是不可约表示, 故 $V_1 = V$.

最后, 在 (3) 中, 取 $i = m+1$, 则有

$$0 = \rho(X)(v_{m+1}) = (\lambda - (m+1) + 1)v_m.$$

因此, $\lambda = m$. 至此定理证毕. ∎

定理 3.10 给出了 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示的完全分类, 事实上, 可以证明:

定理 3.11. 设 (ρ, V) 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示, 则有:

(1) V 相对于 $\rho(H)$ 有权空间的直和分解:

$$V = V_m \oplus V_{m-2} \oplus \cdots \oplus V_{-m}$$

其中 $m = \dim V - 1$, 且每个权空间都是一维的;

(2) V 的极大向量在相差一个非零常数的意义下存在唯一, 其对应的权是 m.

这一定理的证明留给读者. 从这个定理我们看出, 对于任何正整数 m, 存在 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的不可约表示 (ρ, V), 使得 V 的维数为 $m+1$, 而且容易看出, 在同构意义下 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 m 维不可约表示是唯一的.

下面讨论 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一般的有限维表示. 设 (ρ, V) 为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维表示, 由 Weyl 定理, V 可以分解为

$$V = V^1 \oplus V^2 \oplus \cdots \oplus V^k$$

其中 V^i 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示. 于是由上面的讨论我们可以得到下面的结论.

推论 3.12. **(1)** $\rho(H) \in \mathfrak{gl}(V)$ 的特征值都是整数, 任意特征值的相反数也是特征值, 而且出现的次数相同.

(2) $k = \dim V_0 + \dim V_1$.

习题 3.3

1. 试证明复数域上的 3 维单 Lie 代数一定与 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 同构.
2. 将 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 看成 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的子代数

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}).$$

考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的伴随表示在 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 上的限制, 则 $\mathfrak{g}$ 可以看成一个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-模. 试将 $\mathfrak{g}$ 分解为不可约子模的直和.

3. 设 ρ 为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上的自然表示, 设 X_1, X_2 为 $\mathbb{C}^2$ 的一组基, 将这一表示利用导性: $x(fg) = x(f)g + fx(g)$, 自然扩充成 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上二元多项式集合 $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ 上的作用, 得到一个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ 上的表示, 仍记为 ρ. 试证明, 对任何 $m > 0$, 由所有 m 次齐次多项式组成的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的线性子空间构成的一个子表示, 而且该表示是不可约的, 最高权为 m. 这一表示给出了 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的最高权为 m 的不可约表示的实现, 因此也记为 $V(m)$.

4. 将上题的方法应用到 $\mathfrak{sl}(l,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^l$ 上的自然表示, 我们得到 $\mathfrak{sl}(l,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_l]$ 上的一个表示. 试证明由所有 $\mathbb{C}$ 上的 $m(m>0)$ 次齐次多项式构成的集合构成上述表示的一个子表示, 试问这一表示是否是 $\mathfrak{sl}(l,\mathbb{C})$ 的不可约表示?

5. 设 H, X, Y 为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的标准基, 试证明, 对于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的任何有限维表示 ρ, $\rho(H)$ 一定是半单线性变换, 而 $\rho(X), \rho(Y)$ 一定是幂零线性变换.

6. 设 H, X, Y 如上题, (ρ, V) 为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个表示 (可能是无穷维的), v 为 V 中的一个非零元素, 满足下面的条件:

(1) $\rho(X)v = 0$;

(2) 存在整数 $m \geq 1$ 使得 $\rho(Y)^m = 0$;

(3) 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\rho(H)v = \lambda v$.

试证明 λ 一定是一个整数.

7. 设 H, X, Y 如上题, (V, π) 为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个有限维表示, 满足条件:

(1) $\pi(H)$ 的任何特征根都是 1 重的;

(2) $\pi(H)$ 的任何两个特征根的差都是偶数.

试证明 (V, π) 一定是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的不可约表示.

8. 试将 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的不可约模 V_m, V_n 的张量积 $V_m \otimes V_n$ 分解成不可约子模的直和.

3.4 复半单 Lie 代数的根空间分解

本节我们研究复半单 Lie 代数的结构, 我们采用的方法是, 将 Lie 代数分解成若干相互交换的半单元在伴随作用下的公共特征子空间的直和. 回忆一下, 如果 V 是一个有限维复线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个半单线性变换, 则 V 可以写成 $\mathcal{A}$ 的特征子空间的直和. 如果 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 是两个交换的半单线性变换, 则 V 可以写成它们的公共特征子空间的直和. 现在设 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, $x = x_s + x_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的元素的抽象 Jordan 分解, 我们先证明:

引理 3.13. *存在 $x \in \mathfrak{g}$ 使得其抽象 Jordan 分解的半单部分 x_s 是非零的.*

证明. 事实上, 如果对任意 $x \in \mathfrak{g}$, $x_s = 0$, 即 $x = x_n$, 从而 $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_n$ 幂零, 则 $\mathfrak{g}$ 是 ad-幂零 Lie 代数. 由 Engel 定理 (定理 2.8), $\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数, 这和 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数矛盾. ■

这一引理引导我们给出下面的定义.

定义 3.3. *复半单 Lie 代数的子代数 $\mathfrak{h}$ 称为环面子代数, 如果对任意的 $x \in \mathfrak{h}$, $\operatorname{ad} x$ 是 $\mathfrak{g}$ 上半单线性变换. 一个环面子代数称为极大环面子代数, 如果它不真包含于另一个环面子代数.*

现在我们证明:

命题 3.14. *设 $\mathfrak{h}$ 是复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的环面子代数, 则 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, 即 $\mathfrak{h}$ 是交换 Lie 代数.*

证明. 因 $\mathfrak{h}$ 是复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 对任意的 $h \in \mathfrak{h}$, $[h, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, 故 $\mathfrak{h}$ 是 $\operatorname{ad} h$ 的不变子空间. 又因 $\operatorname{ad} h$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的半单线性变换, 故 $\operatorname{ad} h$ 是 $\mathfrak{h}$ 上的半单线性变换. 假设 $h' \in \mathfrak{h}$ 是 $\operatorname{ad} h$ 的任意特征向量, 即存在 $a \in \mathbb{C}$, 使得 $\operatorname{ad} h(h') = ah'$. 则有

$$(\operatorname{ad} h')^2(h) = \operatorname{ad} h'(\operatorname{ad} h'(h)) = -\operatorname{ad} h'(ah') = 0.$$

另一方面, $\operatorname{ad} h'$ 也是 $\mathfrak{h}$ 上的半单线性变换, 故相对于 $\operatorname{ad} h'$ 也有特征子空间分解

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_{\lambda_k}$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 是非零特征值. 设 $h = h_0 + h_1 + \cdots + h_k$ 是 h 相对于上式的分解, 则由上面的结论我们得到

$$0 = (\operatorname{ad} h')^2(h) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 h_i.$$

故 $h = h_0$, 即 $\operatorname{ad} h(h') = 0$. 注意到 $\mathfrak{h}$ 中任何元素都是 $\operatorname{ad} h$ 的特征向量的线性组合, 因此 $[h, \mathfrak{h}] = 0$. 由 h 的任意性, $\mathfrak{h}$ 是交换 Lie 代数. 至此命题证毕. ■

取定 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数 $\mathfrak{h}$. 因为 $\mathfrak{h}$ 是交换的, 所以对任意的 $h, h' \in \mathfrak{h}$,

$$\operatorname{ad} h \cdot \operatorname{ad} h' - \operatorname{ad} h' \cdot \operatorname{ad} h = [\operatorname{ad} h, \operatorname{ad} h'] = \operatorname{ad}\,[h, h'] = 0.$$

故 $\{\operatorname{ad} h\}_{h \in \mathfrak{h}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上一族两两交换的半单线性变换. 由线性代数的知识, $\mathfrak{g}$ 相对于这一族线性变换, 有公共的特征子空间分解:

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha.$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$. 特别地, $\mathfrak{g}_0 = C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \supset \mathfrak{h}$.

定义 3.4. 集合 $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*, \alpha \neq 0 \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的根系, Φ 中的元素称为 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的根.

由上面的分析, 可以得到下列性质:

(1) 对任何 $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ 有 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. 特别地, 对任意 $\alpha \in \Phi$ 及 $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\operatorname{ad} x$ 是幂零的.

(2) 如果 $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ 且 $\alpha + \beta \neq 0$, 则 $B(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$, 其中 B 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 特别地, B 在 $\mathfrak{g}_0$ 上的限制是非退化的.

思考题 3.4. 证明上面的性质.

现在我们进一步研究 $\mathfrak{g}_0 = C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ 的性质. 首先, 对任意 $x \in C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$, 若 $x = s + n$ 是 x 的抽象 Jordan 分解, 则 $s, n \in C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$. 由于 $\operatorname{ad} s$ 是半单的, 且 $[s, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{h}$, 因此 $\mathfrak{h}$ 和 s 线性张成一个环面子代数, 再由 $\mathfrak{h}$ 的极大性知 $s \in \mathfrak{h}$. 这说明 $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ 上的线性变换 $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} n$ 是幂零线性变换. 由 Engel 定理, $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ 是幂零 Lie 代数.

接下来我们证明 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{h}$ 上的限制是非退化的. 事实上, 假设存在 $h \in \mathfrak{h}$ 使得

$$B(h, h') = 0, \quad \forall h' \in \mathfrak{h},$$

则由 $[h, n] = 0$, 即 $\operatorname{ad}[h, n] = [\operatorname{ad} h, \operatorname{ad} n] = 0$, 可得 $\operatorname{ad} h \cdot \operatorname{ad} n$ 是幂零线性变换, 故

$$B(h, n) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} h \cdot \operatorname{ad} n) = 0.$$

因此 $B(h, y) = 0, \forall y \in C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$. 由 B 在 $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ 上的限制非退化知 $h = 0$. 这就证明了我们的断言.

对任意的 $h \in \mathfrak{h}, y, y' \in C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$, $B(h, [y, y']) = B([h, y], y') = 0$. 由于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{h}$ 上的限制非退化, 有

$$\mathfrak{h} \cap [C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}), C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})] = 0.$$

如果 $[C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}), C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})] \neq 0$, 则存在 $0 \neq z \in C(C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})) \cap [C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}), C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})]$. 设 $z = z_s + z_n$ 是 z 的抽象 Jordan 分解, 则 $0 \neq z_n \in C(C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}))$. 因此, 对任意的 $y \in C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$,

$$B(z_n, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_n \cdot \operatorname{ad} y) = 0$$

最后一个等式成立是因为 $[\operatorname{ad} z_n, \operatorname{ad} y] = \operatorname{ad}[z_n, y] = 0$ 以及 $\operatorname{ad} z_n$ 幂零. 由 B 在 $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ 上的限制非退化知 $z_n = 0$. 这是不可能的, 因而 $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ 是交换 Lie 代数.

最后, 对任意的 $y \in C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$, 我们有 $[n, y] = 0$, 因此 $[\operatorname{ad} n, \operatorname{ad} y] = 0$, 进而

$$B(n, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} n \cdot \operatorname{ad} y) = 0.$$

由于 B 在 $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ 上的限制非退化, 故 $n = 0$.

上面的结论总结起来就得到下面的定理.

定理 3.15. $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

定义 3.5. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数, 则 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{3.1}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解.

思考题 3.5. 证明对任意的 $\beta \in \mathfrak{h}^*$, 存在唯一的 $t_\beta \in \mathfrak{h}$ 使得 $\beta(h) = B(t_\beta, h), \forall h \in \mathfrak{h}$.

现在我们来进一步研究 Lie 代数的根子空间分解. 我们将根子空间分解的基本性质写成一些引理和推论. 首先我们证明:

引理 3.16. 对任意 $\alpha \in \Phi$, 有 $-\alpha \in \Phi$, 且 $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.

证明. 首先注意, 因为对任何 $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$, 只要 $\alpha + \beta \neq 0$, 就有 $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$. 由 B 在 $\mathfrak{g}$ 上的非退化性可知, 对任何 $\alpha \in \Phi$, $-\alpha \in \Phi$.

现在证明第二个结论, 采用反证法. 反设 $\alpha(t_\alpha) = 0$. 则对任意 $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 有

$$[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y].$$

取 $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得 $B(x, y) = 1$, 则 $[x, y] = t_\alpha$. 容易验证 $\{x, y, t_\alpha\}$ 是 3 维可解 Lie 代数, 且 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 是此 Lie 代数的表示. 由 Lie 定理以及 $[x, y] = t_\alpha$ 可以看出 $\mathrm{ad}\, t_\alpha$ 是幂零的. 另一方面, $\mathrm{ad}\, t_\alpha$ 又是半单线性变换, 故 $\mathrm{ad}\, t_\alpha = 0$, 即 $t_\alpha \in C(\mathfrak{g})$. 这与 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数矛盾. ∎

引理 3.17. 对任意 $\alpha \in \Phi, x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 有 $[x, y] = B(x, y) t_\alpha$.

证明. 设 $\alpha \in \Phi$. 对任意 $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, h \in \mathfrak{h}$,

$$B(h, [x, y]) = B([h, x], y) = \alpha(h) B(x, y) = B(h, t_\alpha) B(x, y) = B(h, B(x, y) t_\alpha).$$

由于 B 限制在 $\mathfrak{h}$ 上是非退化的, 且 $[x, y] \in \mathfrak{h}$, 故 $[x, y] = B(x, y) t_\alpha$. ∎

引理 3.18. 在根子空间分解 (3.1) 中, 对任何 $\alpha \in \Phi$, 有 $-\alpha \in \Phi$, 而且 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

证明. 由引理 3.16 看出, 存在 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得 $B(x_\alpha, y_\alpha) = 1$. 假定存在 $\alpha \in \Phi$, 使得 $\dim \mathfrak{g}_\alpha \geq 2$, 则存在 $z \in \mathfrak{g}_\alpha, z \neq 0$ 使得 $B(z, y_\alpha) = 0$. 记 $z_{-1} = 0$, $z_n = (\mathrm{ad}\, x_\alpha)^n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

我们先用归纳法证明

$$[y_\alpha, z_n] = -\frac{n(n+1)}{2} \alpha(t_\alpha) z_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

由引理 3.17, 当 $n=0$ 时结论成立. 若结论对于 n 成立, 则由 $z_n \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha}$, 得到

$$\begin{aligned}
[y_\alpha, z_{n+1}] &= [y_\alpha, [x_\alpha, z_n]] = [[y_\alpha, x_\alpha], z_n] + [x_\alpha, [y_\alpha, z_n]] \\
&= [-B(y_\alpha, x_\alpha)t_\alpha, z_n] + \left[x_\alpha, -\frac{n(n+1)}{2}\alpha(t_\alpha)z_{n-1}\right] \\
&= -(n+1)\alpha(t_\alpha)z_n - \frac{n(n+1)}{2}\alpha(t_\alpha)z_n \\
&= -\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha(t_\alpha)z_n.
\end{aligned}$$

这就证明了结论对于 $n+1$ 成立. 至此证明了我们的断言.

现在由上面的结论和引理 3.16 我们看出, 对任何 $n \geq 0$ 都有 $z_n \neq 0$. 但这与 $\operatorname{ad} x_\alpha$ 是一个幂零线性变换矛盾, 至此引理得证. ■

引理 3.19. *在根子空间分解 (3.1) 中, $\mathfrak{h}$ 的对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 可由 Φ 中元素线性张成.*

证明. 事实上, 如果 Φ 线性张成的线性空间不等于 $\mathfrak{h}^*$, 则存在 $h \in \mathfrak{h}$, $h \neq 0$ 使得 $\alpha(h) = 0$, $\forall \alpha \in \Phi$. 于是 $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$, $\forall \alpha \in \Phi$. 另一方面, 因 $\mathfrak{h}$ 交换, 又有 $[h, \mathfrak{h}] = 0$, 因此 $[h, \mathfrak{g}] = 0$. 这与 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数矛盾. ■

推论 3.20. *对任意 $\alpha \in \Phi$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 是 $\mathfrak{h}$ 中的 1 维线性子空间, 且 t_α 是其一组基.*

证明. 由引理 3.18, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$, 故 $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \leq 1$. 于是由引理 3.17 以及 B 的非退化性可得本推论. ■

引理 3.21. *对任意 $\alpha \in \Phi$, 以及非零的 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 存在 $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得 x_α, y_α, 而且 $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ 线性张成 $\mathfrak{g}$ 的 3 维复单李子代数.*

证明. 设 $\alpha \in \Phi$. 对任意 $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 存在 $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 满足条件 $B(x_\alpha, y_\alpha) = \dfrac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)}$. 记 $h_\alpha = \dfrac{2t_\alpha}{B(t_\alpha, t_\alpha)}$. 容易验证:

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \quad [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha, \quad [x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha.$$

故 $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$ 线性张成 $\mathfrak{g}$ 的 3 维复单李子代数. ■

由上面的证明过程容易得到下面的推论.

推论 3.22. $h_\alpha = -h_{-\alpha} = \dfrac{2t_\alpha}{B(t_\alpha, t_\alpha)}$.

总结上面的结论我们得到这样的事实: 对任意 $\alpha \in \Phi$, 存在 $\mathfrak{g}$ 的 3 维复单李子代数使得该子代数有一组基 $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$ 满足 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $h_\alpha \in \mathfrak{h}$, 且 $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha, [x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. 特别地, 这个 3 维单 Lie 代数同构于 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. 这就使得利用 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示理论进一步研究复半单 Lie 代数的结构成为可能. 方便起见, 今后用 S_α 表示由 $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$ 线性张成的 3 维复单 Lie 代数.

现在我们利用 3 维单 Lie 代数的表示理论来研究一般半单 Lie 代数的进一步性质. 下面的结论是非常重要的.

定理 3.23. 若 $\alpha \in \Phi$, $c \in \mathbb{C}$ 且 $c\alpha \in \Phi$, 则 $c = \pm 1$.

证明. 对任意 $\alpha \in \Phi$, 定义

$$M = \mathfrak{h} \oplus \sum_{c\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{c\alpha}.$$

则 (ad, M) 是 S_α 的表示, 且表示的权是 0 和 $2c = c\alpha(h_\alpha)$. 因 3 维单 Lie 代数的有限维表示的权都是整数, 故 c 是 $\frac{1}{2}$ 的非零整数倍. 因为 M 中 0 权的重数是 $\dim \mathfrak{h}$, 而子模

$$\ker \alpha \oplus S_\alpha \subset M$$

是 $\dim \mathfrak{h}$ 个含 0 权的不可约表示的直和, 而且 0 权的重数也是 $\dim \mathfrak{h}$, 故 $\ker \alpha \oplus S_\alpha$ 包含了 M 的所有含 0 权的不可约子模. 这说明 M 中的偶数权只能是 $0, \pm 2$. 因此, 2α 不是根. 进而 $\frac{1}{2}\alpha$ 也不是根, 因为否则与 $\alpha = 2(\frac{1}{2}\alpha)$ 是一个根矛盾. 这说明 $1 = \frac{1}{2}\alpha(h_\alpha)$ 不是权, 由此我们得到 $M = \ker \alpha \oplus S_\alpha$. 故只有当 $c = \pm 1$ 时, $c\alpha \in \Phi$. 定理证毕. ■

最后, 对任意 $\alpha, \beta \in \Phi$, 且 $\beta \neq \pm\alpha$, 定义

$$K = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + i\alpha}.$$

容易验证 (ad, K) 是 S_α 的表示, 表示的权为 $\beta(h_\alpha) + 2i$. 因为这些整数的奇偶性是一致的, 所以在表示 (ad, K) 中 0 权或 1 权只能出现一次. 又因为 $\dim \mathfrak{g}_\gamma = 1, \forall \gamma \in \Phi$, 所以 (ad, K) 是 S_α 的不可约表示.

总结上面的结论, 我们得到

定理 3.24. **(1)** 如果 $\alpha, \beta \in \Phi$, 则 $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$. 称 $\beta(h_\alpha)$ 为 Cartan 整数.

(2) 设 $\alpha, \beta \in \Phi$ 且 $\beta \neq \pm\alpha$. 以 r, q 分别表示使得 $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha$ 是根的最大整数, 则对任意 $-r \leq i \leq q$, $\beta + i\alpha \in \Phi$, 且 $\beta(h_\alpha) = r - q$. 由根 $\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + q\alpha$ 构成的链称为 α 过 β 的 α-链. 特别地, $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.

(3) 若 $\alpha, \beta \in \Phi$, 且 $\alpha + \beta \in \Phi$, 则 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

习题 3.4

1. 试证明 $\mathfrak{sl}(l, \mathbb{C})(l \geq 2)$ 中的所有对角矩阵构成 $\mathfrak{sl}(l, \mathbb{C})$ 的一个极大环面子代数 $\mathfrak{h}$, 并写出 $\mathfrak{sl}(l, \mathbb{C})$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根系, 以及 $\mathfrak{sl}(l, \mathbb{C})$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解.

2. 试证明 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的任何极大环面子代数都是 1 维的.

3. 试找出 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的一个极大环面子代数 $\mathfrak{h}_1$, 使得 $\mathfrak{h}_1$ 中任何一个元素都不是对角矩阵.

4. 试证明不存在 4, 5 维或 7 维的复半单 Lie 代数.

5. 试证明 8 维的复半单 Lie 代数一定是单 Lie 代数.

6. 试构造一个 6 维和一个 9 维的复半单 Lie 代数, 这样的 Lie 代数可以是单的吗?

7. 试给出维数不大于 11 的复半单 Lie 代数的分类.

8. 设 $\mathfrak{h}$ 为复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数, Φ 为 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的根系, 对于 $\alpha\in\Phi$, 取定 $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha, e_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得 $B(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$. 若 $\alpha,\beta\in\Phi$ 且 $\alpha+\beta\neq 0$, 定义 $N_{\alpha,\beta}\in\mathbb{C}$ 使得

(1) $[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta}$, 若 $\alpha+\beta\in\Phi$;

(2) $N_{\alpha,\beta}=0$, 若 $\alpha+\beta\notin\Phi$.

试证明:

(1) $N_{\alpha,\beta}=-N_{\beta,\alpha}$;

(2) 若 $\alpha,\beta,\gamma\in\Phi$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, 则 $N_{\alpha,\beta}=N_{\beta,\gamma}=N_{\gamma,\alpha}$.

9. 设 $\mathfrak{g},\mathfrak{h},\Phi,N_{\alpha,\beta}$ 如上题. 现设 $\alpha,\beta\in\Phi$, 且 $\alpha+\beta\in\Phi$. 又 $\beta+s\alpha\ (-p\leq s\leq q)$ 是 α 过 β 的根链, 试证明

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta}=-\frac{q(p+1)}{2}\alpha(t_\alpha).$$

10. 设 $\mathfrak{g},\mathfrak{h},\Phi,N_{\alpha,\beta}$ 如上, 设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Phi$, 且其中任何两个相加都不为 0, 而且 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$. 试证明

$$N_{\alpha,\beta}N_{\gamma,\delta}+N_{\beta,\gamma}N_{\alpha,\delta}+N_{\gamma,\alpha}N_{\beta,\delta}=0.$$

3.5 复半单 Lie 代数的根系

本节我们研究复半单 Lie 代数的根系的结构及其主要性质. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解, 定义 $\mathfrak{h}^*$ 上的一个双线性型为

$$(\gamma,\delta)=B(t_\gamma,t_\delta),\quad \gamma,\delta\in\mathfrak{h}^*.$$

思考题 3.6. 证明 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 上对称、非退化的双线性型.

特别地, 对任意 $\alpha,\beta\in\Phi$, 有

$$\alpha(h_\beta)=B(t_\alpha,h_\beta)=\frac{2B(t_\alpha,t_\beta)}{B(t_\beta,t_\beta)}=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}.$$

在 Φ 中取 $\mathfrak{h}^*$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$, 则任意 $\beta\in\Phi$ 都可以表示成 $\beta=\sum_{i=1}^{l}c_i\alpha_i$, 其中 $c_i\in\mathbb{C}$. 进而对任意的 $1\le j\le l$,

$$\frac{2(\beta,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\sum_{i=1}^{l}c_i\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}.$$

这说明 $c_1,c_2,\ldots,c_l$ 是一个整系数的线性方程组的解, 故 $c_i\in\mathbb{Q}$. 设 E 为由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l\}$ 生成的实线性空间, 则 $\Phi\subset E$ 而且

$$(\beta,\beta)=B(t_\beta,t_\beta)=\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(t_\beta)\alpha(t_\beta)=\sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha,\beta)^2.$$

等式两边同时除以 $(\beta,\beta)^2$ 可得 $(\beta,\beta)\in\mathbb{Q}$, 进而 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}$, 而且 $(\beta,\beta)=0$ 当且仅当 $(\alpha,\beta)=0,\forall\alpha\in\Phi$, 当且仅当 $\beta=0$. 这证明了下面的定理.

定理 3.25. 双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 是实线性空间 E 上的一个内积.

现在从复半单 Lie 代数的根系的基本性质中我们抽象出欧几里得空间中一般的根系的概念.

定义 3.6. 设 Φ 是欧几里得空间 $(E,(\cdot,\cdot))$ 中的一个由非零元素组成的有限子集, 称 Φ 为 $(E,(\cdot,\cdot))$ 中的一个根系, 如果它满足下面四个条件:

(1) Φ 线性张成 E;

(2) 若 $\alpha\in\Phi$, $c\in\mathbb{R}$, 则 $c\alpha\in\Phi$ 当且仅当 $c=\pm1$;

(3) 对任何 $\alpha\in\Phi$, 若 σ_α 为由 α 决定的镜面反射, 则 $\sigma_\alpha(\Phi)=\Phi$;

(4) 对任何 $\alpha,\beta\in\Phi$, $\langle\beta,\alpha\rangle=\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}$.

回忆一下, 由 α 决定的镜面反射 σ_α 是

$$\sigma_\alpha(\gamma)=\gamma-\frac{2(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\quad \gamma\in E.$$

由上面的定义以及复半单 Lie 代数的性质容易看出, 任何复半单 Lie 代数相对于一个极大环面子代数的根系构成一个由根系中元素实线性生成的欧几里得空间中抽象意义下的根系. 下面我们将从抽象的层面对根系的性质进行全面的研究.

定义 3.7. 一个根系 Φ 称为不可约的, 如果 Φ 不能表示成为 Φ 的两个互相正交的非空真子集的并.

定义 3.8. 设 Φ 为一个根系, Φ 的一个子集 Δ 称为 Φ 的基, 如果

(1) Δ 是 E 的基;

(2) 任意 $\beta \in \Phi$ 都可以表示成 $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$, 其中 k_α 为同时非正或同时非负的整数.

下面我们来证明每一个根系都存在一个基.

记 $P_\alpha = \{h \in E \mid (h, \alpha) = 0\}$. 由线性代数的知识可知 (参看文献 [1]), $E \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$ 不是空集.

定义 3.9. 一个 E 中元素 γ 称为正则元, 如果 $\gamma \notin \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$. 取定一个正则元 γ, 定义

$$\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}.$$

则显然有 $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$, 以下记 $\Phi^-(\gamma) = -\Phi^+(\gamma)$. $\Phi^+(\gamma)$ 中一个元素 α 称为可分解的, 如果存在 $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ 使得

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2,$$

否则称为不可分解的. 以 $\Delta(\gamma)$ 表示 $\Phi^+(\gamma)$ 中不可分解的根的全体.

下面我们证明 $\Delta(\gamma)$ 是 Φ 的一个基. 先证明 $\Phi^+(\gamma)$ 中的根是 $\Delta(\gamma)$ 中元素的非负整线性组合. 否则, 集合 $S = \{\alpha \in \Phi^+(\gamma) \mid \alpha\ 不是\Delta(\gamma)\ 中元素的非负整线性组合\}$ 是非空的. 于是存在 $\beta \in S$ 使得 (γ, β) 达到最小. 由 S 的定义, $\beta \notin \Delta(\gamma)$, 因此存在 $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ 使得

$$\beta = \beta_1 + \beta_2.$$

容易看出, β_1, β_2 中至少有一个属于 S. 不妨假设 $\beta_1 \in S$, 于是

$$(\gamma, \beta) = (\gamma, \beta_1 + \beta_2) > (\gamma, \beta_1),$$

这与 β 的取法矛盾, 因此结论成立.

接下来证明 $\Delta(\gamma)$ 是线性无关组. 我们将证明分成两步:

1) 如果 $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ 且 $\alpha \neq \beta$, 则 $(\alpha, \beta) \leq 0$. 若不然, 则 $(\alpha, \beta) > 0$. 考虑 α 过 β 的 α-链. 由 Cauchy 不等式

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \cdot \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} < 4,$$

因此正整数 $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}, \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 中至少有一个为 1, 不妨设 $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 1$. 则 $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta - \alpha \in \Phi$. 于是 $\alpha - \beta \in \Phi$. 如果 $\alpha - \beta \in \Phi^+(\gamma)$, 则 $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$; 如果 $\alpha - \beta \in \Phi^-(\gamma)$, 则 $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$, 故 $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$. 但这与 $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ 矛盾.

2) $\Delta(\gamma)$ 是线性无关组. 假设存在不全为零的 $r_\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} r_\alpha \alpha = 0$. 将上述等式里系数是负数的项移到等式的右边, 这样上式可以重写为

$$\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta, \quad s_\alpha, t_\beta > 0.$$

因此

$$\left(\sum s_\alpha \alpha, \sum s_\alpha \alpha\right) = \left(\sum s_\alpha \alpha, \sum t_\beta \beta\right) = \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \le 0.$$

故 $\sum s_\alpha \alpha = 0$. 因此

$$0 = \left(\gamma, \sum s_\alpha \alpha\right) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha).$$

这说明 $s_\alpha = 0$. 同理 $t_\beta = 0$. 但是这与 r_α 不全为零矛盾, 因此 $\Delta(\gamma)$ 是线性无关组.

最后, 由 $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ 知 $\Delta(\gamma)$ 是 Φ 的基. 至此我们证明了根系的基的存在性.

定义 3.10. 设 Φ 为欧几里得空间 $(E, (\cdot,\cdot))$ 中的一个根系, Δ 为 Φ 的一个基. 称 Δ 中的根为单根, 定义 $\operatorname{ht}\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha$ 称为根的高度. 若 $\operatorname{ht}\beta > 0$ 则称 β 为正根; 若 $\operatorname{ht}\beta < 0$, 则称 β 为负根. 正根的全体记为 Φ^+, 负根的全体记为 Φ^-. 称 Δ 是不可约的, 如果 Δ 不能分为 Δ 的两个相互正交的非空真子集的并.

显然, 一个根为正根或负根, 以及根的高度和 Δ 的选取有关. 现在我们证明下面的定理.

> **定理 3.26.** 若 $\gamma \in E$ 是正则元, 则 $\Delta(\gamma)$ 是 Φ 的基. 而且 Φ 的任意一组基都可以通过这种方法得到.

证明. 第一个结论已经证明. 下面我们证明后一个结论, 设 Δ 是 Φ 的基, 则存在 $\gamma \in E$ 使得 $(\gamma, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta$ (见下面的思考题). 由基的定义, $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$ 及 $\Phi^- \subset \Phi^-(\gamma)$. 故 $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ 及 $\Phi^- = \Phi^-(\gamma)$. 由此知 $\Delta \subset \Delta(\gamma)$, 即 $\Delta = \Delta(\gamma)$. ■

思考题 3.7. 证明存在 $\gamma \in E$ 使得 $(\gamma, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta$.

命题 3.27. 设 Φ 是欧几里得空间 E 中的根系, Δ 是 Φ 的基. 若 $\alpha \in \Phi^+$ 且 $\alpha \notin \Delta$, 则存在 $\beta \in \Delta$ 使得 $\alpha - \beta \in \Phi^+$.

证明. 我们先说明, 存在 $\beta \in \Delta$ 使得 $(\alpha, \beta) > 0$. 事实上, 如果 $(\alpha, \beta) \le 0, \forall \beta \in \Delta$, 那么用证明 $\Delta(\gamma)$ 是线性无关组的方法同样可以证明 $\Delta \cup \{\alpha\}$ 线性无关, 这与基的定义矛盾. 因此断言成立. 利用 α 过 β 的链, 我们得到 $\alpha - \beta \in \Phi$. 再由基的定义知 $\alpha - \beta \in \Phi^+$. ■

> **注记 3.3.** 由命题 3.27, 对任意的 $\beta \in \Phi^+$, 存在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Delta$ 使得 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i \in \Phi^+, \forall 1 \le i \le k$.

命题 3.28. 设 Φ 是欧几里得空间 E 中的根系, Δ 是 Φ 的基. 则 Φ 不可约当且仅当 Δ 不可约.

证明. “$\Leftarrow$”假设 Φ 的子集 Φ_1, Φ_2 满足 $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ 且 $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. 因为 Δ 不可约, 所以 $\Delta \subset \Phi_1$ 或 $\Delta \subset \Phi_2$. 对应地, Φ_2 是空集或 Φ_1 是空集, 即 Φ 不可约.

“$\Rightarrow$”否则, 存在 Δ 的非空真子集 Δ_1, Δ_2 使得 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ 且 $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. 定义 $\Phi_i = \Phi \cap L(\Delta_i)$. 易知, $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. 下面证明 $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. 只需要证明正根的情形. 首先, 如果 $\operatorname{ht}\alpha = 1$, 即 $\alpha \in \Delta$, 结论成立. 假设当 $\operatorname{ht}\alpha = n$ 时, $\alpha \in \Phi_1 \cup \Phi_2$. 当 $\operatorname{ht}\alpha = n+1$ 时, 存在 $\alpha_i \in \Delta$ 使得 $\alpha - \alpha_i$ 是高度为 n 的正根. 由归纳假设, 不妨假设 $\alpha - \alpha_i \in \Phi_1$. 如果 $\alpha_i \in \Delta_2$, 则 $(\alpha - \alpha_i, \alpha_i) = 0$. 考虑过 $\alpha - \alpha_i$ 的 α_i-链, 由 $\alpha \in \Phi$ 知 $(\alpha - \alpha_i) - \alpha_i \in \Phi$. 这和基的定义矛盾, 故 $\alpha_i \in \Delta_1$. 进而 $\alpha \in \Phi_1$. 故结论成立. ■

命题 3.29. 设 Φ 是复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的根系, 则 $\mathfrak{g}$ 是单 Lie 代数当且仅当 Φ 不可约.

证明. “$\Rightarrow$”假设 Φ 的非空真子集 Φ_1, Φ_2 满足 $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ 且 $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. 令 $\mathfrak{h}_i$ 表示由 $\{t_{\alpha_j} \mid \alpha_j \in \Phi_i\}$ 线性张成的 $\mathfrak{h}$ 的子空间, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i \oplus \sum_{\alpha\in\Phi_i} \mathfrak{g}_\alpha$. 作为线性空间, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. 进一步, 对任意 $\alpha_1, \beta_1 \in \Phi_1, \alpha_2, \beta_2 \in \Phi_2$, 则有: (1) 若 $\alpha_i + \beta_i \in \Phi$, 则必有 $\alpha_i + \beta_i \in \Phi_i$. 只需对 $i = 1$ 证明. 若不然, 假设 $\alpha_1 + \beta_1 \in \Phi_2$. 由 $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ 知 $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_1) = 0$, 即 $\alpha_1 + \beta_1 = 0$. 这与 $\alpha_1 + \beta_1 \in \Phi$ 矛盾, 故 $\alpha_1 + \beta_1 \in \Phi_1$. (2) $\alpha_1 + \alpha_2 \notin \Phi$. 若不然, 假设 $\alpha_1 + \alpha_2 \in \Phi$, 不妨假设 $\alpha_1 + \alpha_2 \in \Phi_1$. 则 $0 = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_2)$, 即 $\alpha_2 = 0$. 这与 $\alpha_2 \in \Phi_2$ 矛盾, 故 $\alpha_1 + \alpha_2 \notin \Phi$. 上面两个结论说明 $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非平凡理想, 换言之, $\mathfrak{g}$ 不是单 Lie 代数.

“$\Leftarrow$”设 $\mathfrak{g}$ 不是单 Lie 代数, 不妨假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 为非零理想的直和. 任取 $x \in \mathfrak{h}$, 则有 $x = x_1 + x_2$, 这里 $x_i \in \mathfrak{g}_i$. 对任意 $h \in \mathfrak{h}$,

$$0 = [x, h] = [x_1, h] + [x_2, h] \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

因此, $[x_1, h] = [x_2, h] = 0$. 又 $\operatorname{ad} x_1, \operatorname{ad} x_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 上半单线性变换, 故 $x_1, x_2 \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 于是 $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_2)$. 设 $\Phi_i = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_j) = 0, j \neq i\}$. 如果 $\alpha \in \Phi$ 且 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 设 $x_\alpha = x_1 + x_2, x_i \in \mathfrak{g}_i$. 则对任意的 $h_i \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$,

$$[h_1, x_\alpha] = [h_1, x_1] + [h_1, x_2] = [h_1, x_1] = \alpha(h_1)x_1 + \alpha(h_1)x_2,$$

比较等式两边, 得 $\alpha(h_1)x_2 = 0$. 因此 $\alpha(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_1) = 0$ 或 $x_2 = 0$. 同理可得 $\alpha(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_2) = 0$ 或 $x_1 = 0$. 故 $\alpha \in \Phi_1$ 且 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_1$, 或 $\alpha \in \Phi_2$ 且 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_2$. 从而 $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. 进而, $\mathfrak{g}_i = (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_i) \oplus \sum_{\alpha\in\Phi_i} \mathfrak{g}_\alpha$. 因 $\mathfrak{g}_i$ 为非零理想, 故 Φ_i 不为空. 此外对于任意 $\alpha \in \Phi_1, \beta \in \Phi_2$, 因为 $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$, 有 $\alpha + \beta \notin \Phi$ 且 $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\beta}) = 0$. 从而 $B(t_\alpha, t_\beta) = 0$, 即 $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. 故 Φ 可约. ■

习题 3.5

1. 本题给出构造根系的基的另一种方法, 设 Φ 为欧几里得空间 $(E,(\cdot,\cdot))$ 中的一个根系. 任意取定 E 作为线性空间的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$, 称 E 中一个非零向量 γ 为正向量, 如果将 γ 表达成 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 的线性组合时, 系数中的第一个非零实数为正数, 否则称为负向量. 将 Φ 中的正 (负) 向量组成的集合记为 Φ^+ (Φ^-). 称 Φ^+ 中一个根为不可分解的, 如果不能写成两个 Φ^+ 中元素的和. 试证明: Φ^+ 中全体不可分解的根的全体构成 Φ 的一个基, 而且其对应的正根集为 Φ^+, 负根集为 Φ^-.

2. 试证明任何根系的一个基都可以用上题的方法得到.

3. 设 $(E,(\cdot,\cdot))$ 为欧几里得空间, 如同本节第 1 题定义了正向量和负向量的概念, 试证明, 如果 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$ 都是正向量, 而且当 $i\neq j$ 时, $(\beta_i,\beta_j)\leq 0$, 则 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$ 一定线性无关.

4. 设 Φ 为欧几里得空间 $(E,(\cdot,\cdot))$ 中的一个根系, Δ 为 Φ 的基, 对应的正根集为 Φ^+. 试证明: 若 $\alpha\in\Delta$, $\beta\in\Phi^+$, 且 $\beta\neq\alpha$, 则 $\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi^+$ 且 $\sigma_\alpha(\beta)\neq\alpha$.

5. 设 Φ,Δ 如上题, 记 $\delta=\dfrac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+}\beta$, 试证明 $\sigma_\alpha(\delta)=\delta-\alpha,\forall\alpha\in\Delta$.

6. 设 Φ 为欧几里得空间 $(E,(\cdot,\cdot))$ 中的一个根系, 对 $\alpha\in\Phi$ 定义 $\alpha^\vee=\dfrac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$, 并记 $\Phi^\vee=\{\alpha^\vee\mid\alpha\in\Phi\}$.

(1) 试证明 $\Phi^\vee$ 也是欧几里得空间 $(E,(\cdot,\cdot))$ 中的一个根系, 称为 Φ 的对偶根系.

(2) 若 Δ 是 Φ 的一个基, 则 $\Delta^\vee=\{\alpha^\vee\mid\alpha\in\Delta\}$ 是 $\Phi^\vee$ 的一个基.

(3) 证明 Φ 是不可约根系当且仅当 $\Phi^\vee$ 是不可约根系.

(4) 证明 $(\Phi^\vee)^\vee=\Phi$.

7. 设 Φ,Φ' 分别是欧几里得空间 $(E,(\cdot,\cdot))$ 和 $(E',(\cdot,\cdot)')$ 中的根系, 对 $\alpha,\beta\in\Phi$, $\alpha',\beta'\in\Phi'$, 记

$$\langle\beta,\alpha\rangle=\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)},\quad \langle\beta',\alpha'\rangle'=\frac{2(\beta',\alpha')'}{(\alpha',\alpha')'}.$$

称 Φ 与 Φ' 是同构的, 如果存在 E 到 E' 的线性同构 ϕ (注意不一定是等距同构) 使得 $\phi(\Phi)=\Phi'$, 且 $\langle\beta,\alpha\rangle=\langle\phi(\beta),\phi(\alpha)\rangle'$, $\forall\alpha,\beta\in\Phi$. 试证明: 若 Φ 与 Φ' 同构, 则 $\Phi^\vee$ 与 $(\Phi')^\vee$ 同构.

8. 试给出 1 维和 2 维欧几里得空间中的根系在同构意义下的分类.

9. 设 $\{\mathfrak{g}^+,\mathfrak{g}^-,f\}$ 是复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个双极化, 则存在唯一 $z\in\mathfrak{g}$ 使得 $f(x)=B(z,x),\forall x\in\mathfrak{g}$. 试证明 z 一定是半单元素.

10. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个双极化 $\{\mathfrak{g}^+,\mathfrak{g}^-,f\}$ 称为对称的, 如果作为 Lie 代数 $\mathfrak{g}^+\simeq\mathfrak{g}^-$ 同构. 试证明任何复半单 Lie 代数的双极化都是对称的.

11. 试举例说明在可解 Lie 代数上可能存在不对称的双极化.

3.6 Dynkin 图

本节我们给出欧几里得空间中根系的 Dynkin 图的概念, 并给出不可约根系的 Dynkin 图的分类. 我们前面提到过, 若 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解, $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l\}$ 是 Φ 的基. 则 Φ 是由 Δ 张成的欧几里得空间中的一个根系. 因此本章的分类结果也将最终导出复单 Lie 代数的分类.

我们先给出根系的 Cartan 矩阵的概念.

定义 3.11. 矩阵

$$\left(\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\right)$$

称为 Φ 相对于 Δ 的 Cartan 矩阵. 注意, $\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ 是整数, 称为 Cartan 整数.

定义 3.12. 根系 Φ 相对于 Δ 的 Dynkin 图包含下面三个部分:

(1) l 个顶点, 第 i 个顶点表示 α_i. 这里以 $\circ$ 表示顶点.

(2) 第 i 个顶点和第 j 个顶点之间用 $\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ 条线段相连.

(3) 在多重相连的顶点之间, 添加由长根指向短根的箭头.

思考题 3.8. 证明下面的性质:

(1) 对任意的 $\alpha_i,\alpha_j\in\Delta$ 且 $i\neq j$, 则 $\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ 只可能为 $0,-1,-2$ 或 -3.

(2) Φ 是不可约的当且仅当其 Dynkin 图是连通的.

(3) 由 Cartan 矩阵可以确定 Dynkin 图, 反之亦然.

(4) 同构的复半单 Lie 代数具有相同的 Dynkin 图.

本节的目标是决定不可约根系相对于 $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l\}$ 的所有可能的 Dynkin 图, 这样也就决定了所有复单 Lie 代数的 Dynkin 图. 我们先证明一些基本性质. 为了方便, 我们将用到 α 的长度 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$. 若顶点 α_i 和 α_j 之间相连的线段数为 n_{ij}, 则 $n_{ij}=\dfrac{4(\alpha_i,\alpha_j)^2}{|\alpha_i|^2|\alpha_j|^2}$.

引理 3.30. 任意给定 Δ 的子集 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_k}\}$, 则其中有线段相连的点对不超过 $k-1$ 对. 特别地, Dynkin 图中不存在环路.

证明. 记 $\alpha=\sum_{j=1}^k\dfrac{\alpha_{i_j}}{|\alpha_{i_j}|}$, 则由基的线性无关性知 $\alpha\neq0$. 从而

$$0<(\alpha,\alpha)=\left(\sum_{j=1}^k\frac{\alpha_{i_j}}{|\alpha_{i_j}|},\sum_{j=1}^k\frac{\alpha_{i_j}}{|\alpha_{i_j}|}\right)=k+\sum_{j\neq l}\frac{(\alpha_{i_j},\alpha_{i_l})}{|\alpha_{i_j}||\alpha_{i_l}|}.$$

若 α_{i_j} 与 α_{i_l} 有线段相连, 则 $\dfrac{2(\alpha_{i_j},\alpha_{i_l})}{|\alpha_{i_j}||\alpha_{i_l}|}=-\sqrt{n_{jl}}\leq-1$. 如果连线的点对数 $\geq k$, 则上式右边 $\leq k-k=0$, 矛盾. 故线段相连的点对不超过 $k-1$ 对. 这也意味着图中没有任何形式的环路. ■

引理 3.31. Dynkin 图中与任一顶点相连的线段总数不超过 3.

证明. 设 $\alpha \in \Delta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Delta$ 为与 α 相连的所有顶点. 由引理 3.30, 这些 α_i 之间互不相连, 即 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0\ (i \neq j)$. 因为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ 是正交的线性无关组, 我们可将其扩充为 E 的一组正交基. 令 α 在这组基上的投影为 $\sum_{i=1}^{k} c_i \dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$, 则 $c_i = (\alpha, \dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|})$. 由于 α 不全在由 α_i 张成的子空间中 (否则它们线性相关, 与基的定义矛盾), 根据 Bessel 不等式有

$$(\alpha, \alpha) > \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha, \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}\right)^2.$$

两边同除以 (α, α), 得到

$$1 > \sum_{i=1}^{k} \frac{(\alpha, \alpha_i)^2}{|\alpha|^2 |\alpha_i|^2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_{\alpha,\alpha_i}}{4}.$$

故 $\sum_{i=1}^{k} n_{\alpha,\alpha_i} < 4$, 即线段总数不超过 3. ∎

引理 3.32. *设 Dynkin 图包含一条单线相连的链状子图 $\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_k$. 若将此链收缩成一个顶点 $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$, 且将与原链两端相连的边连接至 α, 得到的图依然满足前述所有性质.*

证明. 因为子图中只有相邻顶点有单线相连, 故 $2(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = -|\alpha_i|^2 = -|\alpha_{i+1}|^2$. 从而 $|\alpha_1|^2 = \cdots = |\alpha_k|^2$. 直接计算可得

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i, \alpha_i) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_i, \alpha_{i+1}) = k|\alpha_1|^2 - (k-1)|\alpha_1|^2 = |\alpha_1|^2.$$

因此 α 的长度与原链中顶点的长度相同. 用 α 替换原图中的 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ 所得到的新顶点集仍构成线性无关组, 且其构成的图仍不含环并满足每个顶点的度数 ≤ 3. ∎

引理 3.33. *不可约的 Dynkin 图中最多只有一个三岔点 (即连出 3 条线段的顶点). 且如果有三岔点, 图中就不含有二重线或三重线.*

证明. 若图中有两个三岔点或有二重线与三岔点并存, 则图中必然包含一条连接它们的单链. 由引理 3.32, 我们可以把这条单链收缩为一个顶点, 那么这个新顶点就会连出 ≥ 4 条线段, 这与引理 3.31 矛盾. 同理如果有大于等于两个的多重线也矛盾. ∎

由上述引理可知, 连通的 Dynkin 图只能是单链 (可能含有一个二重线或三重线), 或者是带有唯一三岔点的由三条单链汇聚的星状图.

引理 3.34. *如果 Dynkin 图是由三条单链在某一个中心顶点 α 处汇聚而成的星状图, 且各条分支链 (包含中心顶点 α) 的顶点数分别为 p, q, r, 则*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

证明. 设三条链上除中心点 α 外的顶点分别为 $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}$; $\delta_1, \ldots, \delta_{r-1}$ (按从端点向 α 的方向编号). 分别令 $u = \sum_{i=1}^{p-1} i\beta_i$, $v = \sum_{i=1}^{q-1} i\gamma_i$, $w = \sum_{i=1}^{r-1} i\delta_i$. 利用与前面类似的内

积计算可得 $\frac{(\alpha,u)^2}{|\alpha|^2|u|^2}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$. 因为 u,v,w 是互相正交的, 且 α 不能完全由它们张成 (线性无关), 所以根据 Bessel 不等式:

$$\frac{(\alpha,u)^2}{|\alpha|^2|u|^2}+\frac{(\alpha,v)^2}{|\alpha|^2|v|^2}+\frac{(\alpha,w)^2}{|\alpha|^2|w|^2}<1.$$

代入即得 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})<1$, 化简即为 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$. ■

不失一般性, 假设 $p\geq q\geq r\geq 2$ (因包含中心点 α，长度至少为 2). 那么由上面的不等式容易看出, 只有下面几种整数解情形:

(1) $r=2,q=2,p$ 任意. 此图记为 D_{p+2}.

(2) $r=2,q=3,p=3$. 此图记为 E_6;

(3) $r=2,q=3,p=4$. 此图记为 E_7;

(4) $r=2,q=3,p=5$. 此图记为 E_8.

如果 Dynkin 图不含三重线、二重线以及三岔点, 则此图为一单纯的长链, 记为 A_l. 综上所述, 我们得到下面的分类定理.

定理 3.35. 不可约根系相对于 $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_l\}$ 的 Dynkin 图必定是下列经典图形之一:

(1) $A_l(l\geq 1)$ (经典类型)

(2) $B_l(l\geq 2)$ (经典类型)

(3) $C_l(l\geq 3)$ (经典类型)

(4) $D_l(l\geq 4)$ (经典类型)

(5) E_6,E_7,E_8 (例外类型)

(6) F_4 (例外类型)

(7) G_2 (例外类型)

一个自然的问题是, 给定上面的一个图, 是否真的存在一个欧几里得空间中的根系使得其对应的 Dynkin 图恰好就是该图? 进一步, 如果存在这样的根系, 那么是否存在一个复单 Lie 代数使得该 Lie 代数对应的根系恰好就是这个根系? 另外一个重要的问题是, 如果两个复单 Lie 代数导出的 Dynkin 图是相同的, 这两个 Lie 代数是否一定同构? 如果对于这些问题的回答都是肯定的, 那么上面的定理就给出了复单 Lie 代数在同构意义下的分类 (因此也就给出了复半单 Lie 代数在同构意义下的分类). 我们将在后续章节来回答这些问题.

习题 3.6

1. 试决定古典 Lie 代数 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$ 的 Dynkin 图.

2. 计算 G_2 的根系.

3. 试写出定理 3.35 中的所有图对应的 Cartan 矩阵并求出其行列式.

4. 设 Φ 为欧几里得空间 $(E,(\cdot,\cdot))$ 中的根系, $\alpha,\beta\in\Phi$ 且 $\alpha+\beta\in\Phi$. 试证明 $(\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}\beta)\cap\Phi$ 是一个根系, 且其对应的 Dynkin 图为 A_2, B_2 或 G_2.

5. 设 Φ 为欧几里得空间 $(E,(\cdot,\cdot))$ 中的不可约根系, $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_l\}$ 为基, $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_l$ 是由 $\dfrac{2(\omega_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\delta_{ij}$ 决定的一组向量组, 试证明 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l\in\Phi$ 且

$$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_l=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha.$$

6. 假定定理 3.35 中的图都是某个不可约根系的 Dynkin 图, 并且用同样的记号来表示. 试证明除了 B_l,C_l 外, 任何不可约根系都与自己的对偶根系同构, 而 B_l 与 C_l 互为对偶.

7. 设 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ 为复单 Lie 代数, 而且 $\mathfrak{g}_1$ 的 Dynkin 图是 $\mathfrak{g}_2$ 的 Dynkin 图中的一个子图, 试证明 $\mathfrak{g}_1$ 同构于 $\mathfrak{g}_2$ 的一个单子代数.

参考文献

[1] 朱富海, 陈智奇. 高等代数与解析几何. 北京: 科学出版社, 2018.

[2] 邓少强, 朱富海. 抽象代数. 北京: 科学出版社, 2017.

[3] 孟道骥. 复半单李代数引论. 北京: 北京大学出版社, 1999.

[4] 苏育才, 卢才辉, 崔一敏. 有限维半单李代数简明教程. 北京: 科学出版社, 2008.

[5] 严志达. 实半单李代数. 天津: 南开大学出版社, 1998.

[6] Humphreys J E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1972.

[7] Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. New York: Academic Press, 1978.

[8] Jacobson N. *Lie Algebras*. New York: Dover Publications Inc., 1962.