

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

本课题的核心任务是：给出半单线性变换的判定准则及其在高等代数中的一些相关应用.

- ① 在国内主流高等代数教材中，鲜有在正文内容提及半单线性变换以及它在高等代数中的应用，且教材的叙述缺乏高等代数与后续课程之间的过渡与联系.
- ② 本论文借助半单线性变换视角，在介绍半单变换的应用方面，自然的嵌入高等代数中与Lie 理论，群论，群表示论等课程有联系的知识，是一个有意义，有创意的选题方向，同时也具有一定的教学实践意义.

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺ ↻

6 / 42

- 当 $m(\lambda) \neq f(\lambda)$ 时, 由 Jordan 型理论, φ 有大于等于 2 维的特征子空间, 进而容易构造出 φ 的无数个不同不变子空间.
- 如下我们主要考虑 $m(\lambda) = f(\lambda)$ 的情形.

定理 3

设 $\varphi \in \text{End}(V)$, $f(\lambda) = m(\lambda) = \prod_{i=1}^s p_i^{k_i}(\lambda)$, 其中 $p_i(\lambda)$ 是域 \mathbb{F} 上的不可约因式. 则 φ 的任一不变子空间 W , 可表示为:

$$W = \bigoplus_{i=1}^s \ker p_i(\varphi)^{r_i}, \quad r_i \in [0, k_i] \cap \mathbb{Z}.$$

故 φ 有 $\prod_{i=1}^s (k_i + 1)$ 个不同的不变子空间.

- $$W = \bigoplus_{i=1}^s \left(W \cap \ker p_i(\varphi)^{k_i} \right)$$

4 论文可改进的点

① 课题内容和意义

② 半单线性变换的判定准则

③ 半单线性变换的应用

- 正规变换的正交相似标准型
- 可同时对角化与可同时上三角化
- Jordan-Chevalley 分解及应用
- 三维旋转的描述和群结构

④ 论文可改进的点

相似标准型 I

定理 4

设 φ 是 n 维欧式空间 V 上的正规变换, 则存在 V 的一组标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 下的矩阵为

$$\text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, A_1, A_2, \dots, A_t \},$$

其中 $A_i = r_i \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}$, $r_i > 0$, $\sin \varphi_i \neq 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

并将定理4推广到酉空间中.

对于欧式空间中常见的正规变换, 如对称变换, 反对称变换, 正交变换, 作为定理4的推论, 我们通过研究其各自的特征值性质, 给出了相应的正交相似标准型.

镜像反射 I

定理 5

让 V 是 n 维欧式空间, 则

$$O(V) = \left\{ \text{有限积} \prod_{i \in I} \varphi_{\alpha_i} : \alpha_i \in V, (\alpha_i, \alpha_i) = 1 \right\},$$

这里 φ_{α_i} 是关于单位向量 α_i 的镜像反射.

镜像反射 II

作为定理5证明过程的进一步推论，我们给出了正交变换 φ 表示为镜像反射所需镜像反射的最小个数：

$$\text{rank}(I - \varphi)$$

置换矩阵 I

定理 6

让 Ω 表示 n 阶实置换矩阵全体, 则 Ω 的不变子空间 (即是 Ω 中所有元素的不变子空间), 只有

$$\{\{0\}, \mathbb{R}^n, W, W^\perp\},$$

其中

$$W = \{(k, k, \dots, k)' \mid k \in \mathbb{R}\}$$

置换矩阵 II

定理 7

让 Ω 表示 n 阶实置换矩阵全体, 则与 Ω 中所有元可换的矩阵是

$$C(\Omega) = \{aI_n + bB \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

这里 B 是元素全为 1 的矩阵.

- 1 课题内容和意义
- 2 半单线性变换的判定准则
- 3 半单线性变换的应用
 - 正规变换的正交相似标准型
 - 可同时对角化与可同时上三角化
 - Jordan-Chevalley 分解及应用
 - 三维旋转的描述和群结构
- 4 论文可改进的点

同步对角化 I

定理 8

设 \mathcal{M} 是由 n 维复线性空间 V 中若干个线性变换组成的复线性空间, 满足 \mathcal{M} 中所有元素都是半单的, 且两两可换, 则

$$V = \bigoplus_{f \in \mathcal{M}^*} V_f. \quad (1)$$

这里

$$V_f = \{v \in V \mid x(v) = f(x)(v), \forall x \in \mathcal{M}\}.$$

同步对角化 II

作为定理8证明过程的直接推论，我们给出了一族半单线性变换可同时对角化的充要条件是两两可换.

同步上三角化

我们又进一步探究了同步上三角化的条件，证明了

定理 9

设 V 是 \mathbb{C} 上的有限维线性空间，则

- 让 $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ ，如果 $r[\varphi, \psi] \leq 1$ 或者 $[\psi, \varphi] \in L(\psi, \varphi)$ ，此时 φ, ψ 可同步上三角化。
- 若 \mathfrak{g} 是 $\text{End}(V)$ 的子空间，满足
 - ① 对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$ ，有 $xy \in \mathfrak{g}$ 。
 - ② 对任意 $x \in \mathfrak{g}$ ， x 是幂零变换。

此时 \mathfrak{g} 中元素可同步上三角化。

于是可同步上三角化的条件要比可同步对角化条件宽松许多，给出严格的判定需从 Lie 理论角度观照。

幂零指数估计

考虑定理9 的特殊情形: $[A, B] = B$ 的情形, 我们已经知道 B 是幂零线性变换, 进一步我们想给出 B 的幂零指数的一个估计, 在特定情形下: A 可对角化的条件下, 我们证明了

推论 10

若 A 在复数域上可对角化, 且 $[A, B] = \mu B$, 这里 μ 是非零复数. 设 A 有 k 个不同特征值, 则 B 的幂零指数小于等于 k , 即 $B^k = O$.

- 1 课题内容和意义
- 2 半单线性变换的判定准则
- 3 半单线性变换的应用**
 - 正规变换的正交相似标准型
 - 可同时对角化与可同时上三角化
 - **Jordan-Chevalley 分解及应用**
 - 三维旋转的描述和群结构
- 4 论文可改进的点

Jordan-Chevalley 分解

定理 11

设 \mathbb{F} 为代数闭域, V 为 \mathbb{F} 上的线性空间, \mathcal{A} 为 V 上的线性变换, 则存在 V 上的半单线性变换 \mathcal{A}_s 和幂零线性变换 \mathcal{A}_n 满足:

- $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_n$, $[\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_n] = \mathcal{A}_s \mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n \mathcal{A}_s = 0$.
- 存在常数项为零多项式 $p(\lambda), q(\lambda)$ 使得 $\mathcal{A}_s = p(\lambda), \mathcal{A}_n = q(\lambda)$.
- 如果 $\mathcal{A}'_s, \mathcal{A}'_n$ 分别为半单和幂零线性变换使得 $\mathcal{A} = \mathcal{A}'_s + \mathcal{A}'_n, [\mathcal{A}'_s, \mathcal{A}'_n] = 0$. 则必有 $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}'_s, \mathcal{A}_n = \mathcal{A}'_n$.

JC 分解应用 I

其次证明了一般线性 Lie 代数 $End(V)$ 的导子等于内导子，并由此证明了 $End(V)$ 中导子的 Jordan-Chevalley 分解中的半单和幂零部分也都是导子. 最后，我们利用 Jordan-Chevalley 分解，证明了

定理 12

设 \mathbb{F} 为特征为零的代数闭域， V 为 \mathbb{F} 上线性空间， $M_1 \subseteq M_2$ 为 $End(V)$ 的两个线性子空间，定义

$$W = \{x \in End(V) \mid [x, M_2] \subseteq M_1\}.$$

又设 $x \in W$ 满足条件 $\text{tr}(xy) = 0, \forall y \in W$. 则 x 是幂零线性变换.

定理12是证明 Lie 理论中 cartan 准则最为关键的一步.

JC 分解应用 II-思路

- ① \mathbb{F} 是 \mathbb{Q} 的扩域, 设 E 是 x 特征值线性张成的 \mathbb{Q} 上的线性空间, 只要说明 $E = 0$, 为此只需考虑任意 $f \in E^*$, 有 $f = 0$.
- ② 取定 V 一组基, 使得 x 在这组基下的矩阵为上三角. 找一个特殊线性变换 y , 使得 y 在这组基下矩阵是对角阵

$$\text{diag} \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\}$$

- ③ 利用 Kronecker 积性质和 JC 分解, 插值公式等工具证明 ad_y 可以写成 ad_x 的多项式, 这样就有 $y \in W$, 即

$$\text{tr}(xy) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \lambda_i = 0,$$

两边作用 f 即得 $f^2(\lambda_i) = 0$, 即 $f(\lambda_i) = 0$.

1 课题内容和意义

2 半单线性变换的判定准则

3 半单线性变换的应用

- 正规变换的正交相似标准型
- 可同时对角化与可同时上三角化
- Jordan-Chevalley 分解及应用
- 三维旋转的描述和群结构

4 论文可改进的点

三维旋转的描述 I

利用正交阵的正交相似标准型和 Euler 角, 我们给出了三维旋转的描述

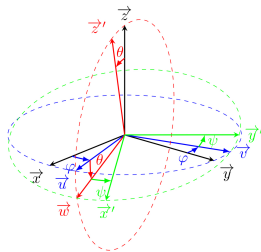
定理 13

三维空间的旋转矩阵都可以表示为

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

三维旋转的描述 II

我们的研究思路是引入Euler 角概念，将旋转分为三步，每一步都是绕某个转轴旋转某个角度.



Rodrigues 旋转公式 I

接着，我们利用正交标准型给出了三维空间的Rodrigues 旋转公式

定理 14

给定单位向量 $u \in \mathbb{R}^3$ ，将向量绕 u 所在的有向直线按右手法则旋转 θ 角对应的变换记为 $R_{u,\theta}$ 。则对任意 $\xi \in \mathbb{R}^3$ ，有

$$R_{u,\theta}(\xi) = (\cos \theta)\xi + (u \cdot \xi)(1 - \cos \theta)u + (\sin \theta)(u \times \xi). \quad (3)$$

若记 $u = (u_1, u_2, u_3)$ ，则(3)的旋转变换 $R_{u,\theta}$ 在标准正交基下对应的表示阵可写为

$$I_{3 \times 3} + \sin \theta \cdot A + (1 - \cos \theta) \cdot A^2, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Rodrigues 旋转公式 II

现在, 另考虑映射

$$\sigma : \mathfrak{so}(n) \rightarrow SO(n), \quad B \mapsto e^B \quad (5)$$

设 $S(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, 则 $e^{S(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 对应着二维空间的旋转, 这样我们易得 σ 是满射, 即三维空间的旋转都可用二阶反对称阵来实现.

特别地, 由于 A 特征多项式是 $\lambda^3 - \lambda$, 即 $A^3 = -A$, 这样计算就有

$$\sigma(\theta A) = e^{\theta A} = I_{3 \times 3} + \sin \theta \cdot A + (1 - \cos \theta) \cdot A^2$$

并以此为契机, 介绍了一种从矩阵群构造 Lie 代数的方式, (映射 σ 在里面扮演着很重要的角色)

三维旋转的群结构 I

定理 15

$SO_3(\mathbb{R})$ 同构于商群 $SU_2 / \{\pm I_2\}$.

这样 $SO(3)$ 的几何结构对应 (同胚于) 三维实射影空间 \mathbb{RP}^3 .

三维旋转的群结构 II-思路

证明的主要想法:

- ① 首先考虑 $M_2(\mathbb{C})$ 的子空间

$$M = \{H \in M_2(\mathbb{C}) \mid H = H^*, \operatorname{tr}(H) = 0\}$$

作为等同于 \mathbb{R}^3 的桥梁.

- ② 接着构造群同态

$$\varphi: SU_2 \rightarrow SO(M), \quad g \mapsto \varphi_g$$

其中 φ_g 定义为: $\varphi_g(H) = gHg^{-1}, \forall H \in M$.

- ③ 通过说明 $\ker \varphi = \{\pm I_2\}$ 以及 φ 是满射来证明结论成立 (证明的过程, 定理13起了关键作用).

三维旋转群结构 III

定理 16

旋转群 $SO(3)$ 是单群.

三维旋转群结构 IV-思路

- ① 通过定理15，我们建立了 $SU(2) \rightarrow SO(3)$ 的同态核为 $\{\pm I\}$ 的满同态，这样 $SO(3)$ 的正规子群与 $SU(2)$ 包含 $\{\pm I\}$ 的正规子群之间有一一对应关系.
- ② 对任意 $SU(2)$ 包含 $\{\pm I\}$ 的正规子群 K , K 是一些共轭类的并集，每个共轭类的代表元可取为正交相似标准型

$$d_\psi = \text{diag} \{e^{i\psi}, e^{-i\psi}\}.$$

- ③ K 中至少存在一个 d_φ ，其中 $\sin \varphi \neq 0$. 考虑换位子：

$$gd_\varphi g^{-1}d_\varphi^{-1} \in K, \forall g \in SU(2).$$

进一步我们会得到 K 包含所有 $d_\psi, \forall \psi \in [0, 2\pi]$.

$SO(3)$ 的有限子群 I

定理 17

$SO(3)$ 仅有如下几类不同的有限子群

| G | k | n_1 | n_2 | n_3 | $ G $ |
|---------------|-----|-------|-------|-------|-------|
| C_n | 2 | n | n | — | n |
| D_n | 3 | 2 | 2 | n | $2n$ |
| \mathcal{T} | 3 | 2 | 3 | 3 | 12 |
| \mathcal{O} | 3 | 2 | 3 | 4 | 24 |
| I | 3 | 2 | 3 | 5 | 60 |

$SO(3)$ 的有限子群 II-思路

- 每个非幺元的三维旋转 s 其关于特征值 1 的特征子空间维数是 1, 即集合

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid sx = x\} \cap S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$$

有两个元素, 分别为 $\pm x$, 称为 s 的极点.

- 对于 $SO(3)$ 的有限子群 G , 记 P 是 G 中所有元的极点构成的集合, 则 G 在 P 上有个自然的作用

$$(g, x) \mapsto gx$$

- 通过此作用得到方程

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{|G|}\right)$$

其中 k 是轨道个数, n_i 是对应轨道中任一元素的迷向子群的阶.

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺ ↻

41 / 42

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺