苏州大学 · 数学科学学院

高等代数复盘

Based on lectures of Abstract Algebra

作者： 郭利文

时间： 2026 年 1 月 26 日

目录

1 复盘 1 2
2 复盘 2 3
3 复盘 3 4
4 复盘 4 5
5 复盘 5 6
6 复盘 6 8
7 复盘 7 9
8 复盘 8 11
9 复盘 9 12
10 复盘 10 14
11 复盘 11 16
12 复盘 12 18
13 复盘 13 20
14 复盘 14 22
15 复盘 15 24
16 复盘 16 25
17 复盘 17 26
18 复盘 18 28
19 复盘 19 29
20 复盘 20 30

1 复盘 1

1. 注意 $A=(I_n+AB)A(I_n+BA)^{-1}$，这样即有

$$I_n=I_n+AB-AB=(I_n+AB)(I_n-A(I_m+BA)^{-1}B)$$

于是 $(I_n+AB)^{-1}=I_m-A(I_m+BA)^{-1}B$，由此推得一般形如 $A+B$ 的求逆公式.

2. 第一类初等矩阵（置换矩阵）可以写成第二，三类初等矩阵的乘积，从而任意矩阵都可写成形如 I_n+aE_{ij} 形式的矩阵乘积.

3. 利用矩阵分解计算形如 $((a_i+b_j)^n)_{n+1\times n+1}$ 等形式的行列式.

4. 注意两类特殊分块矩阵行列式的计算：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}$$

5. 设有向量表示

$$(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)A$$

其中 A 是数域 F 上的矩阵.

   (a) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，则向量组 $\{\beta_1.\cdots,\beta_m\}$ 的秩等于 $r(A)=s$. 进一步，若记 $A=(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ 是 A 的列分块，则若 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_s}$ 线性无关，则 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_s}$ 是 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 的极大无关组.

   (b) 对一般情形，$\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 的秩不会超过 $r(A)$，且当 A 行满秩时，两个向量组等价.

6. 注意“迹类”线性函数的刻画：

$$f: R^{n\times n} \longrightarrow R$$
$$A \longmapsto f(A)$$

满足相似矩阵有相同的函数值，则 $f(A)=f(E_{11})\cdot \mathrm{tr}A, \forall A\in R^{n\times n}$.

7. 讨论 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，并说明 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ 的充要条件是方程 $AX+YB=C$ 有解.

8. 若 A 的每一行与每一列元素之和都是零，则 A_{ij} 均相同.

9. 利用线性空间不能写为有限个真子空间的并集，来说明矩阵环 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的半同态一定是反同态或者同态.

10. 若 W 是 $\mathbb{K}^{n\times n}$ 的子空间，满足对任意 $A\in W$，有 $\operatorname{rank}(A)\le 1$，则 $\dim W\le n$，并说明 n 是最优的.

2 复盘 2

1. 设 V,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，给定 V 到 U 的两个线性映射，关注如下两个线性映射的构造:
   (a) 存在 $\xi\in\operatorname{End}(U)$，使得 $\psi=\xi\varphi$ 的充要条件是 $\ker\varphi\subset\ker\psi$，并给出（指出）$\xi$ 唯一的充要条件.
   (b) 存在 $\xi\in\operatorname{End}(V)$，使得 $\psi=\varphi\xi$ 的充要条件是 $\mathrm{im}\psi\subset\mathrm{im}\varphi$.

2. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，U 是 V 的真子空间，请构造一族 V 到 U 的投影变换：$\{\varphi_i\mid i\in N\}$ 满足 $\varphi_i\neq\varphi_j(i\neq j)$.

3. 设 $\varphi,\psi\in\operatorname{End}(V)$，满足 $\varphi^2=\psi^2=0$，且 $\varphi\psi-\psi\varphi=\mathrm{id}_V$, 则以下事实成立
   (a) $V=\ker\varphi\oplus\ker\psi$.
   (b) V 的维数是偶数，且存在 V 的一组基，使得 φ,ψ 在这组基下的矩阵分别为分块对角阵 $\operatorname{diag}(A,\cdots,A),\operatorname{diag}(B,\cdots,B)$，其中 A,B 分别是

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

   或者

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

4. 请解释行满秩阵有右消去律，列满秩阵有左消去律，并以此证明如下事实：设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的一线性无关向量组，$\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 是 $\mathbb{K}^m$ 上的一组线性无关向量，则向量组

$$\left\{\alpha_i\beta_j'\mid 1\le i\le s;1\le j\le t\right\}$$

   的秩是 st.

5. 设 $A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}$ 满足 A 是幂零阵, 且 $[A,B]=0,\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$, 则 $B=O$.

6. 设 n 阶复方阵 A, B，满足 $[A,B] = aA + bB$，其中 a, b 不全为零（二维非平凡 Lie 代数）. 不妨设 $a \neq 0$，则
$$\left[A, \frac{B}{a}\right] = A + \frac{b}{a}B = \left[A + \frac{b}{a}B, \frac{B}{a}\right].$$
由此说明 A, B 可同时上三角化.

7. 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 中的线性变换，令 $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{s} \varphi_i$, 若 φ 是幂等变换，则
$$\mathrm{im}\varphi = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{im}\varphi_i \Longleftrightarrow \varphi_i\varphi_j = \delta_{ij}\varphi_i.$$
且在上述条件下，
$$V = \mathrm{im}\varphi \oplus \ker\varphi = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{im}\varphi_i \oplus \left(\bigcap_{i=1}^{s} \ker\varphi_i\right).$$

8. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_s\}$ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群. 给定 V 的子空间 U，设 ψ 是 V 到 U 的一投影，则线性变换 $\varphi = \dfrac{1}{s}\sum\limits_{i=1}^{s} \varphi_i\psi\varphi_i^{-1}$ 与 φ_i 可交换，从而 $\ker\varphi, \mathrm{im}\varphi$ 都是 φ_i 的不变子空间. 进一步当 U 是 φ_i 的不变子空间时，φ 也是 V 到 U 的投影.

9. 设 $S = \left\{(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in S_n\right\}$ 为 n 阶置换矩阵全体,则 $W = \{(k, \cdots, k)' \mid k \in \mathbb{F}\}$ 是 S 中所有元素的公共不变子空间，若 U 也是 S 中所有元素共同的非平凡不变子空间，且 $U \neq W$，则一定有
$$U = W^{\perp} = \left\{(x_1, \cdots, x_n)' \mid x_i \in \mathbb{F}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}.$$

10. 设 A, B 是 n 阶复矩阵. 若 $\mathrm{rank}([A,B]) = 1$，则 $\mathrm{im}A, \ker A$ 至少有一个是 B 的不变子空间，并由此进一步说明 A, B 可同步上三角化.

3 复盘 3

1. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 n 个复数，满足:
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = r. \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = r. \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} + \cdots + \lambda_n^{n+1} = r. \end{cases}$$
其中 $r \in [0, n]$ 为整数，利用 Vandermonde 行列式来说明 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中有 r 个 1，$n - r$ 个零.

2. 设 A 是 n 阶方阵，求 $\operatorname{rank}(f(A), g(A))$，其中 f, g 是多项式.

3. 设 $g_1, \cdots, g_m \in \mathbb{K}[x]$ 两两互素，给定 $r_1(x), \cdots, r_m(x) \in \mathbb{K}[x]$，则存在 $F(x) \in \mathbb{K}[x]$，使得
$$F(x) \equiv r_i(x) \pmod{g_i(x)} \quad 1 \leq i \leq m.$$
并以此解释：若复矩阵 A 的特征多项式等于最小多项式，则
$$C(A) = \{f(A) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$$

4. 若 $(f, g) = 1$，则存在唯一 u, v，满足
$$fu + gv = 1$$
其中 $\deg u < \deg g, \deg v < \deg f$.

5. 设 $f' \mid f$，则 f 有 $\deg f$ 重根.

6. 设 n 是奇数，则 $(x+y)(x+z)(z+y) \mid (x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$.

7. 设 $f(k) = \dfrac{k}{k+1}, k = 0, \cdots, n$, 且 $\deg = n$，试求 $f(n+1)$.

8. f 是可约多项式，当且仅当 f 的互反多项式可约.

9. 多项式 $f(x) = \prod\limits_{k=1}^{18}(x-k) + 23$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

10. 若 $(f, g) = 1$，则 $f^2 + g^2$ 的重根一定是 $(f')^2 + (g')^2$ 的根.

4 复盘 4

1. 给出 Gerschgorin 圆盘第一定理的表述与证明，并以此解释：给定多项式 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$，记其根为 x_i，则
$$\max_i \{|x_i|\} \leq \max\{1 + |a_1|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|, a_n\}.$$

2. 设 f 是实系数首一多项式，且无实根，则 f 可以表示成两个实系数多项式平方的和.

3. 设 f 是整系数多项式，且 $f(0), f(1)$ 都是奇数，则 f 没有有理根.

4. 若 f 是实系数多项式，且 f 将有理数映为有理数，则 f 是有理系数多项式.

5. 求以 $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 为根的次数最小的首一有理系数多项式.

6. 设 f 是次数大于 1 的奇数次有理系数不可约多项式，且 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则 x_1+x_2 不是有理数.

7. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个不同整数，则
   (a) $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)-1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.
   (b) $g(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2+1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

8. 设 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})=\left\{f(\sqrt[n]{2})\mid f\in\mathbb{Q}[x]_{n-1}\right\}$，则 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是数域. 进一步，若 α 是代数数，$f_\alpha(x)$ 是其最小多项式，且 $\deg f_\alpha=n$，则包含 α 的最小数域为 $\mathbb{Q}(\alpha)=\{f(\alpha)\mid f\in\mathbb{Q}[x]_{n-1}\}$.

9. 设
$$f=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$
是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式，φ 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 上的线性变换，$\alpha_1\neq 0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$，满足
$$\varphi(\alpha_i)=\alpha_{i+1},\quad 1\leq i\leq n-1;\quad \varphi(\alpha_n)=-a_n\alpha_1+\cdots+(-a_1)\alpha_n$$
令 $U=\operatorname{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 U 是 φ 不变的，且 $f(\varphi)(U)=\{0\}$，并以此说明 $\dim U=n$.

5 复盘 5

1. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是线性空间 V 上的线性变换 φ 的不同特征值，V_{λ_i} 是对应特征子空间. 记 $f_i=x-\lambda_i, F_i=\prod\limits_{j\neq i}^{s}f_j$，则 $F_i(\varphi)\left(\sum_{j\neq i}^{s}V_j\right)=\{0\}$，且 $(f_i,F_i)=1$，由此得 $V_i\cap\left(\sum_{j\neq i}^{s}V_j\right)=\{0\}$，即 φ 属于不同特征值的特征向量线性无关.

2. 设 φ 是 V 上的线性变换，V_{λ_i} 是 φ 的一个特征子空间，则 W 是 φ 不变的，即 $f_{\varphi|_W}\mid f_\varphi$，由此推得特征值的几何重数始终小于等于代数重数. 结合以上两点得到 φ 在 V 上可对角化的充要条件是
   (a) φ 有 n 个线性无关的特征向量.
   (b) $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}V_i$.
   (c) V 有完全的特征向量系.

3. 让 φ 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 中的线性变换，设 φ 的最小多项式 $m_\varphi(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的标准分解是
$$m_\varphi(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}p_i^{r_i}(\lambda),\quad r_i\geq 1.$$

令 $P_i = \prod\limits_{j\neq i}^{s} p_j^{r_j}$ 由于 $(P_1,\cdots,P_s)=1$，则存在 $F_1,\cdots,F_s\in\mathbb{F}[x]$，使得

$$\mathrm{id}_V=\sum_{i=1}^{s}F_i(\varphi)P_i(\varphi)$$

注意 $F_i(\varphi)P_i(\varphi)(V)\subset\ker p_i^{r_i}(\varphi)$，综上得 $V=\sum_{i=1}^{s}\ker p_i^{r_i}(\varphi)$. 进一步，由

$$(P_i,p_i)=1,\quad P_i(\varphi)\left(\sum_{j\neq i}^{s}\ker p_i^{r_i}(\varphi)\right)=\{0\}$$

得 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}\ker p_i^{r_i}(\varphi)$. 在上述基础上，

(a) φ 在 V 上可对角化当且仅当 $r_i=1,\deg p_i=1$.

(b) 记 $m_i(\lambda)$ 是 φ 限制在 $\ker p_i^{r_i}(\varphi)$ 上的最小多项式，则 $m_i(\lambda)\mid p_i^{r_i}(\lambda)$，且

$$m_\varphi(\lambda)=[m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]=m_1(\lambda)\cdots m_s(\lambda)$$

由此得 $m_i(\lambda)=p_i^{r_i}(\lambda)$.

(c) 现在考虑 $r_1=\cdots=r_s=1$，则对任意 φ 的不变子空间 W, 记 $m_{\varphi|_W}(\lambda)$ 是 φ 限制在 W 上的最小多项式，则 $m_{\varphi|_W}(\lambda)\mid m_\varphi(\lambda)$，于是可设

$$m_{\varphi|_W}(\varphi)=\prod_{t=1}^{k}p_{j_t}(\lambda),\quad 1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le s.$$

则 $W=\bigoplus\limits_{t=1}^{k}\ker p_{j_t}(\varphi)$ 由此得到，存在 φ 的不变子空间 U，使得 $V=W\oplus U$. 此时称 φ 是半单变换（完全可约的)，且 $\varphi|_W$ 也是半单的，这样分解下去得到 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{l}V_i$, 其中 V_i 没有非平凡的 φ 不变子空间 (称为是 φ 不可约的). V_i 是 φ 不可约的，当且仅当 $f_{\varphi|_{V_i}}(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的不可约因式，即存在 j 使得 $V_i=\ker p_j(\varphi)$, 于是 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}\ker p_i(\varphi)$ 是 φ 不变子空间直和的最优分解.

(d) 现在考虑 $f_\varphi(\lambda)=m_\varphi(\lambda)$ 的情形. 则对任意 φ 的不变子空间 W，有

$$W=\bigoplus_{i=1}^{s}(\ker p_i^{r_i}(\varphi)\cap W)$$

即 φ 的不变子空间是由 φ 在 $\ker p_i^{r_i}(\varphi)$ 上的不变子空间拼接而成的. 注意

$$\{0\}\subsetneq\ker p_i(\varphi)\subsetneq\ker p_i^2(\varphi)\subsetneq\cdots\subsetneq\ker p_i^{r_i}(\varphi)$$

是 φ 限制在 $\ker p_i^{r_i}(\varphi)$ 上的 r_i+1 个不同不变子空间，满足 φ 限制在 $\ker p_i^t(0\le t\le r_i)$ 上的最小多项式和特征多项式均是 $p_i^t(\lambda)$. 若 U 是 φ 限制

在 $\ker p_i^{r_i}(\varphi)$ 上的任意不变子空间，不妨设 φ 限制在 U 上的最小多项式为 $p_i^k(\lambda)$，则 $U \subset \ker p_i^k(\varphi)$，且

$$\dim U \geq \deg p_i^k(\lambda) = \dim \ker p_i^k(\varphi)$$

即 $U = \ker p_i^k(\varphi)$. 综上 φ 的任意不变子空间 W 均可表示为

$$W = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker p_i^{t_i}(\varphi), \quad 0 \leq t_i \leq r_i.$$

6 复盘 6

1. 设 A 是 n 阶复可对角化矩阵，且 $[A,B] = sB$, 其中 s 是非零复数. 若 A 有 k 个不同特征值，则 B 是幂零阵，且幂零指数小于等于 k.
2. 设 A 是 n 阶整数方阵，$(p,q) = 1, q > 1$，则方程 $Ax = \dfrac{p}{q}x$ 仅有零解.
3. 设 $AC = CB$，且 $\operatorname{rank}(C) = r$，则 A, B 至少有 r 个相同的特征值.
4. 利用 Vieta 定理解释：考虑实系数多项式

$$f = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

   若 f 只有非零实根，则 $a_{n-2} \cdot a_{n-1} < 0$.
5. 若 n 阶方阵 A, B 满足 $\operatorname{rank}(ABA) = \operatorname{rank}(B)$，则 AB 与 BA 相似.
6. 求 $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}$ 的一组线性无关特征向量.
7. 设 $[A,B] = C, [C,A] = [C,B] = 0$，则 A, B, C 可同步上三角化.
8. 设 $P = (e_n, e_{n-1}, \cdots, e_1)$，则 $P^2 = I_n, P = P'$. 现在考虑 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换：$\varphi : X \mapsto PX'P$，则 $\varphi^2 = \mathrm{id}$，并求出 φ 的一组线性无关的向量，由此说明 φ 可对角化.
9. 从完全的特征向量系角度解释：若 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 可对角化，则 A, B 均可对角化.
10. 注意一种分块初等相似变换：将第 i 分块行左乘 B 加到第 j 分块行的逆操作是，将第 j 分块列右乘 $-B$ 加到第 i 分块列. 现在设 A 是 n 阶复方阵，$f, g \in \mathbb{C}[x]$，

    (a) 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值，求出 $\begin{pmatrix} f(A) & g(A) \\ g(A) & f(A) \end{pmatrix}$ 的特征值.

(b) 若 α 是 A 的特征向量，则 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix}f(A) & g(A)\\ g(A) & f(A)\end{pmatrix}$ 的特征向量.

(c) 对 $\begin{pmatrix}f(A) & g(A)\\ g(A) & f(A)\end{pmatrix}$ 做以下相似变换：(step1) 将第一列分块加到第二列分块，再将第二行分块乘以 $-I_n$ 加到第一行分块; (step2) 将第二列分块乘以 $-\dfrac{1}{2}I_n$ 加到第一列分块，再将第一行分块乘以 $\dfrac{1}{2}I_n$ 加到第二行分块得到

$$\begin{pmatrix}f(A)-g(A) & O\\ O & f(A)+g(A)\end{pmatrix}.$$

综上解释 A 可对角化的充要条件是 $\begin{pmatrix}kA & g(A)\\ g(A) & kA\end{pmatrix}$ 可对角化，其中 k 是非零复数.

7 复盘 7

1. n 阶复矩阵 A 可对角化的充要条件是相似于某个循环矩阵.

2. 若 A, B 没有相同特征值，且均可对角化，则 $\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$ 也可对角化.

3. 设 A, B 分别是 $m\times n, n\times m$ 阶矩阵，则 AB, BA 有相同的特征值，且若 λ 是 AB 的非零特征值，则

$$\lambda^n|\lambda I_m - AB| = \lambda^m|\lambda I_n - \lambda BA|$$

$$\operatorname{rank}(\lambda I_m - AB) + n = \operatorname{rank}(\lambda I_n - BA) + m$$

当 $\operatorname{rank}(BA) = n$ 时，

$$\operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(ABA) = \operatorname{rank}(A)$$

即 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BA) = n$. 此时，$AB$ 关于特征值 0 的几何重数等于代数重数，综上得到在 $|BA| \neq 0$ 的情形下，AB 可对角化当且仅当 BA 可对角化.

4. 设 A 是 n 阶方阵，满足 $\operatorname{rank}(A) = n-1$, 若 $[A, B] = AB = O$，从 A 最小多项式出发，构造多项式 f，使得 $B = f(A)$. 由此可以解释任一矩阵 C 的伴随矩阵可以写成 $C^* = g(C)$.

5. 设 A, B 分别是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 m, n 阶矩阵，考虑 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 上的线性变换：$\varphi: X \mapsto AX - XB$，则 φ 是线性同构当且仅当 A, B 没有公共特征值. 由此解释如下事实：设 A 是特征值全大于零的 n 阶实方阵，则对任意对称阵 C，存在唯一的对称阵 B 使得 $AB + BA' = C$.

6. 设 A 是 n 阶方阵，B 是 $n \times m$ 阶矩阵，若 $(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ 的秩为 r，记 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是其列列向量组的极大无关组，则 $U = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ 是 A 不变子空间，以此说明，存在可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = P\begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 r 阶方阵，B_1 是 $r \times m$ 阶矩阵.

7. 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，归纳定义矩阵序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$：

$$A_1 = A, \quad A_{k+1} = A(A_k + p_k I_n), \quad p_k = -\frac{\operatorname{tr}(A_k)}{k},$$

利用 Newton 公式归纳说明 $p_k = (-1)^k \sigma_k$，其中 σ_i 是 A 特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的对称初等多项式，并由此说明 $A_{n+1} = O$.

8. 设 A 是 $(n-1) \times n$ 阶矩阵. 记 c_i 为去掉 A 的第 i 列所得方阵的行列式值，令 $\beta = ((-1)c_1, \cdots, (-1)^n c_n)'$. 记 $A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i' \\ A \end{pmatrix}$，其中 α_i' 是 A 的第 i 个行向量，则 $\det A_i = 0$，将 $\det A_i$ 按照第一行展开就有

$$0 = \det A_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^j c_j, \quad 1 \le i \le n-1.$$

于是 $A\beta = 0$，综上解释 β 为 $Ax = 0$ 的基础解系的充要条件是 $\operatorname{rank}(A) = n-1$.

9. 若 A^2 与 A' 相似，则 A 的特征值是零或者单位根.

10. 设 A, B 是 n 阶实方阵，且 $A, B, A+B$ 均是可逆的，则 $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ 当且仅当 $I_n + AB^{-1} + BA^{-1} = 0$ 当且仅当 AB^{-1} 适合多项式 $x^2 + x + 1$. 于是当 $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ 时，AB^{-1} 的特征值只能是三次单位复根，即 $|BA^{-1}| = 1$，由此得 $|A| = |B|$，且

$$|A + B| = |A(A^{-1} + B^{-1})B| = |A||B|(A+B)^{-1}|,$$

即 $|A+B|^2 = |A||B|$. 如果我们要考虑 $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$，可以让 AB^{-1} 的特征值都是实数，比如我们考虑 A, B 都是实对称阵，且 $[A, B] = O$.

8 复盘 8

1. 设 V,U 分别是 $\mathbb{F}$ 上的 n,m 维线性空间，V^*,U^* 是 V,U 的对偶空间，记 S 是 $V^*\times U^*$ 上的双线性函数全体，在 S 中定义自然的加法和数乘使之成为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 对任意 $\alpha\in V,\beta\in U$, 我们定义

$$(\alpha\otimes\beta)(f,g)=f(\alpha)g(\beta),\quad \forall(f,g)\in V^*\times U^*.$$

则 $\alpha\otimes\beta\in S$. 现在令

$$V\otimes U=\left\{\sum_{i,j}\alpha_i\otimes\beta_j\mid \alpha_i\in V,\beta_j\in U\right\}\subset S$$

若记 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 分别是 V,U 的一组基，则由对偶基的性质易得

$$\{\alpha_i\otimes\beta_j\mid 1\le i\le n;1\le j\le m\}$$

是 $V\otimes U$ 的一组基，即有 $\dim V\otimes U=\dim S=mn$. 现在设 φ,ψ 是 V,U 上的线性变换（同样可以考虑一般线性映射情形），记 $A=(a_{ij}),B=(b_{kl})$ 是 φ,ψ 在上述给定基下的表示阵. 定义

$$(\varphi\otimes\psi)(\alpha\otimes\beta)=(\varphi\alpha)\otimes(\psi\beta),\quad \forall\alpha\otimes\beta\in V\otimes U.$$

则 $\varphi\otimes\psi$ 是 $V\otimes U$ 上的线性变换. 记 $A\otimes B=(a_{ij}B)$，则 $\varphi\otimes\psi$ 在基

$$\alpha_1\otimes\beta_1,\cdots,\alpha_1\otimes\beta_m,\cdots,\alpha_n\otimes\beta_1,\cdots,\alpha_n\otimes\beta_m$$

下的表示阵为 $A\otimes B$, 在基

$$\alpha_1\otimes\beta_1,,\cdots,\alpha_n\otimes\beta_1,\cdots,\alpha_1\beta_m,\cdots,\alpha_n\otimes\beta_m$$

下的表示阵为 $B\otimes A$，即得 $A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 相似. 在上述基础之上，得到如下运算性质

(a) 若 ξ,η 分别是 V,U 上的线性变换，且在上述基下的表示阵分别为 C,D，则

$$(\varphi\otimes\psi)(\xi\otimes\eta)(\alpha\otimes\beta)=(\varphi\otimes\psi)((\xi\alpha)\otimes(\eta\beta))=(\varphi\xi\alpha)\otimes(\psi\eta\beta),\quad\forall\alpha\otimes\beta\in V\otimes U.$$

由此得 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$.

(b) 显然有 $|I_n\otimes B|=|B|^n$，于是由相似得 $|A\otimes I_m|=|I_m\otimes A|=|A|^m$，综上就有

$$|A\otimes B|=|(A\otimes I_m)(I_n\otimes B)|=|A|^m|B|^n.$$

(c) 结合相抵标准型就有 $\operatorname{rank}(A\otimes B)=\operatorname{rank}(A)\cdot\operatorname{rank}(B)$.

(d) 特别地，$X\mapsto AXB$ 形式的线性变换在基 E_{ij}(给定顺序) 下的表示阵为 $A\otimes B'$.

9 复盘 9

1. 若 A 半正定，B 是反对称阵，则有 $\det(A+B)\geq 0$，由此解释：设 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})$ 满足，
$$a_{ij}+a_{ji}=0(i\neq j),\quad a_{ii}\geq 0(1\leq i\leq n)$$
则 $\det(A)\geq 0$.

2. 若 W 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，满足 W 中任意非零元都是可逆的，则 $\dim W\leq n$，并说明 n 是最优的. 特别地，若取 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，则 $\dim W\leq 1$.

3. 若 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间，满足任意非零向量中零分量的个数不超过 $r(r<n)$，则 $\dim W\leq r+1$.

4. 若 W 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，满足对任意 $A,B\in W$，有 $\mathrm{tr}(AB)=0$，则 $\dim W\leq \dfrac{n(n-1)}{2}$，并说明 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 是最优的.

5. 若 A 是 n 阶实矩阵，满足 $A^2=-I_n$，则 A 相似于 $\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}$. 进一步，若 $[A,B]=0$，则 $\det B\geq 0$.

6. 设 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$，若 $\mathbb{K}\supset\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 的扩域，且有可逆阵 $P=(p_{ij})\in\mathbb{K}^{n\times n}$，使得 $PA=BP$. 现在令
$$S=\left\{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_{ij}\mid a_{ij}\in\mathbb{F}\right\}\subset\mathbb{K}$$
是由 p_{ij} 线性张成的 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间. 记 $b_1,\cdots,b_r$ 是 S 的一组基，则 P 可表示为
$$P=\sum_{i=1}^{r} b_iQ_i,\quad \mathbb{Q}_i\in\mathbb{F}^{n\times n},$$
由 $PA=AP$，就有
$$\sum_{i=1}^{r} b_i(Q_iA-BQ_i)=O,$$
这样就有 $Q_iA=BQ_i$. 现在令
$$f(x_1,\cdots,x_r)=\det(x_1Q_1+\cdots+x_rQ_r)$$
是 $\mathbb{F}$ 上的多元多项式，由 $f(b_1,\cdots,b_r)=|P|\neq 0$，推得 f 是非零多项式. 故一定存在 $a_1,\cdots,a_r\in\mathbb{F}$ 使得 $f(a_1,\cdots,a_r)\neq 0$，即 $N=\sum_{i=1}^{r}a_iQ_i$ 是可逆阵，且 $NA=BN$. 由此得相似不依赖数域的选取.

7. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 中的线性变换，且 φ 只有有限个不变子空间，对任意 $\alpha \in V$，

$$C(\varphi,\alpha)=\{f(\varphi)\alpha \mid f\in\mathbb{K}[x]\},$$

则 $C(\varphi,\alpha)$ 是 φ 不变子空间，且 $V=\bigcup\limits_{\alpha\in V}C(\varphi,\alpha)$，于是存在 $\beta\in V$, 使得 $V=C(\varphi,\beta)$，即 φ 的特征多项式等于最小多项式.

8. 设 φ 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 中线性变换，且 φ 的特征多项式和最小多项式分别为 $f(\lambda),m(\lambda)$. 若 $f(\lambda)\neq m(\lambda)$，由有理标准型理论，$\varphi$ 至少有两个非常数不变因子 $d(\lambda),m(\lambda)$，不妨设

$$C(\varphi,\beta)\oplus C(\varphi,\alpha)$$

其中 φ 限制在 $C(\varphi,\alpha)$ 上的最小多项式为 $m(\lambda)$，φ 限制在 $C(\varphi,\beta)$ 上的最小多项式为 $d(\lambda)$. 现在构造 φ 的不变子空间集

$$S_\varphi=\{C(\varphi,\alpha+k\beta)\mid k\in\mathbb{K}\}$$

则若 $C(\varphi,\alpha+k_1\beta)=C(\varphi,\alpha+k_2\beta)$，则存在 $g\in\mathbb{K}[x]$ 使得

$$g(\varphi)(\alpha+k_1\beta)=\alpha+k_2\beta,$$

由直和就有

$$(g(\varphi)-\mathrm{id}_V)\alpha=(k_1g(\varphi)-k_2\mathrm{id}_V)\beta=0$$

一这样一定有 $g(x)=1$，即 $k_1=k_2$. 于是我们得到了 φ 无限个不同的不变子空间. 综上，我们从不变子空间个数的角度给出了 φ 特征多项式等于最小多项式的等价判定，并在前面详细讨论过当最小多项式等于特征多项式时，如何找出 φ 的所有不变子空间.

9. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，M 是 $\mathrm{End}(V)$ 的子空间，满足其中元素都可以对角化，且两两可换，则 M 中元素可同时对角化，于是 $\dim M\in[0,n]$. 记 M^* 是 M 的对偶空间，对任意 $f\in M^*$，定义

$$V_f=\{\alpha\in V\mid \varphi(\alpha)=f(\varphi)(\alpha),\forall\varphi\in M\}$$

则 V_f 是 V 的子空间，且若 $V_f\neq\{0\}$, 则对任意非零元素 $\alpha\in V_f$，α 是 M 中所有元素公共的特征向量. 反之，若 α 是 M 中 M 所有元素公共特征向量，则 α 诱导了 M 的一个线性函数 f_α，使得 $V_{f_\alpha}\neq\{0\}$.

若 $f_1,\cdots,f_s$ 是 M 上 s 个不同的线性函数，且 $V_{f_i}\neq\{0\}$，则 $\ker(f_i-f_j)(i\neq g)$ 是 M 的真子空间，由此得

$$M\neq\bigcup_{i,j=1}^{s}\ker(f_i-f_j),\quad i\neq j.$$

即存在 $\psi \in M$ 使得 $f_i(\psi) \neq f_j(\psi)$. 现在设 $0 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i, \alpha_i \in V_{f_i}$，则

$$0 = \psi^k \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{s} f_i(\psi)^k \alpha_i, \quad 1 \leq k \leq s$$

由 Vandermonde 行列式的性质即得 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$，于是有 $\bigoplus_{i=1}^{s} V_{f_i}$. 综上解释：集合

$$\Omega = \{ f \in M^* \mid V_f \neq \{0\} \}$$

是非空有限集，且 $V = \bigoplus_{f \in \Omega} V_f$.

10 复盘 10

1. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵，若 A 不是数乘变换，则存在 $\alpha \in \mathbb{K}^n$，使得 $\alpha, A\alpha$ 线性无关. 由此证明：若 $\operatorname{tr}(A) = 0$，则 A 相似于 $\mathbb{K}$ 上的一个主对角元全为零的矩阵.

2. 注意 $[E_{ij}, E_{kl}] = \begin{cases} E_{ii} - E_{jj}, & i = l, j = k. \\ E_{il}, & i \neq l, j = k. \end{cases}$，这样就有

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{E_{11} - E_{kk}, E_{ij} \mid 2 \leq k \leq n, 1 \leq i \neq j \leq n\} &\subset \left\{ \sum_i [A_i, B_i] \mid A_i, B_i \in \mathbb{K}^{n\times n} \right\} \\ &\subset \left\{ A \mid A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \operatorname{tr}(A) = 0 \right\} \end{aligned}$$

即

$$\left\{ \sum_i [A_i, B_i] \mid A, B \in \mathbb{K}^{n\times n} \right\} = \left\{ A \mid A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \operatorname{tr}(A) = 0 \right\}$$

3. 设 A 是 n 阶复矩阵，则 A 可以唯一分解为 $A = B + C$，其中 B 是半单的，C 是幂零的，且 $[B, C] = O$. 进一步，对任意 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换:

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{C}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n} \\ X &\longmapsto [A, X] \end{aligned}$$

则 $\varphi_A = \varphi_B + \varphi_C$，且 φ_B 是半单的，φ_C 是幂零的，且对任意 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$，有

$$[\varphi_B, \varphi_C](X) = [B, [C, X]] - [C, [B, X]] = [[B, C], X] = O,$$

即 $[\varphi_B, \varphi_C] = 0$，综上就有 $\varphi_A = \varphi_B + \varphi_C$ 是 φ_A 的 Jordan-Chevalley 分解. 若我们记 $U = \{\varphi_A \mid A \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$，则 U 是 $\operatorname{End}(\mathbb{C}^{n\times n})$ 的子空间，且 $\dim U = n^2 - 1$.

4. 设有 n^2 个非零矩阵 A_{ij} 满足 $A_{ij}A_{kl}=\delta_{jk}A_{il}$. 若 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 满足 $A_{ij}P=PE_{ij}$，则 P 需满足 $A_{ij}\alpha_k=\delta_{jk}\alpha_i$. 由于 $A_{11}\neq O$，存在 β 使得 $A_{11}\beta\neq 0$，现在令 $\beta_i=A_{i1}\beta$，则 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关，且满足 $A_{ij}\beta_k=\delta_{jk}\beta_i$，即存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}A_{ij}P=E_{ij}$. 综上解决：设 φ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的可逆线性变换，且满足

$$\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B),$$

找出所有满足条件的 φ.

5. 设 $J(\lambda,n)$ 是关于 λ 的 n 阶 Jordan 块，则当 $\lambda\neq 0$ 时，$J^m(\lambda,n)$ 的 Jordan 型为 $J(\lambda^m,n)$，其中 m 是非零整数. 当 $\lambda=0$ 时，讨论 $J^k(0,n)$ 的 Jordan 型，其中 k 是正整数.

6. 复矩阵 A 可以分解为 $A=BC$，其中 B,C 是对称阵，并可指定其中之一可逆，由此证明 A 相似于一个复对称阵.

7. 设 A 是 n 阶复矩阵，则存在复对称阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=A'$.

8. 若 $AB=BA=O$, 且 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^2)$, 则 $\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

9. 设 $J(0,n)X=XJ(0,m)$. 当 $m=n$ 时，$X=f(J(0,n))$. 否则不妨设 $n>m$, 则

$$0=\begin{pmatrix} O & I_{n-m} \\ O & O \end{pmatrix}X=J^m(0,n)X=XJ^m(0,m),$$

由此得 $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ O \end{pmatrix}$，其中 X_1 是 m 阶方阵. 且 $J(0,m)X_1=J(0,m)X_1$，由此得 $X=\begin{pmatrix} f(J(0,m)) \\ O \end{pmatrix}$. 综上解释：若 A 是 n 阶复矩阵，令

$$C(A)=\Big\{X\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid [A,X]=O\Big\}$$

记 A 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i},\quad 1\leq i\leq s$, 则 $C(A)$ 的维数为

$$\dim C(A)=\sum_{i,j=1}^{s}\deg((\lambda-\lambda_i)^{r_i},(\lambda-\lambda_j)^{r_j})$$

于是 $\dim C(A)\geq n$，且等号成立当且仅当 λ_i 互不相同.

10. 设 A,B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 阶方阵. 现在取定 AB 的一个非零特征值 λ 和任意 $1\leq k\leq n$，记

$$W_1=\ker(\lambda I-AB)^k,\quad W_2=\ker(\lambda I-BA)^k$$

对任意 $\alpha \in W_1$，有

$$0 = B(\lambda I - AB)^k(\alpha) = (\lambda I - BA)B(\lambda I - AB)^{k-1}(\alpha) = \cdots = (\lambda I - BA)^k(B\alpha),$$

即 $B(\alpha) \in W_2$. 于是可以定义

$$\begin{aligned} \varphi : W_1 &\longrightarrow W_2 \\ \alpha &\longmapsto B\alpha \end{aligned}$$

对任意 $\alpha \in \ker\varphi$，有

$$0 = (\lambda I - AB)^k\alpha = (\lambda I - AB)^{k-1}(\lambda\alpha) = \cdots = \lambda^k\alpha$$

即 φ 是单射，由此得 $\dim W_1 \leq \dim W_2$，同理得 $\dim W_2 \leq \dim W_1$，即 $\dim W_1 = \dim W_2$. 由此得

$$\operatorname{rank}(\lambda I - AB)^{k-1} - \operatorname{rank}(\lambda I - AB)^k = \operatorname{rank}(\lambda I - BA)^{k-1} - \operatorname{rank}(\lambda I - BA)^k$$

综上解释：AB 与 BA 有相同的非零 Jordan 块.

11 复盘 11

1. 设 A 是 n 阶可逆实矩阵，求 $\begin{pmatrix} O & A \\ A' & O \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数.

2. 设 A 是 n 阶正定阵，则 $\begin{pmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{pmatrix}$ 半正定，由此得 $\alpha' A\alpha + \beta' A^{-1}\beta - 2\alpha'\beta \geq 0$.

3. A 正定当且仅当存在唯一对角元全是正数的上三角阵 C，使得 $A = C'C$.

4. 设 A 是 n 阶实矩阵，记 A_k 是 A 的第 k 个顺序主子式，当 $A_k \neq 0 (1 \leq k \leq n-1)$ 时，A 合同于
$$\operatorname{diag}\left\{A_1, \frac{A_2}{A_1}, \cdots, \frac{A_n}{A_{n-1}}\right\}.$$
特别地，当 $A = (|i-j|)$ 和 $A = (\max\{i, j\})$ 时，A 的顺序主子式有一致的结构，此时求 A 的正负惯性指数.

5. 设 A 是 n 阶正定实对称阵且非主对角元都是负数，则 A^{-1} 的每个元素都是正数.

6. 设 A 是 n 阶实对称阵，且 A 的正负惯性指数分别为 p, q，令

$$N_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x' Ax = 0\}$$

记 $U \subset N_A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $\dim U \leq n - \max\{p, q\}$，并说明等号可以取到，且 N_A 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间当且仅当 $p=0$ 或者 $q=0$. 类似定义

$$N_A^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x'Ax > 0\},$$

记 $U \subset N_A^+$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $\dim U \leq p$, 并说明等号可以取到, 同理可以考虑 N_A^-.

7. 一个秩大于一的实二次型可以分解为两个实系数一次多项式之积的充要条件是它的秩是 2，且符号差为零.

8. 设
$$f = \sum_{i=1}^n (x_i - s)^2, \quad s = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$
令 $y_i = x_i - s (1 \leq i \leq n-1), y_n = x_n$，则 $ns = \sum_{i=1}^n y_i + (n-1)s$，即 $s = \sum_{i=1}^n y_i$，于是 x_i 也可以由 y_i 表出，即上述所做变换是可逆，且
$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)^2,$$
由此求出 f 的正规标准型.

9. 求 $f(X) = \mathrm{tr}(X^2), X = (x_{ij})$ 和 $f = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ 的正负惯性指数.

10. 设 $n \geq 3$, 若 A 是正定实对称阵, S 是反对称阵, 则 $\det(A+S) \geq \det A + \det(S)$, 等号成立当且仅当 $A = O$. 由此解释: 若 A 是亚正定的, 且 $A \neq A'$, 则 $\det(2A) > \det(A+A')$.

11. 设非零向量 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，则 $\alpha'\beta > 0$ 当且仅当存在正定阵 A，使得 $\alpha = A\beta$.

12. 设 A, B 是 n 阶实对称阵，若 $|A + \mathbf{i}B| = 0$，且 B 半正定，则存在非零 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，使得 $A\alpha = B\alpha = 0$.

13. 若 A, B 半正定，且 $C'(A+B)C = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，则
$$C'AC = \begin{pmatrix} A_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad C'BC = \begin{pmatrix} B_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$
由此解释：存在可逆阵 P，使得
$$P'AP = \mathrm{diag}\{d_1, \cdots, d_r\}$$
且
$$P'BP = \mathrm{diag}\{1-d_1, \cdots, 1-d_r\}.$$

14. 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2' & A_3 \end{pmatrix}$ 半正定，则 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A_1)$，由此证明：若 A,B 半正定，则 AB 可对角化.

15. 若 $A=\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ 是 n 阶矩阵，则 $A'A=\begin{pmatrix} B'B & B'C \\ CB' & C'C \end{pmatrix}$，由此证明：$\det A^2 \leq \det(B'B)\det(C'C)$.

16. 设 A,B 是 n 阶半正定实对称阵，则 $\frac{1}{n}\operatorname{tr}(AB)\geq |AB|^{1/n}$.

17. 设 A,B 是 n 阶半正定实对称阵，则 $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})$ 也是半正定的，且 $\operatorname{rank}(A\circ B)\leq \operatorname{rank}(A)\cdot\operatorname{rank}(B)$.

12 复盘 12

1. 设 A 是 n 阶实对称阵，则 $\lambda_{\max}(A)=\max\limits_{\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\dfrac{\alpha' A\alpha}{\alpha'\alpha}$. 进一步，若 B 是 n 阶正定实对称阵，不妨设 $B=C'C$，则 $AB^{-1}=AC^{-1}(C')^{-1}=C'[(C^{-1})'AC^{-1}](C')^{-1}$，即 AB^{-1} 相似于 $(C^{-1})'AC^{-1}$，令 $\beta=C\alpha$，则当 α 跑遍 $\mathbb{R}^n$ 时，β 也跑遍了 $\mathbb{R}^n$，即
$$\max_{\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\alpha' A\alpha}{\alpha' B\alpha}=\max_{\beta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\beta'[(C^{-1})'AC^{-1}]\beta}{\beta'\beta}=\lambda_{\max}(AB^{-1}).$$

2. 关于非零向量 α 的镜像变换 φ_α 就是将 $L(\alpha)$ 中向量 γ 映成 $-\gamma$，将 $L(\alpha)^\perp$ 中向量映射成本身. 从 $L(\alpha)$ 中任取非零向量 β，则 $\varphi_\alpha=\varphi_\beta$，因此我们下面讨论中 φ_α 不妨默认是关于单位向量 α 的镜像变换.

   (a) φ 是镜像变换当且仅当 φ 在某组标准正交基下的矩阵为 $\operatorname{diag}\{-1,1\cdots,1\}$. 特别地，若 φ 是正交变换，则 φ 是镜像变换当且仅当 φ 在某组基下矩阵为
$$\operatorname{diag}\{-1,1,\cdots,1\}$$
   换句话说正交变换 φ 是镜像变换当且仅当其特征多项式为 $(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$.

   (b) 二维旋转矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},(\sin\theta\neq 0)$ 可以看成两个不同的镜像变换的乘积.

   (c) 若 $\varphi=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_k}$，则
$$\dim\ker(\varphi-\mathrm{id}_V)\geq\dim\left(\bigcap_{i=1}^k L(\alpha_i)^\perp\right)\geq\ \dim(L(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)^\perp)\geq n-k$$
   进一步，若 φ 是正交变换，且 φ 的关于特征值 1 的代数重数为 r，则存在 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_s}$，使得 $\varphi=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_s}$，且 $s\geq n-r$，并说明等号可以取到.

(d) 设 α, β 是两个不同的单位向量，若镜像变换 φ，满足 $\varphi(\alpha)=\beta$，则

$$\varphi(\alpha-\beta)=\beta-\varphi^2(\alpha)=\beta-\alpha.$$

由此：存在唯一镜像变换 φ，使得 $\varphi(\alpha)=\beta$.

(e) 若 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_k}$ 是两两可换的不同镜像变换，则对任意 $i\neq j$，有

$$\varphi_{\alpha_i}\varphi_{\alpha_j}(\alpha_i)=\varphi_{\alpha_j}\varphi_{\alpha_i}(\alpha_i)=-\varphi_{\alpha_j}(\alpha_i)$$

由 φ_{α_j} 保长度,即得 $\varphi_{\alpha_j}(\alpha_i)=\pm\alpha_i$, 从而只能是 $\varphi_{\alpha_j}(\alpha_i)=\alpha_i$, 即 $(\alpha_i,\alpha_j)=0$. 综上：对于不同的 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_s}$ 两两可换当且仅当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 相互正交，于是 $s\leq n$，且等号可以取到.

(f) (苏大 2025) 让 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是 n 维欧式空间 V 中的单位向量,满足 $(\alpha_1,\alpha_2)=(\beta_1,\beta_2)$. 则存在镜像反射 φ_1，使得 $\varphi_1(\alpha_1)=\beta_1$. 此时若 $\varphi_1(\alpha_2)\neq\beta_2$, 则考虑关于 $\dfrac{\varphi_1(\alpha_2)-\beta_2}{|\varphi_1(\alpha_2)-\beta_2|}$ 的镜像反射 φ_2. 由于

$$(\varphi_1(\alpha_1),\varphi_1(\alpha_2))=(\beta_1,\varphi_1(\alpha_2))=(\alpha_1,\alpha_2)=(\beta_1,\beta_2),$$

即 $\varphi_1(\alpha_2)-\beta_2\in L(\beta_1)^\perp$, 这意味着 $\varphi_2(\beta_1)=\beta_1$, 让 $\varphi=\varphi_2\varphi_1$, 则 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i$.

3. 若欧氏空间 V 中的变换 φ 保持距离，且 $\varphi(0)=0$，则 φ 是正交变换.

4. 设 V 是 n 维欧氏空间, 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in V$ 满足 $(\alpha_i,\alpha_j)<0(i\neq j)$, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 中任意 $k-1$ 个向量线性无关，于是 $k\leq n+1$，并说明等号可以取到.

5. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}\in V$ 满足 $(\alpha_i,\alpha_j)<0(i\neq j)$, 则可以设 $\alpha_{n+1}=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$. 若 $c_i\neq 0$, 则 $c_i<0$.

6. 若 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，满足对任意 $\alpha\in\mathbb{C}^n$，有 $\overline{\alpha}'A\alpha=0$，则 $A=O$.

7. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，则存在唯一的半正定阵 C，使得 $A'A=C^2$. 设 $Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是正交阵，满足

$$Q'A'AQ=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0\cdots,0\},\quad \lambda_i>0$$

若我们想要寻找正交阵 B, 使得 $A=BC$, 只需满足 $A(\alpha_j)=B(C\alpha_j)(1\leq j\leq n)$, 即只需满足 $A(\alpha_i)=B(C\alpha_i)=\sqrt{\lambda_i}B(\alpha_i)(1\leq i\leq r)$. 我们只需将 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A\alpha_i\right\}$ 扩张为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, 取 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Q^{-1}$ 即可.

8. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$，且 $(A\alpha, A\alpha) \le (\alpha, \alpha)$. 我们说明 $\ker A \perp \mathrm{im}A$. 否则，存在 $\beta = \beta_1 + \beta_2 \in \mathrm{im}A, \alpha \in \ker A$，其中 $\beta_1 \in \ker A, \beta_2 \in (\ker A)^{\perp}$，使得 $0 \ne (\alpha, \beta)$，即 $\beta_1 \ne 0$，且 $\beta = A\beta = A\beta_2$，于是

$$(A\beta_2, A\beta_2) = (\beta, \beta) = (\beta_1, \beta_1) + (\beta_2, \beta_2) > (\beta_2, \beta_2)$$

导出矛盾. 综上解释: 投影变换 A 是到 $\mathrm{im}A$ 的正交投影当且仅当 $|A\alpha| \le |\alpha|, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ 当且仅当 A 是对称阵.

13 复盘 13

1. (湖南大学 2025) 设 A 是 n 阶实对称阵，且 $Y^TAY > 0$，记 $f(X,Y) = X'AY$.

   (a) 若 A 的正惯性指数为 1，则对任意 $X \in \mathbb{R}^n$，若 $\begin{vmatrix} f(Y,Y) & f(X,Y) \\ f(X,Y) & f(X,X) \end{vmatrix} \ne 0$，此时 AX, AY 线性无关. 则方程组 $\begin{pmatrix} X'A \\ Y'A \end{pmatrix} \alpha = 0$ 的解空间维数是 $n-2$，取其一组基础解系记为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-2}$，令 $Q = (Y, X, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-2})$，则 Q 是可逆阵，且

   $$Q'AQ = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} f(Y,Y) & f(X,Y) \\ f(X,Y) & f(X,X) \end{pmatrix}.$$

   由 A 的正惯性指数为 1，则 A_1 的正惯性指数为 1，因此必有 $\det(A_1) < 0$.

   (b) 若 A 的正惯性指数大于等于 2,我们希望找到 $X \in \mathbb{R}^n$, 使得 $f(X,X)f(Y,Y) > f(X,Y)^2$. 将 $Y'X = 0$ 的一组基础解系记为 $Y_1, \cdots, Y_{n-1}$,令 $P = (Y, Y_1, \cdots, Y_{n-1})$, 则 P 是可逆阵，且 $P'AP = \begin{pmatrix} f(Y,Y) & O \\ O & A_3 \end{pmatrix}$, 因此我们不妨一开始便设 $A = \begin{pmatrix} f(Y,Y) & O \\ O & A_3 \end{pmatrix}$,$Y = e_1$. 设 $X = \begin{pmatrix} a \\ X_1 \end{pmatrix}$，其中 $X_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$，则 $f(X,Y) = af(Y,Y)$，且 $f(X,X) = a^2f(Y,Y) + X_1'A_3X_1$. 由于 A_3 的正惯性指数大于 0，我们总能找到 X_1，使得 $X_1'A_3X_1 > 0$，此时就有

   $$f(X,Y)^2 = a^2f(Y,Y)^2 < (a^2f(Y,Y) + X_1'A_3X_1)f(Y,Y) = f(X,X)f(Y,Y).$$

2. 我们将上述想法总结出来：设 V 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，f 是 V 上一个双线性函数，若 W 是 V 的子空间，且 $f|_W$ 是非退化的，即 $\alpha \in W$ 满足 $f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in V \iff \alpha = 0$. 令

   $$W^{\perp} = \{\alpha \in V \mid f(\beta, \alpha) = 0, \forall \beta \in W\},$$

则 $W^{\perp}$ 是 V 的子空间，且 $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. 下面我们说明 $V = W \oplus W^{\perp}$, 为此考虑 $\varphi : V \longrightarrow W^{*}, \alpha \longmapsto f_{\alpha}$，其中 f_{α} 定义为 $f_{\alpha}(\beta) = f(\beta, \alpha), \forall \beta \in W$. 则 $\varphi|_{W}$ 是线性同构，即 φ 是满射，且 $\ker \varphi = W^{\perp}$. 由维数公式就有

$$n = \dim \mathrm{im}\varphi + \dim \ker \varphi = \dim W^{*} + \dim W^{\perp} = \dim W + \dim W^{\perp}.$$

由此，我们也可以给出实对称阵或者反对称阵的合同标准型.

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，且 $x'Ay = 0 \Longleftrightarrow yAx' = 0$，则 A 是实对称阵或者反对称阵.

4. 设 V 是 n 维复线性空间，$x \in \mathrm{End}(V)$，定义 $\mathrm{End}(V)$ 上的线性变换

$$\mathrm{ad}_x : \mathrm{ad}_x(y) = [x, y], \quad \forall y \in \mathrm{End}(V).$$

记 i 是 V 上的恒等变换，则 $\mathrm{ad}_{x-\lambda i} = \mathrm{ad}_x$, 从而 $\mathrm{ad}_x^m = \mathrm{ad}_{x-\lambda i}^m$, 且由

$$\mathrm{ad}_x^3(y) = x^3y - yx^3 - 3x^2yx + 3xyx^2$$

可以归纳出

$$\mathrm{ad}_x^m(y) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k x^{m-k} y x^k$$

综上就有：设 $y \in \mathrm{End}(V)$，则 x 的任一根子空间 R_λ 都是 y 的不变子空间当且仅当存在正整数 s，使得 $\mathrm{ad}_x^s(y) = 0$.

5. 设 A 是 n 阶实矩阵，则 A 可以酉相似上三角化，于是 $\mathrm{tr}(AA') \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$，其中 $|\lambda_i|^2$ 表示 A 特征值模长的平方，且等号成立当且仅当 A 可以酉相似对角化，即 A 是正规阵.

6. 设 A 是 n 阶实矩阵，$f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式，记 $p(\lambda)$ 是 f 在 $\mathbb{R}$ 上的一个不可约因式，则 $\deg p(\lambda) \leq 2$，记 $W = \ker p(A)$，则 $A|_W$ 上的最小多项式为 $p(\lambda)$. 任取非零向量 $\alpha \in W$，则 $\dim\left(C(A, \alpha)\right) = \deg p(\lambda)$，即 A 有一维或者二维不变子空间，于是 A 实（或者正交）相似于一个分块对角阵 $\mathrm{diag}\{A_1, \cdots, A_r\}$，其中 A_i 是一阶或者二阶的.

7. 设 A 是 n 阶实正规阵，则 A 酉相似可对角化，设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 A 所有不同特征值，令

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \overline{\lambda_i} \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

则 $f(A) = A'$，设 $f = g + \mathbf{i}h$，其中 $g, h \in \mathbb{R}[x]$，比较两边实部与虚部即得 $g(A) = A'$.

8. 设 A,B 是 n 阶实正规阵，且 $AC=CB$，则

$$\operatorname{tr}(A'CC'A)=\operatorname{tr}(CC'AA')=\operatorname{tr}(CC'A'A)=\operatorname{tr}(C(CB)'A)=\operatorname{tr}(CB'C'A)$$

由此得 $\operatorname{tr}[(A'C-CB')(A'C-CB')']=0$，即 $A'C=CB'$. 特别地，若 $AC=CA$，则 $A'C=CA'$.

9. 设 n 维欧氏空间 V 中的线性变换 φ 保持正交性，即若 $(\alpha,\beta)=0$，则 $(\varphi\alpha,\varphi\beta)=0$，则存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $\psi\in O(V)$，使得 $\varphi=\lambda\psi$.

14 复盘 14

1. 设 A 是 n 阶实矩阵，记 $Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为正交阵，满足

$$Q'A'AQ=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0\},\quad \lambda_i>0$$

若我们想找到正交阵 $O=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 使得

$$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ & & & O\end{pmatrix}$$

只需满足 $\beta_i=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A(\alpha_i)$，故我们只需要将单位正交向量组 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A\alpha_i\right\}_{i=1}^{r}$ 扩张为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基即可. 综上，存在正交阵 O_1,O_2，其中 O_2 取为 Q，使得

$$O_1AO_2=\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_r},0,\cdots,0\right\},\quad \lambda_i>0$$

2. 设 A,B,AB 都是正规阵，则 BA 也是正规阵.

3. (2025 云南大学) 设 e_j 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位向量，记 φ_i 是关于 $e_i-e_{n+1}(1\le i\le n)$ 的镜面反射，若 $j\ne i,n+1$，则 $(e_i-e_{n+1},e_j)=0$，即 $\varphi_i(e_j)=e_j$. 再由 $(e_i+e_{n+1},e_i-e_{n+1})=0$ 得

$$\varphi_i(e_i-e_{n+1})=e_{n+1}-e_i$$

$$\varphi_i(e_i+e_{n+1})=e_i+e_{n+1}$$

这样就有 $\varphi_i(e_i)=e_{n+1},\varphi_i(e_{n+1})=e_i$，于是对任意 $\alpha\in\mathbb{R}^{n+1}$，$\varphi_i$ 作用的结果是将 α 的第 1 行与第 $n+1$ 行对换. 记

$$W=\{\varphi_{i_1}\cdots\varphi_{i_k}\mid k\in\mathbb{N},\quad i_1,\cdots,i_k\in\{1,\cdots,n\}\}$$

则 α 通过若干次上述对换可以有如下事实：对换后的前 n 个分量都大于等于第 $n+1$ 个分量，换句话说，存在 $\varphi \in W$，使得

$$(\varphi(\alpha), e_i - e_{n+1}) \geq 0, \quad \forall i = 1, \cdots, n.$$

4. 设 e_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位列向量，记 $\varphi_{i,j}$ 是关于 $e_i - e_j$ 的镜面反射，其中 $1 \leq i < j \leq n$，令

$$W = \{\varphi_{i_1.j_1} \cdots \varphi_{i_k,j_k} \mid k \in \mathbb{N}, \quad i_t, j_t \in \{1, 2, \cdots, n\}\},$$

求集合 W 所有元素个数.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 是 n 阶实正规阵，其中 A_1 是 r 阶方阵，则 $B = O$，且 A_1, C 是正规阵.

6. 实正规变换属于不同特征值的特征向量相互正交. 进一步，设 A 是 n 阶实正规阵，λ 是 A 的一个复特征值，$\alpha + \beta\mathbf{i}$ 是对应特征向量，两边取共轭得，$\alpha - \beta\mathbf{i}$ 是 A 关于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量，于是

$$0 = (\alpha + \beta\mathbf{i}, \alpha - \beta\mathbf{i}) = (\alpha, \alpha) - (\beta, \beta) + 2\mathbf{i}(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) = \alpha'\overline{\beta}.$$

即有 α, β 相互正交且 $|\alpha| = |\beta|$.

7. 设 A 是 n 阶可逆实反对称阵，令

$$G = \left\{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B'AB = A\right\}$$

则 G 是特殊线性群 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 的子群. 提示：任取 $B \in G$, 注意条件和结论在变换：$A \mapsto C'AC, B \mapsto C^{-1}BC$ 下不会发生变换, 因此不妨一开始便设 $A = \begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}$.

8. 设 A 是 n 阶矩阵，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ 是 A 的 $n+1$ 个特征向量，满足其中任意 n 个向量线性无关，则存在 $k \in \mathbb{C}$，使得 $A = kI_n$.

9. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，取定 $f_1, \cdots, f_n \in V^*$，令 $U^* = \operatorname{span}\{f_1, \cdots, f_n\}$，取定 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，定义 $U^* \longrightarrow \mathbb{F}^n$ 上的线性变换

$$\varphi : f \longmapsto \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix}, \quad \forall f \in U^*$$

则 φ 是单射，于是 $f_1, \cdots, f_n$ 线性无关当且仅当 $n = \dim U^* = \dim \mathrm{im}\varphi$，当且仅当 $A = (\varphi(f_1), \cdots, \varphi(f_n))$ 是可逆阵，当且仅当 $A'x = 0$ 仅有零解，即当且仅当 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i = \{0\}$.

10. (2021 川大) 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\varphi \in \mathrm{End}(V)$，定义 V^* 上的线性变换 B：对任意 $g \in V^*$，$B(g)$ 定义为

$$B(g)(\alpha) = g(\varphi(\alpha)), \quad \forall \alpha \in V.$$

取定 $f \in V^*$，则 $B^k(f)(\alpha) = f(\varphi^k(\alpha))$. 对任意 $\alpha \in V$，记

$$C(\varphi, \alpha) = \mathrm{span}\left\{\alpha, \varphi\alpha, \cdots, \varphi^{n-1}\alpha\right\}$$

于是 $\alpha \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} B^{k-1}(f)$ 当且仅当 $C(\varphi,\alpha) \subset \ker f$. 这样就有 $f, B(f), \cdots, B^{n-1}(f)$ 线性无关当且当对任意 $0 \neq \alpha \in V, C(\varphi,\alpha) \not\subseteq \ker f$. 换句话说，当且仅当对任意 φ 的非零不变子空间 W, 有 $W \not\subseteq \ker f$: 如果 $W \subset \ker f$ 是 φ 的非零不变子空间，任取非零向量 $\alpha \in W$，则有 $C(\varphi,\alpha) \subset W \subset \ker f$, 矛盾.

15 复盘 15

1. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换，若将 V 看成是 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 线性空间，此时将 φ 看成实线性空间 V 上的线性变换，则 $\det(\varphi) \geq 0$.

2. 设 A 是 n 阶复矩阵，且 $\mathrm{Rank}(A - \lambda I) \geq n-1, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. 若 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$，满足 $AX = XA^T$，则 X 是对称阵.

3. 求

$$A = \begin{pmatrix} & & & n-1 \\ & & n-2 & \\ & \iddots & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型.

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} & & & a_n \\ & & a_{n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_1 & & & \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

讨论 A 的 Jordan 型，并求可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为 A 的 Jordan 型.

5. 设 n 阶反对称阵 A 的所有元素都是整数，则存在整数 m，使得 $|A| = m^2$.

6. 若 A, B, C 是正定阵，则 ABC 正定当且仅当 $ABC = CBA$.

7. 设 $M = N + S$，其中 N 是 n 阶实对称阵，S 是实反对称阵，且 $SN = M^2 = O$，则 $M = O$.

8. 设 A, B 是 2025 阶实矩阵，满足 $AB - BA = A$. 若 B 的最小多项式为 $\lambda^2(\lambda - 1)$，则 $A^2 = O$.

9. 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵，且 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(A + B)$. 注意条件在相抵变换下不会发生变换，不妨一开始设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，并记 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 为对应分块，则 $\text{rank}(B_4) = \text{rank}(B)$，由此证明存在 P, Q，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

10. 设 A 是 n 阶实对称阵，则存在实对称阵 B, C，使得 $A = BC$，且 $[B, C] = O$，B 正定，以及 $C^3 = C$.

16 复盘 16

1. 设 f, g 是首一整系数多项式，且 $(f, g) = 1$. 若 f 在 $\mathbb{C}$ 上的根为 $x_1, \cdots, x_n$，则 $\left|\prod_{i=1}^{n} g(x_i)\right| \in N^+$.

2. 设 $AB - BA = (A - B)^k, (k \in N^+)$，则 A, B 可同时上三角化，且当 $k = 2$ 时，A, B 有相同的特征多项式.

3. 设 $A, B, X \in \mathbb{C}^{3\times 3}$，满足，存在多项式 f, g，使得 $f(X) = A, g(X) = B$，且 $A^2 = B^2 = O$，则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $A = \lambda B$ 或 $B = \lambda A$.

4. 设 A 是 n 阶复矩阵，且 $A^{n-1} \neq 0$，则对任意 $k \in N$，方程 $X^k + X^{k-1} + \cdots + X = A$ 在复数域上有解.（本题是对上海师范 2025 第八题推广）

5. 设 A 是主对角元全为 2025 的 2025 阶复上三角矩阵，满足 $\text{rank}(A - 2025I)^{2024} = 1$. 若多项式 f 满足 $f(0) = 2025, f'(0) = 2026$，则方程 $f(X) = A$ 在复数域上有幂零解.

6. 设 A 是 n 阶实正交阵，记 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$，其中 A_1 是 A 的 k 阶顺序主子式，则由 $AA' = I_n$ 得

$$A \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}$$

于是

$$|A_4| = \begin{vmatrix} I_k & C \\ O & A_4 \end{vmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} A_1' & O \\ A_2' & I_{n-k} \end{pmatrix} = |A| \cdot |A_1'|$$

即 $|A_1| = |A|^{-1}|A_4|$，其中 $|A_4|$ 是 $|A_1|$ 的代数余子式. 由此证明：A 的任一 k 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的值为 $|A|^{-1}$ 乘以其代数余子式的值.

7. 正交阵 A 的任一 k 阶子阵的特征值模长都不超过 1.

8. 设 P 是 n 阶正交阵，且 A 是实对称阵，若 A 的特征值的绝对值落在 $[m, M]$，则 PA 特征值的模长也落在 $[m, M]$.

9. 设 V 是 n 阶实矩阵全体，则 $(A, B) = \mathrm{tr}(AB^T)$ 是 V 上的一个内积. 定义 V 上的线性变换 $\varphi(X) = AXB$，则 φ 在标准正交基 $\{E_{ij}\}$（取定顺序）下的表示阵为 $A \otimes B^T$，则 φ^* 在这组基下矩阵为 $(A \otimes B^T)^T = A^T \otimes B$. 则 φ 是正规变换，当且仅当 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$，即

$$(AA^T) \otimes (B^T B) = (A^T A) \otimes (BB^T)$$

我们很容易验证张量的一个性质：若 A, B, C, D 均是 n 阶非零矩阵，则 $A \otimes B = C \otimes D$，当且仅当存在 k，使得 $A = kC, B = \dfrac{1}{k}D$. 那么对于上述情形而言，若 A, B 均是非零矩阵，则有 $AA^T = kA^T A$，两边取迹得 $k = 1$，即 A, B 均是正规阵.

10. 用白皮书 P511 的方法重写第 9 题，并解释：若定义 $f(A) = \mathrm{tr}(AA')$，取 n 阶实可逆阵 P，若 $f(P^{-1}AP) = f(A)$, 对任意 n 阶实矩阵 A 成立，则存在 c，使得 $P'P = cI_n$.

17 复盘 17

1. 设 $AB^T = BA^T$，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD^T - BC^T|$. 问题的关键是对 A 如何进行摄动，使得摄动后的矩阵 A_t 保持 $A_t B^T = BA_t^T$ 的条件. 下面的想法值得积累：设 $PBQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，则 $BQ(P^{-1})^T$ 是对称阵，令 $C = Q(P^{-1})^T$，则 C 可逆且 $BC = C^T B^T$. 因此可以做摄动 $A \mapsto A + tC^T$.

2. 设 A, B, C 是实矩阵，且 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ 是半正定阵，则 $\rho(B)^2 \le \rho(A)\rho(C)$，其中 $\rho(B)$ 是 B 特征值模长的最大值：首先考虑矩阵正定情形，此时 A, C 正定，且

$C - B'A^{-1}B$ 也正定. 设 $|\lambda| = \rho(B)$，β 为 λ 对应特征向量，则

$$\rho(C)\overline{\beta}'\beta \geq \overline{\beta}'C\beta > \overline{\beta}'(B'A^{-1}B)\beta = \rho(B)^2\overline{\beta}'A^{-1}\beta \geq \rho(B)^2\rho(A)^{-1}\overline{\beta}'\beta$$

即有 $\rho(B)^2 < \rho(A)\rho(C)$. 对于一般情形，摄动即可.

3. 若 A 是 n 阶实对称阵，且其中元素均非负，设 A 的特征值为 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$，记 $|\lambda_k| = \rho(A)$，$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)'$ 是 λ_k 对应特征向量，则

$$\rho(A)\alpha'\alpha = |\lambda_k\alpha'\alpha| = |\alpha'A\alpha| \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|a_i||a_j| = \beta'A\beta \leq \lambda_n\beta'\beta = \lambda_n\alpha'\alpha$$

其中 $\beta = (|a_1|, \cdots, |a_n|)'$，由此得 $\lambda_n = \rho(A)$.

4. 设 A, B 都是半正定阵，且 A, B 的特征值分别落在 $[a, b], [c, d]$ 中，则 AB 的特征值落在 $[ac, bd]$ 中.

5. 设 A 是 n 阶实矩阵，且 $A + A'$ 正定. 若 C 是正定对称阵，则 $A'B + BA = C$ 有唯一正定解.

6. 设 A 是半正定阵，且存在正整数 k，使得 $A^kB = BA^k$，则 $AB = BA$.

7. 设 A 为 n 阶半正定阵对称阵，B 为 n 阶反对称阵，且 $AB + BA = O$，则 $|A + B| \neq 0$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) = n$.

8. 设 A, B 是正定对称阵，且 $A \geq B$，则 $A^{1/2} \geq B^{1/2}$.

9. 设 A 是 n 阶正定实对称阵，取定 $\beta \in \mathbb{R}^n$，令

$$f(X) = \frac{1}{2}X^TAX - X^T\beta$$

则 f 有最小值，并求出取最小值的条件: 这是一类经典的用矩阵处理二次型的题目. 首先我们将 f 改写为

$$f(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -\beta \\ -\beta' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

并做如下合同变换

$$\begin{pmatrix} A & -\beta \\ -\beta' & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A & O \\ O & \beta'A^{-1}\beta \end{pmatrix}$$

其中所使用的初等阵 $C = \begin{pmatrix} I & A^{-1}\beta \\ O & 1 \end{pmatrix}$，设

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} Y \\ a \end{pmatrix}$$

则解出

$$\begin{pmatrix} Y \\ a \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - A^{-1}\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而当 $Y'AY = 0$，即 $AX = \beta$ 时，函数取最小值，且最小值为 $\beta' A^{-1}\beta$.

18 复盘 18

1. 设 φ, ψ 是 V 上的线性变换，且 φ 可对角化，ψ 幂零，以及 $\varphi\psi = \psi\varphi$. 记 φ 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，对应特征子空间为 V_{λ_i}，则 V_{λ_i} 是 ψ 不变子空间，记 $\psi|_{V_{\lambda_i}}$ 上最小多项式为 $m_i(\lambda) = \lambda^{k_i}$，则 ψ 的最小多项式为 $[m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$，即 $m_i(\lambda)$ 中次数最大值，且 $\varphi + \psi$ 的最小多项式为

$$[(\lambda - \lambda_1)^{k_1}, \cdots, (\lambda - \lambda_s)^{k_s}] = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

于是 ψ 的最小多项式次数与 $\varphi + \psi$ 的最小多项式次数相同当且仅当 $s = 1$，即 φ 是数乘变换.

2. 设 φ 是 $\mathbb{F}[x]$ 上的求导变换，W 是 φ 的一个有限维非零不变子空间，且 $\dim W = k$，则 W 中至少有一个 $k-1$ 次多项式，从而 $1, \cdots, x^{k-1} \in W$(不断求导), 构成 W 的一组基，即 $W = \operatorname{span}\left\{1, \cdots, x^{k-1}\right\}$.

3. 设 φ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的求导变换，则 φ 在基 $\left\{1, x, \dfrac{x^2}{2}, \cdots, \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$ 下矩阵为 J，其中 J 是上次对角元为 1 的 n 阶零 Jordan 块.

4. 设

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为 n 阶零 Jordan 块，设 $W \subset \mathbb{R}^n$ 是 J 的 k 维非零不变子空间，对任意 $\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_i e_i \in W$，由 C-H 定理，

$$0 = J^k(\alpha) = a_{k+1}e_1 + \cdots + a_n e_{n-k}$$

于是有 $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$,即 $W \subset \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_k\}$,从而 $W = \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_k\}$.

5. 设 φ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，设 $m(\lambda)$ 是 φ 的最小多项式. 对任意 $\alpha \in V$，存在唯一次数最小的首一多项式 $m_\alpha(\lambda)$，使得 $m_\alpha(\varphi)(\alpha) = 0$. 则存在 $\beta \in V$，使得 $m_\beta(\lambda) = m(\lambda)$.(不用现成的有理标准型角度理解)

6. 设 $A=(a_{ij})$ 是三阶第一类正交阵，即 $|A|=1$，不妨设 A 特征值为 $1,\lambda_1,\lambda_2$, 则 $\lambda_1\lambda_2=1$，这样即有

$$\begin{aligned}(1-\operatorname{tr}(A))^2+\sum_{1\le i<j\le 3}(a_{ij}-a_{ji})^2&=(\lambda_1+\lambda_2)^2+\frac{1}{2}\operatorname{tr}[(A-A^T)(A^T-A)]\\&=(\lambda_1+\lambda_2)^2+3-\operatorname{tr}(A^2)=2+2\lambda_1\lambda_2=4.\end{aligned}$$

7. 设

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-1&2&1\\3&-3&2\end{pmatrix}$$

则对任意正整数 k，A^k 的所有元素之和能被 6 整除.

8. 设 φ 是 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 中的线性变换，W 是 V 的一个子空间，记

$$\varphi^{-1}(W)=\{v\in V\mid\varphi(v)\in W\},$$

则 $\varphi^{-1}(W)$ 是 V 的子空间，且

$$\dim W\le\ \dim\left(\varphi^{-1}(W)\right)\le\ \dim W+\dim\ker\varphi.$$

9. 设 $B_1,\cdots,B_k$ 是幂等阵，则 $\operatorname{rank}(I-B_1\cdots B_k)\le k(n-\operatorname{rank}(B_1\cdots B_k))$.

10. 设 $V=\mathbb{R}^n$，内积取为 $(\alpha,\beta)=\alpha\beta'$. 设 W 是 V 的子空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 W 一组给定生成元，对于任意给定 $\alpha\in V$，如何求 α 在 W 中的正交投影：不妨设 $\beta=\sum_{i=1}^r x_i\alpha_i$ 是 α 在 W 中的正交投影，则 $(\alpha-\beta,\alpha_i)=0$，即有方程组 $A'AX=A'\alpha$，其中

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\cdots&\alpha_r\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}$$

而方程 $A'AX=A'\alpha$ 总是有解的，解有可能不唯一，但是 AX 总是唯一的，因为正交投影唯一，且解唯一当且仅当 A 列满秩，即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

19 复盘 19

1. 设 φ 是 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间中的线性变换，则 $V=\operatorname{im}\varphi+\ker\varphi$ 当且仅当 $\varphi|_{\operatorname{im}\varphi}$ 是线性同构.

2. 设 A 是 n 阶实矩阵，且存在实矩阵 P，使得 $A^T = AP$，则 A 的行向量组可以由 A 的列向量组线性表出，即 $(\mathrm{im}A)^{\perp} \subset \ker A$，结合维数公式
$$n = \dim \ker A + \dim \mathrm{im}A = \dim \mathrm{im}A + \dim(\mathrm{im}A)^{\perp}$$
即有 $(\mathrm{im}A)^{\perp} = \ker A$. 那么取 $\mathrm{im}A, \ker A$ 的一组标准正交基拼成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基:$Q = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，则
$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix}$$
其中 B 是可逆阵.

3. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 中的线性变换，则 $V = \mathrm{im}\varphi \perp \ker\varphi$ 当且仅当 $\ker\varphi \subset \ker\varphi^*$ 当且仅当 $\ker\varphi = \ker\varphi^*$ 当且仅当存在 $\psi \in \mathrm{End}(V)$，使得 $\varphi = \psi\varphi^*$ 当且仅当存在 $\psi \in \mathrm{End}(V)$，使得 $\varphi = \varphi^*\psi$.（上面是对中科大 2025 第 10 题的总结与推广）

4. 设 $SL(2)$ 是二阶行列式为 1 的整数阵全体，若 $A \in SL(2)$，满足存在 k，使得 $A^k = I_2$，此时记 $o(A)$ 是满足 $A^k = I_2$ 的最小整数，求 $S = \{n \mid A \in SL(2), o(A) = n\}$: 若 $A \in SL(2)$，满足 $A^k = I_2$，则 A 的特征值为单位根，从而 A 特征多项式为 $x^2 + 2\cos\theta \cdot x + 1$ 为整系数多项式，即可能的情形为 $(x \pm 1)^2, x^2 \pm x + 1, x^2 + 1$. 对于这当中的每个情形，很容易构造对应的 $A \in SL(2)$ 满足，于是 $S = \{1, 2, 3, 6, 4\}$.

5. 设 A 可对角化，若 λ 是 A 的一个特征值，α 为对应特征向量，则 $(A - \lambda E)X = \alpha$ 无解.

6. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换，则 φ 可对角化当且仅当对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$，有
$$V = \mathrm{im}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) + \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V).$$

7. 设 $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ 的特征多项式是 $\mathbb{Q}[x]$ 上的不可约多项式，记 $W = \{f(A) \mid f \in \mathbb{Q}[x]\}$，则 W 中任何非零元都可逆. 进一步，设 $\alpha \in \mathbb{C}$ 是 A 的一个特征值，记 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 是包含 α 的最小数域，可以将 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 看成 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，则 W 与 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 是线性同构的.

8. 设有整系数多项式 $f = x^3 + ax^2 + bx + c$，且 $ac + ac$ 为奇数，则 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

9. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵，且 A 正定，若 AB 的特征值全为 1，则存在次数小于 n 的多项式 f，使得 $B = f(A)$.

10. 设 A, B 均是半正定阵，则存在可逆阵 C，使得 $C'AC, C'BC$ 同为对角阵.

20 复盘 20

1. 设 n 维欧氏空间 V 中有 $n+1$ 个向量 $\alpha_0,\cdots,\alpha_n$，满足两两之间的距离为 $d>0$，令 $\beta_i=\alpha_i-\alpha_0(1\leq i\leq n)$，则对任意 $i\neq j$，有 $(\beta_i,\beta_j)=\dfrac{d^2}{2}$，且 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 构成 V 的一组基.

2. 设 A 为 8 阶正交阵，则 A 不存在元素全为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的三阶子阵.

3. 设 A 为 n 阶实对称阵，则 A 有 n 个不同特征值当且仅当对任意 A 特征值 λ，以及相应的特征向量，矩阵

$$\begin{pmatrix} A-\lambda I & \alpha \\ \alpha' & 0 \end{pmatrix}$$

是可逆阵.

4. 设 A 是 n 阶半正定阵，则存在 $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，使得 $A+BB'$ 正定且 $|B'(A+BB')^{-1}B|=1$ 的充要条件是 $\operatorname{rank}(A)=n-m$.

5. 设 A 为 n 阶实对称阵，S 为 n 阶实可逆反对称阵，且 $AS=SA$，则 $|A+S|\geq|S|$，且等号成立当且仅当 $A=O$.

6. 利用内积 $(A,B)=\operatorname{tr}(AB^T)$，可以得到对任意 n 阶实矩阵 A，有 $\operatorname{tr}(A)^2\leq n\cdot\operatorname{tr}(AA')$.

7. 利用矩阵的奇异值分解，将上述结果改进为: 对任意 n 阶实矩阵 A，有 $\operatorname{tr}(A)^2\leq\operatorname{rank}(A)\cdot\operatorname{tr}(AA')$.

8. 不存在正交阵 A,B，使得 $A^2=cAB+B^2$，其中 c 是非零实数.

9. 设 A 是 n 阶正交阵，且 $|A|=1$，若设 f 的特征多项式为

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

则有 $a_i=(-1)^na_{n-i}(i=0,1,\cdots,n)$.

10. 设 A,B 是 n 阶矩阵，且 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B),BA=A$，则 $B^2=B$.