分析札记

livi-郭利文

$\rho := \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$

"Time passed by "

目录

§1 防遗忘公式

以下阐述都是默认在有意义的情形之下.

1. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$.

2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$.

3. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$

4. $\arctan x = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m \dfrac{x^{2m+1}}{2m+1}$.

5. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$

6. $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + O(x^5)$.

7. $\arcsin x = x + \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)$.

§2 数列极限

2.1 基本方法与问题总结

1. $\{x_n\}$ 收敛 $\iff$ $\{x_{2k-1}\},\{x_{2k}\}$ 收敛到同一极限值 $\iff$ $\{x_{2k}\},\{x_{2k-1}\},\{x_{3k}\}$ 同时收敛.

2. 收敛数列有最小数或者最大数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，则 a_n 一定有最小数.

3. 单调数列收敛 $\iff$ 有收敛子列.

4. 有界数列发散 $\iff$ 存在两个收敛于不同极限值的子列.

5. 若 $\{x_n\}$ 的奇偶列收敛于不同值，则 $\{x_n\}$ 只有两个聚点.

证明. 这里只说明 4 的必要性. 设 $\{a_n\}$ 是有界发散数列，则 $\{a_n\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$，不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$. 进一步，存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 N，存在 $n > N$ 使得 $|a_n - \ell| \geq \varepsilon_0$，即能找到 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_n\}$ 满足

$$|b_n - \ell| \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in N^+.$$

由于 $\{b_n\}$ 也是有界的，其有收敛子列，于是不妨设 $\{b_n\}$ 是收敛的，则 $\{b_n\}$ 不以 ℓ 为极限. □

例 2.1 (均值不等式)**.** 设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$，则 $\{a_n\},\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

证明. 首先，

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(\frac{n\cdot(1+1/n)+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}$$

其次，

$$\frac{1}{b_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\le\left(\frac{(n+1)\cdot(n/n+1)+1}{n+2}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{b_{n+1}}$$

这样就有

$$a_1\le a_n\le b_n\le b_1$$

由单调有界定理，可知 $\{a_n\},\{b_n\}$ 收敛于同一极限. □

例 2.2 (拟合手法)**.** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=a.$$

证明. 首先

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k-a\right|=\frac{1}{2^n}\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k-a)\right|\le\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a_k-a| \tag{1}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N，使得当 $n>N$ 时成立 $|a_n-a|<\varepsilon$. 这样 (1) 可放缩为

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k-a\right|<\varepsilon+\frac{\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k-a|}{2^n}<\varepsilon+\frac{Mn^N}{2^n},$$

这样利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{Mn^N}{2^n}=0$，则存在 $N_1>N$，使得当 $n>N_1$ 时，成立 $\left|\dfrac{Mn^N}{2^n}\right|<\varepsilon$. 在这种情形下，(1) $<2\varepsilon$. □

例 2.3 (Euler 常数)**.** 令 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$，则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 首先

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<0$$

并且

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)>0$$

由单调有界定理，有 $\{a_n\}$ 收敛. □

称 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \gamma$ 为欧拉常数. 下面举个计算的例子.

例 2.4. 计算 $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ 的极限

证明. 首先

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= \ln(2n) + \gamma - \ln n - \gamma + o(1) \to \ln 2, \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

这样 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \ln 2$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$. □

例 2.5 (Cauchy 命题)**.** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$(可以是非正常极限), 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$.

证明. 当 $|a| < \infty$，拟合即可. 当 $a = +\infty$ 时，对任意 $M > 0$, 存在 N，使得当 $n > N$ 时，成立 $a_n > 2M+1$. 对于上述固定 N，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+\cdots+a_N}{n} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-N)}{n} = 1$，则存在 $N_1 > N$，使得 $n > N_1$ 时成立,

$$\frac{a_1+\cdots+a_N}{N} > -1, \quad \frac{(n-N)}{n} > \frac{1}{2},$$

这样就有

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} > \frac{a_1+\cdots+a_N}{n} + \frac{n-N}{n}(2M+1) > M$$

即 $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 也是无穷大量，同理证 $a = -\infty$ 情形. □

记 $S_n = \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$，可以考虑证明

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \le \varliminf_{n\to\infty} S_n \le \varlimsup_{n\to\infty} S_n \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

来说明 Cauchy 命题的成立，我们会在 [问题，2.18] 举此类问题处理手法.

例 2.6. 设 $\{a_n\}$ 单调增加，$\{b_n\}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$，则 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛，且极限相同.

证明. 由条件当 n 充分大时，就有 $a_n < b_n + 1 \le b_1 + 1$，即 $\{a_n\}$ 收敛，这样即得. □

例 2.7. 对每个正整数 n，设 x_n 是 $x + \cdots + x^n = 1$ 在 $[0,1]$ 上的根，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明. 显然 $\{x_n\}$ 单调减，且当 $n \ge 3$ 时，$x_n \le x_3 \le \dfrac{2}{3}$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$，则由恒等式 $(x_n^{n+1} - 1) = 2(x_n - 1)$，两边同时取极限即得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$. □

例 2.8 (苏大)**.** 设 f 是 $[0,1]$ 上的正连续函数，记 $a_0=0, a_n=\dfrac{1}{2n}$，且设

$$F_n(x)=\int_{a_n}^{x} f(t)\mathrm{d}t-\int_x^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

则 F_n 是单调增的，且 $F_n(a_n)<0, F_n(1)>0$，因此存在唯一 $\xi_n\in(0,1)$，使得 $F_n(\xi_n)=0$，进一步 $\{\xi_n\}$ 收敛.

证明. 这类问题定义的数列，一般我们会从单调有界的角度考虑，并且在考虑单调性时，如下是一种常见手法：对任意 $n>m$，有

$$F_m(\xi_n)=\int_{a_m}^{\xi_n} f(t)\mathrm{d}t-\int_{\xi_n}^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_{a_m}^{\xi_n} f(t)\mathrm{d}t-\int_{a_n}^{\xi_n} f(t)\mathrm{d}t=\int_{a_m}^{a_n} f(t)\mathrm{d}t<0$$

即有 $\xi_n\le\xi_m$. □

例 2.9. 设 $\{a_n\}$ 的奇偶列分别收敛于 $a,b(a\ne b)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$

证明. 记 $S_n=\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n+1}-S_{2n})=0$，且由 Cauchy 命题

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a_2+\cdots+a_{2n}}{n}\right)=\frac{a+b}{2}.$$

□

例 2.10. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

证明. 记 $S_n=\dfrac{x_n}{n}$，则由 Cauchy 命题有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$. □

例 2.11 (Abel 变换)**.** 令 $A_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$，且 $\{A_n\}$ 收敛. 设正数列 $\{p_n\}$ 是单调增加的正无穷大，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_1+\cdots+a_np_n}{p_n}0.$$

证明. 由 Abel 变换公式，

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_kp_k}{p_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}A_k(p_k-p_{k+1})+A_np_n}{p_n},$$

为此只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n-1}A_k(p_{k+1}-p_k)}{p_n}=A$. 只需注意 $A=\dfrac{\sum_{k=1}^{n-1}A(p_{k+1}-p_k)}{p_n}+\dfrac{p_1}{p_n}$ 进行拟合即可. □

实际例子当中，经常会将 p_n 取为 n.

例 2.12 ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz)**.** 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都是无穷小量，且 $\{a_n\}$ 是严格单调减少的数列. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\ell,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\ell$.

证明. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时，成立

$$\ell-\varepsilon<\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}<\ell+\varepsilon,$$

即有 $(\ell-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(\ell+\varepsilon)(a_n-a_{n+1})$. 任取 $m>n$, 将 n 取为 $n+1,\cdots,m-1$, 并将所得不等式相加，则有 $(\ell-\varepsilon)(a_n-a_m)<b_n-b_m<(\ell+\varepsilon)(a_n-a_m)$，即

$$-\varepsilon<\left|\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}-l\right|<\varepsilon.$$

让 $m\to\infty$，则有

$$-\varepsilon\leq\left|\frac{b_n}{a_n}-L\right|\leq\varepsilon.$$

□

例 2.13 ($\frac{\star}{\infty}$ 型 Stolz)**.** 设 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的无穷大量，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\ell,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\ell$.

证明. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $n\geq N$ 时，有

$$(\ell-\varepsilon)(a_{n+1}-a_n)<b_{n+1}-b_n<(\ell+\varepsilon)(a_{n+1}-a-n).$$

将 n 替换为 $n-1,\cdots,N$，并将所得不等式相加得到

$$(\ell-\varepsilon)(a_n-a_N)<b_n-b_N<(\ell+\varepsilon)(a_n-a_N)$$

两边同时除以 a_n, 并取上下极限有

$$\ell-\varepsilon\leq\varliminf_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\leq\varlimsup_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\leq(\ell+\varepsilon)$$

由 ε 的任意性，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\ell$. □

举个 Stolz 的计算.

例 2.14. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_1 < 1$ 和 $a_{n+1} = a_n(1-a_n)(n \geq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

证明. 归纳易证 $0 < a_n < 1$，且 $\{a_n\}$ 是严格单调减数列，从而 $\{a_n\}$ 收敛于 0. 由 Stolz，

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1/a_{n+1} - 1/a_n} = \lim_{n\to\infty}(1-a_n) = 1.$$

□

例 2.15 (迭代数列)**.** 设 x_n 是正数列，满足 $x_{n+1} + \dfrac{1}{x_n} < 2$. 证明：$\{x_n\}$ 是收敛数列，并求极限.

证明. 注意

$$x_{n+1} - x_n < 2 - \frac{1}{x_n} - x_n \leq 0$$

由单调有界定理，$\{x_n\}$ 收敛，并记其极限值为 a. 则 $a + \dfrac{1}{a} \leq 2$，这样只能是 $a + \dfrac{1}{a} = 2$，即 $a = 1$. □

设 $f([a,b]) \subseteq [a,b]$，且存在常数 $0 < k < 1$ 满足对任意 $x, y \in [a,b]$，成立

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|,$$

则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射，称 k 是压缩常数.

例 2.16 (压缩映射)**.** 设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射，取定 $a_1 \in [a,b]$，定义 $a_{n+1} = f(a_n)$，则 $\{a_n\}$ 收敛，且极限是 f 在 $[a,b]$ 上唯一的不动点.

证明. 由于

$$|a_{n+p} - a_n| \leq k|a_{n+p-1} - a_{n-1}| \leq \cdots \leq k^{n-1}|a_{p+1} - a_1| \leq k^{n-1}|b-a| \to 0, \quad (n \to \infty).$$

这样利用 Cauchy 准则，有 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，则

$$|f(a_n) - f(\xi)| \leq k|a_n - \xi| \to 0, \quad (n \to \infty),$$

于是 ξ 是 f 在 $[a,b]$ 上的不动点. 若 η 也是 f 在 $[a,b]$ 上的不动点，则

$$|f(\xi) - f(\eta)| = |\xi - \eta| \leq k|\xi - \eta|,$$

从而一定有 $\xi = \eta$. □

值得注意的是

$$|a_n - \xi| = |f(a_{n-1}) - f(\xi)| \leq k|a_{n-1} - \xi| \leq k(|a_n - a_{n-1}| + |a_n - \xi|),$$

这样就有
$$|a_n-\xi|\le \frac{k}{1-k}|a_n-a_{n-1}|\le\cdots\le\frac{k^{n-1}}{1-k}|a_2-a_1|.$$
这样就可以通过迭代，不断的逼近 f 的不动点.

下面的 [问题，2.17]，无法利用压缩映射处理，及其考验基本功，是一个值的反复品味的题目.

例 2.17 (南开)**.** 设 $f:(0,1)\to(0,1)$，满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|,\forall x\ne y$. 固定 $x_0\in(0,1)$，令 $x_{n+1}=f(x_n)$，则 $\{x_n\}$ 收敛.

证明. 我们如下考虑 f 在 $(0,1)$ 上有 (唯一) 不动点 a 的情形.

由 $f(x)-x$ 的严格递减性，当 $x\in(0,a)$ 时 $f(x)>x$，当 $x\in(a,1)$ 时，$f(x)<x$. 由 $\{|x_n-a|\}$ 的严格递减性，可设 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=\delta$. 若 $\delta=0$，则结论得证，否则恒有 $|x_n-a|>\delta>0$.

注意在 $(0,a)$ 和 $(a,1)$ 上都包含 $\{x_n\}$ 中的无限项，否则当 n 充分大时，x_n-a 恒正或者恒负，结合单调性，$\{x_n\}$ 收敛，从而必定收敛于 a，这就导出矛盾.

这样就存在 $\{x_{n_k}\}\subset(0,a)$，使得
$$\lim_{n\to\infty}|x_n-a|=\lim_{k\to\infty}|x_{n_k}-a|=\lim_{n\to\infty}(a-x_{n_k})=\delta$$
即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a-\delta$，于是 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k+1}=f(a-\delta)$. 注意 $|x_{n_k+1}-a|>\delta$，让 $k\to\infty$, 有
$$|f(a-\delta)-a|\ge\delta,$$
这样就有 $f(a-\delta)\ge a+\delta$. 同理可得 $f(a+\delta)\le a-\delta$，这样就有
$$|f(a-\delta)-f(a+\delta)|\ge 2\delta=|a-\delta-(a+\delta)|,$$
这就导出了矛盾. □

例 2.18. 设 $\{a_n\}$ 是正数列，则
$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

证明. 以左半部分不等式为例，设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 N, 使得当 $n>N$ 时 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}>\ell-\varepsilon$. 于是
$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot a_N}>(\ell-\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}\cdot\sqrt[n]{a_N}$$
两边取下极限则有 $\ell-\varepsilon\le\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, 由 ε 的任意性，即有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. □

有时候处理上下极限问题，利用上下确界的定义会很轻松，例如处理不等式

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \\ \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.\end{aligned}$$

例 2.19 (上下极限经典处理手法)**.** 设正数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+m} \le x_n + x_m, \forall n, m \in N^+$. 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \inf_{n\ge1}\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$$

证明. 任意固定 N，设 $n = kN + r(0 < r < N)$, 则

$$x_n = x_{kN+r} \le x_r + x_{kN} \le x_r + kx_N,$$

这样就有

$$\frac{x_n}{n} \le \frac{x_r}{n} + \frac{kx_N}{n},$$

让 $n\to\infty$，两边取上极限则有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} \le \varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{x_r}{n}+\frac{kx_N}{n}\right) = \frac{x_N}{N},$$

由 N 的任意性，这样就有

$$\inf_{n\ge1}\left\{\frac{x_n}{n}\right\} \le \varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} \le \varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} \le \inf_{n\ge1}\left\{\frac{x_n}{n}\right\}.$$

□

例 2.20 (端点处)**.** 设 φ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\varphi(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x} \tag{2}$$

证明. 对任意 $0 < a < \frac{\pi}{2}$，取 δ 充分小，使得 $a+\delta < \frac{\pi}{2}$, 这样对任意有界函数 $\psi(x)$，就有

$$0 \le \frac{\displaystyle\int_0^{a}\sin^n x|\psi(x)|\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x} \le \frac{C\cdot(\sin a)^n\cdot a}{\sin^n(a+\delta)\cdot(\frac{\pi}{2}-(a+\delta))} = C_1\cdot\left(\frac{\sin a}{\sin(a+\delta)}\right)^n \to 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^a \sin^n x\psi(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x}=0.$$

据此，我们猜测 (2) 的极限值为 $\varphi(\frac{\pi}{2})$：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in[\frac{\pi}{2}-\delta,\frac{\pi}{2}]$ 时，成立 $|\varphi(x)-\varphi(\frac{\pi}{2})|<\varepsilon$. 对上述固定 $\delta>0$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\left|\varphi(x)-\varphi(\frac{\pi}{2})\right|\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x}=0 \tag{3}$$

故存在 N，使得 $n>N$ 时，成立 (3) $<\varepsilon$. 这样就有

$$\left|\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\varphi(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x}-\varphi(\frac{\pi}{2})\right|<\varepsilon+\varepsilon\cdot\frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x}<2\varepsilon.$$

这样即得. □

例 2.21 (中科大)**.** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^{2n}}\mathrm{d}x$$

证明. 根据函数形式，我们很容易看出，当 n 充分大时，若 $x\in[0,1)$ 时，则 $x^2\sim x^2e^{-x^{2n}}$，当 $x>1$ 时，函数主体和 x^2 关系不大. 于是我们猜测

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^2e^{-x^{2n}}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty}x^2e^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+0=\frac{1}{3}. \tag{4}$$

下面我们来证明我们的猜测. 一方面，对任意充分小的 $\varepsilon>0$，由于 $(1-e^{-(1-\varepsilon)^{2n}})=0$，则存在 N，使得 $n>N$ 时，$1-e^{-(1-\varepsilon)^{2n}}<\varepsilon$，这样就有

$$\int_0^1 x^2(1-e^{-x^{2n}})\mathrm{d}x=\int_0^{1-\varepsilon}x^2(1-e^{-x^{2n}})\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1 x^2e^{-x^{2n}}\mathrm{d}x<\varepsilon+\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^2e^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

另一方面，

$$0<\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^{2n}}\mathrm{d}x<\int_1^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{x^{2n}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n-1}\longrightarrow 0,\quad (n\to\infty)$$

这样即证明我们的猜想(4). □

从证明我们不难推广，对任意 $k\in N^+$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}.$$

例 2.22 (电子科大)**.** 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{j}{j^2+i^2}$$

证明. 由 Stolz 就有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{j}{j^2+i^2}&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{j}{j^2+i^2}-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{j}{j^2+i^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j^2+n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}\right)\\&=\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

□

2.2 参考题

例 2.23. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$.

证明. 设 $n=p_1^{r_1}\cdots p_s^{r_s}$ 为准素分解, 则 $n\geq 2^s=2^{p(n)}$, 于是

$$0<\frac{p(n)}{n}<\frac{\log_2(n)}{n}$$

迫敛性可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$. □

例 2.24. 设 $a_0,\cdots,a_p$ 是给定的 $p+1$ 个数，满足 $\sum\limits_{k=0}^{p}a_k=0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{p}a_k\sqrt{n+k}$ 的值.

证明. 注意

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p}a_k\sqrt{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p}a_k(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})=0.$$

□

例 2.25. 设 $\{x_n\}$ 收敛，$y_n = n(x_n - x_{n-1})$. 若 $\{y_n\}$ 收敛，则极限值只能是 0.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. 若 $A > 0$，则存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $y_n > \dfrac{A}{2}$. 这样就有

$$x_n = \sum_{k=N+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) + x_N > \frac{A}{2} \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k} + x_N \to +\infty, \quad (n \to \infty).$$

与 $\{x_n\}$ 收敛相矛盾. 同理可以说明 $A < 0$ 的情形也是矛盾的，从而 $A = 0$. □

例 2.26. 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0$，则 $\{a_n\}$ 无界.

证明. 反证，假设 $a_n \le M$. 则存在 N, 使得, 当 $n \ge N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} < \frac{1}{4} \tag{5}$$

这样就有 $a_n < \dfrac{1}{4}(a_{n+2} + a_{n+1}) < \dfrac{M}{2}$. 重复代入 (5)，即可得到，对任意 $k \in N^+$, 当 $n \ge N$ 时有 $a_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^k M$. 两边取极限，特别地有 $a_N = 0$，矛盾. □

这里的最后还有一种处理思路：由(5)，就有

$$\sup_{k\ge N} \{a_k\} \le \frac{1}{4} \sup_{k\ge N} \{a_{k+2} + a_{k+1}\} \le \frac{1}{4} \left(\sup_{k\ge N+1} \{a_k\} + \sup_{k\ge N+2} \{a_k\} \right) \le \frac{1}{2} \sup_{k\ge N} \{a_k\}$$

即有 $\sup\limits_{k\ge N} \{a_k\} = 0$，矛盾.

例 2.27 (单调有界)**.** 证明 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ 收敛.

证明. 考虑

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0$$

即 $\{a_n\}$ 单调减. 另外

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} &> 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - 1 - \sqrt{n}) > -1 \end{aligned}$$

由单调有界定理，$\{a_n\}$ 收敛. □

对于 $q \in [0,1)$，$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^q}$ 与 n^{1-q} 是同阶的，当 $q=1$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 与 $\ln n$ 是同阶的, 这在后面估阶时，会很有用.

例 2.28. 数列 $\left\{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n)\right\}$ 极限存在且有限.

证明. 这实际也是离散与积分之差在函数单调时收敛. 注意

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} - \ln(\ln 2) \geq -\ln(\ln 2).$$

另外，$\left\{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n)\right\}$ 单调递减，则由单调有界定理即得. □

例 2.29. 设 $a_1 = b, a_2 = c$, 在 $n \geq 3$ 时，$a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求极限.

证明. 注意

$$a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(c-b)$$

于是有

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) + b = &= (c-b)\sum_{k=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + b \\ &= (c-b)\frac{1-(-1/2)^{n-1}}{1+1/2} + b \to \frac{2c+b}{3}, \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

□

例 2.30. 设 $\{x_n\}$ 是非负数列，满足 $2x_{n+2} \leq x_{n+1} + x_n$，则 $\{x_n\}$ 收敛.

证明. 令 $y_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$，则有 $y_{n+1} = \max\{x_{n+2}, x_{n+1}\} \leq y_n$，即 $\{y_n\}$ 收敛. 设 $\{y_n\}$ 收敛到 A. 若 x_n 与 y_n 仅有有限项不同，则 x_n 也收敛到 A. 否则记 $\{x_{n_k}\}$ 是满足 $x_{n_k} \neq y_{n_k}$ 的子列. 则有

$$y_{n_k} > x_{n_k} \geq 2x_{n_k+1} - x_{n_k-1} = 2y_{n_k} - y_{n_k-1}.$$

这样就有 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A，从而 $\{x_n\}$ 也收敛于 A. □

例 2.31. 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$，用 K_n 表示使得 $S_k \geq n$ 的最小下标，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K_{n+1}}{K_n}$.

证明. 令 γ 是 Euler 常数. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，有 $-\varepsilon < S_n - \ln n - \gamma < \varepsilon$. 从而

$$n \leq S_{K_n} < \ln(K_n) + \gamma + \varepsilon,$$

另一方面，

$$n > S_{K_n - 1} > \ln(K_n - 1) + \gamma - \varepsilon,$$

这样就有
$$e^{n-\gamma-\varepsilon} < K_n < e^{n-\gamma+\varepsilon} + 1.$$
所以
$$\frac{e^{n+1-\gamma-\varepsilon}}{e^{n-\gamma+\varepsilon}+1} < \frac{K_{n+1}}{K_n} < \frac{e^{n+1-\gamma+\varepsilon}+1}{e^{n-\gamma-\varepsilon}},$$
两边同时取上下极限有
$$e^{1-2\varepsilon} \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} \leq e^{1+2\varepsilon}.$$

由 ε 的任意性，就有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K_{n+1}}{K_n} = e$. □

例 2.32. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$，则
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = \alpha\beta.$$

证明. 不妨设 $|b_n| \leq M$ 对每个 n 成立. 这样就有
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_kb_{n+1-k} - \alpha\beta\right| \leq \frac{1}{n}\cdot\left[M\sum_{k=1}^{n}|a_k-\alpha| + |\alpha|\sum_{k=1}^{n}|b_k-\beta|\right]$$
让 $n\to\infty$，由 Cauchy 命题，即得. □

例 2.33. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，且 $\sum_{k=1}^{n}|y_n|$ 关于 n 一致有界，则
$$\lim_{n\to\infty} x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 = 0.$$

证明. 不妨设 $\sum_{k=1}^{n}|y_n|$ 关于 n 一致小于 K，则明显有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得，当 $n > N$ 时，有 $|x_n| < \varepsilon$, 且当 n 充分大时，对每个 $k \geq n-N+1$，有 $|y_k| < \varepsilon$，这样就有
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_ky_{n+1-k}\right| \leq N\cdot M\varepsilon + K\varepsilon$$
其中 M 是 $\{|x_n|\}$ 的上界. □

例 2.34. 设 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right) = 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n = 1$.

证明. 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_i^2$ 是单调递增的. 若 S_n 收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛于非零常数，与 S_n 收敛矛盾，从而 S_n 是无穷大量. 这样就有
$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{a_{n+1}^2}{S_n} \to 1, \quad (n\to\infty).$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}^3-S_n^3)=a_{n+1}^2\cdot(S_{n+1}^2+S_n^2+S_{n+1}S_n)=3.$$

由 Cauchy 命题,

$$3=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n(S_{k+1}^3-S_k^3)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}^3-S_1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3}{n}.$$

故而

$$\lim_{n\to\infty}3na_n^3=\lim_{n\to\infty}3\cdot(a_nS_n)^3\cdot\frac{n}{S_n^3}=1.$$

□

例 2.35. 设数列 $\{u_n\}$ 满足对每个非负整数 n, 有

$$u_n=\lim_{m\to\infty}(u_{n+1}^2+\cdots+u_{n+m}^2).$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+\cdots+u_n)$ 存在且有限，则 $u_n\equiv 0$.

证明. 由条件 $\{u_n\}$ 是非负递减趋于零的数列，且

$$u_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k^2=u_{n+1}^2+\sum_{k=n+2}^{\infty}u_k^2=u_{n+1}^2+u_{n+1}.$$

这样就有 $u_n\equiv 0\iff u_1=0$. 若 $u_1>0$, 则 $\{u_n\}$ 是正数列，于是可以考虑

$$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}^2+u_{n+1}}\to 1,\quad (n\to\infty).$$

由 Cauchy 命题,

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n(1/u_{n+1}-1/u_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_1}\right),$$

即有 $u_n\sim\dfrac{1}{n}$. 但是调和级数 $\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{k}$ 是发散的，与 $\sum\limits_{k=1}^n u_k$ 收敛矛盾. □

例 2.36 (可求递推式)**.** 设有 $a_1=1, a_n=n(a_{n-1}+1)$. 又设 $x_n=\prod\limits_{k=1}^n\left(1+\dfrac{1}{a_k}\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明. 令

$$b_n=\frac{a_n}{n!}=\frac{n(a_{n-1}+1)}{n!}=b_{n-1}+\frac{1}{(n-1)!},$$

这样就有

$$b_n=\sum_{k=2}^n(b_k-b_{k-1})+1=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!},$$

从而 $a_n = n!\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)$. 进一步,

$$
\begin{aligned}
x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+1}{a_k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k} \\
= \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.
\end{aligned}
$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. □

例 2.37. 设 $y_0 \geq 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2$, 求 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\prod\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{y_j}$ 的极限

证明. 设 $y_0 = x + \frac{1}{x}$，则不难看出 $y_n = x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}}$，这样就有

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{y_j} &= \prod_{j=0}^{n}\frac{1}{x^{2^j}+1/x^{2^j}} \\
&= \frac{x-1/x}{(x-1/x)(x+1/x)\cdots(x^{2^n}+1/x^{2^n})} \\
&= \frac{x-1/x}{x^{2^{n+1}}-1/x^{2^{n+1}}} = \left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{x^{2^{n+1}}}{x^{2^{n+2}}-1} \\
&= \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+2}}-1}\right)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n}\prod_{j=0}^{k}\frac{1}{y_j} &= \left(x-\frac{1}{x}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{x^{2^{k+1}}-1}-\frac{1}{x^{2^{k+2}}-1}\right) \\
&= \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^{2^{n+2}}-1}\right) \longrightarrow \frac{1}{x}, \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

注意 x 满足 $x^2 - y_0x + 1 = 0$，这样解得 $x = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2-4}}{2}$. 注意

$$
S_n \leq \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k} = \frac{1-1/2^{n+1}}{1-1/2} \leq 1,
$$

从而只能是 $x = \frac{y_0+\sqrt{y_0^2-4}}{2} \geq 1$，即 $\frac{1}{x} = \frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$. □

例 2.38 (苏大)**.** 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，令 $E_n = \left\{1 \leq i \leq n \mid a_i \geq \frac{1}{i}\right\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sharp E_n}{n} = 0$.

证明. 对任意 $m \in N^+, n > m$, 有

$$\frac{\sharp E_n - \sharp E_m}{n} < \sum_{k \in E_n \setminus E_m} \frac{1}{k} \le \sum_{k \in E_n \setminus E_m} a_k < \sum_{k=m}^{n} a_k,$$

让 $n \to \infty$，取上极限有

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\sharp E_n}{n} \le \sum_{k=m}^{\infty} a_k,$$

再让 $m \to \infty$，这样就有 $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \frac{\sharp E_n}{n} \le 0$，即 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sharp E_n}{n} = 0$. □

例 2.39. 设 $\{x_n\}$ 是正数列，则 $\varlimsup\limits_{n \to \infty} n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \ge 1$.

证明. 反证. 若结论不成立，则存在 N, 使得当 $n \ge N$ 时，$n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) < 1$，这样就有

$$\frac{1}{n+1} + \frac{x_{n+1}}{n+1} < \frac{x_n}{n},$$

于是

$$\frac{x_N}{N} > \frac{x_N}{N} - \frac{x_n}{x_n} = \sum_{k=N}^{n-1} \left(\frac{x_{k+1}}{k+1} - \frac{x_k}{k}\right) > \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty, \quad (n \to \infty)$$

矛盾. □

例 2.40. 设 $\{x_n\}$ 是正数列，且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$，则存在无穷个 n，使得

$$x_n < x_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{6}$$

证明. 对任意正整数 N, 存在 $n > N$ 使得

$$x_n < \min\{x_1, \cdots, x_N\} \tag{7}$$

设 n 是满足性质(7)的最小正整数，则有

$$x_n < \min\{x_1, \cdots, x_N\} \le x_k, \quad k = N+1, \cdots, n-1.$$

这样 n 满足(6). 令 $N_1 = 1$，记 n_1 满足 (6)，再令 $N_2 = n_1$, 存在 n_2 满足(7)$\cdots$，这样就能找到无数个满足 (7) 的 n. □

例 2.41 (聚点集)**.** 设 $\{x_n\}$ 是有界数列，满足 $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$，则 $\{x_n\}$ 的聚点集是闭集（包括单点集）

证明. 设 A, B 分别是 $\{x_n\}$ 的上下极限，如下考虑 $B < A$. 若存在 $t \in (B, A)$ 使得 t 不是 $\{x_n\}$ 的聚点，则存在 $\delta > 0$，使得 $(t-\delta, t+\delta) \subset (B, A)$ 中只包含 x_n 中的有限项. 则当 n

充分大时，满足

$$x_n \notin (t-\delta, t+\delta), \quad |x_{n+1} - x_n| < \delta$$

这样恒有 $x_n \le t-\delta$ 或者 $x_n \ge t+\delta$. 前者与 $\{x_n\}$ 上极限是 A 矛盾，后者与 $\{x_n\}$ 的下极限是 B 矛盾. □

§3 实数完备定理

本节的第一个重难点是各实数基本定理之间的等价性，特别关注闭区间套定理和 Borel 覆盖定理.

- 利用闭区间套定理时，一定要明确想要构造满足什么性质的闭区间套.
- Borel 覆盖定理，若直接不容易构造开覆盖，可以考虑反证.

关注如下互推

- 用覆盖定理证明闭区间套定理，即关键说明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 非空 ([问题，3.1])
- 用覆盖定理证明凝聚定理，关键是采用反证构造开覆盖 ([问题，3.2])
- 用闭区间套定理证明确界存在定理, 关键是利用二分法找到确界.([问题，3.3])

例 3.1. 用覆盖定理证明闭区间套定理.

证明. 设 $\{I_n\}$ 是闭区间套，下面说明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$. 考虑反证，若对任意 $x \in I_1$，存在 k N，使得 $x \notin I_k$，即存在 $\delta_k > 0$，使得 $U(x;\delta_x) \cap I_k = \varnothing$. 由 Borel 有限覆盖，不妨设

$$\bigcup_{s=1}^{n} U(x_s;\delta_{x_s}) \supset I_1,$$

但是当 k 充分大时，$I_k \cap \bigcup_{s=1}^{n} U(x_s;\delta_{x_s}) = \varnothing$，矛盾. □

例 3.2. 用覆盖定理证凝聚定理.

证明. 设 $\{x_n\} \subset [a,b]$，没有聚点，即对任意 $x \in [a,b]$，存在 $\delta_x > 0$, 使得 $U(x;\delta_x)$ 中只包含 $\{x_n\}$ 的有限项，则由 Borel 有限覆盖，不妨设

$$\bigcup_{k=1}^{s} U(x_k;\delta_{x_k}) \supset [a,b]$$

即 $[a,b]$ 只包含 $\{x_n\}$ 的有限多项，矛盾. □

例 3.3. 用闭区间套定理证明确界定理.

证明. 设 S 是非空有界集. 若 $|S| < +\infty$，则结论显然成立. 下面考虑 $|S| = +\infty$，设 m, M 是 S 的一个下，上界，记 $[a_1, b_1] = [m, M]$, 令 $c = \dfrac{a+b}{2}$，若 $[c, b_1]$ 中包含 S 中的点，则

记 $[c, b_1] = [a_2, b_2]$，否则记 $[a_1, c] = [a_2, b_2]$，这样做下去得到闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，满足

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0, \quad n \to \infty$$

令 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \xi$, 断言 ξ 是 S 的上确界. 对任意 $x \in S, n \in N^+$ 有 $x \leq b_n$，让 $n \to \infty$，即得 $x \leq \xi$，即 ξ 是 S 的一个上界. 另外，对任意 $\varepsilon > 0$，当 n 充分大时，$[a_n, b_n] \subset (\xi - \varepsilon, \xi]$，注意 $[a_n, b_n]$ 中包含 S 中的点，故 ξ 是 S 的上确界. 同理找出 S 的下确界. □

例 3.4. 设 f 在 $[a, b]$ 上局部处处有界，则 f 在 $[a, b]$ 上有界.

证明. 对任意 $x \in [a, b]$, 存在 ,$\delta_x > 0, M_x > 0$, 使得当 $t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b]$ 时，有 $|f(t)| \leq M_x$. 记 $\mathcal{O}(x; \delta_x) = (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b]$, 则

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{x \in [a,b]} \mathcal{O}(x; \delta_x)$$

由 Borel 有限覆盖，存在 $x_1, \cdots, x_s \in [a, b]$ 使得

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} \mathcal{O}(x_k, \delta_{x_k})$$

令 $M = \max\{M_{x_1}, \cdots, M_{x_s}\}$, 则 $|f(x)| \leq M$. □

取逆否命题则有: 若 f 在 $[a, b]$ 上无界，则存在 $x \in [a, b]$ 使得 f 在 x 的任意领域内都无界.

例 3.5. 设 f 在 (a, b) 上有定义，对任意 $x \in (a, b)$, 存在 $\delta_x > 0$ 使得 f 在 $\mathcal{O}(x; \delta_x)$ 上严格单调增，则 f 在 (a, b) 上严格单调增.

证明. 考虑反证，若存在 $a < x_1 < x_2 < b$，使得 $f(x_1) \geq f(x_2)$. 记 $[a_1, b_1] = [x_1, x_2]$，并令 $c = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. 若 $f(a_1) \geq f(c)$，则记 $[a_2, b_2] = [a_1, c]$. 否则有 $f(c) \geq f(b_1)$，此时记 $[a_2, b_2] = [c, b_1]$. 重复此过程，得到闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，满足

$$f(a_n) \geq f(b_n), \quad \forall n \in N^+.$$

由闭区间套定理，设 $\xi = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, 则 f 在 $\mathcal{O}(\xi, \delta_\xi)$ 上严格单调增. 但当 n 充分大时,

$$[a_n, b_n] \subseteq \mathcal{O}(\xi; \delta_\xi),$$

即有 $f(a_n) < f(b_n)$，这就导出了矛盾. □

例 3.6. 用确界原理证明有限覆盖定理.

证明. 设 H 是 $[a, b]$ 的一开覆盖，令

$$S = \{x \in (a, b] \mid 可以从H中选取有限个区间来覆盖[a, x]\}$$

我们通过说明 S 非空，从而有上确界 ξ，且 $\xi\in S$，以及 $\xi=b$.

不妨设 $a\in U_a$，其中 $U_a\in H$ 是一开区间，任取 $y\in U_a\cap(a,b)$，则 $[a,y]\subset U_a$，即 $y\in S$.

取 U_ξ 中包含于 S 中的点 y，则 $[a,y]$ 可被有限覆盖，从而 $[a,\xi]=[a,y]\cup[y,\xi]$ 也可被有限覆盖，即 $\xi\in S$.

若 $\xi<b$，则取 U_ξ 中介于 ξ 与 b 的任意一点 y，则由于 $[a,\xi],[\xi,y]$ 均能被有限覆盖，则 $y\in S$，但这与 ξ 的取法矛盾. □

例 3.7. 用有限覆盖证明确界原理

证明. 设有界集 $S\subset[m,M]$. 若 S 没有上确界，则对任意 $x\in[m,M]$，若 x 是 S 的上界，则存在 $\delta_x>0$，使得 $x-\delta_x$ 也是 S 上界. 若 x 不是 S 上界，则存在 $\delta_x>0$，使得，存在 $y\in S$，满足 $y>x+\delta_x$. 注意 $\{x\in[m,M]\mid U(x;\delta_x)\}$ 构成 $[m,M]$ 的一个开覆盖，由有限覆盖定理，不妨设

$$S\subset[m,M]\subset\bigcup_{i=1}^{s}U(x_i;\delta_{x_i})$$

但是对每个 $U(x_i;\delta_{x_i})$，要么有 $S\cap U(x_i;\delta x_i)=\varnothing$，要么存在 $y\in S$，使得 $y\notin U(x_i;\delta_{x_i})$，矛盾. □

§4 函数极限

4.1 重点回顾

1、回顾定理证明时，关注

- Heine 归结原则的充分性证明时，利用反证法，构造出一个不满足条件的数列.Heine 归结原则，可以减弱为：$f(x)$ 在 a 处极限值存在 $\Longleftrightarrow$ 任何以 a 为极限的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\{f(x_n)\}$ 都收敛.
- 函数极限的 Cauchy 准则的充分性证明是利用归结原则转化为数列极限的 Cauchy 准则.
- 局部单调有界的单侧极限存在 (完全类比数列单调有界定理).

2、特别注意 Riemann 函数和 Dirichlet 函数在定义域上每个点的极限情形：

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\in(0,1)\cap\mathbb{Q}.\\ 0, & x\in\{0,1\}\cup[0,1]\setminus[0,1]\cap\mathbb{Q}\end{cases},\quad D(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & x\text{为}[0,1]\text{区间上的无理数.}\end{cases}$$

3、关注等式

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin\dfrac{x}{2^n}\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}\cdots\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}},\quad x\neq0$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x}.$$

4、关注特殊极限 e 的证明：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

大致思路是

- 首先考虑 $x\to+\infty$ 情形，对于 $x\to-\infty$ 情形，做 $x=-y$ 化为前面情形.
- 当 $x\to+\infty$ 时，希望借助数列的相关极限结论，为此建立不等式

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5、会通过利用重要极限解决部分极限问题: 当 $a,b>0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}-2}\cdot\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}-2}{2}\cdot x}$$

为此只需计算

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}-2}{2}\cdot x&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt[x]{a}-1)}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt[x]{b}-1)}{2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{2x}=\ln\sqrt{ab}\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}.$

6、关注 [问题，4.8]，其将 [问题，2.19] 推广到函数极限情形.

例 4.1. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan(x)]$$

证明. 令 $f=\ln\arctan x$，由中值定理就有

$$f(x+1)-f(x)=\frac{1}{\arctan\xi_x}\cdot\frac{1}{1+\xi_x^2},\quad \xi_x\in(x,x+1)$$

这样就有

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan(x)]=\frac{2}{\pi}$$

□

例 4.2 (复合型极限)**.** 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$，且 $\lim_{y\to A} g(y) = B$，则 $\lim_{x\to a} g(f(x))$ 只有三种情形：要么极限不存在，要么若极限存在，则极限值只能是 B 或者 $g(A)$.

证明. 如下考虑 $\lim_{x\to a} g(f(x))$ 极限存在情形.

1. 若存在 a 的一个空心领域 $\mathcal{O}(a;\delta)\setminus\{a\}$，使得在该领域内有 $f(x)\neq A$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$，使得 $0<|y-A|<\delta_1$ 时，有
$$|g(y)-B|<\varepsilon.$$
则对于上述固定 $\delta_1>0$，存在 $0<\delta_2<\delta$，使得当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时，有
$$0<|f(x)-A|<\delta_1,$$
在这种情形下，$|g(f(x))-B|<\varepsilon$，即 $\lim_{x\to a} g(f(x))=B$.

2. 若上述情形不成立，则对任意 a 的空心领域内，都存在 x 使得 $f(x)=A$. 换言之，存在收敛于 a 的数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)\equiv A$. 这样由 Heine 归结原则，
$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(A).$$

□

例 4.3 (局部单调的归结原则)**.** 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增，且存在数列 $\{x_n\}\subseteq(a,b)$ 满足，$\lim_{n\to\infty} x_n = b$，且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$，则 $\lim_{x\to b^-} f(x)=A$.

证明. 我们来说明 f 在 (a,b) 上以 A 为上界，以此断定 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 的存在性，并利用归结原则得到结论成立.

对任意 $x\in(a,b)$ 和 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时, 有 $x_n\in(x,b)$，即
$$f(x)\leq f(x_n),$$
让 $n\to\infty$，即有 $f(x)\leq A$. □

4.2 参考题

例 4.4. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上严格单调增, 且存在 $\{x_n\}\subseteq[a,b]$, 使得 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

证明. 反证，若 $\{x_n\}$ 不以 a 为极限，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使得
$$|x_{n_k}-a|\geq\varepsilon_0,\quad \forall k\in N^+.$$

这样一定有 $x_{n_k} \geq a + \varepsilon_0$. 于是

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq f(a+\varepsilon_0) > f(a)$$

矛盾. $\square$

现在我们直接证明 [问题, 4.4]: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 使得 $f(a) < f(a)+\delta < f(a+\varepsilon)$. 存在 N，使得 $n > N$ 时, 有 $f(a) < f(x_n) < f(a) + \delta < f(a+\varepsilon)$，即 x_n 落在 $[a, a+\varepsilon)$ 内.

例 4.5. 设 f 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 且 f 在 $x = 0$ 附近有界. 又有 $a, b > 1$ 满足 $f(ax) = bf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

证明. 不妨设 $|x| < \delta$ 时，$f(x) \leq M$. 由条件

$$f(x) = f\left(a \cdot \frac{x}{a}\right) = bf\left(\frac{x}{a}\right) = \cdots = b^n f\left(\frac{x}{a^n}\right), \quad \forall n \in N^+.$$

这样就有当 $x \in \left(-\frac{\delta}{a^n}, \frac{\delta}{a^n}\right)$ 时，$f(x) \in \left(-\frac{M}{b^n}, \frac{M}{b^n}\right)$. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得

$$|f(x)| \leq \frac{M}{b^N} < \varepsilon, \quad x \in \left(-\frac{\delta}{a^N}, \frac{\delta}{a^N}\right).$$

$\square$

例 4.6. 设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，且 $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x)(x \to 0)$，则 $f(x) = o(x)(x \to 0)$.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$，当 $0 < x < \delta$ 时，

$$-x\varepsilon < f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) < x\varepsilon,$$

这样就有

$$-x\varepsilon\left(\frac{1 - 1/2^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) < f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) < x\varepsilon\left(\frac{1 - 1/2^n}{1 - \frac{1}{2}}\right), \quad \forall n \in N^+.$$

让 $n \to \infty$ 有

$$-2x\varepsilon \leq f(x) \leq 2x\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)/x = 0$，同理有 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)/x = 0$. $\square$

例 4.7 (函数极限的 Stolz)**.** 设 f, g 定义在 $[a, +\infty]$，且 f, g 在任意有限区间内有界. 若 g 在 $[a, +\infty)$ 上严格增加到 $+\infty$，且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = \ell, \quad T > 0$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

证明. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N，使得当 $x>N$ 时，

$$(\ell-\varepsilon)(g(x+T)-g(x))<f(x+T)-f(x)<(\ell+\varepsilon)(g(x+T)-g(x))$$

注意对任意 $x>N$, 存在非负整数 n_x, 使得 $x-n_xT\in(N,N+T]$. 这样就有

$$(\ell-\varepsilon)(g(x)-g(x-n_xT))<f(x)-f(x-n_xT)<(\ell+\varepsilon)(g(x)-g(x-n_xT)) \tag{8}$$

记

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f}{g}=\lim_{x\to+\infty}\inf_{y\geq x}\left\{\frac{f(y)}{g(y)}\right\},\quad \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f}{g}=\lim_{x\to+\infty}\sup_{y\geq x}\left\{\frac{f(y)}{g(y)}\right\}$$

让 $x\to+\infty$，由(8)有

$$\ell-\varepsilon\leq\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f}{g}\leq\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f}{g}\leq\ell+\varepsilon$$

再让 $\varepsilon\to0^+$ 即得. □

例 4.8 (大连理工)**.** 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续非负，且对任意 $x,y\geq0$，满足 $f(x+y)<f(x)+f(y)$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在且有限.

证明. 注意 $f(n)\leq nf(1)$，这样有 $\dfrac{f(n)}{n}\leq1$. 对任意 $x>1$，设 $x-n_x\in(1,2]$, 则

$$0\leq\frac{f(x)}{x}\leq\frac{f(n_x)+f(x-n_x)}{x}\leq\frac{f(n_x)}{n}+f(x-n_x)\leq1+M$$

其中 M 是 f 在 $[1,2]$ 上的最大值. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在，则可取到严格单调增的点列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足

$$\begin{aligned}x_n&\longrightarrow+\infty,\quad \frac{f(x_n)}{x_n}\longrightarrow\alpha,\quad n\to\infty\\ y_n&\longrightarrow+\infty,\quad \frac{f(y_n)}{y_n}\longrightarrow\beta\neq\alpha,\quad n\to\infty,\end{aligned}$$

不妨设 $\alpha>\beta$. 对任意充分小的 $\varepsilon>0$，存在 N 使得当 $n\geq N$ 时满足 $\dfrac{f(y_N)}{y_N}<\beta+\varepsilon$. 对任意充分大 n，令 $x_n=k_ny_N+l_n$，其中 k_n 是非负整数，$l_n\in[0,y_N)$. 这样就有

$$\frac{f(x_n)}{x_n}\leq\frac{k_nf(y_N)+f(l_n)}{x_n}$$

让 $n\to\infty$ 则有

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}\leq\frac{f(y_N)}{y_N}\leq\beta+\varepsilon$$

再让 $\varepsilon \to 0^+$，即有 $\alpha \le \beta$，这就导出了矛盾. $\square$

现在我们函数上下极限语言重写 [问题，4.8]: 由于 $\dfrac{f(x)}{x}$ 有界，故我们可以定义

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\inf_{y\ge x}\left\{\frac{f(y)}{y}\right\},\quad \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sup_{y\ge x}\left\{\frac{f(y)}{y}\right\}$$

注意对任意 $N\in N^+$，和每个 $x>N$，存在非负整数 n_x 使得 $x-n_xN\in(0,N]$. 这样就有

$$\frac{f(x)}{x}\le\frac{n_xf(N)}{x}+\frac{f(x-n_xN)}{x}$$

让 $x\to+\infty$，由 N 的任意性即有

$$\inf_{n\ge1}\left\{\frac{f(n)}{n}\right\}\le\inf_{y\ge1}\left\{\frac{f(y)}{y}\right\}\le\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\le\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\le\inf_{n\ge1}\left\{\frac{f(n)}{n}\right\}.$$

例 4.9. 设 f,g 是周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$，则 $f(x)\equiv g(x)$.

证明. 如下考虑 f,g 均非常值，即可设 T_1,T_2 分别是 f,g 的正周期，则对任意固定 x_0，有

$$\begin{aligned}f(x_0)-g(x_0)&\equiv f(x_0+nT_1)-g(x_0+nT_2)\\&\equiv[f(x_0+nT_1)-g(x_0+nT_1)]+[g(x_0+nT_1)-f(x_0+nT_2)]\\&+[f(x_0+nT_2)-g(x_0+nT_2)]\end{aligned}$$

注意

$$g(x_0+nT_1)-f(x_0+nT_2)=g(x_0+nT_1+nT_2)-f(x_0+nT_1+nT_2)$$

让 $n\to\infty$，即得. $\square$

§5 连续函数

5.1 基础回顾与经典问题分析

1. 在回顾定理证明时，重点关注:
   - 分别利用闭区间套和确界定理证明零点存在定理（[问题，5.1]）
   - 致密性定理证明 Cantor 定理.
   - 有限覆盖证 Cantor 定理（[问题，5.2]）.
   - 下半连续有最小值（[问题，5.3]）

2. 关注用振幅刻画连续：令

$$\omega_f(a,\delta) = \sup_{x\in\mathcal{O}(a;\delta)} \{f(x)\} - \inf_{x\in\mathcal{O}(a;\delta)} \{f(x)\},$$

并记

$$\omega_f(a) = \lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(a,\delta),$$

若在 $\mathcal{O}(x;\delta)$ 上有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$，则对任意 $x,y\in\mathcal{O}(a;\delta)$，有

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(a)| + |f(y)-f(a)| < 2\varepsilon,$$

对 x,y 分别取上下确界，有 $\omega_f(a,\delta)\le 2\varepsilon$，这样就有 f 在 a 处连续 $\iff \omega_f(a)=0$.

3. 令

$$f(x) = \mathrm{sgn} x, \quad g(x) = x - [x],$$

关注 $f, g, f\circ g, g\circ f$ 的连续点情形.

4. 关注可列问题的处理手法（[问题，5.36]）.

5. 具有某种性质下集合的确界往往是我们想要性质的点（比如零点）.

例 5.1. 设 $f\in C[a,b]$, 且 $f(a)<0, f(b)>0$, 用确界定理证明存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$.

证明. 令

$$E = \{x\in(a,b) \mid f(y)<0, \forall y\in[a,x]\}$$

由连续函数的保号性，E 是非空有界集. 记 $\xi=\sup E$，断言 $f(\xi)=0$.

若 $f(\xi)<0$，则由连续函数保号性，存在 $\delta>0$，使得 f 在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上也小于零，即 $\xi+\delta\in E$，这与 ξ 是 E 的上确界矛盾.

若 $f(\xi)>0$，则由保号性，存在 $x_0\in E$，但是 $f(x_0)>0$，矛盾. □

例 5.2 (有限覆盖证 Cantor)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明. 对任意 $\varepsilon>0, x\in[a,b]$, 存在 $U(x;\delta_x)$，使得当 $x_1,x_2\in U(x;\delta_x)$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

且

$$\bigcup_{x\in[a,b]} U\left(x;\frac{\delta_x}{2}\right) \supseteq [a,b]$$

即可以找到 $x_1,\cdots,x_k\in[a,b]$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^{k} U\left(x_i;\frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \supset [a,b].$$

现在取 $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_k}\}$，则当 $x, y \in [a,b]$ 满足 $|x-y| < \delta$ 时，不妨设 $x \in U\left(x_s; \dfrac{\delta_{x_s}}{2}\right)$，则有

$$|y - x_s| \le |x-y| + |x - x_s| < \delta + \frac{\delta_{x_s}}{2} < \delta_{x_s},$$

即 x, y 同属于 $U(x_s; \delta_{x_s})$. □

例 5.3 (下半连续)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上下半连续：对任意 $\varepsilon > 0, x \in [a,b]$，存在 $\delta_x > 0$，当 $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b]$ 时，成立 $f(y) > f(x) - \varepsilon$. 则 f 在 $[a,b]$ 上有最小值.

证明. 利用 Borel 有限覆盖定理，可以找到 f 在 $[a,b]$ 上的下界. 设 f 在 $[a,b]$ 上的下确界为 m，则存在 $\{x_n\} \subset [a,b]$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = m$. 由于 $\{x_n\}$ 有收敛子列，则不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，断言 $f(x_0) = m$.

我们采用反证法，若 $f(x) > m$，则对每个固定的充分小的 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时成立

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_n) < m + \varepsilon < f(x_0)$$

这样就有

$$f(x_0) - m = f(x_0) - f(x_n) + f(x_n) - m \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

让 $\varepsilon \to 0^+$，有 $f(x_0) \le m$，这就导出了矛盾. □

如果利用上下极限的语言，可以写为

$$m = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ge \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{|x-x_0|<\delta} \{f(x)\} \ge f(x_0) - \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，即得 $m \ge f(x_0)$，从而 $f(x_0) = m$.

例 5.4 (有理点列的逼近)**.** 设 f 定义在 $\mathbb{R}$ 上满足 f 在 $x = 0$ 处连续，且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，则 $f(x) \equiv f(1)x$.

证明. 明显 $f(0) = 0$，对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) = f(x_0)$$

即 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 且当 $x \in \mathbb{Q}$ 时，恒有 $f(x) = f(1)x$. 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，存在有理点列 $\{x_n\} \to x_0 (n \to \infty)$，于是

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(1)x_n = f(1)x_0.$$

□

例 5.5 (最大值，最小值函数的连续)**.** f 在区间 I 上连续 $\Longleftrightarrow$ 对每个 n,

$$f_n(x) = \begin{cases} -n, & f(x) \leq -n. \\ f(x), & -n < f(x) < n. \\ n, & f(x) \geq n. \end{cases}$$

在 I 上连续.

证明. 必要性注意 $f_n(x) = \min\{n, \max\{f(x), -n\}\}$. □

例 5.6 (一一映射)**.** 设 $f \in C([a,b])$，为一一映射. 若 $f(a) < f(b)$，则 f 在 $[a,b]$ 上严格单调增.

证明. 反证，若存在 $x_1 < x_2$，使得 $f(x_1) > f(x_2)$. 考虑 $f(x_2)$ 与 $f(a)$ 的大小关系.

- 若 $f(x_2) > f(a)$，则由介值性，存在 $x \in [a, x_1], y \in [x_1, x_2]$ 使得 $f(x) = f(y)(x \neq y)$.
- 否则，$f(x_1) > f(x_2) < f(b)$，存在 $x \in [x_1, x_2], y \in [x_2, b]$ 使得 $f(x) = f(y)(x \neq y)$.

这样即得. □

例 5.7 (端点极限不存在)**.** 设 $f \in C[a,b)$，且存在 $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq [a,b)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = B.$$

若 $A \neq B$，则对任意介于 A, B 之间的值 η，存在 $\{z_n\} \subseteq [a,b)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} z_n = b, \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \eta.$$

证明. 不妨设 $A < B$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 n 充分大时有

$$f(x_n) < A + \delta < \eta < B - \delta < f(y_n),$$

对上述每个 n，由介值性，存在 z_n 介于 x_n, y_n 之间，使得 $f(z_n) = \eta$. □

例 5.8 (连续取最大值或最小值)**.** 设 $f \in C(a,b)$，且 $f(a^+) = f(b^-)$，则 f 在 (a,b) 上可取最大值或最小值.

证明. 不妨设 $f(a^+) = f(b^-) = A$.

- 若 $A = +\infty$. 任取 $x_0 \in (a,b)$，存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b)$ 时，有 $f(x) > f(x_0)$, 则 $x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$. 又有 f 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上可取最小值 m, 则 $f(x_0) \geq m$, 即 m 是 f 在 (a,b) 上最小值.
- 同理，当 $A = -\infty$ 时，f 在 (a,b) 上可取最大值.
- 当 $|A| < \infty$ 时, 我们考虑 $f(x) \not\equiv A$，即存在 $x_0 \in (a,b)$，使得 $f(x_0) \neq A$.
  1. 若 $f(x_0) > A$, 可取 $\varepsilon > 0$, 使得当 $x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b)$ 时有 $f(x) < A + \varepsilon < f(x_0)$. 则 $x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$. 这样 f 在 $[a-\delta, b+\delta]$ 上的最大值即是 f 在 (a,b) 上的最大值.

2. 若 $f(x_0) < A$，同理可证 f 在 (a,b) 上可取最小值.

□

例 5.9 (辅助函数构造)**.** 设 $f \in C[0,n]$，且 $f(0) = f(n)$，则至少存在 n 对 (x,y) 使得 $f(x) = f(y)$，且 $x - y$ 是非零整数.

证明. 对 n 进行归纳. 令 $F(x) = f(x+1) - f(x)$，则

$$F(0) + F(1) + \cdots + F(n-1) = f(n) - f(0) = 0,$$

由介值性，存在 $x_0 \in [0, n-1]$ 使得 $F(x_0) = 0$，即 $f(x_0+1) = f(x_0)$. 现在令

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, x_0] \\ f(x+1), & x \in (x_0, n-1] \end{cases}$$

则 $h(x) \in C[0, n-1]$, 且 $h(0) = h(n-1)$. 利用归纳假设，存在 $n-1$ 对不同 (x_i, y_i) 使得，$h(x_i) = h(y_i)$，且 $x_i - y_i$ 是非零整数. 现在令

$$a_i = \begin{cases} x_i, & x_i \le x_0 \\ x_i + 1, & x_i \in (x_0, n-1] \end{cases}, \quad b_i = \begin{cases} y_i, & y_i \le x_0 \\ y_i + 1, & y_i \in (x_0, n-1] \end{cases}$$

则 $(a_i, b_i) \neq (x_0, x_0+1)$ 满足条件. □

在回顾一致连续时，首先快速回顾:

1. 满足 Lipschitz 条件函数一定一致连续.
2. 若 f, g 在 I 上一致连续，则 $af + bg, fg$ 在 I 上也一致连续.
3. f 在 $[a, +\infty)$ 可导, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, 则 f 在 $[a, +\infty]$ 上不一致连续 [问题, 5.11].
4. 若 f 在 $(a, b]$ 和 $[b, c)$ 上分别一致连续时，f 在 (a, c) 上也一致连续. 若条件改为 $(a, b), (b, c)$，则结论未必正确（[问题，5.12]）
5. 若 f 在 $[a, +\infty]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x \to +\infty}$ 存在且有限，则 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.
6. 若 f 在 $[a, +\infty]$ 上连续，g 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$，则 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续. 特别地，当 f 有渐近线时，有一致连续.
7. 设 f 在 I 上一致连续，g 在 J 上一致连续，且 $f(I) \subseteq J$，则 $g \circ f$ 在 I 上一致连续.
8. R 上连续的周期函数一定一致连续.

例 5.10 (开区间上的一致连续)**.** f 在 (a,b) 一致连续 $\Longleftrightarrow$ $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在且有限.

证明. 若 f 在 (a,b) 上一致连续，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得，$|x-y|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 特别地，当 $x,y\in(a,a+\delta)$ 和 $x,y\in(b-\delta,b)$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，由 Cauchy 收敛准则，$f(a^+),f(b^-)$ 存在且有限. 充分性对函数进行端点延拓. □

例 5.11 (导数无界)**.** 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 f 在 $[a,+\infty)$ 上不一致连续.

证明. 对任意 $\delta>0$, 当 x 充分大时，恒有 $f'(x)>\dfrac{2}{\delta}$. 则取 x',x'' 充分大，且 $\dfrac{\delta}{2}<|x'-x''|<\delta$，使得下式成立

$$|f(x')-f(x'')|=|f'(\theta)|\cdot|x'-x''|\geq\frac{2}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2}=1.$$

□

我们在判别函数是否一致连续时，一定要观察函数在哪个点附近可能出现问题，这往往是解决问题的关键.

例 5.12. 考虑 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$，则由于 f 在 $x=0$ 处左右极限存在，所以 f 在 $(0,1)$ 和 $(-1,0)$ 上都一致连续. 但是 f 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上不一致连续，问题出现在零点左右附近: 对任意 $\delta>0$, 我们可以在 0 的左右分别取 x_1,x_2，使得 $|x_1-x_2|<\delta$，且

$$f(x_1)<-\frac{1}{2},\quad f(x_2)>\frac{1}{2},$$

这样就有 $|f(x_1)-f(x_2)|>1$.

例 5.13. $x\sin x$ 在 $[a,+\infty)$ 上不一致连续，问题点出现在无穷远处: 取 $x_n=n\pi,y_n=\sqrt{n^2+1}\pi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但是

$$\begin{aligned}|x_n\sin x_n-y_n\sin y_n|&=\pi\sqrt{n^2+1}\cdot|\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)|\\&=\pi\sqrt{n^2+1}\cdot|\sin(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi)|\\&=\pi\sqrt{n^2+1}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\to\frac{\pi^2}{2},\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

例 5.14. 设 $f=x^\alpha\ln x$，讨论 α 的取值，使得 f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

证明. 这类问题有比较统一的想法. 首先要保证 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x$ 存在，即先有 $\alpha>0$. 然后我们看无穷远处，一般考虑其导数：$f'(x)=x^{\alpha-1}(1+\alpha\ln x)$，则当 $\alpha<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，此时易证 f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续. 当 $\alpha\geq1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，则由 [问题，5.11],$f(x)$ 不一致连续. □

例 5.15 (苏大)**.** 设 $f=\cos x^\alpha$，讨论 α 的取值，使得 f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

证明. 首先由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在，先有 $\alpha\geq0$. 此时只需考虑 f 在 $[1,+\infty)$ 上的一致连续性. 注意 $f'(x)=-\alpha x^{\alpha-1}\sin x^\alpha$，则当 $\alpha\leq1$ 时，$|f'(x)|\leq1$，此时 f 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 当

$\alpha > 1$ 时，取 $x_n = \sqrt[\alpha]{2n\pi}, y_n = \sqrt[\alpha]{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$，但是 $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$，即 f 在 $[1, +\infty)$ 上不一致连续. □

例 5.16 (单调函数)**.** 设 f 在 I 上单调，则 $f \in C(I) \iff f(I)$ 是区间.

证明. 不妨设 f 在 I 上单调增. 对任意 $x_0 \in I$，对于 $x < x_0 < y$, 有

$$f(x) \le f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+) \le f(y)$$

若 f 在 x_0 处不连续，则 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$，这样至多存在一点 x_0 使得 $f(x_0)$ 落在 $(f(x_0^-), f(x_0)^+)$. □

例 5.17. 设 I, J 是两个有界闭区间，$f \in C(I)$. 如果有 $J \subset f(I)$，则存在 I 的一个闭子区间 I', 使得 $f(I') = J$.

证明. 设 $I = [a, b], J = [c, d]$. 由介值性，存在 $\xi, \eta \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = c, f(\eta) = d$.

- 若 $\xi < \eta$，令

$$u = \sup\{f(s) = c \mid \xi \le s \le \eta\},$$
$$v = \inf\{f(s) = d \mid u \le s \le \eta\}.$$

  则由 f 的连续性，一定有 $f(u) = c, f(v) = d$. 下面我们希望说明当 $x \in (u, v)$ 上，有 $c < f(x) < d$, 这样就有

$$f([u, v]) = [c, d] = J.$$

  若存在 $x_0 \in (u, v)$，使得 $f(x_0) < c$. 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in [x_0 - \delta, x_0] \subseteq (u, x_0)$ 时，有 $f(x) < c$. 则由介值性，存在 $x \in [x_0 - \delta, v]$, 使得 $f(x) = c$，这与 u 的取法矛盾. 同理说明 $f(x) < d$.
- 类似手法考虑 $\xi > \eta$ 情形.

□

例 5.18. 设 f 在 R 上单调，在每一点定义 $g(x) = f(x^+)$，则 g 在 R 上处处右连续.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0, x_0 \in R$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $y \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，有

$$|f(y) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

则对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$，让 $y \to x^+$ 有

$$|g(x) - g(x_0)| \le \varepsilon.$$

□

例 5.19 (浙大). 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是全体有理数，令

$$f(x)=\sum_{n:r_n<x}\frac{1}{2^n}$$

则 f 单调增，且在有理点处间断，在无理点处连续.

证明. 对任意 $x_1<x_2$，由有理数的稠密性，存在 r_k 使得 $x_1<r_k<x_2$，这样就有

$$f(x_2)=f(x_1)+\sum_{n:x_1\le r_n<x_2}\frac{1}{2^n}\ge f(x_1)+\frac{1}{2^k}$$

即 f 单调增. 现在设 x_0 是任意无理数，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\varepsilon,$$

对于上述固定 N，令 $\delta=\dfrac{1}{2}\min\limits_{1\le i\le N}\{|x_0-r_i|\}>0$，则当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，就有

$$|f(x)-f(x_0)|=\sum_{n:r_n\text{介于}x,x_0\text{之间}}\frac{1}{2^n}\le\sum_{n:|r_n-x_0|<\delta}\frac{1}{2^n}\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

即 f 在 x_0 处连续. 明显 f 在有理点处右间断. □

例 5.20. 设 $f\in C(a,b)$，且

$$\varlimsup_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0,\quad\forall x\in(a,b)$$

则 f 在 (a,b) 上严格递增.

证明. 设 $a<x_1<x_2<b$，满足 $f(x_1)\ge f(x_2)$，则记 $f(c)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\},c\in[x_1,x_2]$. 若 $f(c)>f(x_2)$，则 $c<x_2$，故

$$\varlimsup_{h\to0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le0,$$

矛盾. 于是有 $f(c)=f(x_2)=f(x_1)$，此时

$$\varlimsup_{h\to0^+}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\le0$$

也矛盾. □

例 5.21. 设 $f,g\in C[0,1]$，且存在 $\{x_n\}\subset[0,1]$，使得 $f(x_n)=g(x_{n+1})$，则存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

证明. 令 $F=f-g$，则

$$F(x_1)+\cdots+F(x_n)=g(x_{n+1})-g(x_1),$$

由连续函数的介值性，存在 $y_n\in[0,1]$，使得 $F(y_n)=\dfrac{g(x_{n+1})-g(x_1)}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}F(y_n)=0$. 注意 $\{y_n\}$ 有界，故有收敛子列，故我们不妨一开始便设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$，则由连续性

$$F(y_0)=F\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)=\lim_{n\to\infty}F(y_n)=0.$$

□

例 5.22.

例 5.23. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微，且

$$f(x+1)-f(x)=f'(x),\quad \forall x\in[0,+\infty).$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$，则 $f'(x)\equiv A$.

证明. 对任意 $x_0\in[0,+\infty)$，令

$$E=\{x\in[0,+\infty)\mid f'(x)=f'(x_0)\}$$

则 E 非空. 若 E 是有界集，则设 $y_0=\sup E$，则由连续性即有 $f'(y_0)=f'(x_0)$. 但是由中值定理，存在 $\xi\in(y_0,y_0+1)$，使得

$$f'(y_0)=f(y_0+1)-f(y_0)=f'(\xi)$$

这与 y_0 的取法矛盾. 于是存在 $\{y_n\}\to+\infty$，使得 $f'(y_n)\equiv f'(x_0)$，由归结原则

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}f'(y_n)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A.$$

□

5.2 参考题

例 5.24. 设 $f\in C(0,1]$，且对任意实数 c，$f(x)=c$ 至多只有有限实根. 则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ f 在 $(0,1]$ 上有界.

证明. 必要性是显然的，如下只考虑充分性. 若 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 不存在，则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意 n，存在 x_n,y_n, 落在 $|x|<\min\left\{\dfrac{1}{n},x_{n-1},y_{n-1}\right\}$，使得

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$$

由 $\{f(x_n)\}, \{f(y_n)\}$ 的有界性，其有收敛子列，故一开始不妨设 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = B$. 则有 $|A-B| \geq \varepsilon_0$. 不妨设 $A \geq B + \varepsilon_0$，则当 n 充分大时, 成立

$$f(y_n) < B + \varepsilon < \frac{A+B}{2} < A - \varepsilon < f(x_n),$$

即存在 $c_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$，使得 $f(c_n) = \frac{A+B}{2}$，这样方程 $f(x) = \frac{A+B}{2}$ 就存在无穷多个实解 (注意理由说明), 矛盾. □

例 5.25. 设 c_n 是 $x^n + x = 1$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 的唯一实根，试求 $\lim_{n\to\infty} c_n$.

证明. 令 $f_n(x) = x^n + x$，则 $f_n(x)$ 关于 x 单调增. 对任意 $n > m$，有

$$f_n(c_m) = c_m^n + c_m \leq c_m^m + c_m = 1 = f_n(c_n),$$

则 $c_n \geq c_m$，由单调有界定理,$\{c_n\}$ 收敛. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{n\to\infty} f_n(1-\varepsilon) = 1-\varepsilon$，则当 n 充分大时，$c_n \geq 1-\varepsilon$，即有 $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$. □

例 5.26. 若 f 在 $[0, +\infty)$ 上连续且有界, 则对任意给定实数 λ, 存在趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$，使得 $\lim_{n\to\infty}[f(x_n+\lambda) - f(x_n)] = 0$.

证明. 不妨设 $|f(x)| \leq M$ ，且 $\lambda > 0$. 令 $g(x) = f(x+\lambda) - f(x)$, 则对任意 $n \in N^+$, 有

$$\left|\sum_{k=(n+1)\lambda}^{2n\lambda} g(k)\right| = |f((2n+1)\lambda) - f((n+1)\lambda)| \leq 2M.$$

则必定存在 $x_n \geq (n+1)\lambda$，使得 $g(x_n) \leq \frac{2M}{n}$.(分这 n 个点是否同号进行讨论) □

例 5.27 (周期点的稠密性)**.** 设 f 是 R 上的连续周期函数，则若 f 没有最小正周期，则 f 恒为常数.

证明. 由于 f 没有最小正周期, 则存在严格单调减的正周期列 $\{S_n\}$. 由单调有界定理, $\{S_n\}$ 收敛，记 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. 令 $T_n = S_n - S$, 则 $\{T_n\}$ 是 f 趋于零的正周期列.

对任意固定 $x \in R, n \in N^+$，存在非负整数 n_x，使得 $a_n = x - n_x T_n \in [0, T_n]$，则 $f(x) \equiv f(x - n_x T_n) = f(a_n)$. 让 $n \to \infty$，则有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(0).$$

□

例 5.28 (化无限为有限)**.** 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $x_0 \in [0, 1]$, 有 $\lim_{n\to\infty} f(x_0 + n) = 0$，则 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|x-y| < \delta$ 时，成立 $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. 对于上述固定 δ，将 $[0,1]$ 进行 n 等分，使得区间长度小于 δ. 记分点为 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. 则存在 N，使得当 $n > N$ 时，同时成立

$$|f(x_i + n)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n.$$

则对任意 $x > N+2$，存在 $n_x > N, k \geq 1$ 使得 $x - n_x \in [x_{k-1}, x_k]$，则

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_{k-1} + n_x)| + |f(x_{k-1} + n_x)| < 2\varepsilon.$$

□

例 5.29. 设 $f \in C[0,1]$ 满足 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 且 $f(f(x)) \equiv x$，则 $f(x) \equiv x$.

证明. 由 $f(f(x)) \equiv x$，f 是有介值性的一一对应函数，由 [问题，5.6],f 是严格单调增的. 对任意 $x \in [0,1]$，若 $f(x) \geq x$，则 $f(f(x)) = x \geq f(x)$，即 $f(x) = x$. 同理说明 $f(x) \leq x$ 情形. □

例 5.30. 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续，则存在非负常数 a, b，使得 $|f(x)| \leq a|x| + b$.

证明. 取 $\varepsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得 $|x-y| \leq \delta$ 时，$|f(x) - f(y)| \leq 1$. 记 f 在 $[-\delta, \delta]$ 上满足 $|f| \leq M$. 则对任意 $x > 0$，存在非负整数 n_x，使得 $x - n_x\delta \in [0, \delta]$，这样就有

$$|f(x)| \leq 1 + |f(n_x\delta)| \leq \cdots \leq n_x + |f(\delta)| \leq n_x + M \leq \frac{x}{\delta} + M.$$

□

例 5.31 (确界连续). 设 $f \in C[a,b]$，令 $M(x) = \max\limits_{t \in [a,x]} f(t)$，则 $M \in C[a,b]$.

证明. 只需证对任意 $x_0 \in [a,b]$，有 $M(x_0^-) = M(x_0) = M(x_0^+)$. 前半部分是容易的，下面我们主要考虑证明等式的右半部分. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in [x_0, x_0 + \delta)$ 时，

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leq M(x_0) + \varepsilon.$$

这样就有

$$\max_{t \in [x_0, x]} f(t) \leq f(x_0) + \varepsilon \leq M(x_0) + \varepsilon.$$

于是当 $x \in [x_0, x_0 + \delta]$ 时，若 $M(x) \neq M(x_0)$，则一定有 $M(x) = \max\limits_{t \in [x_0, x]} f(t)$. □

例 5.32. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调增加，且 $f(a) > a, f(b) < b$，则 f 在 (a,b) 上有不动点.

证明. 利用二分法构造闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$, 使得 (否则结论得证.)

$$f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n, \quad \forall n \in N^+.$$

设 $\xi \in [a_n, b_n]$，则

$$a_n < f(a_n) \le f(\xi) \le f(b_n) < b_n,$$

由迫敛性 $f(\xi) = \xi$. □

例 5.33. 设 f 在开区间 I 上连续，且对任意 $x \in I$，f 在 x 处取极大值，则 f 在 I 上为常函数.

证明. 对任意 $a < b \in I$，我们只要说明 f 在 $[a, b]$ 上的最大值等于最小值. 反证，设 $f(a_1) = m, f(b_1) = M$ 分别是 f 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值. 不妨设 $a_1 < b_1$. 对任意 $\varepsilon_n = \dfrac{M-m}{n}$，由介值性，存在 $x_n \in [a_1, b_1]$，使得 $f(x_n) = m + \dfrac{M-m}{n}$. 则有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m + \lim_{n\to\infty} \frac{M-m}{n} = m.$$

由于 $\{x_n\}$ 有界,则 $\{x_n\}$ 有收敛子列,故不妨一开始便设 $\{x_n\}$ 是收敛的,并记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 则

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = m.$$

对任意 $\delta > 0$, 存在 $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，则 $f(x_n) > f(x_0)$，即 x_0 不是 f 的极大值点，矛盾. □

例 5.34. 设 f 在开区间 I 上连续，且对任意 $x \in I$ 都是 f 的极值点，则 f 在 I 上为常值函数.

证明. 对任意 $a < b \in I$ ，假设 $f(a) \ne f(b)$，不妨设 $f(a) < f(b)$. 记 $[a_1, b_1] = [a, b]$, $c = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$,

- 若 $f(c) \le f(a)$，由介值性，可以在 $[c, b_1]$ 中找到 $a_2 < b_2$, 使得 $f(a_1) < f(a_2) < f(b_2) < f(b_1)$.
- 若 $f(b) > f(c) > f(a)$，则记 $a_2 = c$, 并能在 $[c, b_1]$ 中找到 b_2，使得 $f(a_1) < f(a_2) < f(b_2) < f(b_1)$.
- 若 $f(c) \ge f(b_1)$，则可以在 $[a_1, c]$ 中找到 $a_2 < b_2$，使得 $f(a_1) < f(a_2) < f(b_2) < f(b_1)$.

这样做下去得到闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，满足 $\{f(a_n)\}$ 严格单调增，$\{f(b_n)\}$ 严格单调减，且

$$b_n - a_n \le \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0, \quad (n \to \infty).$$

设 $a_n \le \xi \le b_n, \forall n \in N^+$. 则

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

即 $f(\xi)$ 分别是 $\{f(a_n)\}, \{f(b_n)\}$ 的上下确界. 对任意 $\delta > 0$, 当 n 充分大时，$[a_n, b_n] \subseteq$

$(\xi-\delta,\xi+\delta)$. 这样就有

$$f(a_n) < f(a_{n+1}) \le f(\xi) \le f(b_{n+1}) < f(b_n).$$

即 ξ 不是 f 的极值点，矛盾. □

例 5.35. 设 f 是将区间 $[a,b]$ 映入自身的连续映射. 从 $[a,b]$ 的任意一点 x 出发，令 $x_1 = x, x_{n+1} = f(x_n)$，则 $\{x_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0$.

证明. 必要性显然，如下主要讨论充分性. 记 x_n 的上下极限分别是 A, B. 若 $A > B$，则对任意 $t \in [B,A]$，由 [问题，2.41]，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = t$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) - x_n = 0$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - x_{n_k} = 0$, 这样就有 t 是 f 的不动点. 但是另一方面，存在 N，使得 $x_N \in (B,A)$，这样就有 $x_n = x_N, \forall x_n \ge N$，即又得到 $\{x_n\}$ 收敛，矛盾. □

例 5.36 (间断点的可列). 设 f 定义在 $[a,b]$ 上，且处处有极限，则

1. 对任意 $\varepsilon > 0$, 在 $[a,b]$ 中使得 $|\lim\limits_{t\to x} f(t) - f(x)| > \varepsilon$ 的点至多只有有限个.

2. f 在 $[a,b]$ 至多只有可列个间断点.

证明. 1. 我们采用反证法. 若存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得存在互异点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$，满足

$$|\lim_{t\to x_n} -f(x_n)| > \varepsilon_0, \quad \forall n \in N^+.$$

由 $\{x_n\}$ 的有界性，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 对任意 $\delta > 0$，取 $x_k \in U^o(x_0;\delta)$, 有

$$\lim_{t\to x_k} |f(t) - f(x_k)| = |\lim_{t\to x_k} f(t) - f(x_k)| > \varepsilon_0$$

这样由保号性，存在 $x' \in U^o(x_0;\delta)$，使得

$$|f(x') - f(x_k)| > \varepsilon_0$$

由 Cauchy 准则，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，矛盾.

2. 令

$$H_n = \left\{ x \in [a,b] : |\lim_{t\to x} f(t) - f(x)| > \frac{1}{n} \right\}, \quad \forall n \in N^+.$$

则 H_n 是有限集，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ 是可列集. 若 $r \in [a,b]$ 是间断点，则有 $|\lim\limits_{x\to r} f(x) - f(r)| > 0$, 则存在 $n \in N^+$, 使得 $|\lim\limits_{x\to r} f(x) - f(r)| > \dfrac{1}{n}$，即 $r \in H_n$. □

例 5.37 (严格极值点的可列性). 任何 R 上函数的严格极大值点至多可列.

证明. 设 f 是 R 上函数，令

$$S_n = \{x \in R : f(t) < f(x), t \in U^o(x;1/n)\}, \quad \forall n \in N.$$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ 是 f 的严格极大值点集，如下只需证明，对每个 $n \in N^+$，S_n 是可列集.

考虑 S_n 是无限集，对任意 $x_1 < x_2 \in S_n$，不妨设 $f(x_1) \leq f(x_2)$，则 x_2 落在 $R \setminus U(x_1; 1/n)$, 这样就有

$$U(x_1; 1/2n) \cap U(x_2; 1/2n) = \varnothing$$

于是 S_n 中的点 x_i 与无交区间 $U(x_i; 1/2n)$ 有一一对应关系，后者对应于有理数集 Q 的无限子集，是可列集. □

例 5.38 (零点与确界)**.** 设 f 在区间 $[0,1]$ 上满足 (1)$f(0) > 0, f(1) < 0$; (2) 存在 $g \in C[0,1]$ 使得 $f+g$ 在 $[0,1]$ 上单调增，则 f 在 $(0,1)$ 上有零点.

证明. 令

$$E = \{x \in [0,1] \mid f(x) > 0\},$$

则 f 是非空有界，可设 $x_0 = \sup E$. 若 $f(x_0) > 0$，则 $x_0 < 1$，且对任意 $x > x_0$, 有

$$0 \geq f(x) = f(x) + g(x) - g(x) \geq f(x_0) + g(x_0) - g(x)$$

让 $x \to x_0^+$, 即有 $f(x_0) \leq 0$，矛盾. 这样就有 $f(x_0) \leq 0$. 另设 $\{x_n\} \subset E$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，则

$$0 < f(x_n) = f(x_n) + g(x_n) - g(x_n) \leq f(x_0) + g(x_0) - g(x_n)$$

让 $n \to \infty$，就有 $f(x_0) \leq 0$，这样即得 $f(x_0) = 0$. □

§6　导数与微分

本章节的重点是导数的计算和函数的可导性分析：

1. 设 f 在 (a,b) 上可导，则 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ 与 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \infty$ 之间没有关系. 具体可以考虑 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ 和 $f(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $(0,1)$ 的函数性态.

2. 构造仅在有限点可导和仅在有限点不可导的例子.

3. 关注函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处函数与导函数性质.

4. 关注函数

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

在 0 处任意阶导数值为 0. 分析的关键是 $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\dfrac{\mu^\alpha}{e^\mu}=0,\forall\alpha\in R.$

5. 注意 $x^n\ln x$ 的 n 阶导数求法 [问题，6.1].

6. 关注利用导数求

   (a)
$$1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}.$$

   (b)
$$\sum_{k=1}^n k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$$

7. 特别关注

   (a)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\sin kx=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^n\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^n\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]\\&=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

   (b)
$$\sum_{k=1}^n\cos kx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

   并以此求出 $\sum_{k=1}^n k\cos kx$ 和 $\sum_{k=1}^n k\sin kx$.

例 6.1. 由 Leibniz 法则,

$$\begin{aligned}(x^n\ln x)^n&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(x^n)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)}\\&=n!\ln x+\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{x^k}\cdot\frac{n!}{k!}x^k\\&=n!\ln x+n!\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\end{aligned}$$

进一步

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1(-x)^{k-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-x)^{k-1}\right)\mathrm{d}x, \tag{9}$$

且

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-x)^{k-1}=-\frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^{k}-1\right)&=\frac{1-(1-x)^n}{x}\\&=1+(1-x)+\cdots+(1-x)^{n-1}\end{aligned} \tag{10}$$

结合(9),(10)，有

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}.$$

记 $f(x)=x^n\ln x$，这样就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n!}=\gamma.$$

例 6.2. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微，且

$$\{x\in[0,1]\mid f(x)=f'(x)=0\}=\varnothing,$$

则 f 在 $[0,1]$ 只有有限个零点.

证明. 若 f 在 $[0,1]$ 上有无数个零点，记互异点列 $\{x_n\}$ 是 f 在 $[0,1]$ 上的零点集.$\{x_n\}$ 是有界数列，故不妨一开始便设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 则由 f 的连续性，$f(x_0)=0$. 由于 $\{x_n\}$ 中至多有一项等于 x_0，则当 n 充分大时 $x_n-x_0\neq 0$, 由归结原则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0,$$

这就导出了矛盾. □

例 6.3 ($\frac{k}{n^2}$ 型)**.** 设 $f(0)=0,f'(0)$ 存在，定义数列 $x_n=\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明. 我们采用无穷小增量的书写方式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x),(x\to 0)$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[f'(0)\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=f'(0)\int_0^1 xdx=\frac{f'(0)}{2}.$$

□

还要注意具体题目的应用：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

§7 微分学的基本定理

7.1 基础回顾

- 关注导数的极限定理与 Darbox 定理的证明, 由此说明导函数至多仅有第二类间断点.
- k 值法的应用（[问题，11.20]）
- 特别关注辅助函数的构造，出发点：$(fe^g)'=(f'+g'f)e^g$.
- 看见 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)$，要想到函数 $fg'-f'g$
- 中值点的极限.(处理手法见 [问题，7.7])
- 添加扰动项是为了更好的导出矛盾，手法处理见 [问题，7.24，问题，7.25].
- 关注区间的最值在内部取得带来的导数值为零 [问题，7.28].
- 中点处展开往往会得到更加精确的估计, 是考试及其常见的手法.

例 7.1 (中点处展开). 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

证明. 由 Taylor 定理，

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\eta_1)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4},$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\eta_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}.$$

这样就有

$$|f(b)-f(a)|\leq\frac{(b-a)^2}{8}(|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|)\leq\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}$$

□

例 7.2 (Rolle 定理推广). 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$, 则存在 $\xi>a$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明. 如下考虑 f 在给定区间不是常值函数的情形，即存在 $x_0\in(a,+\infty)$，使得 $f(x_0)\neq f(a)$，不妨设为 $f(x_0)>f(a)$，则存在 M，使得当 $x>M$ 时，有 $f(x)<f(x_0)$, 这样 f 在

$[a,M]$ 上的最大值即是 f 在 $[a,+\infty)$ 上的最大值，由 Fermat 定理，最大值点 $\xi>a$，满足 $f'(\xi)=0$. □

我们举个应用的例子应用：设 f 在 $(0,+\infty)$ 上可微，且 $0\le f(x)\le \dfrac{x}{1+x^2}$，则存在 $\xi\in(0,+\infty)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

例 7.3. 设 $f\in C[0,1]$ 在 $(0,1)$ 上可微，且 $f(0)=0,f(1)=1$. 又设 $k_1,\cdots,k_n$ 是 n 个正数，满足 $\sum_{j=1}^n k_j=1$，则存在 ξ_i 满足

$$\frac{k_1}{f'(\xi_1)}+\cdots+\frac{k_n}{f'(\xi_n)}=1.$$

证明. 由介值性，存在

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$$

满足 $f(x_i)=\sum_{j=1}^i k_j$，则存在 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，使得

$$f'(\xi)(x_i-x_{i-1})=f(x_i)-f(x_{i-1})=k_i$$

这样就有

$$\frac{k_1}{f'(\xi_1)}+\cdots+\frac{k_n}{f'(\xi_n)}=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=1.$$

□

作为练习

例 7.4 (合肥工业大学)**.** 设 f 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)=0,f(1)=1$, 则存在两点 $\xi,\eta\in(0,1)$ 使得

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{2024}{f'(\eta)}=2025.$$

例 7.5. 设 f 是 R^2 上的连续可微函数，且 $f(0,1)=f(1,0)$，则在单位圆周上存在不同的两点使得 $yf_x=xf_y$.

证明. 令 $g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$，则 $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f(2\pi)$，由 Rolle 中值定理，存在 $0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}<\theta_2<2\pi$，使得 $g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0$，注意

$$g'(\theta)=-\sin\theta f_x(\cos\theta,\sin\theta)+\cos\theta f_y(\cos\theta,\sin\theta)$$

这样即证. □

例 7.6 (矿大)**.** 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，且 $f(a)=g(b)=0,g'(x)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{\displaystyle\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x}=0.$$

证明. 设

$$F=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad G=\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$$

考虑证明 $F''(\xi)G(\xi)-G''(\xi)F(\xi)=0$，为此考虑 $H=GF'-FG'$，则 $H(a)=H(b)=0$，由 Rolle 中值定理即得. □

例 7.7 (中值点的极限)**.** 设 f 在 $(-1,1)$ 上 $n+1$ 阶可微，且 $f^{(n+1)}(0)\neq 0$. 则在 $0<|x|<1$ 时，有

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

这样就有

$$\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

证明. 注意

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+o(x^{n+1}),$$

这样就有

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(\theta x)-f^{(n)}(0)}{n!x}-\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}=\frac{\theta f^{(n+1)}(0)}{n!}-\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$$

□

例 7.8. 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，且 $f'(0)=0,f''(0)\neq 0$，则对任意 $x\in[0,1]$，存在 $\xi(x)\in(0,x)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi(x))x \tag{11}$$

则 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

证明. 对(11)的两边进行 Taylor 展开就有

$$f(0)x+\frac{f'(0)}{2}x^2+\frac{f''(0)}{6}x^3+o(x^3)=(f(0)+f'(0)\xi(x)+\frac{f''(0)}{2}\xi^2(x))x+o(x^2)$$

这样即得. □

例 7.9. 在 $|x| \le 1$ 时，由中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得 $\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

证明. 首先有

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

于是

$$\left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^2)\right)^2 = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{x^2}{1-(\theta x)^2} = x^2(1+(\theta x)^2 + o(x^2))$$

则

$$o(x^2) = \frac{1}{3}x^2 - \theta^2 x^2$$

这样即得. □

例 7.10 (分区间找点展开)**.** 设 f 在 $[-1,1]$ 上有任意阶导数，且 $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in N^+$. 若存在常数 $C \ge 0$, 使得对任意 $n \in N^+$ 和 $x \in [-1,1]$ 有 $|f^{(n)}(x)| \le n!C^n$，则 $f(x) \equiv 0$.

证明. 如下只考虑 $C > 1$ 的情形. 将区间 $[0,1]$ 为 k 份，使得区间长度小于等于 $\frac{1}{2C}$, 并记分点为

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1.$$

当 $x \in [0, x_1]$ 时，有

$$|f(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n\right| \le (Cx)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0, \quad (n \to \infty).$$

这样就有 f 在 $[0,x_1]$ 上取值恒为零, 特别地，$f^{(n)}(x_1) = 0$. 当 $x \in [x_1, x_2]$ 时，考虑 f 在 $x = x_1$ 处的 Taylor 展开式，得到 f 在 $[x_1,x_2]$ 上取值恒为零. 重复此过程得到 f 在 $[0,1]$ 上取值恒为零. 同理可得 f 在 $[-1,0]$ 上取值也恒为零. □

例 7.11 (界的估计)**.** 设 $f(x)$ 在 R 上二阶可微, 设 $0 < M_i = \sup\limits_{x\in R}|f^{(i)}(x)| < +\infty (i = 0,1,2)$. 证明:

$$M_1^2 \le 2M_0M_2.$$

证明. 对任意 $x \in R, h > 0$, 有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\eta)}{2}h^2$$

这样就有

$$|f'(x)| \le \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2},$$

让 $h = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, 则 $M_1^2 \le 2M_0M_2$. □

例 7.12 (局部). 设 f 在 $(0,a]$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}f'(x)$ 存在，则 f 在 $(0,a]$ 上一致连续.

证明. 不妨设在 $x\in(0,\delta]$ 时, 有 $|\sqrt{x}f(x)| \le M$. 则当 $x \ne y \in (0,a]$，有

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{f(x)-f(y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})\right| \le 2M|\sqrt{x}-\sqrt{y}|.$$

□

例 7.13. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=0, f(x)>0, \forall x\in(a,b)$. 则对任意 $\alpha>0$，存在 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \alpha\frac{f'(x_2)}{f(x_2)}.$$

证明. 令 $F=\ln f$, 在 (a,b) 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=-\infty$. 考虑证明 $F'(x_1)=\alpha F'(x_2)$. 事实我们只需考虑 $\alpha>1$ 情形，总能找到 $x_2\in(a,b)$ 使得，$F'(x_2)>0.$, 并总能取到 $c\in(a,x_2)$，使得

$$F'(d) = \frac{F(x_2)-F(c)}{x_2-c} > \alpha F'(x_2) > F'(x_2), \quad d\in(c,x_2)$$

由导函数的介值性，存在 $x_1\in(d,x_2)$，使得 $F'(x_1)=\alpha F'(x_2)$. □

例 7.14. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微，且 $f'(a)=f'(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

证明. 令

$$F = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x>a \\ f'(a), & x=a \end{cases}$$

则 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b]$ 上可导, 且导函数为

$$F'(x) = \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2} = \frac{f'(x)-F(x)}{x-a}$$

考虑证明 $F'(\xi)=0$. 若 $F'(x)$ 恒不为零，则由导函数的阶值性，不妨设 $F'(x)>0$，即有

$$f'(b) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad \forall x\in(a,b)$$

让 $x\to a^+$，即有

$$f'(a)=f'(b)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq f'(a)$$

导出矛盾. □

例 7.15. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

证明. 不妨设 $f(a)=0$，否则考虑 $g=f(x)-f(a)$. 令 $F=fe^{-\frac{x}{b-a}}$，考虑证明 $F'(\xi)=0$. 若 $f(c)=0$，则取 $\xi=c$，否则不妨设 $f(c)>0$，即有 $F(c)>0,F'(c)<0$, 由中值定理就有

$$\frac{F(c-F(a)}{c-a}=\frac{F(c)}{c-a}=F'(c_1)>0,\quad c_1\in(a,c)$$

由导函数的介值性，存在 $\eta\in(c_1,c)$，使得 $F'(\xi)=0$. □

例 7.16 (西南大学)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$，则存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)-f(\eta)+f(a)=0$.

证明. 令 $F=(f(x)-f(a))e^{-x}$，考虑证明 $F'(\eta)=0$. 若 $f(\xi)=f(a)$，则取 $\eta=\xi$ 即可, 否则不妨设 $f(\xi)>f(a)$，即 $F(\xi)>0$，且 $F'(\xi)<0$, 由中值定理就有

$$\frac{F(\xi)-F(a)}{\xi-a}=\frac{F(\xi)}{\xi-a}=F'(\xi_1)>0,\quad \xi_1\in(a,\xi)$$

由导函数的介值性，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi)$，使得 $F'(\xi)=0$. □

例 7.17. 设 f 在 $[a,c]$ 上可导，且 $f'(c)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=2(f(\xi)-f(a)).$$

证明. 不妨设 $f(a)=0$, 否则考虑 $g=f(x)-f(a)$. 令 $F=fe^{-2x}$, 则 $F(a)=0$. 若 $f(c)=0$, 则由 Rolle 即得. 否则不妨设 $f(c)>0$，即有 $F(c)>0,F'(c)<0$，则由中值定理，存在 $c_1\in(a,c)$，使得 $F'(c_1)=\dfrac{F(c)-F(a)}{c-a}>0$, 再由导函数的介值性即得. □

例 7.18. 设 f 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 次可导，且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,k=0,1,\cdots,n$. 则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$.

证明. 令 $F=[f+f'+\cdots+f^{(n)}]e^{-x}$，由 Rolle 即得. □

例 7.19. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，则存在 $\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi).$$

证明. 令 $F=f'(x)\cos x-2f(x)\sin x$，考虑证明 $F'(\xi)=0$, 为此令 $G=fe^{-2\int\tan x\mathrm{d}x}=f\cos^2(x)$，则 $G\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=G(0)=G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，由 Rolle 即得. □

例 7.20 (华南理工)**.** 设 f 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=1$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f(1)=(1+\xi)f'(\xi)\ln 2+1.$$

证明. 即证明

$$\frac{f(1)-1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{1+\xi}=f'(\xi)$$

由此，首先想到令 $F=f(x)-\dfrac{f(1)-1}{\ln 2}\ln(1+x)$，则 $F(0)=F(1)=1$，由 Rolle 即得. □

例 7.21. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$, 及存在 $A>0$，使得 $|f'(x)|\le A|f(x)|$，则 $f\equiv 0$.

证明. 令 $F=\displaystyle\int_0^x|f'(t)|\mathrm{d}t$，则 $F'(x)\le A|f(x)|\le AF(x)$, 由此考虑 $G=Fe^{-Ax}$，则 G 单调减，故有 $F\equiv 0$，即 $|f|\equiv 0$. □

例 7.22 (吉林大学)**.** 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，则存在互异的两点 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

证明. 任取 $c\in(0,1)$，由中值定理，存在 $\xi_1\in(0,c),\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\frac{f(c)-f(0)}{1-c}\cdot\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{f(c)}{c}\cdot\frac{1-f(c)}{1-c}$$

由此首先考虑 $f(c)=1-c$, 为此令 $F=f(x)-(1-x)$ ，则 $F(0)<0,F(1)>0$，由连续函数的介值性即得. □

例 7.23 (中国人大)**.** 设 f 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=2$，则存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得

$$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=9.$$

证明. 任取 $c\in(0,1)$，则存在两点，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)}{c},\quad f'(\eta)=\frac{2-f(c)}{1-c}$$

这样就有

$$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=\frac{f(c)+c}{c}\cdot\frac{3-(f(c)+c)}{1-c}$$

当 $f(c)+c=3(1-c)$ 时，正好有 $3-(f(c)+c)=3c$，于是令 $F=f(x)+4x-3$，则 $F(0)<0,F(1)>0$，由连续函数的介值性即可找到我们想要的点 c. □

例 7.24 (扰动处理)**.** 设 $f(x)\in C[a,b]$, 存在 $\{r_k\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}r_k=0$, 且对任意 $x\in(a,b)$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x+r_k)+f(x-r_k)-2f(x)}{r_k^2}=0.$$

则 f 是线性函数.

证明. 只需证明

$$f(x) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a). \tag{12}$$

和

$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a). \tag{13}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) - \varepsilon(x-a)(x-b).$$

下证 $G(x) \geq 0$. 若存在 $G(x_1) < 0$, 因为 $G(a) = G(b) = 0$, 则令 $G(x_0) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 则 $x_0 \in (a,b)$ 且 $G(x_0) < 0$. 经计算有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{G(x_0+r_k)+G(x_0-r_k)-2G(x_0)}{r_k^2} = -2\varepsilon < 0,$$

但是当 k 充分大时有

$$\frac{G(x_0+r_k)+G(x_0-r_k)-2G(x_0)}{r_k^2} \geq 0,$$

这就导出了矛盾，所以 $G(x) \geq 0$. 让 $\varepsilon \to 0^+$ 可得(12). 同理考虑(13). □

例 7.25 (南大)**.** 设 $f \in C[a,b]$, 若 f 在一个可数集之外可导，且导数非负，证明：$f(a) \leq f(b)$.

证明. 设

$$E = \{x \in [a,b] \mid f(x)\text{的导数不存在}\},$$

先设对任意 $x \in [a,b] \setminus E$, 有 $f'(x) > 0$. 若 $f(b) < f(a)$, 则由连续函数的介值性 $f([a,b])$ 包含 $[f(b), f(a)]$. 因为 E 是可数集，则 $f(E)$ 至多可数，于是 $(f(b), f(a)] \setminus f(E) \neq \varnothing$. 则任取 $y_0 \in (f(b), f(a)] \setminus f(E)$, 令

$$F = \{x \in [a,b] \mid f(x) = y_0\},$$

则 F 是非空有界集，设 x_0 是 F 的上确界. 则由连续函数性质，$f(x_0) = y_0$. 于是 $x_0 \neq b$, 从而 $x_0 < b$. 且由 x_0 的取法，对任意 $x \in (x_0, b]$ 恒有 $f(x) < y_0$ 或者 $f(x) > y_0$. 又因为 $y_0 > f(b)$, 这样对任意 $x \in (x_0, b]$, 恒有 $f(x) < y_0$. 于是

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0,$$

与条件矛盾. 对一般情况，设 ε 是任意大于零的数，令

$$f_\varepsilon = f(x) + \varepsilon x,$$

则 f_ε 满足在一个可数集之外可导，且导函数大于零，则 $f_\varepsilon(a) \le f_\varepsilon(b)$. 让 $\varepsilon \to 0^+$ 有 $f(a) \le f(b)$. □

举个相同处理手法的例子.

例 7.26 (浙大). 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且对任意 $x \in (a,b)$，$f'_+(x)$ 存在. 若 $f(a) = f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'_+(\xi) \le 0$.

证明. 如下考虑 f 非常值情形，即存在 $c \in (a,b)$，使得 $f(c) \ne f(a)$. 不妨设 $f(a) > f(c)$，否则考虑区间 (c,b), 则有 $f(c) > f(b)$. 任取 $y \in (f(c), f(a))$，令

$$E = \{x \in [a,c] \mid f(x) = y\},$$

则 E 是非空有界集，令 d 是 E 的上确界，则有 $f(d) = y$，即 $d < c$. 且在 $x \in (d,c]$ 上恒有 $f(x) < f(d)$, 这样就有

$$f'_+(d) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(d+h) - f(d)}{h} \le 0.$$

□

7.2 参考题

例 7.27. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微，在 (a,b) 上二阶可微，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b-a).$$

证明. 令

$$F(x) = f'(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}x,$$

则 F 在 (a,b) 上可导，且 $F(b) = F(a)$. 若对任意 $x \in (a,b)$，有 $F'(x) \ne 0$，则由导函数介值性，不妨设 $F'(x) > 0$, 即 F 在 (a,b) 上严格增. 若 $F(b-0) = +\infty$，则 $f'(b-0) = +\infty$，这样有

$$f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b^-} f'(\eta_x) = +\infty, \quad \eta_x \in (x,b).$$

这与 $f'_-(b)$ 存在相矛盾. 于是 $F(b-0)$ 存在，即 $f'(b-0)$ 存在. 同理有 $f'(a+0)$ 也存在，由导数极限定理 f' 在 $[a,b]$ 上连续, 即 F 在 $[a,b]$ 上连续. 由 Rolle 定理，存在 $c \in (a,b)$ 使得 $F'(c) = 0$，矛盾. □

例 7.28. 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶连续可微，$|f(x)| \le 1$, 且 $[f'(0)]^2 + [f(0)]^2 > 1$，则存在 ξ，使得 $f''(\xi) + f(\xi) = 0$.

证明. 令 $F(x)=[f'(x)]^2+[f(x)]^2$，设 $F(0)=1+q>1$. 则对任意 $x\neq 0$，有

$$|f'(\eta_x)|=\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\leq\frac{2}{x}\to 0,\quad (x\to\infty)$$

这样可以在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上找到点 ξ_1,ξ_2，使得 $|f'(\xi_1)|<\sqrt{q}$ 和 $|f'(\xi_2)|<\sqrt{q}$，即

$$\max\{F(\xi_1),F(\xi_2)\}<F(0)=1+q.$$

这样 $F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上的最大值在内部取得, 即存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得

$$F'(\xi)=2f'(\xi)[f''(\xi)+f(\xi)]=0.$$

注意 $f'(\xi)\neq 0$，否则 $F(\xi)=f^2(\xi)>1+q$，矛盾. □

例 7.29. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数，且存在 $C\geq 0$, 使得 $|f^{(n)}(x)|\leq C,\forall x\in R$. 若存在正数列 x_n，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 且 $f(x_n)=0,\forall n\in N^+$，则 $f(x)\equiv 0$.

证明. 由连续性有 $f(0)=0$. 对任意 $m\in N^+$，设 $f^{(k)}(0)=0,k=0,\cdots,m-1$. 则

$$0\equiv f\left(x_n\right)=\left(\frac{f^{(m)}(0)}{m!}+o(1)\right)x_n^m,\quad \forall n\in N^+.$$

这样就一定有 $f^{(m)}(0)=0$. 于是对任意 $x_0\in R$，有

$$|f(x_0)|=\left|\frac{f^n(\xi_n)}{n!}x^n\right|\leq\frac{C(x_0)^n}{n!}\to 0,\quad (n\to\infty).$$

□

例 7.30. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 若 f' 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明. 我们采用反证的思路. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0$，则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得，对任意 $n>a$，存在 $x_n>n$，满足 $|f'(x_n)|\geq\varepsilon_0$. 对上述固定 $\varepsilon_0>0$, 可以找到一个 $\delta>0$, 使得当 $|x-y|\leq\delta$ 时，有

$$|f'(x)-f'(y)|\leq\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

这样有

$$|f(x_n)-f(x_n+\delta)|\geq\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\delta.$$

由 Cauchy 准则，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在，这就导出了矛盾. □

例 7.31 (Bernstein)**.** 设 f 在 (a,b) 上任意阶可微，且对每个 n，成立 $f^{(n)}(x)\geq 0$. 则对每个 $x_0\in(a,b)$, 存在 $r>0$，使得当 $x\in[x_0-r,x_0+r]$ 时，成立

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

证明. 取 $r>0$，满足 $[x_0-3r,x_0+3r]\subset(a,b)$，则 f 在 $[x_0-3r,x_0+3r]$ 上有界，不妨设 $|f(x)|\le M$，这样对任意 $x\in[x_0-r,x_0+r]$, 就有

$$f(x+2r)=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(2r)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(2r)^{n+1}\ge f(x)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(2r)^n,\quad \forall n\in N^+$$

即有

$$f^{(n)}(x)\le\frac{2Mn!}{(2r)^n},\quad \forall n\in N^+.$$

这样就有，当 $x\in[x_0-r,x_0+r]$ 时，

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|&=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\\&\le\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{2M}{2^{n+1}}\to 0,\quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

□

§8 微分学的应用

8.1 重点回顾

例 8.1 (记住此阶)**.** 设 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，令 $x_n=\sin x_{n-1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=3$.

证明. 由 Stolz 公式，有

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}=3.$$

□

对于一般递推数列 $x_{n+1}=f(x_n)$，若 f 的 Taylor 展开中一次项系数为一，则我们常常需要取倒数估计，并且在倒数的估计中还需出现常数项，例如此题中的

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x}{6}+o(x)$$

展开式中没有出现常数项，故我们考虑

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{3}+o(x^4)$$

我们举个直接估计的例子，考虑 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，则

$$\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+o(x)$$

于是 $x_n\sim\frac{2}{n}$.

作为练习

例 8.2. 设 $x_0=a>0$，令 $x_n=\arctan x_{n-1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{3}n}x_n=1$.

例 8.3 (极值原理)**.** 考虑给定边界值的二阶线性非齐次微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x),\quad a<x<b,\quad y(a)=A,y(b)=B \tag{14}$$

其中 p,q,r 是给定函数，A,B 是给定数. 又设 $q(x)<0,\forall x\in(a,b)$. 若方程(14)在闭区间 $[a,b]$ 上有解，则解唯一.

证明. 若 y_1,y_2 是方程(14)的两个不同解，则 $y=y_1-y_2$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解. 记 $y(c)=\max\limits_{x\in[a,b]}y(x)>0$(否则考虑 $y=y_2-y_1$)，则 $y'(c)=0$, 这样就有 $y''(c)>0$，但这与 $y(c)$ 是极大值点相矛盾. □

例 8.4. 设 f,g 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 上可微，$f(0)=g(0)=0,f'>0,g'>0$. 若 $\frac{f'}{g'}$ 单调增，则 $\frac{f}{g}$ 也单调增.

证明. 令 $F=\frac{f}{g}$，则 $F'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$，于是命题等价证明 $\frac{f'}{g'}-\frac{f}{g}\geq 0$. 只需注意

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f'(\theta x)}{g'(\theta x)}\geq 0,\quad 0<\theta<1.$$

□

例 8.5 (苏大)**.** 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 若

$$f'(x)+f(x)\tan x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

则 $f\equiv 0,x\in[0,1]$.

证明. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=F(1)=0$，且

$$F''(x)+F'(x)\tan x=F(x).$$

下面证明 $F \equiv 0$. 否则,F 有正的最大值,或者负的最小值,不妨设为 $F(x_0) = \max\limits_{x\in[0,1]} \{F(x)\} > 0$，则 $F''(x_0) = F(x_0) > 0$，这与 x_0 是 F 的极大值点矛盾. □

这里的关键是二阶导函数总是和函数同号的，我们可以再随便举一个例子

例 8.6. 设 f 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = f(1) = 0$. 若 f 满足

$$xf''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0,$$

则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0,1]$.

证明. 反证，不妨设存在 $f(x_0) > 0$，记 $f(c) = \max\limits_{x\in[0,1]} \{f(x)\}$， $c \in (0,1)$，则 $f'(c) = 0$，于是有 $f''(c) > 0$，这与 $f(c)$ 是极大值矛盾. □

极值原理要求要知道两个端点处的函数取值，如果仅知道一个端点值，则就需要考虑构造函数类型了.

例 8.7 (重写)**.** 设 f 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = 0$. 若 f 满足

$$xf''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0, \tag{15}$$

则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0,1]$.

证明. 由 $f(0) = 0$ 代入得 $f'(0)$，进一步由导数极限定理

$$f''(0) = \lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - 2f'(x)}{x} = f'(0) - 2f'(0) = 0 \quad \text{(虽然没用到)}$$

对 (15) 两边积分有

$$xf'(x) + f(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y \tag{16}$$

再对(16)两边积分得

$$zf(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \int_0^x f(y)\mathrm{d}y = \int_0^z \mathrm{d}y \int_y^z f(y)\mathrm{d}x = \int_0^z (z-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

于是就有

$$|zf(z)| \le \int_0^z |z-y||f(y)|\mathrm{d}y \le \int_0^z |yf(y)|\mathrm{d}y$$

记 $F(z) = \displaystyle\int_0^z |yf(y)|\mathrm{d}y$，则 $(F(z)e^{-z})' \le 0$，从而只能是 $F(z) \equiv 0$，即 $f(z) \equiv 0$. □

例 8.8 (再看单调有界)**.** 设 $x_0 = \ln a, a > 0$，且 $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(a - x_k)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明. 注意 $x_{n+1}=x_n+\ln(a-x_n)$，于是考虑 $f(x)=x+\ln(a-x)$，则 f 在 $x=a-1$ 取最大值，即有

$$f(x)\leq f(a-1)=a-1.$$

这样就有 $x_n\leq a-1$，于是 $x_{n+1}-x_n=\ln(a-x_n)\geq 0$. 由单调有界定理，$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a-1$. □

对于函数凹凸性，首先关注：

1. 明晰线性函数的特性：若 f 是 I 上的线性函数，则对任意 $a<b\in I$ 和 $\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\equiv\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\equiv\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

换句话说，在与凹凸性有关的题目中，对函数增添一个线性函数，往往不会改变题目条件.

2. 若 $f\in C[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上凸 $\iff$ 对任意 $x,y\in[a,b]$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

3. 若 $f\in C[a,b]$，且对任意 $a\leq c\leq d\leq b$, 满足

$$f\left(\frac{c+d}{2}\right)\leq\frac{1}{c-d}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

则 $f(x)\leq\max\{f(a),f(b)\},\forall x\in[a,b]$:

若 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}>\max\{f(a),f(b)\}$，不妨设 $x_0\in(a,\frac{a+b}{2}]$, 则 $a<2x_0-a\leq b$，这样就有

$$\begin{aligned}f(x_0)=f\left(\frac{2x_0-a+a}{2}\right)&\leq\frac{1}{2(x_0-a)}\int_a^{2x_0-a}f(x)\mathrm{d}x\\&<\frac{1}{2(x_0-a)}\int_a^{2x_0-a}f(x_0)\mathrm{d}x=f(x_0).\end{aligned}$$

这就导出了矛盾.

4. 综上分析，不难证明：设 $f\in C[a,b]$，则 f 是 $[a,b]$ 上的上凸函数 $\iff$ 对任意 $c\leq a\leq d\leq b$, 满足

$$f\left(\frac{c+d}{2}\right)\leq\frac{1}{c-d}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x.\qquad\text{([问题，8.12])}$$

5. 关注 Jensen 不等式的证明.

6. 开区间上的凸函数是连续函数，且在每一点存在左右导数.

7. 开区间上的凸函数，满足内闭的 Lipschitz 条件 [问题，8.9].

8. f 在 I 上为凸函数 $\iff$ 对每个 $c \in I$，存在 a，使得

$$f(x) \geq f(c) + a(x-c), \quad (\text{支撑线})$$

9. 若 f 是 $[a, +\infty)$ 上的凸函数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 一定有意义.

10. 区间 I 上的严格凸函数没有极大值点，且至多只有一个极小值点.

11. 若 f 是开区间 (a,b) 上的中点下凸函数至多只有第二类间断点: 若 x_0 是 f 的第一类间断点，取充分小的 $h>0$, 使得 $x_0+h \subset (a,b)$，这样就有

$$\begin{aligned} f(x_0+\frac{h}{2}) &\leq \frac{f(x_0)+f(x_0+h)}{2}, \\ f(x_0-\frac{h}{2}) &\leq \frac{f(x_0)+f(x_0-h)}{2} \\ f(x_0) &\leq \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}. \end{aligned}$$

让 $h \to 0^+$，即有 $f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0-0)$，矛盾.

12. 内闭有界中点凸的连续性，([问题，8.17]).

例 8.9. 设 f 是 (c,d) 上的凸函数，则对任意 $[a,b] \subset (c,d)$，f 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件.

证明. 取 $h>0$ 使得 $[a-h, b+h] \subset (c,d)$. 由于 f 在 $[a-h,b+h]$ 连续，从而可以取到最值，即 f 在 $[a-h,b+h]$ 上的最大值和最小值分别是 M 和 m，则对任意 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$，有

$$\frac{m-M}{h} \leq \frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h} \leq \frac{M-m}{h}$$

这样就有

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leq \frac{M-m}{h}|x_2-x_1|.$$

□

例 8.10 (导数建立不等式)**.** 求出最大的 α 和最小的 β, 使得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}, \quad \forall n \in N^+. \tag{17}$$

证明. (17)等价于

$$\alpha \le \frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} - n \le \beta,$$

这样我们只要找出 $\left\{\dfrac{1}{\ln(1+1/n)} - n\right\}$ 的上下确界，为此考虑 $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上性态. 利用求导工具可得 f 在 $(0,1]$ 上单调减，这样就有

$$f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1 \le f(x) \le \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

□

例 8.11 (凹凸性建立不等式)**.** 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是给定 n 个正数，则

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le (x_1^{x_1}\cdots x_n^{x_n})^{\frac{1}{x_1+\cdots+x_n}} \tag{18}$$

证明. (18)等价于证明

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\ln\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \le \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\ln x_i,$$

利用 $f = x\ln x$ 的下凸性即可. □

例 8.12 (南大)**.** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，证明：f 是凸函数的充要条件是对任意 $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 先证必要性. 由 f 的上凸性，对任意 $a<b\in R$ 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x &\ge \int_a^b f\left(\frac{a+b-x+x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

充分性. 若 f 不是 $\mathbb{R}$ 上凸函数，则存在 $a<b$ 使得 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. 现在令

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $g(a)=g(b)=0$，且对任意 $c\le a\le d\le b$, 满足

$$g\left(\frac{c+d}{2}\right) \le \frac{1}{c-d}\int_c^d g(x)\mathrm{d}x.$$

但是

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{g(a)+g(b)}{2}=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f(a)+f(b)}{2}>0=\max\{g(a),g(b)\}$$

这就导出了矛盾. □

例 8.13 (Newton 迭代法)**.** 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微，且 $f(0)<0<f(1), f'>0, f''>0$，则 f 在 $[0,1]$ 上有唯一实根，记为 ξ. 现在令 $x_1=1, x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，则 $\{x_n\}$ 收敛于 ξ，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^2}$.

证明. 首先

$$0=f(\xi)=f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)+\frac{f''(\theta_n)}{2}(\xi-x_n)^2,$$

这样就有 $f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)<0$，即

$$\xi<x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1},$$

这样就有 $f(x_n)>0$, 即 $\{x_n\}$ 单调递减，且以 ξ 为下界，故 $\{x_n\}$ 收敛，并记其极限为 η，则 $f(\eta)=0$，从而 $\xi=\eta$. 进一步，

$$x_{n+1}-\xi=\frac{(x_n-\xi)f'(x_n)-f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{f''(\theta_n)(x_n-\xi)^2}{2f'(x_n)},\quad \theta_n\in(\xi,x_n)$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{f''(\theta_n)}{2f'(x_n)}=\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.$$

□

8.2 参考题

例 8.14. 设 $|f(x)+f'(x)|\le 1$, 且 $f(x)$ 在 R 上有界，则 $|f(x)|\le 1$.

证明. 对任意 $a\in R$，有

$$e^a=\int_{-\infty}^{a}e^x\mathrm{d}x\ge\left|\int_{-\infty}^{a}e^x(f(x)+f'(x))\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-\infty}^{a}d(f(x)e^x)\right|=e^a|f(a)|$$

这样就有 $|f(a)|\le 1$. □

例 8.15. 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微，$f(0)=f(1)=0, \min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)>8$.

证明. 设 $f(c)=-1$，则有 $f'(c)=0$，这样就有

$$
\begin{aligned}
0=f(0)&=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2,\\
0=f(1)&=-1+\frac{f''(\xi_2)}{1-c}^2.
\end{aligned}
$$

不妨设 $c\in(0,\frac{1}{2}]$，则 $f''(\xi_1)=\dfrac{2}{c^2}\geq 8$. □

例 8.16. 设 $x_0=a, x_1=b$，且 $x_{n+1}=\dfrac{(2n-1)x_n+x_{n-1}}{2n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明. 首先

$$
x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n-x_{n-1}}{2n}=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot(b-a)
$$

这样就有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)+a&=\lim_{n\to\infty}(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{k!}+a\\
&=(b-a)\cdot e^{-1/2}+a.
\end{aligned}
$$

□

例 8.17 (中点凸)**.** 设 f 在 (a,b) 上满足

$$
f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\quad \forall x_1,x_2\in(a,b)
$$

若 f 在 (a,b) 的每个内闭子区间内有界，则 $f\in C((a,b))$.

证明. 对任意 $x_0\in(a,b)$, 记

$$
M(x_0)=\lim_{\delta\to0^+}\sup_{|x-x_0|<\delta}\{f(x)\},\quad m(x_0)=\lim_{\delta\to0^+}\inf_{|x-x_0|<\delta}\{f(x)\}
$$

则 f 在 x_0 处连续当且仅当 $M(x_0)=m(x_0)$. 记 $M_\delta=\sup\limits_{|x-x_0|<\delta}M(x)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}M_{1/n}(x)=M(x_0)$.

对每个充分大的 n, 在 $(x_0-1/n,x_0+1/n)$ 中存在 x_n 使得

$$
M_{1/n}(x_0)-\frac{1}{n}<f(x_n)\leq M_{1/n}(x_0),
$$

这样得到 $\{x_n\}$ 满足

$$
x_n\longrightarrow x_0,\quad f(x_n)\longrightarrow M(x_0),\quad (n\longrightarrow\infty)
$$

令 $y_n = 2x_n - x_0$, 则

$$f(x_n) = f\left(\frac{y_n + x_0}{2}\right) \le \frac{f(y_n) + f(x_0)}{2}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$，使得 $M_\delta(x) < M(x_0) + \varepsilon$. 当 n 充分大时，$y_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，即有

$$f(x_n) \le \frac{M(x_0) + f(x_0) + \varepsilon}{2},$$

让 $n \to \infty$，再让 $\varepsilon \to 0^+$, 则有

$$M(x_0) \le \frac{f(x_0) + M(x_0)}{2},$$

这样就有 $f(x_0) = M(x_0)$. 同理，现在取点列 $\{x_n\}$ 使得

$$x_n \longrightarrow x_0, \quad f(x_n) \longrightarrow m(x_0), \quad (n \to \infty)$$

令 $y_n = 2x_0 - x_n$，则

$$f(x_0) = f\left(\frac{y_n + x_n}{2}\right) \le \frac{f(x_n) + f(y_n)}{2}$$

同上，当 n 充分大时，

$$f(x_0) \le \frac{f(x_n) + f(y_n)}{2} \le \frac{f(x_n) + M(x_0) + \varepsilon}{2},$$

让 $n \to \infty$，再让 $\varepsilon \to 0^+$，则有

$$f(x_0) \le \frac{M(x_0) + m(x_0)}{2},$$

综上就有 $M(x_0) = m(x_0)$. □

例 8.18. 设 f 在 $(-1, 1)$ 上二阶可微，且 $f(0) = f'(0) = 0$，且 $|f''(x)| \le |f(x)| + |f'(x)|$. 则 $f \equiv 0$.

证明. 当 $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ 时，记

$$M = \max_{-1/4 \le x \le 1/4} \{|f(x)| + |f'(x)|\} = |f(x_0)| + |f'(x_0)|.$$

则

$$M = \frac{|f''(\xi)|}{2} x_0^2 + |f''(\eta)| x_0 \le \frac{1}{4}(|f''(\xi)| + |f''(\eta)|)$$

$$\leq \frac{1}{4}(|f(\xi)| + |f'(\xi)| + |f(\eta)| + |f'(\eta)|) \leq \frac{1}{2}M$$

故 $M = 0$，即 f 在 $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ 上恒等于零，特别地，$f\left(\pm\frac{1}{4}\right) = f'\left(\pm\frac{1}{4}\right) = 0$. 然后再考虑 f 在 $x = \pm\frac{1}{4}$ 处的 Taylor 展开，这样做下去即得 f 在 $(-1, 1)$ 上恒等于零. □

例 8.19. 设 f 在 $[a, b]$ 上有二阶导数，$f(a) = f'(a) = 0$，且存在常数 $M > 0$，使得

$$|f''(x)| \leq M|f(x)|.$$

则 $f(x) \equiv 0$.

证明. 方法同 [问题，8.18]. □

§9 常见不定积分

例 9.1.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan\frac{x}{a} + C.$$

例 9.2.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

例 9.3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a\sec^2 t\mathrm{d}t}{a\sec t} &= \int \frac{\sec t(\sec t + \tan t)\mathrm{d}t}{\sec t + \tan t} \\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C'.\end{aligned}$$

例 9.4.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t &= \ln|\sec t + \tan t| + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C'.\end{aligned}$$

例 9.5.

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\tan t} a^2 \int \sec t d(\tan t) \tag{19}$$

而

$$
\begin{aligned}
I = \int \sec^3 t\mathrm{d}t = \int \sec t d(\tan t) = \sec t \tan t - \int \sec t \tan^2 t\mathrm{d}t \\
= \sec t \tan t + \int \sec t\mathrm{d}t - I
\end{aligned}
$$

于是

$$
(19) = a^2 \cdot I = \frac{a^2}{2} \sec t \tan t + \frac{a^2}{2} \int \sec t\mathrm{d}t = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.
$$

例 9.6.

$$
\begin{aligned}
I = \int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}
\end{aligned}
$$

这样就有

$$
I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right] + C.
$$

例 9.7 (方程组)**.** 首先

$$
I_1 = \int e^{ax} \cos{(bx)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a} e^{ax} \cos{(bx)} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin{(bx)}\mathrm{d}x
$$

和

$$
I_2 = \int e^{ax} \sin{(bx)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx)\mathrm{d}x
$$

这样就有

$$
\begin{cases}
aI_1 - bI_2 = e^{ax} \cos{(bx)} \\
bI_1 + aI_2 = e^{ax} \sin{(bx)}
\end{cases}
$$

由 Crammer 法则,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \cdot (a\cos(bx) + b\sin{(bx)}) + C, \\
I_2 &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \cdot (a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C.
\end{aligned}
$$

例 9.8 (递推)**.** 记 $I(m,n) = \displaystyle\int \cos^m x \sin^n x\mathrm{d}x$，则

$$
I(m,n) = \frac{\cos^{m-1} x \cdot \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I(m-2,n)
$$

$$= -\frac{\cos^{m+1}x\cdot\sin^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2).$$

§10 定积分

8

10.1 基本方法

关于积分的可积理论，首先关注

1. 可积第二充要条件与可积第三充要条件的互推（[问题，10.1]）
2. 若 $f,g\in R[a,b]$，则 $fg\in R[a,b]$.
3. 若 $g\in R[a,b]$，且 $g[a,b]\subset[m,M]$. 若 $f\in C[m,M]$，则 $f\circ g\in R[a,b]$.（[问题，10.2]）
4. 若 f 在 $[a,b]$ 上的间断点构成一个收敛列，则 $f\in R[a,b]$.
5. Riemann 函数 $R(x)\in R[0,1]$，且 $\displaystyle\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$.
6. 若 f 在 $[a,b]$ 上的每个点的极限值都存在且为零，则 $f\in R[a,b]$，且 $\displaystyle\int_0^1 f=0$.（[问题，10.3]）

例 10.1 (可积第三充要条件)**.** $f\in R[a,b]\iff$ 对任意 $\varepsilon,\eta>0$，存在分割 P，使得 $\sum\limits_{\omega\geq\eta}\Delta x<\varepsilon$.

证明. 记 f 在 $[a,b]$ 上的上下确界分别为 M,m. 若 $f\in R[a,b]$，则对任意 $\varepsilon,\eta>0$，存在分割 P，使得 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\cdot\eta$. 对上述分割 P，有 $\sum\limits_{\omega\geq\eta}\Delta x<\varepsilon$.

反之，对任意 $\varepsilon>0$，令 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)},\eta_1=\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$，则存在分割 P，使得 $\sum\limits_{\omega\geq\eta_1}\Delta x<\varepsilon_1$. 对于上述分割 P，有

$$\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<(M-m)\varepsilon_1+\eta_1\cdot(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

例 10.2 (复合)**.** 设 $g\in R[a,b]$，且 $g([a,b])\subset[m,M]$. 若 $f\in C[m,M]$，则 $f\circ g\in R[a,b]$.

证明. 对任意 $\varepsilon,\eta>0$，存在 $\delta>0$，当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时，$|f(y_1)-f(y_2)|<\eta$. 对于上述固定的 δ，由 $g\in R[a,b]$，则存在 $[a,b]$ 的分割 P，使得 $\sum\limits_{\omega^g\geq\delta}\Delta x<\varepsilon$. 对上述分割 P，若 $\omega^{f\circ g}\geq\eta$，首先要有 $\omega^g\geq\delta$，这样就有

$$\sum_{\omega^{f\circ g}\geq\eta}\Delta x\leq\sum_{\omega^g\geq\delta}\Delta x<\varepsilon.$$

□

例 10.3. 若 f 在 $[a,b]$ 上的每个点的极限值都存在且为零，则 $f\in R[a,b]$，且 $\int_0^1 f=0.$

证明. 对任意 $\varepsilon>0$, 对每个 $x\in[a,b]$，存在 $\delta_x>0$，当 $y\in U^o(x;\delta_x)$ 时，$|f(y)|<\varepsilon$. 不妨设

$$\bigcup_{k=1}^{s} U(x_k;\delta_{x_k})\supset[a,b],$$

则满足 $|f|\geq\varepsilon$ 的点至多只有 s 个. 对任意分割 T，可以做以下估计

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|<(b-a)\varepsilon+2s\cdot||T||\cdot M, \tag{20}$$

其中 $M=\max\{|f(x_1),\cdots,|f(x_s)|,1\}$. 则当 $||T||<\dfrac{\varepsilon}{2Ms}$ 时，(20) $<(b-a+1)\varepsilon$. 由积分的直接定义,$f\in R[a,b]$，且 $\int_0^1 f=0.$ □

例 10.4. 设 $f,g\in R[a,b]$,ξ,ξ' 是从属于分化 P 的两个不同介点集，则

$$\lim_{||P||\to0^+}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k')\Delta x_k=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 不妨设 M 是 $|f|,|g|$ 的一个上界，则

$$|f(x_1)g(x_2)-f(x_1)g(x_1)|\leq M|g(x_2)-g(x_1)|\leq M\omega_i^g,\quad \forall x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]$$

则对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$, 使得当 $||p||<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k')\Delta x_k-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k')\Delta x_k-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k\right|\\ &\quad+\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\\ &< M\sum_{k=1}^{n}\omega_i^g\Delta x_i+\varepsilon<(M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

□

例 10.5 (苏大)**.** 设 f 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2024,\qquad \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=2025^2$$

对任意正整数 n，由连续函数的介值性，我们能找到 $[0,1]$ 的一个分划: $0=x_0<x_1<\cdots<$

$x_n=1$，使得

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\quad \forall k=1,\cdots,n.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

证明. 由第一中值定理和 [问题，10.4]，就有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)f(y_k)\Delta x_k\\&=\frac{\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2025^2}{2024}.\end{aligned}$$

□

关于积分的性质，首先关注

1. 若 $f\in R[a,b]$，则 $F=\displaystyle\int_a^x f$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，若 f 在 x_0 处连续，则 F 在 x_0 处可导.
2. 若 $f\in C(-\infty,+\infty)$，则 f 以 T 为周期 $\Longleftrightarrow$ 积分 $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt$ 与 a 取值无关（[问题，10.6].
3. 若 f 在 $[a,b]$ 上的积分大于零，则存在 $[c,d]\subset[a,b]$ 和 $\mu>0$，使得当 $x\in[c,d]$ 时，$f(x)\geq\mu$.（[问题，10.7]）
4. 若 $f\in R[a,b]$，且 f 在 $[a,b]$ 上处处大于零，$\displaystyle\int_a^b f>0$.([问题，10.8])
5. 可积函数的连续点稠密 ([问题，10.9])

例 10.6. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，则 f 以 T 为周期 $\Longleftrightarrow$ 积分 $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt$ 与 a 取值无关.

证明. 这里只考虑充分性. 注意

$$\begin{aligned}0\equiv\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t&=\int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^a (f(x+t)-f(x))\mathrm{d}x:=F(a)\end{aligned}$$

则 $F'(a) = f(a+T) - f(a) \equiv 0$. □

例 10.7. 若 $\int_a^b f > 0$，则存在 $\mu > 0$ 和 $[c,d] \subset [a,b]$，使得 $f(x) \geq \mu, x \in [c,d]$.

证明. 若对任意 $\mu > 0$ 和任意 $[c,d] \subset [a,b]$，总能找到 $x \in [c,d]$，使得 $f(x) < \mu$. 则对任意分割 T，总能找到一种分割点的取法，使得 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i < \mu(b-a)$. 这样就有 $\int_a^b f \leq \mu(b-a)$. 由 μ 的任意性，即有 $\int_a^b f \leq 0$，矛盾. □

例 10.8 (积分的正性)**.** 设 $f \in R[a,b]$，且 f 在 $[a,b]$ 上处处大于零，则 $\int_a^b f > 0$.

证明. 若 $\int_a^b f = 0$，对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\int_a^b (\varepsilon - f) = (b-a)\varepsilon > 0,$$

则存在 $[c,d] \subset [a,b]$, 使得当 $x \in [c,d]$ 时，$f < \varepsilon$. 取 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$，可以构造闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足

$$b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad f(x) < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in [a_n,b_n].$$

记 $\xi = \bigcap_{n=1}^\infty [a_n,b_n]$，则 $f(\xi) < \dfrac{1}{n}$，让 $n \to \infty$，就有 $f(\xi) \leq 0$，这就导出了矛盾. □

例 10.9 (连续点的稠密性)**.** 设 $f \in R[a,b]$，则存在 $x_0 \in (a,b)$，使得 f 在 x_0 处连续.

证明. 取 $\varepsilon_1 = (b-a)/2$，存在分割 T，使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < (b-a)/2$$

则存在 $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ 使得 $\omega_{(f,[a_1,b_1])} < \dfrac{1}{2}$. 这样可以找到闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足

$$a_n - b_n \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad \omega_{(f,[a_n,b_n])} < \frac{1}{n}.$$

记 $\xi = \bigcap_{n=1}^\infty [a_n,b_n]$，则有 $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(x_0;\delta) = 0$. 即 ξ 是 f 的连续点. □

例 10.10 (一种经典处理)**.** 设非负函数 $f \in C[a,b]$, 证明:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f^n(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

证明. 如下考虑 $M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} > 0$ 的情形. 对任意充分小的 $\varepsilon > 0$，存在 $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ 使得当 $x \in [\alpha,\beta]$, 有 $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$. 则

$$M(b-a)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_a^b f^n(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_\alpha^\beta f^n(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} \geq (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

这样有

$$M \geq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq \underline{\lim_{n\to+\infty}} \left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq (M-\varepsilon).$$

由 ε 的任意性，命题得证. □

我们举个应用的例子：由积分第一中值定理，可以定义 $\{x_n\} \subset [0, \pi/2]$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x = \sin^n x_n,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x\right)^{1/n} = 1.$$

因为 $\sin x$ 在 $[0, \pi/2]$ 上严格增，由 [问题，4.4]，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$.

例 10.11. 设 f, g 是 $[a, b]$ 上的连续正值函数，令

$$d_n = \int_a^b f(x)g^n(x)\mathrm{d}x$$

则 $\left\{\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 收敛，并由 [问题，10.10]，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \max\limits_{x\in[a,b]} \{g(x)\}$.

证明. 注意 $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} \leq \max\limits_{x\in[a,b]} \{g(x)\}$，且

$$\begin{aligned} d_{n+1} \cdot d_{n-1} &= \int_a^b f(x)g^{n+1}(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f(x)g^{n-1}(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \left(\int_a^b \sqrt{f^2(x)} \cdot \sqrt{g^{n+1} \cdot g^{n-1}(x)}\mathrm{d}x\right)^2 = d_n^2 \end{aligned}$$

即 $\left\{\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 单调递增，有上界，故而收敛. □

例 10.12 (拟合 + 局部分析)**.** 设 $f \in C[0, 1]$，则

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot f(0).$$

证明. 注意

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2}\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+} \arctan \frac{x}{h}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

故我们不妨考虑 $f(0) = 0.$ 的情形. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in [0, \delta]$ 时，

$|f(x)| < \varepsilon$. 则有以下估计

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x\right| &< \varepsilon\cdot \arctan\frac{\delta}{h} + M\cdot|\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{\delta}{h}| \\ &\le \frac{\pi\varepsilon}{2} + M\cdot|\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{\delta}{h}|\end{aligned} \tag{21}$$

其中 M 是 $|f|$ 在 $[0,1]$ 的上界. 对于上述固定 $\delta > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < h < \delta_1$ 时,$|\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{\delta}{h}| < \varepsilon$，此时 (21) $< (\pi/2+M)\varepsilon$. □

这里我们还可以直接估计:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{h^{1/3}} \frac{h}{h^2+x^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x + \int_{h^{1/3}}^1 \frac{h}{x^2+h^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{积分中值 1}} f(\xi)\arctan\frac{h^{1/3}}{h} + \int_{h^{1/3}}^1 \frac{h}{x^2+h^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 $0, h^{1/3}$ 之间，且

$$\left|\int_{h^{1/3}}^1 \frac{h}{x^2+h^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x\right| \le \max_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}\cdot\frac{h}{h^2+h^{2/3}} \longrightarrow 0, \quad (h\to 0^+)$$

让 $h\to 0^+$ 就有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot f(0).$$

例 10.13 (浙大). 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y = f(x).$$

证明. 令 $n(x-y)=t$，则

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{t}{n}\right)e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

下面就是拟合的过程. 对于固定 $x\in\mathbb{R}$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 时，当 $|x-y| < \delta$ 时，$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. 由 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的收敛性，存在 A，使得 $\int_A^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y < \varepsilon$. 则当 n 充分大时，有 $\frac{A}{n} < \delta$，则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(x-\frac{y}{n}\right)-f(x)\right|e^{-y^2}\mathrm{d}y &= \left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_{-A}^{A}+\int_{A}^{+\infty}\right)\left|f\left(x-\frac{y}{n}\right)-f(x)\right|e^{-y^2}\mathrm{d}y \\ &\le 4\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|f(x)|\}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

这样就基本完成了证明. □

虽然拟合的方法显得很笨重，但是思考量较少，适合我这种笨蛋.

例 10.14 (连续逼近)**.** 设 $f \in R[a,b]$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在连续函数 f'，使得

$$\int_a^b |f - f'|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$. 对于上述分割，记 f' 是依次连接 $(x_i, f(x_i))$ 得到的折线段，则

$$\int_a^b |f - f'|\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f - f'|\mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon.$$

□

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x &\xlongequal{n\text{为偶}} 2\int_0^{\pi} \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x \\ &\xlongequal{m\text{为偶}} 4\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x \\ &= 4 \cdot \frac{(n-1)!! \cdot (m-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

在其余情形下，结果全为零.

例 10.15 (Euler 积分)**.**

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\,\sin x \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln\,\sin x + \ln\,\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln{(\sin 2x)}\mathrm{d}x - \frac{\pi \ln 2}{4} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln\,\sin(t)\mathrm{d}t - \frac{\pi \ln 2}{4} = \frac{I}{2} - \frac{\pi \ln 2}{4}\end{aligned}$$

即 $I = -\dfrac{\pi}{2} \cdot \ln 2$.

我们举两个实际的例子:

1.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\pi/2} \frac{t\mathrm{d}(\sin t)}{\sin t} = \int_0^{\pi/2} t\mathrm{d}(\ln(\sin t)) = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\ln\,\sin x\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\pi-t}\pi\int_0^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}t\ln\sin t\mathrm{d}t\\ &=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

例 10.16. 对任意 $n\in N^+$，有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

例 10.17 (Fejér 积分)**.** 对任意 $n\in N^+$，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin nx)^2d(\cot x)=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin nx\cos nx\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x\\ &=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

例 10.18 (双阶乘估计-Wallis 公式)**.**

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

证明. 由

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

这样就有

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2n}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

□

Wallis 公式常用形式有：

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}$$
$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n}$$

例 10.19. 计算

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$$

证明. 注意

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos^2 x\mathrm{d}x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{1+3\sec^2 x} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

□

例 10.20. 计算

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos x\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x-5}$$

证明. 令 $t=\sin^2 x$，则

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos x\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x-5} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-2t-4} = \frac{1}{12}\int_1^{1/2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\ln 2}{12}.$$

□

例 10.21 (Riemann 定理). 设 $f\in R[a,b]$，g 以 T 为周期，且在 $[0,T]$ 上可积，则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 当 g 为常值函数时，结论明显成立. 对一般情形，令 $G'=g-\frac{1}{T}\int_0^T g$，则 G' 以 T 为周期，且 $\int_0^T G'=0$. 故如下我们只需考虑 $\int_0^T g=0$ 的情形即可.

令 $G=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$, 则 G 是以 T 为周期的连续函数, 故而在 R 上有界. 不妨设 $|G|\le M$. 则

$$\left|\int_a^b g(px)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{p}\left|\int_{ap}^{bp} g(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{|G(bp)-G(ap)|}{p} \le \frac{2M}{p} \longrightarrow 0 \tag{22}$$

(i) 当 f 为常值函数时，由(22)，结论明显成立.

(ii) 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是 $[a,b]$ 的一个分割，若

$$f(x) \equiv m_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}), \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

为阶梯函数，此时

$$\lim_{p\to+\infty} \int_a^b f(x)g(px)dx = \sum_{k=1}^{n} \lim_{p\to+\infty} \int_{x_{k-1}}^{x_k} m_{k-1} \cdot g(px)\mathrm{d}x = 0.$$

(iii) 在一般情形中，对每个 $\varepsilon > 0$，存在阶梯函数 f'，使得

$$\int_a^b |f(x) - f'(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

当 p 充分大时，可以做到

$$\left|\int_a^b f(x)g(px)\mathrm{d}x\right| \le S \cdot \int_a^b |f(x) - f'(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_a^b f'(x)g(px)\mathrm{d}x\right| < (S+1)\varepsilon$$

这里 S 应视为 $|g|$ 在 R 中的上界.

□

作为 Riemann 定理的结果，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x = 0.$$

10.2 参考题

例 10.22. 设 f 为导函数，则 $|f| \in R[a,b] \iff f \in R[a,b]$.

证明. 设 $|f| \in R[a,b]$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^{|f|}\Delta x_i < \varepsilon$. 若 $\omega_i^{|f|} \ne \omega_i^f$，则由导函数的介值性，存在 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$，使得 $f(\xi_i) = 0$. 此时

$$\omega_i^f \le 2\omega_i^{|f|} = 2 \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{|f(x)|\},$$

这样就有 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i \le 2\varepsilon$. □

例 10.23. 设 f 是 (a,b) 上的凸函数，则对任意 $[c,d] \subset (a,b)$，有 $f'_+(x), f'_-(x) \in R[c,d]$，且

$$f(d) - f(c) = \int_c^d f'_+(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f'_-(x)\mathrm{d}x$$

证明. 以 $f'_+(x)$ 为例，由 $f'_+(x)$ 的单调增性，$f'_+(x) \in R[c,d]$. 现在将 $[c,d]$ 进行 n 等分，并记 $h = \dfrac{c-d}{n}$，则有

$$h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f'_+(x_k) \leq f(d) - f(c) = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} \leq h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f'_+(x_{k+1})$$

让 $n \to \infty$，由追敛性，即有 $f(d) - f(c) = \displaystyle\int_c^d f'_+(x)\mathrm{d}x$. □

例 10.24 (第一中值定理推广)**.** 设 $f, g \in R[a,b]$，且 g 在 $[a,b]$ 上不变号，f 有原函数，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 如下考虑 $\displaystyle\int_a^b g > 0$ 情形. 设

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)dx.$$

若结论不成立，由导函数介值性，不妨设 $f(x) > \eta$. 由 [问题，10.7，10.8],

$$\int_c^d (f(x) - \eta)g(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad x \in [c,d] \subset (a,b)$$

这样就有

$$0 = \int_a^b (f(x) - \eta)g(x)\mathrm{d}x \geq \int_c^d (f(x) - \eta)g(x)\mathrm{d}x > 0.$$

这就导出了矛盾. □

例 10.25. 设 $f \in C(R), a > 0$, 若 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + a\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$ 存在，则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明. 令 $F = \displaystyle\int_0^x f$，则

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)e^{ax}}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + aF(x)}{a}$$

这样就有 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 若 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$，则不妨设 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = A > 0$，则存在 m，使得 $x > m$ 时有,$f(x) > \dfrac{A}{2}$，即

$$F(x) - F(m) = \int_m^x f(t)\mathrm{d}t \geq \frac{A}{2}(x - m) \to +\infty, \quad (x \to +\infty)$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在相矛盾. □

例 10.26. 设 f 于 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f^2(t)\le 1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$，则 $f(t)\le 1+t$.

证明. 令 $F(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$，则由条件有

$$\frac{F'(t)}{\sqrt{1+2F(t)}}\le 1 \tag{23}$$

(23)两边关于 t 在 $[0,x]$ 积分就有

$$x\ge\int_0^x \frac{\mathrm{d}(F(t))}{\sqrt{1+2F(t)}}=\sqrt{1+2F(x)}-1$$

□

例 10.27. 设 $f\in C^1[1,+\infty), f(1)=1$，且当 $x\ge 1$ 时，有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，则 $f(+\infty)$ 存在，且 $f(+\infty)<1+\dfrac{\pi}{4}$.

证明. 注意 f 严格单调增，于是 $f(x)>1$. 这样就有

$$f(+\infty)=1+\int_1^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t<1+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=1+\frac{\pi}{4}$$

□

例 10.28. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)=3\int_0^{1/3} e^{x-1}f(x)\mathrm{d}x$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证明. 令 $g=e^{x-1}f$，则由积分第一中值定理

$$g(1)=f(1)=3\int_0^{1/3} g(x)\mathrm{d}x=g(\eta)3\int_0^{1/3}\mathrm{d}x=g(\eta),\quad \eta\in(0,1)$$

由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g'(\xi)=0$. □

例 10.29 (连续量的平均值)**.** 设 f 为 $[0,+\infty)$ 上的单调增函数，令

$$F(x)=\begin{cases} f(0^+), & x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$$

则 F 也是单调增函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

证明. 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 和 $h > 0$，有

$$
\begin{aligned}
F(x+h) - F(x) &= \frac{1}{(x+h)x}\left(x\int_0^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - (x+h)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{x(x+h)}\left(x\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - h\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

即 F 也单调增.

1. 若 f 没有上界，则对任意 M, 存在 X, 当 $x \geq X$ 时，$f(x) > 2M + 2$，则当 $x > X$ 充分大时，总是可以做到

   $$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^X f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_X^x f(t)\mathrm{d}t > -1 + \frac{1}{2}(2M+2) = M$$

   即 F 也没有上界.

2. 若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 X_1, 当 $x \geq X_1$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$. 则当 $x > X_1$ 充分大时, 总是可以做到

   $$|F(x) - A| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - A)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^{X_1} |f(t) - A|\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_{X_1}^x |f(t) - A|\mathrm{d}t < 2\varepsilon$$

□

例 10.30 (积分连续性)**.** 设存在 $\delta > 0$，使得 $f \in R[a-\delta, b+\delta]$，则

$$\lim_{h \to 0}\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $f' \in C[a-\delta, b+\delta]$，使得

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta} |f - f'|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

由 f' 的一致连续性，存在充分小的 $\eta > 0$，当 $|x_1 - x_2| < \eta$ 时，$|f'(x_1) - f'(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 当 $|h| < \eta$ 时，就有

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x \leq& \int_a^b |f(x+h) - f'(x+h)|\mathrm{d}x + \int_a^b |f'(x+h) - f'(x)|\mathrm{d}x \\
&+ \int_a^b |f(x) - f'(x)|\mathrm{d}x < 2\varepsilon + (b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a} = 3\varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

§11 积分学的应用

11.1 重点方法

关于凹凸性，首先关注

1. 若 f 单调增，则 $F=\displaystyle\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ 下凸.

2. 若 f 在 $[0,+\infty)$ 下凸，则 $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 下凸（令 $t=xu$）.

3. 利用离散形式建立积分不等式：若 $f,g\in R[a,b]$，且 $m\le f\le M$ 和 $\displaystyle\int_a^b g>0$. 当 φ 是 $[m,M]$ 上的凸函数时，成立

$$\varphi\left(\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\right)\le\frac{\displaystyle\int_a^b g(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\qquad\text{([问题,11.3])}$$

例如有

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln(f(x))\mathrm{d}x.$$

4. 凹凸性建立积分不等式，注意折线或者支撑线带来的放缩（[问题，11.8，11.9]）

5. 若 f 是 (a,b) 上的连续函数，则 f 是 (a,b) 上的下凸函数 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $a<x<y<b$, 恒成立 Hadmard 不等式：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

的左半部分或者右半部分（[问题，8.12，11.39]）

例 11.1. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$$

证明. 本题可以通过去绝对值直接计算分子. 我们在这采用积分第一中值定理来处理，由于 $|\sin x|$ 不变号，则

$$\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\xi_k\cdot\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=2\sum_{k=1}^n\xi_k$$

其中 ξ_k 介于 $[(k-1)\pi, k\pi]$ 之间. 这样就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi.$$

□

例 11.2 (椭圆周长估计公式)**.** 设有椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$，记其周长为 s，则

$$\pi(a+b)\le s\le\pi\sqrt{2a^2+2b^2}.$$

证明. 由对称性和 Cauchy 不等式，有

$$s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\le 4\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^{\pi/2}[a^2\sin^2\theta+b^2\cos\theta]\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}=\pi\sqrt{2a^2+2b^2}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}&=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\cdot\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\\&\ge a\sin^2\theta+b\cos^2\theta\end{aligned}$$

这样就有

$$s\ge 4\int_0^{\pi/2}(a\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\pi(a+b).$$

□

例 11.3. 若 $f,g\in R[a,b]$，且 $m\le f\le M$ 和 $\displaystyle\int_a^b g>0$. 当 φ 是 $[m,M]$ 上的凸函数时，成立

$$\varphi\left(\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\right)\le\frac{\displaystyle\int_a^b g(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\tag{24}$$

证明. 将 $[a,b]$ 进行 n 等分，并记分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，对任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，由 Jensen 不等式就有

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i}\right)\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(f(\xi_i))g(\xi_i)\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i}$$

让 $n\to\infty$，即得(24). □

例 11.4. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $|f(x)| \leq 1$. 若 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，则对任意 $[a,b] \subset [0,1]$，有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}$$

证明. 首先有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\left(\int_0^a + \int_b^1\right) f(x)\mathrm{d}x\right| \leq a + 1 - b$$

这样就有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \min\{1-(b-a), b-a\} \leq \frac{1}{2}.$$

□

例 11.5. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x) \geq 0, f(x) \leq 0$，则

$$f(x) \geq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 对任意 $x, t \in [a,b]$，有 $f(x) \geq f(t) + f'(t)(x-t)$，两边关于 t 在 $[a,b]$ 上积分就有

$$(b-a)f(x) = 2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + (x-b)f(b) + (a-x)f(a) \geq 2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

□

例 11.6 (轮换对称)**.** 设 $f \in C[a,b]$ 单调增加，则

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{b+a}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 注意

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq 0 \tag{25}$$

将(25)关于 x 在 $[a,b]$ 上积分即得. □

例 11.7 (天津大学)**.** 证明

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x}\mathrm{d}x < 0.$$

证明. 由于 $\int_1^a \sin \pi x \mathrm{d}x$ 一致有界，且 $\frac{1}{x}$ 单调收敛于零，故有 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，进而

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x}\mathrm{d}x &= \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y \xlongequal{\text{Heine}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi}\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi}\right)\mathrm{d}x < 0.\end{aligned}$$

这样即证. □

例 11.8 (折线放缩)**.** 设 f 是 $[0,1]$ 上的非负上凸函数，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$$

证明. 设 $f(x_0) = \max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$, 记 g 为依次连接 $(0,f(0)),(x_0,f(x_0)),(1,f(1))$ 得到的折线，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \geq \frac{f(x_0)}{2}$$

□

例 11.9 (支撑线线放缩)**.** 设 f 是 $[a,b]$ 上的上凸函数，$f(a) = f(b) = 0, f'(a) = \alpha > 0, f'(b) = \beta < 0$，则

$$0 \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}. \tag{26}$$

证明. 由导函数介值性，存在 $c \in (a,b)$，使得 $f'(c) = 0$. 故 f 在 $[a,c]$ 单调增，在 $[c,b]$ 单调减，即 $f(x) \geq 0$. 这样即得(26)的左半部分. 另记 x_0 是 f 在 a,b 处支撑线的交点, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^{x_0} \alpha(x-a)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b \beta(x-b)\mathrm{d}x = \frac{\alpha\beta}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}$$

□

例 11.10. 设 f 在 $[0,1]$ 上单调递增，则对任意 $a \in R$，有

$$\int_0^1 |f(x)-a|\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 当 $a<f(0)$ 或者 $a>f(1)$ 时结论显然成立，下面不妨设 $a=f(x_0),x_0\in[0,1]$，则

$$\int_0^1|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x+\int_0^{1/2}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1/2}^1 f(x)\mathrm{d}x=(2x_0-1)f(x_0)-2\int_{1/2}^{x_0}f(x)\mathrm{d}x\geq 0.$$

这就完成了证明. □

例 11.11 (微分中值定理)**.** 设 $f\in C^1[0,2]$，$f(0)=f(2)=1,|f'(x)|\leq 1$，则有

$$1\leq\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leq 3 \tag{27}$$

证明. 如下考虑(27)的左半部分. 由中值定理,

$$\begin{aligned}&f(x)=f(0)+f'(\xi)x\geq 1-x,\quad x\in[0,1]\\&f(x)=f(2)+f'(\eta)(x-2)\geq 1-(2-x)=x-1,\quad x\in[1,2]\end{aligned}$$

这样就有

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1.$$

注意等号并不能取到，否则 f 在 $x=1$ 处不可导. □

例 11.12 (分部积分 +Cauchy)**.** 设 $f\in C^1[a,b]$，且 $f(a)=0$，则

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b(f'(x))^2(x-a)^2\mathrm{d}x$$

证明. 注意 $f(x)=\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$，这样就有

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x&\leq\int_a^b\left((x-a)\int_0^x(f'(t))^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b(f'(x))^2(x-a)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

例 11.13 (构造自变量求导)**.** 设 f 在 $[0,1]$ 上可微，且 $0\leq f'(x)\leq 1$，$f(0)=0$，则

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geq\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明. 令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$$

则

$$F'(x) = f(x)\left(2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)\right) := f(x)g(x),$$

只需注意到

$$g'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) \geq 0.$$

□

例 11.14 (N-L 公式)**.** 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微，则

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证明. 在 $x \in [0,1/2]$ 上，有

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\int_x^{1/2} f'(t)\mathrm{d}t + f(x)\right| &\leq |f(x)| + \int_x^{1/2} |f'(t)|\mathrm{d}t \\ &\leq |f(x)| + \int_0^{1/2} |f'(x)|\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{28}$$

(28)两边关于 x 在 $[0,1/2]$ 上积分即得

$$\frac{1}{2}\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \int_0^{1/2} |f(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

同理考虑 $x \in [1/2,1]$，可得

$$\frac{1}{2}\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \int_{1/2}^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \tag{29}$$

(28) + (29) 即得结论. □

例 11.15 (找极值点)**.** 设 f 再 $[a,b]$ 上可微，$|f'(x)| \leq M$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$. 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$|F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}.$$

证明. 由于 $F(a) = F(b) = 0$，则 $F(x)$ 的 (非零) 最值点（如果有的话）可在内部取得. 设 x_1 是 F 的一个最值点. 不妨考虑 $x_1 \in [a,(a+b)/2]$, 则由 Taylor 定理，有

$$-\frac{M(b-a)^2}{8} \leq F(x_1) = -\frac{f'(\xi)}{2}(x_1-a)^2 \leq \frac{M(b-a)^2}{8}$$

□

例 11.16 (凹凸性)**.** 对每个 $n \in N^+$，成立

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2}$$

证明. 一方面

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} > \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{n}\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

另一方面，由 $\sqrt{x}$ 的严格上凸性，有

$$\frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}{2} < \int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\mathrm{d}x,$$

这样就有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} < \int_{0}^{n}\sqrt{x}\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

□

例 11.17 (中点展开)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上可微，$f(a) = f(b) = 0, |f'(x)| \le M$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{4}(b-a)^2$$

证明. 由中值定理，有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_a^{(a+b)/2} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{(a+b)/2}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_a^{(a+b)2} M|x-a|\mathrm{d}x + \int_{(a+b)/2}^{b} M|x-b|\mathrm{d}x = \frac{M}{4}(b-a)^2.\end{aligned}$$

□

例 11.18. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微，且 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{(b-a)^3}{24}\cdot\max_{x\in[a,b]}\{|f''(x)|\}$$

证明. 记 $M = \max\limits_{x\in[a,b]}\{|f''(x)|\}$，将 f 在 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 处进行 Taylor 展开，就有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{M(b-a)^3}{24}.$$

□

例 11.19 (多项式插值). 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0, |f''(x)|\le M$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

证明. 见 [问题，11.40]. □

例 11.20 (k 值法). 设 $f\in C^2[a,b]$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}.$$

证明. 记

$$k=\frac{24}{(b-a)^3}\cdot\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

令 (让 b 动起来)

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)-\frac{(x-a)^3}{24}k$$

则

$$F'(x)=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)-\frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-\frac{k(x-a)^2}{8}$$

由于 $F(a)=F(b)=0$，则存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $F'(\eta)=0$. 将 $F(\eta)$ 在 $x=\dfrac{a+\eta}{2}$ 的展开式带入即得结论. □

例 11.21. 设 f 于 $[-1,1]$ 上可微，$|f'(x)|\le M$. 且存在 $a\in(0,1)$，使得 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$. 则

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\le M(1-a^2).$$

证明. 存在 $x_0\in(-a,a)$ 使得 $f(x_0)=0$. 这样就有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_{-1}^{-a} f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\le\int_{-1}^{-a}M|x-x_0|\mathrm{d}x+\int_a^1 M|x-x_0|\mathrm{d}x=M(1-a^2).\end{aligned}$$

□

例 11.22 (经典最优系数 4). 设 $f\in C^2[0,1]$，则

$$\max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}\le 4\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x.$$

证明. 对于固定 $\xi \in [0,1]$，有

$$|f'(x)| = |f'(x) - f'(\xi) + f'(\xi)| \le |f'(\xi)| + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x$$

由此，我们只需考虑证明

$$\min_{x\in[0,1]} \{|f'(x)|\} \le 4\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x.$$

若存在 $x_0 \in [0,1]$，使得 $f'(x_0) = 0$，则结论明显成立. 否则由导函数的介值性，不妨考虑 $f'(x)$ 恒正，记 $m = \min\limits_{x\in[0,1]} \{f'(x)\} > 0$. 则对任意 $x \ge y$，有

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) \ge m(x-y).$$

考虑区域 $(x,y) \in [1/2,1] \times [0,1/2]$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x \ge \int_{1/2}^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} f(y)\mathrm{d}y &= 2\int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} (f(x) - f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\ge m\int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{m}{4}.\end{aligned} \tag{30}$$

□

例 11.23 (给定条件下的系数进一步改进)**.** 设 $f \in C^2[0,1]$，且 $f(0)f(1) \ge 0$，则

$$\max_{x\in[0,1]} \{|f'(x)|\} \le 2\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x.$$

证明. 我们还是转化为证明

$$\min_{x\in[0,1]} \{|f'(x)|\} \le 2\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x.$$

考虑 $|f'|$ 恒不为零的情形，由导函数的介值性，不妨设 $m = \min\limits_{x\in[0,1]} \{f(x)\} = m > 0$，即 f 单调增，且由 $f(0)f(1) \ge 0$，即有 f 在 $[0,1]$ 上不变号. 不妨设 f 非负，则

$$\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^{1/2} mx\mathrm{d}x = \frac{m}{8}$$

这样结合(30)，即有

$$\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \ge \frac{m}{4} + 2\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x \ge \frac{m}{2}.$$

□

事实上，考场之上我们没有必要分析的如此透彻，记 $k = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$，若 $m > 2k$，则

$$f(0) = f(x) - \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t < f(x) - 2kx$$
$$f(1) = \int_x^1 f'(t)\mathrm{d}t + f(x) > 2k(1-x) + f(x)$$

上式两边关于 x 在 $[0,1]$ 上积分，就有 $f(0) < 0, f(1) > 0$，这与 $f(0)f(1) \geq 0$ 相矛盾.

例 11.24. 设 $f \in C^2[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = 0, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，则

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\mathrm{d}x \geq m\left(\int_0^1 x(1-x)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \tag{31}$$

证明. 从右边出发，就有 (非上帝视角)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x - x^2 + k)f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + kx + c\right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - kx - c\right)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - \frac{kx^2}{2} - cx + d\right) \\ &\overset{\clubsuit}{=\!=} \int_0^1 f''(x)\left(\frac{x^3}{6} + \frac{kx^2}{2} - \frac{x^4}{12} + cx - d\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{32}$$

令

$$g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{kx^2}{2} - \frac{x^4}{12} + cx - d$$

要想 (32) 的最后一步成立，需满足 $g(0) = g(1) = 0$，即

$$g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{kx^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{12}\right)x$$

记 $\frac{1}{m} = \int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x$，则由 Cauchy 不等式

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\mathrm{d}x \geq m\left(\int_0^1 x(1-x)f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

故我们可以通过调整 m 的值 (改变 k)，来对(31)，做精度处理. 一般来说，m 有一个最大值，即最优控制. □

例 11.25 (离散型与积分之差的估阶). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，$f''(x)\in R[0,1]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right]=\frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

证明. 记 $x_i=\dfrac{i}{n}, c_i=\dfrac{2i-1}{2n}$, 则

$$\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f(c_i)\right]dx, \tag{33}$$

记

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f''(x)\},\quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f''(x)\}$$

则由 Taylor 定理有

$$f'(c)(x-c_i)+\frac{m_i}{2}(x-c_i)^2\le f(x)-f(c_i)\le f'(c_i)(x-c_i)+\frac{M_i}{2}(x-c_i)^2, \tag{34}$$

将(34)关于 x 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上积分有

$$\frac{m_i}{24n^3}\le\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(c_i)]\mathrm{d}x\le\frac{m_i}{24n^3}$$

由积分的定义即得. 我们现在再回过头来看(33)，想要表达成(33)的形式，我们 x_i 的选取有很多种，最终我们选取 $x_i=\dfrac{i}{n}$，是为了保证 $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-c_i)\mathrm{d}x=0$，即保证 c_i 是区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的中点. □

举个应用的例子:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2n+2k-1}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(2k-1)/2n}\right)=\frac{1}{32}$$

例 11.26. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上可微，且 $f'\in R[0,1]$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{f(0)-f(1)}{2}$$

证明. 注意

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x \tag{35}$$

记

$$m_k = \inf_{x\in[(k-1)/n,k/n]} \{f'(x)\}, \quad M_k = \sup_{x\in[(k-1)/n,k/n]} \{f'(x)\}$$

则 $\displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}x$ 的值介于 $-\dfrac{m_k}{2n^2}$ 与 $-\dfrac{M_k}{2n^2}$ 之间,这样由积分的定义即得. □

我们还是举个例子来加深印象

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\ln 2 - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right] = \frac{1}{4}.$$

关于 $n!$ 估计的 Stirling 公式:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{36}$$

例 11.27 (Stirling 公式应用)**.** 计算

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{1-1/k}}{(1+1/k)^k}$$

证明. 注意

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{1-1/k}}{(1+1/k)^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}n!\cdot\exp\{n-\ln n-\gamma\}}{(n+1)^n} \xlongequal{(36)} \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1+\gamma}}$$

其中 γ 是 Euler 常数. □

11.2 参考题

例 11.28. 设 $f\in C^1[0,1]$, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 则

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|\mathrm{d}x \geq \frac{1}{e}.$$

证明. 由条件就有

$$|e^{-1}| = \left|\int_0^1 (f'(x)-f(x))e^{-x}\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |f'(x)-f(x)|\cdot e^{-x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f'(x)-f(x)|\mathrm{d}x.$$

□

例 11.29. 设曲线 K 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta), 0\le\theta\le\pi, \rho\in C[0,\pi]$，且 K 上任意两点之间距离不超过 1，则曲线 K 与射线 $\theta=0,\theta=\pi$ 所围成的扇形面积 S，满足

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta\le\frac{\pi}{4}.$$

证明. 注意

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\rho^2(\theta)+\rho^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}\theta\le\frac{\pi}{4}. \tag{37}$$

(37)的最后一步是因为 $\rho(\theta)$ 与 $\rho\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ 相互垂直. □

例 11.30 (Taylor 公式分离主要部分)**.** 对任意实数 a, 有

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right)=e^{-a^4/2}$$

证明. 由

$$\cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right)=1-\frac{2k-1}{2n^2}a^4+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

则

$$\ln\cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}\right)=-\frac{2k-1}{2n^2}a^4+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

这样就有

$$\sum_{k=1}^{n+1}\ln\cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right)=-a^4\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\to -a^4\int_0^1 x\mathrm{d}x=-\frac{a^4}{2},\quad (n\to\infty)$$

□

例 11.31. 在 $[0,\pi/2]$ 上有

$$\sin\cos x<\cos x<\cos\sin x,$$

这样就有

$$\int_0^1\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\pi/2}\cos(\sin t)\mathrm{d}t\ge\int_0^{\pi/2}\sin(\cos t)\mathrm{d}t\xlongequal{x=\cos t}\int_0^1\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 11.32. 设 $c>0$, 则当 $x>0$ 时，有

$$\left|\int_x^{x+c}\sin y^2\mathrm{d}y\right|<\frac{1}{x}.$$

证明. 由分部积分有

$$\begin{aligned}\int_x^{x+c} \sin y^2 \mathrm{d}y &= \int_{x^2}^{(x+c)^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+c)^2} \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos (x+c)^2}{2(x+c)} - \frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+c)^2} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

这样就有

$$\begin{aligned}\left|\int_x^{x+c} \sin y^2 \mathrm{d}y\right| &< \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+c)} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+c)^2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+c)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+c}\right) = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

□

例 11.33 (单调有界)**.** 设 f 在 $[1,+\infty)$ 上非负单调减少，令

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(x) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x, \quad n \in N^+$$

则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 一方面

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(x))\mathrm{d}x \leq 0$$

另一方面

$$a_n = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} (f(k) - f(x))\mathrm{d}x \geq f(n) \geq 0$$

由单调有界，$\{a_n\}$ 收敛. □

例 11.34. 设 f 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f'(x) \neq 1$，以及 $f(0) = f(1)$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，则对任意正整数 n，有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{1}{2}.$$

证明. 记 $g = f - x$，则 g 严格单调减，且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$. 另一方面

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) < \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

结合 $f(0)=f(1)$ 就有

$$\frac{n-1}{2}-\frac{n}{2}<\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)<\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}$$

□

例 11.35. 设 $f\in C[0,1]$, 如果对某个 $n>1$，成立

$$\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1.\quad \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=1,$$

则 $\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}\geq 2^n(n+1)$.

证明. 我们采用反证的思路. 若结论不成立, 则

$$1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x\right|<2^n(n+1)\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x=1$$

这就导出了矛盾. 第二次回过头看，有一个疑惑，为什么会采用多项式 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ 作为估计函数呢? 若我们记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$，则

$$1\equiv\left|\int_0^1\left(f(x)\cdot\prod_{k=1}^n(x-x_k)\right)\mathrm{d}x\right|\leq M\int_0^1\left(\prod_{k=1}^n|x-x_k|\right)\mathrm{d}x,\quad x_i\in R$$

记

$$g(x_1,\cdots,x_n)=\int_0^1\left(\prod_{k=1}^n|x-x_i|\right)\mathrm{d}x$$

为了得到 M 尽可能精确的估计，我们应该考虑 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 的最小值. 第一个问题就是它有最小值吗? 我们先来考虑 x_i 全相等的情形，令 $h(y)=g(y,\cdots,y)$，则当 $y\geq 1$ 时，

$$h(y)=\int_0^1(y-x)^n\mathrm{d}x\geq\int_0^1(1-x)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}.$$

当 $y\in[0,1]$ 时，

$$h(y)=\int_0^y(x-y)^n\mathrm{d}x+\int_y^1(y-x)^n\mathrm{d}x$$

则

$$h'(y)=-n\int_0^y(x-y)^{n-1}\mathrm{d}x+n\int_y^1(y-x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

于是 $h'(1/2)=0$ 且 $h''(y)\geq 0$, 这样就有 $h(y)\geq h(1/2)=\dfrac{1}{2^n(n+1)}$ ~~ 这个问题先讨论到这吧 (不甘，无奈). $\square$

例 11.36. 设 $f\in C^2[0,1], f(0)=f(1)=0$，若 f 在 $(0,1)$ 上没有零点，则

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4.$$

证明. 不妨设 f 在 $(0,1)$ 上恒正，并记 $f(c)=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}>0$. 则存在 $0<\eta_1<c<\eta<1$ 满足

$$f(c)=f'(\eta_1)c,\quad f(c)=f'(\eta_2)(c-1)$$

这样就有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\right|&\geq\frac{1}{f(c)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geq\frac{1}{f(c)}\int_{\eta_1}^{\eta_2}|f''(x)|\mathrm{d}x\\&\geq\frac{1}{f(c)}\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{f(c)}\left(\frac{f(c)}{c}+\frac{f(c)}{1-c}\right)=\frac{1}{c(1-c)}\geq 4.\end{aligned}$$

$\square$

例 11.37. 设 $f\in C^1[0,a]$，且 $f(0)=0$，则

$$\int_0^a|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leq\frac{a}{2}\int_0^a(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

证明. 令

$$F(x)=\int_0^x|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

则 $F'(x)=|f'(x)|$, 且 $|f(x)|\leq F(x)$. 这样就有

$$\int_0^a|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leq\int_0^a F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\frac{F(a)^2}{2}\leq\frac{a}{2}\int_0^a(f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

$\square$

例 11.38. 设非常值 f 在 $[a,b]$ 上可微，且 $f(a)=f(b)=0$，则在 $[a,b]$ 上存在一点 ξ，满足

$$|f'(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.\tag{38}$$

证明. 记(38)的右半部分为 $M>0$. 若 $|f'(x)|\leq M$，则由中值定理

$$|f(x)|\leq g(x):=\begin{cases}M(x-a), & x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]\\ M(b-x), & x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

若 $|f|\equiv g$，则 f 在 $(a,(a+b)/2)$ 和 $((a+b)/2,b)$ 上不变号. 且 $|f|$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处不可导，即 $f\not\equiv|f|$. 但是在这种情形下，f 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处不连续，矛盾. 这样就有 $|f|\not\equiv g$，即

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{M(b-a)^2}{4}=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

导出矛盾. □

例 11.39. 设 $f\in C(a,b)$，则 f 在 (a,b) 为下凸函数 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $a<x_1<x_2<b$ 有

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

证明. 如下我们考虑充分性证明. 若 f 非下凸，则存在 $x_1<x_2$，满足 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. 我们对 f 增添一个线性函数，不会改变原有的任何条件和性质，故考虑

$$g(x)=f(x)-f(x_1)+\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_1),$$

则 $g(x_1)=g(x_2)=0$，且 $g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>0$，以及对任意 $x_1\le c<d\le x_2$ 有

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d g(x)\mathrm{d}x\le\frac{g(c)+g(d)}{2}$$

为更好的推出矛盾，我们考虑

$$\begin{aligned}E&=\left\{x\in\left(x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right):g(y)>0,\forall y\in\left(x,\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right\},\\F&=\left\{x\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right):g(y)>0,\forall y\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},x\right)\right\}.\end{aligned}$$

则 E,F 是非空有界集. 令 $u=\inf E, v=\sup F$，由连续函数的保号性一定有 $g(u)=g(v)=0$，且 $g(y)>0,\forall y\in(u,v)$. 这样就有

$$0<\frac{1}{v-u}\int_u^v g(x)\mathrm{d}x\le\frac{g(v)+g(u)}{2}=0$$

矛盾. □

例 11.40. 设 $f^{(2n)}\in C[a,b]$，且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,k=0,1,\cdots,n-1$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\cdot\max_{x\in[a,b]}\left\{|f^{(2n)}(x)|\right\}$$

证明. 由分部积分，有

$$\left|(2n)!\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b [(x-a)^n(x-b)^n]^{(2n)} f(x)\right| = \left|\int_a^b f^{(2n)}(x)(x-a)^n(x-b)^n\mathrm{d}x\right|$$
$$\le \max_{x\in[a,b]}\left\{|f^{(2n)}(x)|\right\}\int_a^b |x-a|^n\cdot|x-b|^n\mathrm{d}x \tag{39}$$

另一方面，令 $x-a=(b-a)\cos^2 t, b-x=(b-a)\sin^2 t$，则

$$\int_a^b |x-a|^n\cdot|x-b|^n\mathrm{d}x = \int_a^b (x-a)^n(b-x)^n\mathrm{d}x = 2(b-a)^{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\sin^{2n+1}t\mathrm{d}t$$
$$= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}(b-a)^{2n+1} \tag{40}$$

结合(39),(40), 即得结论. □

§12 反常积分

例 12.1 (单调仍可取极限)**.** 设 f 在 $(0,1)$ 上单调，且无界广义积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 不妨设 f 单调减. 则

$$\int_{1/n}^1 f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$$

让 $n\to+\infty$，即得. □

例 12.2. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 单调，且 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则有

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 不妨设 f 单调减，则 f 非负. 对任意固定 $n\in N^+, h>0$，有

$$\int_h^{(n+1)h} f(x)\mathrm{d}x \le h\sum_{k=1}^{n} f(kh) \le \int_0^{nh} f(x)\mathrm{d}x$$

让 $n\to\infty$，再让 $h\to 0^+$ 即得. □

我们举个计算的例子:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

例 12.3. 设 $f\in C(0,1]$，且 $f(0^+)=+\infty$. 定义函数 $f_n(x)=\min\{f(x),n\},0<x\le 1$. 则 $\int_0^1 f$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在且有限.

证明. 如下只考虑充分性证明. 对于每个固定充分小的 $\delta>0$，有 $f(x)>0,x\in(0,\delta]$. 且当 n 充分大时，$f_n(x)=f(x),\forall x\in[\delta,1]$. 这样就有

$$\int_\delta^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_\delta^1 f_n(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\le\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

让 $\delta\to 0^+$，即得 $\int_0^1 f$ 是有界量，进而收敛 (对于趋近于零的小区间内 f 恒正，且有上界). □

关于广义积分敛散性判别，注意以下几个例子

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $p\le 0$ 和 $p\ge 2$ 时发散. 在 $1<p<2$ 时绝对收敛 ([问题，12.4])
2. 以第一个为基础模型，做差解决 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$ 的敛散性，这里考虑 $p>0$.
3. Taylor 公式估阶，解决 $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$ 的敛散性（[问题，12.5]）
4. 对于被积函数不变号的情形，判别是否收敛，即判别是否有界，可以找子列说明 ([问题，12.7])

例 12.4. 讨论

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x \tag{41}$$

的敛散性.

证明. 当 $p\le 0$ 时，

$$\left|\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\right|\ge\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1.$$

由 Cauchy 准则，(41)发散. 当 $p>0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x^p}\cdot x^{p-1}=1$, 故当 $p>2$ 时，(41)发散. 当 $0<p<2$ 时，(41)只有无穷远处为瑕点，此时由 Dirichlet 判别，(41) 收敛. 下面我

们讨论是否为绝对收敛. 当 $1 < p < 2$ 时,(41)显然绝对收敛. 当 $0 < p \leq 1$ 时，

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{2x^p}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x$$

即(41)条件收敛. □

例 12.5 (Taylor 估阶)**.** 讨论

$$\int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$$

的敛散性.

证明. 取 $r \in (0,1)$，则

$$\lim_{x\to 0^+} x^r \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^r} = 0.$$

即 $\displaystyle\int_0^1 \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ 收敛. 再取 $r \in (1,2)$，则

$$\lim_{x\to+\infty} x^r \cdot \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right] = 0,$$

即 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ 收敛, 这样就有 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ 收敛. □

例 12.6 (苏大)**.** 设 $p > 0$，讨论

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \tag{42}$$

的收敛性与绝对收敛性.

证明. 强制凑微分 $\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right) = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$. 即

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{(1-\frac{1}{x^2})\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}{(1-\frac{1}{x^2})x^p}$$

而 $\dfrac{1}{(1-\frac{1}{x^2})x^p}$ 单调减趋于零，由 Dirichlet 判别法，(42)在 $p > 0$ 时总是收敛的，且在 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛. □

例 12.7. 广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$$

收敛.

证明. 记

$$F(x)=\int_0^x \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^6\sin^2 t}$$

我们只需说明 $F(x)$ 有上界. 为此考虑子列

$$F(n\pi)=\int_0^{n\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}:=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

的有界性. 对 $u_k(k\geq 2)$ 做以下估计

$$\begin{aligned}
u_k&\leq k\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x\mathrm{d}x}=k\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}\\
&=2k\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x\mathrm{d}x}\leq 2k\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6(\frac{2}{\pi}x)^2}\\
&=\frac{k}{\pi(k-1)^3}\int_0^{(k-1)^3\pi^3}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\leq\frac{k}{2(k-1)^3}<\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{(k-1)^3}
\end{aligned}$$

由比较原则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，即 $F(n\pi)$ 有界. □

例 12.8 (Dirichlet 积分)**.** 有如下结果成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

证明. 这个广义积分是收敛的，故由比较原则我们只需考虑计算

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{x}\mathrm{d}x$$

为此，记 $f(x)=\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{x}$，则 f 在 $[0,1]$ 上常义可积，由 Riemann 定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0$$

这样就有

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

□

作为 Dirichlet 积分的直接的结果，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin px}{x}\mathrm{d}x=\pi\cdot\mathrm{sgn}p.$$

例 12.9 (Froullani 积分)**.** 设 f 在 $[0,\infty)$ 上连续，且 $f(+\infty)$ 存在且有限，对于 $0<a<b$，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

证明. 对于 $0<r<R$，有

$$\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x:=I(r)-I(R)$$

由积分中值定理

$$\lim_{r\to0^+}I(r)=\lim_{r\to0^+}f(\eta_r)\int_{ar}^{br}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

其中 η_r 介于 $0,r$ 之间. □

举个计算的例子：

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}\quad(a,b>0)$$

例 12.10. 设 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $xf(x)$ 单调，则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xf(x)\ln x=0$.

证明. 不妨设 $xf(x)$ 单调减，若存在 x_0 使得 $f(x_0)<0$. 则

$$f(x)\le\frac{f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{1}{x}<0,\quad x>x_0$$

由比较原则，$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，矛盾. 故 f 非负，这样对于任意 $\varepsilon>0$，当 x 充分大时, 有

$$0\le xf(x)\ln x=2xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\le2\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$$

□

例 12.11. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则存在数列 $\{y_n\}$, 使得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$，且 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f'(y_n)=0$.

证明. 若我们能找到数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}-x_n\geq 1$，且

$$x_n\to+\infty,\quad f(x_n)\to 0,\quad (n\to\infty)$$

则由中值定理

$$|f'(y_n)|=\frac{|f(x_{n+1})-f(x_n)|}{x_{n+1}-x_n}\leq |f(x_{n+1})|+|f(x_n)|$$

得到的 $\{y_n\}$ 即满足条件. 取 $\varepsilon_n=1/n$, 存在 $k_1>0$，使得

$$\left|\int_{k_1}^{k_1+1}f(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_1)|<\varepsilon_1,$$

存在 $k_2>\max\{x_1+1,2\}$ 使得

$$\left|\int_{k_2}^{k_2+1}f(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_2)|<\varepsilon_2,$$

重复此过程即得满足我们想要的 $\{x_n\}$. □

例 12.12. 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明. 此题可以利用反证法来处理，这里我们直接主动出击. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 且存在 $A>a$，使得对任意 $x_1>x_2>A$，有 $\left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}f(x)\right|<\varepsilon\delta$. 现在我们取 $x_2=x_1+\delta$，则

$$|\delta f(x_1)|=\left|\int_{x_1}^{x_1+\delta}(f(x)-f(x_1))\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_1+\delta}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon\delta+\varepsilon\delta,$$

即有 $|f(x_1)|<2\varepsilon$. □

例 12.13. 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调，则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

证明. 不妨设 f 单调减，则 f 非负. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A>a$，使得当 $x>A$ 时，就有

$$\frac{xf(x)}{2}\leq\int_{x/2}^{x}f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$$

这样即得. □

例 12.14 (苏大)**.** 设 f 在 R 连续可微，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f^2(x)+(f'(x))^2]\mathrm{d}x=1$$

则对任意 $x\in R$，有 $f(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

证明. 首先不难得到

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

对任意固定 $x \in R$，不妨设 $\int_x^{+\infty} [f(t)^2 + (f'(t))^2]\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}$(否则考虑另一半区间积分)，则

$$|f^2(x)| = \left|\int_x^{+\infty} 2f(t)f'(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_x^{+\infty} |2ff'|\mathrm{d}t \le \int_x^{+\infty} (f^2 + (f')^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

这样即得 $f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

例 12.15 (瑕积分与无穷积分的转化)**.** 对任何实数 α，成立

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

证明. 注意

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{-\alpha})}$$

这样即得. □

举个实际例子：

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{100} x} \xlongequal{x=\arctan t} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^{100})} = \frac{\pi}{4}.$$

例 12.16. 设 $f \in C^1[a,+\infty)$，单调减少，且 $f(+\infty) = 0$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明. 如下只考虑充分性证明,关键是说明 $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $X > a$，使得当 $x_2 > x_1 > X$ 时有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} xf'(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

注意 f' 非正，由积分第一中值定理，存在 $\eta \in (x_1, x_2)$ 使得

$$x_1(f(x_1) - f(x_2)) \le \eta(f(x_1) - f(x_2)) = \left|\int_{x_1}^{x_2} xf'(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

让 $x_2 \to +\infty$，即有 $x_1 f(x_1) \le \varepsilon$. □

例 12.17. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上为内闭可积的正函数，且 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = p$. 则当 $p < -1$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $p > -1$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明. 当 $p < -1$ 时，有 $p < \dfrac{p-1}{2} < -1$. 则当 x 充分大时 $f(x) < x^{(p-1)/2}$, 由比较原则，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

例 12.18. 计算

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

证明. 容易说明积分的收敛性，故由归结原则

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=\gamma\end{aligned}$$

其中 γ 是 Euler 常数. □

例 12.19. 设 $\alpha\in(0,1)$，计算

$$\int_0^1\left(\left[\frac{\alpha}{x}\right]-\alpha\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x$$

证明. 注意

$$\left[\frac{\alpha}{x}\right]-\alpha\left[\frac{1}{x}\right]=\alpha\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)-\left(\frac{\alpha}{x}-\left[\frac{\alpha}{x}\right]\right)$$

且

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{\alpha}{x}-\left[\frac{\alpha}{x}\right]\right)\mathrm{d}x &= \int_0^\alpha\left(\frac{\alpha}{x}-\left[\frac{\alpha}{x}\right]\right)\mathrm{d}x+\int_\alpha^1\left(\frac{\alpha}{x}-\left[\frac{\alpha}{x}\right]\right)\mathrm{d}x\\ &= \alpha\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x+\int_a^1\frac{\alpha}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

这样就有

$$\int_0^1\left(\left[\frac{\alpha}{x}\right]-\alpha\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=\alpha\ln\alpha.$$

□

例 12.20. 设 $f\in C^1[0,+\infty)$，且 $xf(x),f'(x)$ 平方可积，则

$$\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\le 2\left(\int_0^{+\infty}x^2f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

证明. 注意

$$\int_0^{+\infty}|xff'|\mathrm{d}x \le \left(\int_0^{+\infty}x^2f(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^{+\infty}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

即 $\int_0^{+\infty}xff'\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_0^{+\infty}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{xf^2(x)}{2}\bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x \tag{43}$$

由(43)等号左右两侧反常积分均收敛, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf^2(x)$ 存在. 又因为

$$\int_1^{+\infty}xf^2(x)\mathrm{d}x \le \int_1^{+\infty}x^2f^2(x)\mathrm{d}x$$

收敛，所以只能是 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf^2(x)=0$. 这样就有

$$\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x \le 2\left(\int_0^{+\infty}x^2f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

□

例 12.21 (湖南师范)**.** 计算

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$$

证明. 由收敛性就有

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x - \int_{(2k+1)\pi}^{2k+2\pi}e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}(e^{-2x}+e^{-2(x+\pi)})\sin x\mathrm{d}x\\
&= (1+e^{-2\pi})\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x\\
&= \frac{(1+e^{-2\pi})(1+e^{-2\pi})}{5}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4k\pi} = \frac{1+e^{-2\pi}}{5(1-e^{-2\pi})}
\end{aligned}$$

□

例 12.22. 设 $p>0$，定义

$$g(x)=\begin{cases} p\left[\dfrac{p}{x}\right]+\dfrac{p}{2}, & x\geq 0,\\ -g(-x), & x<0.\end{cases}$$

则对所有 x 成立

$$\frac{p}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)pt}{\sin\frac{1}{2}pt}\cdot\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[g(x^+)+g(x^-)]$$

证明. 如下讨论 $x>0$ 情形. 注意

$$\sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)pt}{\sin\frac{1}{2}pt}=1+2\sum_{n=1}^{[x/p]}\cos npt$$

这样由 Dirichlet 积分有，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)pt}{\sin\frac{1}{2}pt}\cdot\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t=\pi\cdot\left(\mathrm{sgn}x+\sum_{n=1}^{[x/p]}[\mathrm{sgn}(x+np)+\mathrm{sgn}(x-np)]\right)$$

下面只需分 $x=kp$ 或 $kp<x<(k+1)p$ 讨论即得. □

§13 数项级数

13.1 重点回顾

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2(n+1)}$ 类型的级数，比较原则已经失效，要利用积分判别法来说明其收敛性.

例 13.1 (苏大)**.** 设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_{n_k}(n\in N)$ 是绝对收敛的级数，且满足对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n,m>N$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n_k}-x_{m_k}|<\varepsilon$$

则存在绝对收敛的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n_k}-x_k|=0.$$

证明. 由 Cauchy 准则，对任意固定 k，$\{x_{n_k}\}$ 是收敛列，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}=x_k$. 有条件，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N_1，使得, 对任意 $N\in N^+$，当 $n,m>N_1$ 时有

$$\sum_{k=1}^{N}|x_{n_k}-x_{m_k}|<\varepsilon$$

让 $m\to+\infty$，再让 $N\to+\infty$ 即有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n_k}-x_k|\le\varepsilon$$

即有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_{n_k}-x_k|=0$. 另外，取定一个充分大的 m，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\le\sum_{k=1}^{\infty}|x_{m_k}|+\sum_{k=1}^{\infty}|x_{m_k}-x_k|<\infty$$

□

例 13.2. 设 $p>0$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)$ 的条件收敛性和绝对收敛性.

证明. 与级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 作差得到，原级数在 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时发散，在 $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛，在 $p>1$ 时绝对收敛. □

例 13.3 (Rabbe 判别)**.** 设非负数列 $\{a_n\}$ 满足 n 充分大时，成立

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge r$$

则当 $r>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明. 当 n 充分大时，由 Bernoulli 不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{n}{n+r}=1-\frac{r}{n+r}\le\left(\frac{n+r-1}{n+r}\right)^r$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}$ 的收敛性即得. □

这里也可以直接进行估阶：为方便起见, 设恒有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq r>1,\quad \forall n\in N^+$$

则

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_1}&\leq\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+r/k}=\exp\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{r}{k}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\\&=\exp\left(-r\ln n+C_1+o(1)\right)\sim\frac{C_2}{n^r}\end{aligned}$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}$ 的收敛性即得.

例 13.4. 设 $\{a_n\}$ 是单调减少的正数列，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^na_{2^n}$ 收敛.

证明. 注意

$$\frac{1}{2}(2^{n+1}\cdot a_{2^{n+1}})=2^na_{2^{n+1}}\leq\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}a_k\leq 2^n\cdot a_{2^n}$$

这样即得结论. □

例 13.5 (Sapagof 判别)**.** 设正数列 $\{a_n\}$ 单调减少，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Longleftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

证明. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 若 $a>0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a}=\frac{a_1-a}{a}$$

若 $a=0$，则对每个固定 n，有估计

$$\sum_{k=n}^{n+p}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k}\geq\frac{1}{a_n}\sum_{k=n}^{n+p}(a_k-a_{k+1})=1-\frac{a_{n+p}}{a_n}\tag{44}$$

由于 $\lim\limits_{p\to+\infty}a_{n+p}=0$,则当 p 充分大时,总可以做到 (44) $\geq\dfrac{1}{2}$. 由 Cauchy 准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散. □

例 13.6. 讨论什么条件下，数列 $\{a_n\}$ 为无穷小量，其中

$$a_n=\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\quad ,n=1,2,\cdots$$

证明. 当 α 是非负整数时，a_n 仅有有限项非零. 当 $\alpha < 0$，$|a_n|$ 恒正，且

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n+1}$$

故当 $\alpha \leq -1$ 时，$|a_n| \geq |a_1|$，即 $\{a_n\}$ 不是无穷小量. 当 $\alpha > -1$ 时，由 ([问题，13.5]),$\{a_n\}$ 是无穷小量. □

例 13.7 (调和平均收敛). 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ 收敛.

证明. 若 a_n 单调增，则

$$na_n \leq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} \leq \sum_{k=1}^{2n-1} a_k$$

这样就有

$$\frac{2n-1}{a_1 + \cdots + a_{2n-1}} + \frac{2n}{a_1 + \cdots + a_{2n}} \leq \frac{2n-1}{(n-1)a_n} + \frac{2n}{na_n} < \frac{5}{a_n}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ 的部分和有上界，从而级数收敛.

对一般的情形，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 故 $\{a_n\}$ 有最小值项，即可以将 $\{a_n\}$ 从小到大进行排列. 记重排后得到的数列为 $\{b_n\}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 仍是收敛的，且

$$\frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leq \frac{n}{b_1 + \cdots + b_n}$$

由初始讨论即得. □

例 13.8 (几何平均收敛). 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

证明. 由 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增趋于 e，有

$$e^n > \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

这样就有

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot (2a_2) \cdots (na_n)}}{\sqrt[n]{n!}} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n\sqrt[n]{n!}}$$

$$
\begin{aligned}
&\le e\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=e\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k\\
&=e\sum_{k=1}^{N}ka_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}ka_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right)\\
&\le e\sum_{k=1}^{n}a_n.
\end{aligned}
$$

让 $N\to\infty$ 即得. □

例 13.9. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少收敛于 0, 且 $b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\ge 0$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n$ 收敛，且值为 a_1.

证明. 记 $c_n=a_n-a_{n+1}$，则 $\{c_n\}$ 单调减少收敛于零，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=a_1$. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时，$\sum\limits_{k=N+1}^{n}c_k<\varepsilon$. 这样就有

$$c_n(n-N)\le\sum_{k=N+1}^{n}c_k<\varepsilon.$$

对于上数固定 N, 当 n 充分大时，可以做到 $N\cdot c_n<\varepsilon$, 这样就有 $nc_n<2\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}nc_n=0$. 于是

$$\sum_{n=1}^{N}nb_n=\sum_{n=1}^{N}n(c_n-c_{n+1})=\sum_{n=1}^{N}c_n-N\cdot c_{N+1}\to a_1,\quad (N\to+\infty).$$

□

例 13.10. 设 $\{a_n\}$ 是单调递减的正数列，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $[0,\pi]$ 上一致收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证明. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 N, 使得 $n\ge N$ 时，对任意 $x\in[0,\pi]$，有

$$|a_n\sin(nx)+\cdots+a_{2n}\sin 2nx|<\varepsilon$$

现在取 $x=\dfrac{\pi}{4n}$，则有 $na_{2n}<\sqrt{2}\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}2na_{2n}=0$. 且

$$0<(2n+1)a_{2n+1}\le(2n+1)a_{2n}\to 0$$

这样就有 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. □

例 13.11. 若 $0<a_n<a_{2n}+a_{2n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明. 只需说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和无界即可，为此考虑

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} (a_{2k} + a_{2k+1}) > a_1 + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} a_k > \cdots > na_1 \to +\infty, \quad (n \to \infty)$$

这就得到我们想要的结果. □

例 13.12. 记 S_n 是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和.

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，记 $R_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n^p}$ 的收敛性.

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^p}$ 的收敛性.

证明. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. 此时 $\{R_n\}$ 单调减收敛于零. 如下不等式关系应认为 n 充分大时成立.

(i) 当 $p \leq 0$ 时，$\dfrac{a_n}{R_n^p} \leq a_n$，由比较原则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^p}$ 收敛.

(ii) 当 $0 < p < 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{R_n^p} = \sum_{n=1}^{N} \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{\mathrm{d}x}{R_n^p} \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \leq \int_0^S \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x < +\infty$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n^p}$ 部分和有上界，从而级数收敛.

(iii) 当 $p \geq 1$ 时，$\dfrac{a_n}{R_n^p} \geq \dfrac{a_n}{R_n}$. 对任意 $n \in N^+$，有估计

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{R_k - R_{k+1}}{R_k} \geq \frac{1}{R_n} \sum_{k=n}^{n+p} (R_k - R_{k+1}) = 1 - \frac{R_{n+p+1}}{R_n} \tag{45}$$

对上述固定 n, 当 p 充分大时，$\dfrac{R_{n+p+1}}{R_n} < \dfrac{1}{2}$，此时 (45) $> \dfrac{1}{2}$，由 Cauchy 准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n^p}$ 发散.

同理讨论 2，可以得到如下结果：当 $p > 1$ 时收敛，其余情形发散. □

例 13.13. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 若 a_n 单调减，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + na_n}$ 发散，但是对于一般情形，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + na_n}$ 可能收敛.

证明. 当 a_n 单调减时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n} \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+S_n} \to +\infty$. 对一般情形，考虑

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2}, & \text{其他} \end{cases}, \quad k = 1, \cdots$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} < +\infty.$$

□

例 13.14 (性态渐进估计)**.** 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ 的敛散性.

证明. 由 [问题，13.6]，当 $\alpha > -1$ 时，$\binom{\alpha}{n}$ 是无穷小量，此时当 n 充分大时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ 为 Leibniz 级数，故总是收敛的. 为探究绝对收敛性，取定 $m > |\alpha+1|$，当 $n > m$ 时，考虑如下估计

$$\begin{aligned} \left|\binom{\alpha}{n}\right| &= C_1\frac{[m-(\alpha+1)]\cdots[n-(\alpha+1)]}{m(m+1)\cdots n} = C_1\prod_{k=m}^{n}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right) \\ &= \exp\left(C_2 + \sum_{k=m}^{n}\ln\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right)\right) = \exp\left(C_2 - (\alpha+1)\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=m}^{n}O(1/k^2)\right) \\ &= \exp\left(C_3 - (\alpha+1)\ln n + o(1)\right) \sim \frac{C_4}{n^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

其中 C_i 为常数，且 $C_4 \neq 0$. 这样就有当 $\alpha > 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ 绝对收敛. □

例 13.15. 说明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

是收敛的.

证明. 将原级数中相邻的同号项进行合并，从而组成一个交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$，其中

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k} &= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+k/n^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=0}^{2n}\left(1-\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(2n+1-\frac{2n+1}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

则 n 充分大时，a_n 单调减趋于零，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，从而原级数也收敛. □

例 13.16 (Abel 变换)**.** 设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明. 记 $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$，对任意充分小的 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时，若 $s > n$, 则 $\left|\sum\limits_{k=n}^{s} b_k\right| < \varepsilon$ 且 $\sum\limits_{k=n}^{s} |a_k - a_{k+1}| < \varepsilon$. 这样就有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n}^{m-1}(B_k - B_{n-1})(a_k - a_{k+1}) + (B_m - B_{n-1})a_m\right| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k-1} - a_k| + M \cdot |B_m - B_{n-1}| < (M+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

其中 M 是 $|a_n|$ 的上界，由 Cauchy 准则即证. □

例 13.17 (反解)**.** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) a_n$ 发散.

证明. 记 $b_n = (1 + 1/n)a_n$，则 $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) b_n$. 注意 $\left\{1 - \dfrac{1}{n+1}\right\}$ 单调趋于零，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则由 Dirichet 判别，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，矛盾. □

例 13.18 (作差)**.** 设 $\sum \dfrac{a_n}{b_n}$ 与 $\sum \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2$ 均收敛，且对每个 n，有 $b_n(a_n + b_n) \neq 0$，则 $\sum \dfrac{a_n}{b_n + a_n}$ 收敛.

证明. 注意

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n^2}{b_n(a_n + b_n)}.$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, 则当 n 充分大时，可以做到

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a_n^2}{b_n^2} \leq \frac{a_n^2}{b_n(a_n + b_n)} = \frac{(a_n/b_n)^2}{1 + a_n/b_n} \leq 2 \cdot \frac{a_n^2}{b_n^2}$$

这样就有 $\sum \dfrac{a_n^2}{b_n(a_n + b_n)}$ 收敛，从而 $\sum \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$ 也收敛. □

例 13.19. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n^2}$ 的敛散性.

证明. 若 a_n 有界，不妨设 $a_n \leq M$，则 $\dfrac{a_n}{1 + a_n^2} \geq \dfrac{a_n}{1 + M^2}$，由比较原则，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n^2}$ 收敛. 否则，考虑 $a_n = n^2$ 和 $a_n = \sqrt{n}$ 得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n^2}$ 可能收敛也可能发散. □

13.2 参考题

例 13.20 (可裂项型)**.** 对任意正数列 $\{a_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}=0.$$

证明. 注意

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\right]\\&=1-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\le 1\end{aligned}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$ 收敛，从而通项趋于零. □

例 13.21. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的通项单调减少趋于零，且 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\right\}$ 有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明. 设 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\le M$. 对任意固定 $n\in N^+$，当 $m>n$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_m)+na_m\le\sum_{k=1}^{m}(a_k-a_m)+na_m \tag{46}$$

让 $m\to+\infty$，则 (46) $\le M$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

例 13.22. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 严格单调减少，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=+\infty.$$

证明. 注意 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 单调减少趋于零，从而 $\{a_n\}$ 也单调减少. 这样就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}\ge\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}&=\frac{a_n-a_{n+1}}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k^2-a_{k+1}^2)}\\&\ge\frac{1}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})}\to+\infty,\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

这样即得结论. □

例 13.23. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\{na_n\}$ 单调，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n\ln n=0$.

证明. 若 $\{na_n\}$ 单调增，则 $a_n \geq \dfrac{a_1}{n}$，这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛相矛盾，从而 $\{na_n\}$ 单调减. 则当 n 充分大时，对于 $m > n$, 有估计

$$\begin{aligned}\varepsilon > \sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k}(ka_k) \geq (ma_m) \cdot \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \\ \geq (ma_m) \sum_{k=n}^{m} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \geq ma_m \ln \frac{m}{n}\end{aligned}$$

只要保证 $m > n^2$，就有 $\varepsilon > \dfrac{1}{2} ma_m \ln m$. □

例 13.24. 设 $0 < p < 1, a_1 > 0, a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n^p}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明. 注意 $\{a_n\}$ 单调减有下界，从而 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 且 $a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n^p = a_n$，这样就有

$$a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^p} = \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{\mathrm{d}x}{a_n^p} \leq \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} a_n \leq a_1 + \int_{a_n}^{a_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \leq a_1 + \int_{0}^{a_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} < +\infty$$

□

例 13.25. 设有收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)} = S$.

证明. 设 $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ka_k$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} \\ &= b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{n} = S\end{aligned} \tag{47}$$

当然(47)成立，需要说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{n} = 0$，利用 Abel 变换即得. □

例 13.26. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛，则对任意 $k \in N^+$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_{n+k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)a_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} na_n \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

由 Abel 判别有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+k}$ 收敛，于是 $k \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛，进一步，$\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+k} = 0$.

证明. 对任意固定 $\varepsilon>0$，存在 N，使得对任意 $t>s>n$，有 $\left|\sum\limits_{n=s}^{t}na_n\right|<\varepsilon$. 对于每个固定 $k>N$，存在相应的 m_k，使得 $\left|\sum\limits_{n=m_k+1}^{\infty}na_{n+k}\right|<\varepsilon$. 现在记 $S_i=\sum\limits_{n=1+k}^{m_k+k}na_n(1\le i\le m_k)$，则 $|S_i|<\varepsilon$ 于是

$$\left|\sum_{n=1}^{m_k}na_{n+k}\right|=\left|\sum_{n=k+1}^{m_k+k}na_n\left(1-\frac{k}{n}\right)\right|\xlongequal{\text{Abel}}\left|\sum_{i=1}^{m_k-1}S_i\left(-\frac{k}{(k+i)(k+1+i)}\right)+S_{m_k}\left(1-\frac{k}{k+m_k}\right)\right|$$
$$<\varepsilon\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k}{k+m_k}\right)+\varepsilon<3\varepsilon$$

这样就有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+k}\right|\le\left|\sum_{k=1}^{m_k}na_n\right|+\left|\sum_{n=m_k+1}^{\infty}a_na_{n+k}\right|<4\varepsilon.$$

□

例 13.27. 设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上连续可微，且 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 同敛散.

证明. 令

$$\ell=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x+f(1).$$

若 $\ell\neq0$，则 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同时发散. 若 $\ell=0$，则 $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_{[y]}^{y}f(x)\mathrm{d}x=0$. 这样就有 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散. 注意

$$\begin{aligned}\left|\int_1^n f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}f(k)\right|&=\left|\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}(f(x)-f(k))\mathrm{d}x-f(1)\right|\\&\le|f(1)|+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}|f(x)-f(k)|\mathrm{d}x\\&=|f(1)|+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\left(\left|\int_x^k f'(t)\mathrm{d}t\right|\right)\mathrm{d}x\\&\le|f(1)|+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\left(\int_{k-1}^{k}|f'(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=|f(1)|+\int_1^n|f'(t)|\mathrm{d}t\le|f(1)|+\int_1^{+\infty}|f'(t)|\mathrm{d}t<+\infty\end{aligned}$$

这样即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 同敛散. □

例 13.28 (估界)**.** 设 $p>0$，记 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$，则 $\frac{1}{2}<S<1$.

证明. 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $\{S_{2n-1}\}$ 单调减，从而 $S<S_{2n-1}<S_1=1$. 另一方面，记 $f(x)=\frac{1}{x^p}$，则 f 是下凸函数，从而 $f(n-1)+f(n+1)\geq 2f(n)$. 这样就有

$$\begin{aligned}
S_{4n+1}&=1+\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(2k+1)^p}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(2k)^p}\\
&\geq 1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k)^p}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(2k)^p}\\
&=1+\frac{1}{2^p}\left(2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^p}\right)\\
&=1+\frac{1}{2^p}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}\right)=1-\frac{1}{2^p}S_{2n} \qquad (48)
\end{aligned}$$

(48)两边让 $n\to\infty$，即有 $S\geq 1-\frac{1}{2^p}S$，从而 $S\geq\frac{2^p}{1+2^p}>\frac{1}{2}$. □

例 13.29 (Abel 变换)**.** 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛，且 $\{b_n\}$ 单调递减趋于零，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)\cdot b_n=0.$$

证明. 对任意 $\varepsilon>0$, 由 Cauchy 准则，存在 n，使得当 $s>n$ 时，有 $|T_s|=\left|\sum\limits_{i=n}^{s}a_ib_i\right|<\varepsilon$. 则当 $m>n$ 充分大时，可以做到

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)\cdot b_m\right|&\leq\left|b_m\cdot\sum_{k=n}^{m}(a_kb_k)\cdot\frac{1}{b_k}\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\cdot b_m\\
&\xlongequal{\text{Abel变换}}\left|b_m\left(\sum_{k=n}^{m-1}T_k(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}})+T_m\frac{1}{b_m}\right)\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\cdot b_m\\
&<\varepsilon\cdot\frac{b_m}{b_n}+\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\cdot b_m<2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

举两个应用例子:

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+na_n}{n}=0$.

2. 设 $p>0$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^p}=0$.

例 13.30. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，令其部分和为 S_n. 则若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_1+\cdots+S_n}{n}$ 收敛，则称该级数是可以 Cesáro 求和. 现在设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是可以 Cesáro 可求和的，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 进一步 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.

证明. 注意

$$\frac{S_n}{n}=\frac{S_1+\cdots+S_n}{n}-\frac{S_1+\cdots+S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=0$, 则

$$\frac{a_n}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\longrightarrow 0.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\lim\limits_{n\to\infty} n(S_n-S_{n-1})=0$，则由

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} S_k}{n}=\frac{\sum_{k=1}^{n-1} k(S_k-S_{k+1})+nS_n}{n}$$

让 $n\to\infty$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1+\cdots+S_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，即原级数收敛. 最后只需注意到

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} S_k+nS_n}{n}$$

□

例 13.31. 若对任意趋于零的数列 $\{b_n\}$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

证明. 若 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|\to+\infty$，则令

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{S_n}, & a_n\geq 0\\ -\dfrac{1}{S_n}, & a_n<0.\end{cases}$$

则 $a_n\cdot b_n=\dfrac{|a_n|}{S_n}$，由 [问题，13.12]，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_na_n$ 发散，矛盾. □

例 13.32. 若对每个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|$ 收敛.

证明. 若 a_n 无界，则存在 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $|a_{n_k}|>k^2$. 令

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{k^2}, & x=n_k\text{且}a_{n_k}>0.\\ -\dfrac{1}{k^2}, & x=n_k\text{且}a_{n_k}<0.\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散, 矛盾，故 $\{a_n\}$ 收敛. 对任意收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，记 $r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}b_n$，则 $\{r_n\}$ 可以是任意收敛到零的数列. 注意

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k(r_k-r_{k+1})=a_1r_1+\sum_{k=2}^{n}r_k(a_k-a_{k-1})-a_nr_{n+1}$$

这样就有

$$\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})r_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-a_1b_1+a_nr_{n+1}\to\sum_{n=1}^{\infty}a_nnb_n-a_1b_1$$

由 [问题，13.31]，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|$ 收敛. □

例 13.33. 设 $\beta\in(0,1)$, 正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\varliminf_{n\to\infty}n^{\beta}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda\in(0,+\infty)$$

则对任意 $k>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}n^ka_n=0$.

证明. 记 $b_n=n^ka_n$，则

$$n^{\beta}\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\left[n^{\beta}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-n^{\beta}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^k-1\right)\right]\tag{49}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}n^{\beta}\left((1+\frac{1}{n})^k-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^{1-\beta}}=0$$

则对(49)两边取下极限就有

$$\varliminf_{n\to\infty}n^{\beta}\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\lambda$$

这样，下面我们只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 即可. 由条件，存在 N，当 $n\geq N$ 时, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{q}{n^{\beta}}>1+\frac{q}{n},\quad q\in(0,\lambda).$$

这样就有

$$\frac{a_N}{a_{n+1}} > \prod_{k=N}^{n}\left(1+\frac{q}{k}\right) \to +\infty, \quad (n \to \infty)$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

例 13.34 (北大)**.** 设 f 满足, 对任绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 绝对收敛, 则 $f(x) = O(x)$.

证明. 若结论不成立，则存在 $\{x_n\} \to 0$，使得 $\left|\dfrac{f(x_n)}{x_n}\right| \geq n$. 取 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，使得 $|x_{n_k}| < \dfrac{1}{k^2}$，则

$$\frac{2}{k^2 \cdot |x_{n_k}|} - \frac{1}{k^2 \cdot |x_{n_k}|} = \frac{1}{k^2 \cdot |x_{n_k}|} > 1$$

这样就存在 $m_k \in N^+$，使得

$$\frac{1}{k^2 \cdot |x_{n_k}|} < m_k < \frac{2}{k^2 \cdot |x_{n_k}|}.$$

现在令

$$\{a_n\} : \underbrace{x_{n_1}, x_{n_1}, \cdots, x_{n_1}}_{m_1}, \cdots, \underbrace{x_{n_k}, \cdots, x_{n_k}}_{m_k}, \cdots$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < +\infty$. 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n)| \geq \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cdot n_k \cdot |x_{n_k}| \geq \sum_{k=1}^{\infty} m_k| \cdot x_{n_k}| \cdot k \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_{n_k}} \to +\infty$$

这就导出了矛盾. □

§14 函数项级数与幂级数

14.1 基础与重点

例 14.1. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛且一致收敛，但是不绝对一致收敛.

证明. 首先

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)=\begin{cases}0, & x=1\\ x, & x\in[0,1)\end{cases}$$

和函数在 $x=1$ 处不连续,从而不一致收敛. 另记 $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-x)^k(1-x)=\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}(1-x)}{1+x}$,则

$$|R_n(x)|\le x^{n+1}(1-x)=\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)(1-x)\cdot x^{n+1}\le\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}<\frac{1}{n+1}$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x)^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. □

例 14.2. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$$

在有限区间 $[0,a]$ 上一致收敛.

证明. 令 $f=e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, 则 $f'=e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}\ge 0$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right]$$

对 $\dfrac{1}{n}\left[e^a-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right]$ 进行估阶,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left[e^a-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]&=\frac{e^a}{n}\left[1-\exp\left(n\left(\frac{a}{n}-\frac{a^2}{n^2}+O\left(1/n^3\right)\right)-a\right)\right]\\&=\frac{e^a}{n}\left[1-\exp\left(-\frac{a^2}{n}+O(1/n^2)\right)\right]\sim\frac{C}{n^2}\end{aligned}$$

由比较判别, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[e^a-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right]$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛. □

例 14.3 (分段分析)**.** 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\tag{50}$$

在 $[0,+\infty]$ 上一致收敛.

证明. 当 $x \geq 1$ 时，

$$\frac{x^n}{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

故函数项级数(50)在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛. 当 $x \in [0,1)$ 时，

$$\frac{x^{2n+1}}{(1+x)\cdots(1+x^{2n+1})} \leq \frac{x^{2n}}{(1+x)\cdots(1+x^{2n})} \leq \frac{x^{2n}}{(1+x^n)^n} \leq \frac{x^{2n}}{C_n^2 x^{2n}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

这样就有函数项级数(50)在 $[0,1)$ 上也一致收敛. □

例 14.4. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^n \sin \pi t \mathrm{d}t$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛.

证明. 做如下估计

$$\begin{aligned}\int_0^x t^n \sin \pi t \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n \sin \pi t \mathrm{d}t &= -\frac{\pi}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\cos \pi t \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\pi}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

由强级数判别，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^n \sin \pi t \mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. □

例 14.5. 函数列 $\{x \arctan nx\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明. 首先收敛函数为 $f = \dfrac{\pi x}{2}$，则

$$\left|x \arctan x - \frac{\pi x}{2}\right| = x \arctan \frac{1}{nx} < x \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{n}$$

故有一致收敛性. □

理论部分，首先关注

1. 若 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$，在 (a,b) 上一致收敛，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
2. 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 中的函数在 $[a,b]$ 上同单调增或同单调减，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 均收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
3. 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛，且对每个 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界.
4. 注意 [问题，14.19] 的实际应用，会在某些端点处判别起大作用.

例 14.6. 设 f 在 (a,b) 上有连续导数，定义

$$F_n(x)=\frac{n}{2}\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right],\quad x\in(a,b),n=1,\cdots$$

则 $F_n(x)$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛.

证明. 利用导函数的一致连续性即得. □

例 14.7. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛，且每个 $f_n(x)$ 在 $x\in I$ 上有界，则 $f_n(x)$ 在 I 上一致有界. 进一步，若 $\{g_n(x)\}$ 在 I 上也一致收敛，且对每个 $g_n(x)$ 在 I 上有界，则 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在上也一致收敛.

证明. 取定 $\varepsilon=1$，存在 N，对任意 $n>N$ 有 $|f_N-f_n|\le 1$，记 M 为 $|f_1|,\cdots,|f_N|$ 的一个上界，则 $M+1$ 是所有 $|f_n(x)|$ 的上界. 进一步,n,m 充分大时，

$$|f_ng_n-f_mg_m|\le|f_n(g_n-g_m)|+|g_m(f_n-f_m)|\le C|(f_n-f_m|+|g_n-g_m|)<2C\varepsilon$$

这里 C 是 $|f_n|,|g_n|$ 的一个上界. □

例 14.8 (苏大)**.** 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的等度连续函数列，且收敛于 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

证明. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时，对一切 n，有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. 让 $n\to\infty$，得 $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$. 对于上述固定 $\delta>0$，对 $[0,1]$ 进行 n 等分，并记分点为 x_i，使得 $\dfrac{b-a}{n}<\delta$. 则存在公共 N，使得当 $n>N$ 时，成立

$$|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon,\quad\forall i=0,\cdots,n.$$

于是对任意 $x\in[a,b]$，不妨设 $x\in[x_{k-1},x_k]$，则当 $n>N$ 时

$$|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|\le 3\varepsilon.$$

□

例 14.9 (Dini 定理)**.** 设连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续的函数 $f(x)$，且对任意 $x\in[a,b]$，有 $\{f_n(x)\}$ 单调，则 $f_n\rightrightarrows f$.

证明. 对任意 $x\in[a,b],\varepsilon>0$，存在 N_x 使得 $|f_{N_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$. 由连续函数的保号性，存在 $\delta_x>0$，当 $y\in U(x;\delta_x)$ 时，有

$$|f_{N_x}(y)-f(y)|<\varepsilon.$$

不妨设

$$\bigcup_{k=1}^{s}U(x_i;\delta_{x_i})\supset[a,b],$$

则当 $n > \max\{N_{x_1}, \cdots, N_{x_s}\}$ 时，对任意 $x \in [a, b]$，不妨设 $x \in U(x_i; \delta_{x_i})$，则有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_{N_{x_i}}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

例 14.10 (关于 x 单调，区间分段)**.** 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $x \in [a, b]$ 上收敛于连续函数 $f(x)$，且对任意 n，$f_n(x)$ 关于 x 单调，则 $f_n \rightrightarrows f$.

证明. 由于 $f \in C[a, b]$，从而一致连续，即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$，当 $|x - y| < \delta$ 时，成立

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

现在将 $[a, b]$ 等分为 k 份,使得每个区间长度小于 δ,并记分点为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. 则存在一个公共 N，当 $n > N$ 时，

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

又因为 $\lim\limits_{n \to \infty} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$，则由保号性，存在 $N_1 > N$，使得当 $n > N_1$ 时，成立

$$|f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, k.$$

在上述基础上，对任意 $x \in [a, b]$，不妨设 $x \in [x_{i-1}, x_i]$，则

$$|f_n(x) - f_n(x_i)| \leq |f_n(x_{i-1}) - f_n(x_i)| < \varepsilon$$

这样就有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < 3\varepsilon.$$

□

例 14.11. 设 $S_1(x) \in R[a, b]$，令

$$S_{n+1}(x) = \int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t, \quad n = 1, \cdots, n.$$

则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

证明. 设 $|S_1(x)| \leq M$，则

$$|S_2(x)| \leq \int_a^x |S_1(t)\mathrm{d}t| \leq M(x - a),$$

这样做下去，就有

$$|S_n(x)| \leq \frac{M(x-a)^{n-1}}{n!} \leq \frac{M(b-a)^n}{n!} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

这样即得. □

例 14.12 (Bendixon 判别)**.** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可微函数项级数，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 的部分和函数列在 $[a,b]$ 上一致有界，则若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，则必一致收敛.

证明. 设 $C > 0$, 满足对任意 n 和 $x \in [a,b]$ 成立

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k(x)\right| \leq C.$$

对任意给定 $\varepsilon > 0$, 将 $[a,b]$ 等分为 m 份，使得 $\dfrac{b-a}{m} < \varepsilon$, 并记分点为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. 则存在公共 N, 使得对任意 $n > N$ 和正整数 p 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

对任意正整数 p 和 $x \in [a,b]$, 不妨设 $x \in [x_{i-1}, x_i]$, 这样就有估计

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k(x)\right| &\leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (u_k(x_i) - u_k(x))\right| \\ &= \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u'_k(\xi_k)\right| \cdot |x - x_i| < (2c+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则即得. □

作为练习

例 14.13 (中山大学)**.** 设 $\{f_n(x,y)\}$ 在 R^2 上连续可微, 且 $f_n(x,y)$ 的偏导数关于 $n, (x,y) \in R^2$ 一致有界. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$，则 $\{f_n(x,y)\}$ 内闭一致收敛于 $f(x,y)$.

例 14.14. 设可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛，且对任意 $\varepsilon \in (0, b-a)$，$\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b-\varepsilon]$ 上一致收敛，且存在 $g \in R[a,b]$，使得

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in [a,b], n = 1, 2, \cdots,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$

证明. 不妨设 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 f，由于 $\{f_n(x)\}$ 一致有界，从而可设

$$\max\{|f_n(x)|,|f(x)|\}\leq M,\quad n=1,\cdots,x\in[a,b].$$

对任意充分小 $\varepsilon>0$，存在 N, 使得 $|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$. 由于 $f_N(x)\in R[a,b-\varepsilon]$，则存在 $[a,b-\varepsilon]$ 的一个分割 P，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{f_N}\Delta x_i<\varepsilon.$$

注意 $\omega_i^f\leq 2\varepsilon+\omega_i^{f_N}$, 这样在 P 基础上加一个分割点 $b=x_{n+1}$ 得到 $[a,b]$ 的一个分割 P', 就有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i\Delta x_i\leq 2(b-a)\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{f_N}\Delta x_i+2M\varepsilon<\varepsilon+2(b-a)\varepsilon+2M\varepsilon$$

即 $f\in R[a,b]$. 且当 n 充分大时，

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|&\leq\int_a^{b-\varepsilon}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\int_{b-\varepsilon}^b|f(x)-f_n(x)|\mathrm{d}x\\&<(b-a)\varepsilon+2M\varepsilon\end{aligned}$$

即得命题. □

例 14.15. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 于 x_0 的某领域内收敛于 f, 且 f_n 在 x_0 处连续. 则 f 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 和正整数 N，使得当 $x\in U(x_0;\delta)$ 时，$|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$.

证明. 若 f 在 x_0 处连续，则对任意 $\varepsilon>0$，正整数 N，使得

$$|f_N(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

由连续函数的保号性，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U(x_0;\delta)$ 时，

$$|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

反之，当 x 充分接近 x_0 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|\leq|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|<3\varepsilon\tag{51}$$

其中(51)右边第二项估计，由 f_N 在 x_0 处连续控制. □

例 14.16. 设 f_n 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f\in C[a,b]$，则 f_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f 的充要条件是对任意 $[a,b]$ 中的收敛列 $\{x_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$.

证明. 这里只讨论充分性. 若 f_n 在 $[a,b]$ 上不一致收敛于 f，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意

$n \in N^+$，存在 $k_n > n$，和 $x_{k_n} \in [a,b]$，使得

$$|f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n})| \geq \varepsilon_0$$

由于 $\{x_{k_n}\}$ 是有界列，其有收敛子列，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$，现在考虑数列 $\{y_i\}$，使得当 $i = k_n$ 时 $y_i = x_{k_n}$，否则 $y_i = x_0$(即在 x_{k_n} 基础上补一些常数项)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ 收敛，但是 $f_n(y_n)$ 的子列 $f_{k_n}(x_{k_n})$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n_k}(x_{k_n}) \neq f(x_0)$，矛盾. □

记住幂级数的积分余项：

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t$$

由此得到另外两类余项形式.

例 14.17 (求和函数)**.** 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{n! 2^n}$ 的和函数.

证明. 直接主动出击.

$$(e^{\frac{x}{2}})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!2^n}\right)' \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \xrightarrow{\cdot x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!2^n}\right)' \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x^{n-1}}{n!2^n} \xrightarrow{\cdot x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x^n}{n!2^n}$$

这样就有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x^n}{n!2^n} = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) e^{\frac{x}{2}}.$$

□

例 14.18. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$

证明. 注意

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \ln(1+1) + 2(\arctan 1 - 1) = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

□

例 14.19. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = 1$，和函数为 $S(x)$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则极限 $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x)$ 是否不存在.

证明. 考虑 $a_n x^n = (-1)^n x^n$，则和函数 $S(x) = \dfrac{-x}{1+x}$ 在 $x = 1$ 处连续. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数时，$\lim\limits_{x\to 1^-} S(x)$ 一定不存在：对任意 $M > 0$，存在 N, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n > 2M$. 对于上述固定

N，存在 $\delta > 0$，使得 $(1-\delta)^N > \dfrac{1}{2}$. 则当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时，就有

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \geq \sum_{n=1}^{N} a_n x^n \geq (1-\delta)^N \sum_{n=1}^{N} a_n > M.$$

□

例 14.20. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正数数列，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 1，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = A$, 则

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} = A.$$

证明. 若 $A = +\infty$, 则对任意 $M > 1$，存在 N，使得当 $n > N$ 时，成立 $b_n > (M+1)a_n$. 对于上述固定 N，由 [问题，14.19]，$\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = +\infty$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时，有

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N} (1-M) b_n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} > -1.$$

这样就有

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} > \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} b_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} + (M+1) \cdot \frac{\sum\limits_{n>N}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} = M + 1 + \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} (1-M) b_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} > M.$$

若 $A < +\infty$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得当 $n > N$ 时，成立 $\left|\dfrac{b_n}{a_n} - A\right| < \varepsilon$. 对于上述固定 N，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时，$\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{N} b_n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} < \varepsilon$ ，这样就有

$$\left| \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} - A \right| \leq \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n>N} a_n \left| \frac{b_n}{a_n} - A \right| x^n \right) < 2\varepsilon.$$

□

例 14.21 (Tauber)**.** 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上成立，且 $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得 $n > N$ 时，成立

$$n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |ka_k| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |S(1-1/n) - S| < \frac{\varepsilon}{3}$$

取 $x = 1 - \dfrac{1}{n}$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - S\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - S\right| \tag{52}$$

对于(52)右边第一项，有估计

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k)\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对于(52)右边第二项, 有估计

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|x^k \le \frac{\varepsilon}{3n}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \le \frac{\varepsilon}{3n}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{3}$$

这样就有，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - S\right| < 3\varepsilon$. □

例 14.22. 求

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

的和函数.

证明. 易知收敛域为 $[-1,1)$, 记和函数为 $S(x)$，则当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$\begin{aligned} S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1} &= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^n\right] \\ &= \frac{1}{2}S(x) + xS'(x) \end{aligned}$$

从而 $\sqrt{1-x}S(x)$ 恒为常数，由 $S(0) = 1$，即得 $S(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$，此结果显然对 $x = -1$ 也成立. □

例 14.23. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$. 记其部分和数列为 $\{S_n\}$，其和函数为 $S(x)$. 则 $\{S\circ S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $S\circ S$.

证明. 对任意 $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$, 有 $S\in C[a,b]$, 从而一致连续. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时，有 $|S(y_1)-S(y_2)|<\delta$. 对于上述固定 $\delta>0$，由于 S_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 S，则存在 N，当 $n>N$ 时，成立

$$|S_n(x)-S(x)|<\delta,\quad \forall x\in[a,b].$$

这样就有 $|S\circ S_n(x)-S\circ S(x)|<\varepsilon$. □

例 14.24. 设正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散，记 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1.

证明. 记收敛半径为 R，由条件有

$$\frac{S_{n-1}}{S_n}=1-\frac{a_n}{S_n}\to 1,\quad n\to\infty$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{S_n}=1$. 从而

$$1\geq R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{S_n}}=1.$$

□

例 14.25 (南大)**.** 说明

$$\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^x}=1.$$

证明. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛，且在 $(0,+\infty)$ 上有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^x}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}\\&=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(n^x)}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]\end{aligned}$$

考虑 $\left\{\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right\}$ 在 $x\in[0,1]$ 的性态. 对每个固定 $x\in[0,1]$，y^{-x} 在 $[0,+\infty)$ 上为下凸函数，即有

$$(n+1)^{-x}=\left(\frac{n+n+2}{2}\right)^{-x}\leq\frac{n^{-x}+(n+2)^{-x}}{2},\quad \forall n\in N^+.$$

从而 $\left\{\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right\}$ 关于 n 单调减，且由 Bernoulli 不等式

$$\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}=\frac{1}{(n+1)^x}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^x-1\right]\leq\frac{1}{(n+1)^x}\cdot\frac{x}{n}\leq\frac{1}{n}$$

这样就有 $\left\{\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right\}$ 单调一致收敛于零, 由 Dirichlet 判别, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致收敛，于是

$$\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^x}=1-\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]=1.$$

□

14.2 参考题

例 14.26. 设数列 $\{r_n\}$ 是 $[0,1]$ 区间内所有有理点的一个排列，则

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n},\quad x\in[0,1]$$

在 $[0,1]$ 上连续，在每个无理点处可微，在有理点处不可微.

证明. 由强级数判别，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，且每一项 $\frac{|x-r_n|}{3^n}$ 在 $x\in[0,1]$ 上连续，从而 f 在 $[0,1]$ 上连续.

(i) 设 $x_0\in(0,1)$ 为无理数，对于 $x\neq x_0$，考虑

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}$ 在 $x\in[0,1]\setminus\{x_0\}$ 上一致收敛，且对每一项，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}$$

都存在 (即在 x_0 处可微), 这样就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}\end{aligned}$$

即 f 在 x_0 处可微.

(ii) 若 $x_0 = r_k$，则

$$f(x) = \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n} + \frac{|x - r_k|}{3^k}$$

同前面 (i) 讨论，$f(x) = \sum\limits_{n \neq k}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n}$ 在 x_0 处可导，但是 $\frac{|x - r_k|}{3^k}$ 在 x_0 处不可导，从而 f 在 x_0 处也不可导.

□

例 14.27. 设多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 P，则 P 也是多项式.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N, 对任意 $m > N$ 有

$$|P_N(x) - P_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in R$$

从而 $|P_N(x) - P_m(x)|$ 只能是常数，可设为 $P_m(x) = P_N(x) + c_m$，且 $|c_m| < \varepsilon$，从而 $\{c_m\}$ 存在收敛子列 $\{c_{m_k}\}$，则

$$P(x) = \lim_{k \to +\infty} P_{m_k}(x) = P_N(x) + \lim_{k \to +\infty} c_{m_k}$$

这样即得. □

例 14.28. 设 $\{f_n\}$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数列，且对每个 $x \in [a, b]$，$\{f_n(x)\}$ 单调增加收敛于 $f(x)$，则 f 在 $[a, b]$ 上有最小值.

证明. 设 $f_1(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值为 M，则 $f(x) \geq f_1(x) \geq M$，故可设 $s = \inf\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$. 记 $\{x_n\} \subset [a, b]$，满足

$$\{x_n\} \to x_0, \quad \{f(x_n)\} \to s, \quad n \to \infty.$$

断言 $f(x_0) = s$，否则有 $f(x_0) > s$，则存在 $\varepsilon > 0$，使得当 n 充分大时，恒有

$$f_m(x_n) \leq f(x_n) < s + \varepsilon < f(x_0) - \varepsilon, \quad \forall m \in N^+$$

让 $n \to \infty$，再让 $m \to +\infty$, 即有 $f(x_0) \leq f(x_0) - \varepsilon < f(x_0)$，矛盾. □

例 14.29 (可微性). 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的连续可微函数列，且存在 $\{x_n\} \subset [a, b]$，使得 $f(x_n) = x_n$，若 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛，则

1. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 有子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.
2. 设 $\{f_{n_k}(x)\}$ 的收敛函数为 $f(x)$，则存在 $x_0 \in [a, b]$，使得 $f(x_0) = x_0$.
3. f 在 $[a, b]$ 上连续可微，且在 $[a, b]$ 上 $f'(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x)$.

证明. 由于 $\{x_n\}$ 有界，故一开始不妨设为 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. 记 $f_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$，则 $g \in C[a,b]$, 于是可设 $|g(x)| \le M$. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N, 使得当 $n > N$ 时，成立

$$|x_n - x_0| < \varepsilon, \quad |f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

这样就有

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t - x_0\right| &= \left|\int_{x_n}^{x} (f_n'(t) - g(t))\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x_n} g(t)\mathrm{d}t + x_n - x_0\right| \\ &\le \int_a^b |f_n'(t) - g(t)|\mathrm{d}t + |x_0 - x_n| + \left|\int_{x_0}^{x_n} g(t)\mathrm{d}t\right| \\ &< (b-a)\varepsilon + (M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

从而 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t + x_0$. □

例 14.30. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 S_n, 令 $\sigma_n = \dfrac{S_0 + \cdots + S_{n-1}}{n}$，且有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$，则

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛.
2. 在 $(-1,1)$ 上成立
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_{n+1} x^n.$$
3. 成立
$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S.$$

证明. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$, 进一步 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$. 从而

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

即收敛半径大于等于 1. 当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_{n+1} x^n.\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 成立 $|\sigma_n - S| < \varepsilon$. 对于上述固定 N, 存在 $\delta > 0$,

当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时，

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{N} (n+1)|(\sigma_n - S)| < \varepsilon$$

这样就有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - S\right| &\xlongequal{\text{拟合}} \left|(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sigma_{n+1} - S) x^n\right| \\ &\le (1-x)^2 \sum_{n=0}^{N} + (1-x)^2 \sum_{n>N}^{\infty} (n+1)|\sigma_{n+1} - S| x^n \\ &< \varepsilon + \varepsilon (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S.$ □

例 14.31. 对任意 n 和 x 成立

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le 2\sqrt{\pi}.$$

证明. 利用周期性和奇偶性，只需考虑 $x \in (0, \pi)$ 情形. 当 $n \le \dfrac{\sqrt{\pi}}{x}$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \le nx \le \sqrt{\pi}.$$

当 $n > \dfrac{\sqrt{\pi}}{x}$ 时，令 $m = \left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{x}\right]$，则

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2} \cdot \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} &= -\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\cos(k+1/2)x - \cos(k-1/2)x}{k} \\ &= \frac{\cos(m+1/2)x}{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n-1} \cos(k+1/2)x \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{\cos(n+1/2)x}{n}\end{aligned}$$

于是由 Jordan 不等式

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \frac{2}{(m+1)\cdot 2\sin(x/2)} \le \frac{2}{\sqrt{\pi}/x \cdot 2 \cdot (2/\pi)\cdot(x/2)} = \sqrt{\pi}$$

这样就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{[\sqrt{\pi}/x]}\frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=[\sqrt{\pi}/x]+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \le 2\sqrt{\pi}.$$

□

由 Dirichlet 判别，可以令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in[0,2\pi].$$

下面我们来求 $S(x)$. 当 $x\in(0,2\pi)$ 时，记 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}$，则

$$S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}$$

结合 $S_n(\pi)=0$，就有

$$S_n(x)=\int_{\pi}^{x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}(x-\pi)$$

由 Riemann 定理，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=-\frac{1}{2}(x-\pi)$$

当 $x=0,2\pi$ 时，显然 $S(x)=0$. 特别有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(2x)}{n}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\quad x\in(0,\pi).$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}=\frac{\pi}{4},\quad x\in(0,\pi).$$

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 中的每个函数在区间 $[a,+\infty)$ 上广义可积，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，使得当 $A>A_0$ 时，一致成立 $\left|\int_A^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$，则称广义积分 $\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$ 关于 n 一致收敛.

例 14.32 (广义积分换序). 设在区间 $[a,+\infty)$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 内闭一致收敛于 φ. 又设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分关于 n 一致收敛，且极限函数 φ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $A_0 > a$，使得当 $A_2 > A_1 > A_0$ 时，成立

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f_n(x)\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_{A_1}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_2}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < 2\varepsilon, \quad \forall n \in N^+.$$

由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[A_1, A_2]$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$，让 $n \to \infty$，即得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} \varphi(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{A_1}^{A_2} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| \le \varepsilon.$$

即 φ 在 $[a, +\infty)$ 上广义可积. 此时有估计

$$\left|\int_a^{+\infty} |f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^A |f_(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_A^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_A^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x\right| \tag{53}$$

这里的估计思路是先估计(53)右边的后两项，以此固定 A，再对第一项估计，确定 N，最终得到 $n > N$ 时，成立 (53) $< 3\varepsilon$. □

来看一个广义积分换序的应用，由均值不等式

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \le \left(\frac{1 + n(1 + x^2/n)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1}$$

即 $\left\{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right\}$ 单调递减收敛于 e^{-x^2}，这样就有 (Dini 定理)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \xlongequal{x=\sqrt{n}\tan t} \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2} t\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

例 14.33. 求出

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

证明. 对固定 $x \in (0, 1)$，令

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\alpha^n, \quad \alpha \in (-1, 1].$$

当 $\alpha \in (-1, 1)$ 时，

$$f'(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\cos nx = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}e^{inx}$$

$$= \mathrm{Re}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{1-\alpha e^{\mathrm{i}x}} = \frac{\cos x - \alpha}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}$$

结合 $f(0)=0$，就有 $f(\alpha) = -\dfrac{1}{2}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)$. 由于 f 在 $\alpha=1$ 处连续，故此结果对于 $\alpha=1$ 也成立，从而

$$S(x) = f(1) = -\frac{1}{2}\ln 2(1-\cos x) = -\ln 2 - \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|.$$

□

§15 Fourier 级数

记

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$$
$$d^2(f, T_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x$$

例 15.1 (Fourier 系数的最优性)**.** 设 f 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的可积和平方可积的函数，$S_n(x)$ 是 f 的 Fourier 级数的部分和，则

$$d^2(f,S_n) \le d^2(f,T_n).$$

等号成立当且仅当 $A_k = a_k, B_k = b_k$.

证明. 计算有

$$\begin{aligned}
2\pi d^2(f,T_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \pi a_0A_0 - 2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k + b_kB_k) + \frac{\pi A_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) + \pi\left\{\frac{(A_0-a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[(A_k-a_k)^2 + (B_k-b_k)^2]\right\} \\
&\ge \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) = 2\pi d(f,S_n)
\end{aligned}$$

□

作为计算间接结果，得到 Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

例 15.2. 设 g 是周期为 1 的连续函数，且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 0$，函数 $f \in C^1[0,1]$，令

$$a_n = \int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

证明. 令 $G_n(x) = \int_0^{nx} g(t)\mathrm{d}t$，则 $G_n'(x) = ng(nx)$，且 $G_n(0) = G_n(1) = 0$. 注意

$$|G_n(x)| = \left|\int_0^{nx} g(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{[nx]}^{nx} g(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{nx-[nx]} g(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t \xlongequal{\text{def}} M$$

这样就有

$$|a_n| = \frac{1}{n}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(G_n(x))\right| = \frac{1}{n}\left|\int_0^1 f'(x)G_n(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{n}\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. □

有关 Fourier 系数的渐进性，首先关注

1. 设 f 以 2π 为周期，在有意义的情形下，$a_n' = nb_n, b_n' = -na_n$, 其中 a_n', b_n' 是 f' 的 Fourier 系数.

2. 作为第一条的直接推论，设 f 以 2π 为周期，且 $f^{(k)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

3. 设 f 是以 2π 为周期的函数且存在 $\alpha \in (0,1]$，使得 f 满足

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha$$

   则有

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \qquad \text{([问题，15.3])}$$

4. 设 f 是以 2π 为周期的可积函数，且在 $[0,2\pi]$ 上单调增，则 $b_n \ge 0$.（[问题，15.4]）

例 15.3. 设 f 是以 2π 为周期的函数且存在 $\alpha \in (0,1]$，使得 f 满足

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha$$

则有

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

证明. 注意

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \xlongequal{x=t+\frac{\pi}{n}} -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos nt\mathrm{d}t$$

这样取平均就有

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos nx\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\mathrm{d}x \le L\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha$$

□

例 15.4 (平移变换)**.** 设 f 是以 2π 为周期的可积函数，且在 $[0,2\pi]$ 上单调增，则 $b_n \le 0$.

证明. 注意 $\sin nx$ 在 $\left(\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$ 上非负，则

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi/n}^{(2k+2)\pi/n} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{x=t+\frac{\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\sin nx\mathrm{d}x \le 0\end{aligned}$$

这样即得. □

§16 多元函数微分学

例 16.1. 设 f 在 x_0 的某领域内连续，则

$$\lim_{h\to 0^+, k\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$$

存在的充要条件是 f 在 x_0 处可导.

证明. 必要性. 若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < k, h < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k} - A\right| < \varepsilon.$$

让 $k \to 0^+$，由连续性即得

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - A\right| \le \varepsilon$$

即有 $f'_+(x_0) = A$，同理得 $f'_-(x_0) = A$.

充分性. 不妨设 $f'(x_0) = A$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$, 使得当 k, h 落在 $(0, \delta)$ 时成立,

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - A\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k} - A\right| < \varepsilon$$

这样就有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x+h)-f(x_0-k)}{h+k} - A\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - A\right| \cdot \frac{h}{h+k} + \left|\frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k} - A\right| \cdot \frac{k}{h+k} < \varepsilon
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{h\to 0^+, k\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k} = f'(x_0).$$

□

例 16.2 (累次极限换序)**.** 设 f 在 (x_0, y_0) 的一个去心领域内有定义，若

(i) 对 x_0 临近的 $x \neq x_0$，有 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = g(x)$ 存在.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = h(y)$ 关于 y 在 $0 < |y - y_0| < \delta$ 上一致.

则

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 x_1, x_2 落在 $U^o(x_0;\delta_1)$ 时, 对任意 $0 < |y - y_0| < \delta$, 有

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon,$$

让 $y \to y_0$，即有 $|g(x_1) - g(x_2)| \leq \varepsilon$，由 Cauchy 准则，可以设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$. 取定 $\tilde{x} \in U^o(x_0;\delta_1)$, 存在 $0 < \eta < \delta$，使得当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时，有

$$|g(\tilde{x}) - f(\tilde{x}, y)| < \varepsilon.$$

这样就有

$$|h(y) - A| \leq |h(y) - f(\tilde{x},y)| + |f(\tilde{x},y) - g(\tilde{x})| + |g(\tilde{x}) - A| < 3\varepsilon.$$

□

f 对 x,y 分别连续，一般不能推出 $f(x,y)$ 的连续性，但是在某些特定条件下，结论是成立的.

1. f 在 D 上关于 x,y 连续，且对 x 的连续关于 y 一致，则 f 在 D 上连续.
2. f 在 D 上关于 x,y 连续，且关于 y 单调.

例 16.3. 设 $f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续，关于 y 单调增加，如果有

$$\lim_{y\to d^-} f(x,y) = f(x,d), \quad \forall x \in [a,b] \tag{54}$$

则(54)的收敛性关于 x 是一致的.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0, x \in [a,b]$，存在 y_x，使得 $|f(x,y_x) - f(x,d)| < \varepsilon$. 由连续的保号性，存在 δ_x，使得当 $z \in U(x;\delta_x)$ 时，$|f(z,y_x) - f(z,d)| < \varepsilon$. 注意 $\{U(x;\delta_x) \mid x \in [a,b]\}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，由有限覆盖，存在 $x_1, \cdots, x_k \in [a,b]$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{k} U(x_i;\delta_{x_i}) \supset [a,b]$$

现在令 $\eta = \min\{d - y_{x_i}\}$, 则当 $0 < |y-d| < \eta$ 时, 对任意 $x \in [a,b]$, 不妨设 $x \in U(x_j;\delta_{x_j})$, 这样就有

$$|f(x,y) - f(x,d)| \le |f(x,y_{x_j}) - f(x,d)| < \varepsilon.$$

□

例 16.4. 设 f 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，则

$$\varphi(x) = \max_{a\le\xi\le x}\left\{\max_{a\le y\le\xi}\{f(\xi,y)\}\right\},$$

在 $[a,b]$ 上连续.

证明. 令 $y = a + k(\xi - a)$，则

$$\psi(\xi) = \max_{0\le k\le 1}\{f(\xi, a+k(\xi-a))\} = \max_{a\le y\le\xi}\{f(\xi,y)\}.$$

下面说明 $\psi(\xi)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由于 $f(\xi,a+k(\xi-a))$ 在 $(\xi,k)\in[a,b]\times[0,1]$ 上连续，从而一致连续. 则对任意 $\xi_0 \in [a,b], \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|\xi - \xi_0| < \delta$ 时，有

$$f(\xi_0, a+k(\xi_0-a)) - \varepsilon < f(\xi, a+k(\xi-a)) < f(\xi_0, a+k(\xi_0-a)) + \varepsilon \tag{55}$$

(55)关于 k 在 $[0,1]$ 上取最值，就有 $|\psi(\xi)-\psi(\xi_0)|\le\varepsilon$，即 ψ 在 ξ_0 处连续，由 [问题，5.31] 即得. □

例 16.5. 设 $p_1,\cdots,p_s$ 是 R^n 中互异的几个点，则存在唯一最小半径的球盘，能够覆盖这 k 个点.

证明. 记原点为 o，取 $R>>\max\limits_{k=1,\cdots,s}\{d(o,p_k)\}$，则对任意 $x\in(B(o;R))^c$，有

$$d(x,p_k)\ge d(x,o)-d(o,p_k)>R-d(o,p_k)>>0$$

于是只需考虑

$$\varphi(x)=\max_{k=1,\cdots,s}\{d(x,p_s)\}$$

在 $B(o;R)$ 上的最小值即可. 注意 $d(x,p_k)$ 是 $B(o;R)$ 上的 (一致) 连续函数，则 $\varphi(x)$ 在 $B(o;R)$ 上也连续，故可以取到最小值. □

例 16.6 (混合偏导相等)**.** 设 f_x,f_y 在点 (x_0,y_0) 的某领域内存在，且 f_{xy} 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f_{yx}(x_0,y_0)$ 存在，且

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

证明. 令

$$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$$

则

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta x)+f(x_0,y_0)&=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)\\&=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y\end{aligned}\tag{56}$$

(56)两边同时除以 Δy，并让 $\Delta y\to0$ 就有

$$f_y(x_0+\Delta x,y_0)-f_y(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\tag{57}$$

(57)两边同时除以 Δx，并让 $\Delta x\to0$ 即得 $f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$. □

例 16.7. 设 f 在 R^2 上有连续的偏导数，且 $f(x,x^2)\equiv1$. 若 $f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$. 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$.

例 16.8 (中国人大)**.** 设 $f(x,y)$ 满足 $f_y=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 绕 $y=-1$ 旋转所形成的旋转体的体积.

证明. 首先有 $f(x,y)=(y+1)^2-(2-x)\ln x$，则曲线为 $(y+1)^2=(2-x)\ln x, x\in[1,2]$. 于是旋转体积为

$$V=\pi\int_1^2 (y+1)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\mathrm{d}x=\frac{\pi(8\ln 2-5)}{4}.$$

□

例 16.9. 设二元连续可微函数 F 在直角坐标系下可以写为 $F(x,y)=f(x)g(y)$，在极坐标下可以写为 $F=F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(r)$，且 F 没有零点，求 $F(x,y)$.

例 16.10 (齐次函数)**.** f 有连续偏导数，则 f 是 n 次齐次函数 $\Longleftrightarrow xf_x+yf_y=nf(x,y)$.

证明. 这里只考虑充分性. 让 $G(t)=\dfrac{f(tx,ty)}{t^n}$，求导有 $G'(t)\equiv 0$，即 $G(t)\equiv G(1)=f(x,y)$. □

例 16.11. 在 $(u_x)^2+(u_y)^2=u$ 中用极坐标变换替换方程.

例 16.12. 通过代换 $xx=uv, y=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)$，变换方程 $(z_x)^2+(z_y)^2=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

例 16.13. 通过代换 $x=t, y=\dfrac{t}{1+tu}, z=\dfrac{t}{1+tv}$，试把方程 $x^2z_x+y^2z_y=z^2$ 变为以 v 为因变量，t,u 为自变量的形式.

关于偏导数在几何上的应用，记住曲面方程可以求法向量，曲线方程求切向量.

1. $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线在 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 的切向量 τ 为

$$\tau=(1,y_x,z_x)|_{P_0}=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\Bigg|_{P_0}.$$

2. 曲面 $z=z(x,y)$ 在 (x,y,z) 处法向量为

$$(0,1,z_y)\times(1,0,z_x)=(z_x,z_y,-1).$$

3. 由参数方程 $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$ 在 (x,y,z) 处的法向量为

$$(x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

4. 曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 (x,y,z) 处法向量为

$$(-z_x,-z_y,1)=(F_x,F_y,F_z)=\nabla F$$

例 16.14. 求 $u=x+y+z$ 在沿 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点的外法向的方向导数，并说明在球面的何点处，方向导数取最大值和零.

证明. 方向导数为 (x,y,z)，故

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\nabla\cdot(x,y,z)=|\nabla|\cdot\cos\theta=\sqrt{3}\cos\theta.$$

其中 θ 是 ∇ 与 (x,y,z) 之间的夹角. 当 $x=y=z>0$ 时，方向导数取最大值 $\sqrt{3}$. 当 $x+y+z=0$ 时，方向导数为零. □

例 16.15. 设 $f(x,y)$ 连续可微，且 $xf_x+yf_y=0$，则 $f(x,y)$ 恒为常数.

例 16.16. 设 f 在 (x_0,y_0) 处可微，$l_1,l_2,\cdots,l_n$ 是 n 个单位向量，相邻的两个向量的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial l_i}(x_0,y_0)=0. \tag{58}$$

证明. 不妨设 $l_i=\left(\cos\left(\theta+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right),\sin\left(\theta+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right)\right)$, 利用定义写出(58)具体表达式，并注意

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\frac{\sin(2\pi+\frac{\pi}{n})-\sin(\frac{\pi}{n})}{2\sin(\frac{\pi}{n})}=0$$

同理 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$，这样即得. □

例 16.17. 设 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$，其中 $a>b>c>0$，求在 $(0,0,0)$ 处函数增长最快的方向.

证明. u 在 $(0,0,0)$ 处的梯度为零，故不能用梯度判断增长最快方向. 考虑沿某单位向量 $l=(\alpha,\beta,\gamma)$，则

$$u(t\alpha,t\beta,t\gamma)-u(0,0,0)=\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}+o(1)\right)t^2$$

则当 t 充分小时，u 沿 $(0,0,\pm1)$ 处方向函数增长最快. □

例 16.18 (极值原理)**.** 设 f 在单位圆盘 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上具有连续的一阶偏导数，且满足 $|f(x,y)|\le 1,\forall(x,y)\in D$. 则存在 $(x_0,y_0)\in \mathrm{int}D$，使得 $f_x(x_0,y_0)^2+f_y^2(x_0,y_0)\le 16$.

证明. 令 $g=f-2(x^2+y^2)$，则 g 在 D 的边界上满足 $g(x,y)\ge 1$, 且 $g(0,0)\le 1$，即 g 可在 $\mathrm{int}D$ 中取最小值，记 (x_0,y_0) 为最小值点，则 $g_x(x_0,y_0)=g_y(x_0,y_0)=0$，这样就有

$$f_x(x_0,y_0)^2+f_y^2(x_0,y_0)=16(x_0^2+y_0^2)\le 16.$$

□

对于一元函数 $f \in C(R)$，若 f 仅有唯一的极大值点 x_0，则 x_0 一定是 f 的最大值点: 若存在 $x \in R$，使得 $f(x) > f(x_0)$，不妨设 $x > x_0$，则 f 在 $[x_0, x]$ 上的最小值在内部取得，其是极小值点，矛盾.

但是对于二元函数，唯一的极值点未必是最值点，可以考虑 $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$，则 $f(x,0) = x^3 - 4x^2$，即 f 在 R^2 上没有最大值也没有最小值.

例 16.19. 求 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ 在全平面上的最大值和最小值.

证明. 求出 f 有唯一稳定点 $(1,0)$，且 $f(1,0) = -1$. 另外注意

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq r^2 - 3r \to +\infty, \quad (r \to +\infty)$$

故 f 没有最大值，且当 $r \geq 3$ 时，$f(x,y) > -1$，即 f 的最小值在 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$ 的内部取得，从而一定是极值点，即

$$\min_{(x,y)\in R^2} \{f(x,y)\} = \min_{(x,y)\in D} \{f(x,y)\} = -1.$$

□

总结对于二元函数求最值，通常有以下几种情形.

1. 若 f 定义在有界闭区域内，则找出 f 的所有稳定点，以及不可微点和边界点处的最值，比较大小即得.
2. 若 f 定义在无界区域上，则去掉明显取不到最值的某个无界子区域部分，使之变为有界闭区域上的最值问题.
3. 利用
$$\max\{f\} = \max_x \max_y \{f\} = \max_y \max_x \{f\}.$$
4. 若 f 定义在有界开区域 D 中，有时会先将 f 延拓为闭区域 $\overline{D}$ 上.

例 16.20 (极值原理)**.** 设 $u(x,y)$ 在 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上连续，在 $\mathrm{int}D$ 上满足 $u_{xx} + u_{yy} = u$.

1. 若 $u(x,y)$ 在 $x^2 + y^2 = 1$ 上满足 $u(x,y) \geq 0$，则 $u(x,y)$ 在 $\mathrm{int}D$ 上也满足 $u(x,y) \geq 0$.
2. 若 $u(x,y)$ 在 $x^a + y^2 = 1$ 上满足 $u(x,y) > 0$，则 $u(x,y)$ 在 $\mathrm{int}D$ 上也有 $u(x,y) > 0$.

证明. 设 u 在 D 的边界上满足 $u(x,y)\geq 0$. 若存在 $u(x,y)<0$，则 u 的最小值点在 $\mathrm{int}D$ 中取得，记 $u(x_0,y_0)=\min\limits_{(x,y)\in D}\{u(x,y)\}<0$，则取充分小的 $h>0$，就有

$$u(x_0+h,y_0)+u(x_0,y_0+h)-2u(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(u_{xx}(x_0,y_0)+u_{yy}(x_0,y_0)+o(1))h^2<0$$

这与 $u(x_0,y_0)$ 是最小值矛盾.

若 u 在 D 的边界上大于零，取充分小的 $c>0$，令

$$f(x,y)=u(x,y)-c(e^x+e^y)$$

使得 f 在 D 的边界处满足 $f(x,y)\geq 0$. 注意 f 在 $\mathrm{int}D$ 上也满足 $f_{xx}+f_{yy}=f$，则 f 在 D 上有 $f(x,y)\geq 0$，即 $u(x,y)$ 在 D 上有 $u(x,y)>0$. □

例 16.21 (一元处理多元). 设 f 在 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 可微，且对任意 $\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$, 有 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})<0$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个极大值点.

证明. 对每个固定 $\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ ，令 $g(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))$，则有

$$g'(t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))\leq 0,\quad \forall t\in[0,1]$$

特别地，$g(1)=f(\boldsymbol{x})\leq g(0)=f(\boldsymbol{x}_0)$. □

例 16.22 (多元严格下凸函数). 设 f 是 R^n 上的二阶连续可微的向量值函数，且在每点的 Hesse 矩阵正定，则 f 至多只有一个极值点，若有极值点，则一定是极小值点

证明. 易得 f 至多仅存在极小值点. 若 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 是 f 的两个不同的极小值点，令 $g(t)=f(\boldsymbol{P}_1+t(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1))$，则

$$g''(t)=(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)^T\cdot H_f(\boldsymbol{P}_1+t(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1))\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)>0$$

则 $g(t)$ 是 R 上的严格下凸函数，但是 $t=0,t=1$ 均是 g 的极小值点，矛盾. □

§17 重积分

关于曲面的面积，对于常见的形式，有

1. 若曲面由参数方程 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 确定, 其中 $(u,v)\in D$, 则

$$S=\iint\limits_D\sqrt{EF-G^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中 $E=|(x_u,y_u,z_u)|^2,F=|(x_v,y_v,z_v)|^2,G=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$.

2. 若曲面由 $z = z(x, y)$ 给出，其中 $(x, y) \in D$，则

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3. 若曲面由隐函数 $H(x, y, z) = 0$ 给出，其中 $(x, y) \in D$，则

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \frac{|\nabla H|}{|H_z|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 17.1. 求 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 包含在 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 的那部分曲面的面积.

证明. 可以用一般的参数方程来做，这里我们从隐函数角度考虑：$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - a)^2 - a^2 = 0$，其中曲面在 oxy 的投影为 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \dfrac{3}{4}a^2\right\}$, 则

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_{D} \frac{|\nabla H|}{|H_z|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} \mathrm{d}r = \pi a^2. \end{aligned}$$

□

例 17.2 (中值定理)**.** 设 f 在有界闭区域 D 上连续，则存在无穷多个 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$\iint\limits_{D} f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi, \eta) \cdot S_D.$$

证明. 设 M, m 分别是 f 在 D 上的最大值和最小值，则

$$m \leq s := \frac{1}{S_D} \cdot \iint\limits_{D} f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq M$$

当 $s = m$ 或者 $s = M$ 时，不妨设为后者，则

$$\iint\limits_{D} (M - f(x, y)) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

即 $f(x, y) \equiv M$. 当 $m < s < M$ 时，注意到连接最小值点和最大值点的含于 D 的除端点外互不相交的连续曲线 $(x(t), y(t))$ 有无数条，对每一条这样的连续曲线，由介质性，存在 $(x(t_0), y(t_0))$，使得 $f(x(t_0), y(t_0))) = s$. □

例 17.3. 设曲线 $l: x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$，其中 φ, ψ 连续，且至少其中之一有连续导数，则曲线 l 的面积为零.

证明. 不妨设设 ψ 有连续导数，对任意 $\varepsilon>0$，将 $[\alpha, \beta]$ 作分割 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，使得当 $s, t \in [t_j, t_{j+1}]$ 时，有 $|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon$. 记

$$
\begin{aligned}
a_j &= \min_{t \in [t_{j-1}, t_j]}\{\varphi(t)\}, \quad b_j=\max_{t \in [t_{j-1}, t_j]}\{\varphi(t)\} \\
c_j &= \min_{t \in [t_{j-1}, t_j]}\{\psi(t)\}, \quad d_j=\max_{t \in [t_{j-1}, t_j]}\{\psi(t)\}
\end{aligned}
$$

则 $b_j-a_j \leq \varepsilon$，且 $l \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n}[a_j, b_j] \times [c_j, d_j]$. 不妨设 $|\psi'(t)| \leq M$，则

$$
\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j) \times (d_j-c_j) \leq M\varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1})=M(\beta-\alpha)\varepsilon
$$

□

例 17.4. 计算累次积分

$$
\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x
$$

证明. e^{y^2} 的原函数无法初等表示，所以要考虑弄掉 e^{y^2}, 直接换序是不行的，考虑一个换序一个不换序

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1 e^{y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 ye^{y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{e^{x^2}}{y}\mathrm{d}y-\int_0^1 e^{y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 ye^{y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 ye^{y^2}\mathrm{d}y=\frac{e}{2}.
\end{aligned}
$$

□

例 17.5. 设 D_R 是由 $x=R, y=0, y=\dfrac{2}{R}x-1$ 围成，求

$$
\lim_{R \to +\infty}\iint\limits_{D_R} e^{-x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

证明. 对每个固定的 R, 函数 $e^{-x}\arctan\dfrac{y}{x}$ 在区域 D_R 上连续，则由中值定理，存在 $(\xi, \eta) \in$

D_R，使得

$$\iint\limits_{D_R} e^{-x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{R}{4}e^{\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi}$$

注意 $\frac{R}{2}\leq\xi\leq R, 0\leq\eta\leq 1$，这样就有

$$\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R} e^{-x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

□

例 17.6. 设 D 是 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x$ 所围成的区域，则

$$\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

证明. 令 $xy=u, \frac{y}{x}=v$，则

$$\frac{1}{J(u,v)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{2y}{x}$$

这样就有

$$\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}u\int_1^4 f(u)\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

□

例 17.7. 在有意义的情形下，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

证明. 画出被积区域，自然的会让 $x+y=u, y-x=v$，则 $|J(u,v)|=\frac{1}{2}$，这样就有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}v\int_{-1}^1\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

□

例 17.8 (矿大). 计算

$$\iint\limits_{D} \cos \frac{x-y}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D = \{(x,y) \mid x+y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

证明. 令 $x+y=u, x-y=v$，则 $J=\dfrac{1}{2}$，且 D 变为

$$D_{uv}: 0 \le u \le 1; \quad -u \le v \le u.$$

则

$$\iint\limits_{D} \cos \frac{x-y}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 u\mathrm{d}u \int_{-u}^{u} \cos \frac{v}{u} \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\sin 1.$$

□

例 17.9. 求曲线

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

所围成的面积.

证明. 令 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$，则所围成积分区域的曲线变为 $r^2=\cos 2\theta$，这样就有

$$S = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} abr\mathrm{d}r = ab.$$

□

例 17.10. 求

$$\iint\limits_{D} \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad a,b,c>0.$$

其中 D 是由曲线 $\sqrt{\dfrac{x-c}{a}}+\sqrt{\dfrac{y-c}{b}}=1$ 和 $x=c, y=c$ 所围成.

证明. 令 $x=c+ar\cos^4\theta, y=c+br\sin^4\theta$，计算有 $|J(r,\theta)| = 4abr\cos^3\theta\sin^3\theta$，这样就有

$$\iint\limits_{D} \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 4qbr\cos^3\theta\sin^3\theta\mathrm{d}r = \frac{2ab}{15}.$$

□

例 17.11. 计算

$$I=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Ω 是由 $y^2=2x,x+y=4,x+y=12$ 所围成.

证明. 令 $x+y=u,y=v$，则 $|J(u,v)|=1$, 且被积区域变为

$$\left\{4\le u\le 12;-1-\sqrt{2u+1}\le v\le\ -1+\sqrt{2u+1}\right\}$$

这样就有

$$\begin{aligned}I&=\int_4^{12}\mathrm{d}u\int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}}\mathrm{d}v=\int_4^{12}2u\sqrt{2u+1}\mathrm{d}u\\&\xlongequal{t=\sqrt{2u+1}}\int_3^5(t^2-1)t^2\mathrm{d}t=\frac{8156}{15}.\end{aligned}$$

□

例 17.12 (练习). 求由 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),z=x^2-y^2,z=0$ 所围成的立体体积.

证明. 注意所求等价于

$$I=\iint\limits_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则积分区域变为 $r^2=a^2\cos 2\theta$，由对称性有

$$I=4\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}r^3\cos 2\theta\mathrm{d}r=\frac{a^4}{3}.$$

□

例 17.13. 设 D 是由 $x^2=ay,x^2=by,y^2=px,y^2=qx$ 所围成的区域，其中 $0<a<b,0<p<q$，求

$$\iint\limits_{D}\frac{x^2\sin xy}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明. 令 $u=\dfrac{x^2}{y},v=\dfrac{y^2}{x}$，则

$$\frac{1}{J}=\begin{vmatrix}\dfrac{2x}{y}&-\dfrac{x^2}{y^2}\\-\dfrac{y^2}{x^2}&\dfrac{2y}{x}\end{vmatrix}=3$$

这样就有

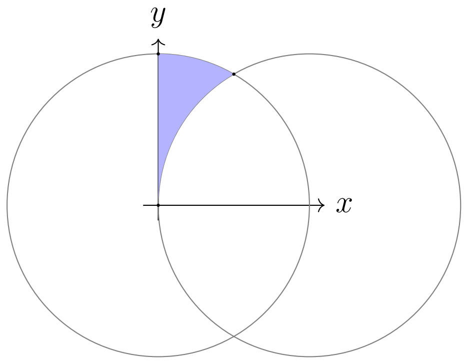
$$\iint\limits_D \frac{x^2\sin xy}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_a^b \mathrm{d}u\int_p^q \sin(uv)u\mathrm{d}v=\frac{\sin bp-\sin ap}{3p}-\frac{\sin bq-\sin aq}{3q}.$$

□

例 17.14. 设 D 是第一象限内由 y 轴及两个圆 $x^2+y^2=a^2, x^2-2ax+y^2=0$ 所围成的区域，求

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明. 如图所示，



令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{2a\cos\theta}^{a} r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{18}a^3+\left(\sqrt{3}+\frac{16}{9}\right)a.$$

□

例 17.15. 求四条直线 $x+y=p, x+y=q, y=ax, y=bx(0<p<q, 0<a<b)$ 所围成的面积.

证明. 令 $x+y=u, \dfrac{y}{x}=v$，则

$$\frac{1}{J}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}=\frac{x+y}{x^2}=\frac{(v+1)^2}{u}$$

这样就有

$$S=\int_p^q \mathrm{d}u\int_a^b \frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}v=\frac{(q^2-p^2)(b-a)}{2(b+1)(a+1)}$$

□

例 17.16. 求曲线 $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$ 与直线 $x=0,y=0$ 所围成区域面积.

证明. 令 $x=ar\cos^8\theta,y=br\sin^8\theta$，则 $J=8abr\sin^7\theta\cos^7\theta$，这样就有

$$S=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 8abr\sin^7\theta\cos^7\theta\mathrm{d}r=\frac{ab}{70}$$

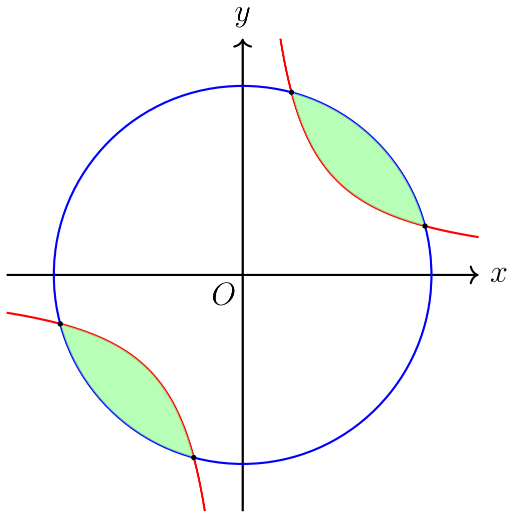
□

例 17.17. 求

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是 $xy=1,x^2+y^2=4$ 所围成.

证明. 如图所示



被积区域 D 关于原点对称，且 $f(x,y)+f(-x,-y)=0$，这样就有

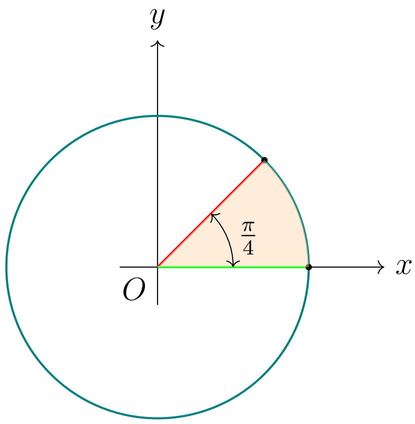
$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

□

例 17.18. 求积分

$$I=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x$$

证明. 被积区域是



令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，这样就有

$$S=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pi.$$

□

例 17.19. 证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(\sqrt{|xy|}+|xy|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{3}{2}$$

证明. 由基本不等式和对称性就有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(\sqrt{|xy|}+|xy|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=4\iint\limits_{x+y\le 1,x,y\ge 0}(\sqrt{xy}+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\le 4\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\iint\limits_{x+y\le 1,x,y\ge 0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

□

例 17.20. 计算

$$\iint\limits_{D}|x-y^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D=[0,1]\times[-1,1]$.

证明. 第一个是要去绝对值，第二个是利用对称性简化计算：注意 D 关于 x 轴对称，且

$f(x,y)=f(x,-y)$，这样就有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}|x-y^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint\limits_{D\cap\{y\geq 0\}}|x-y^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}(x-y^2)\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1(y^2-x)\mathrm{d}y=\frac{11}{15}.\end{aligned}$$

□

例 17.21 (南开 2025)**.** 求

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(e^y+e^{-y})\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明. 由对称性，就有

$$\begin{aligned}I&=2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}e^y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 re^{re^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}r\\ &=2\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{n+1}e^{\mathrm{i}n\theta}}{n!}\right)\mathrm{d}r=2\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}n\theta}}{n!(n+2)}\right)\\ &=2\mathrm{Re}(\pi)=2\pi.\end{aligned}$$

□

这里我们可以直接进行变量替换，令 $y=r\cos\theta,x=r\sin\theta$，则

$$I=2\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

由含参变量章节的 [问题，18.10]

$$\int_0^{2\pi}e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\equiv 2\pi.$$

例 17.22 (苏大)**.** 计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid |x|+|y|+|z|\leq 1\}$

证明. 由对称性，有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=24\iiint\limits_{\Omega\cap\{x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}}x^2\mathrm{d}x=24\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x^2\mathrm{d}z=\frac{2}{5}.$$

三重积分的对称性主要还是看被积区域是否关于某个平面对称，例如关于 oxy 平面对称，若 $f(x,y,z)=f(x,y,-z)$，则积分就是两倍. □

例 17.23. 求积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

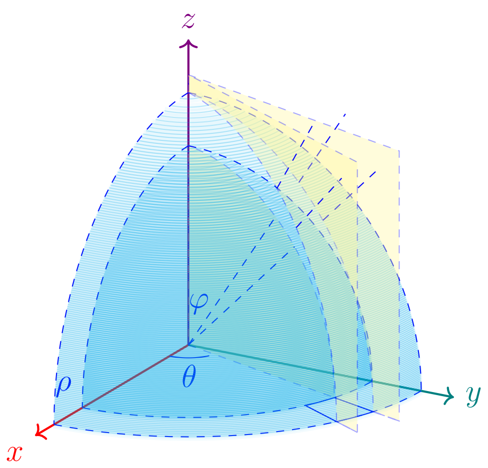
其中 Ω 是两个球 $x^2+y^2+z^2\leq R^2, x^2+y^2+z^2\leq 2Rz$ 的公共部分.

证明. 画出被积区域，有

$$I=\int_0^{R/2}\pi z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\int_{R/2}^{R}\pi z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

□

注意在用球坐标变换时，我们确定区域的顺序一般是 $\theta\longrightarrow\varphi\longrightarrow\rho$.



例 17.24. 求

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由 $x=0, x=1, x^2+1=\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}$ 所围成.

证明. 对于固定 x，所得椭圆区域关于 z 轴对称，这样就有

$$\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

再令 $y=ar\cos\theta, z=br\sin\theta$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+x^2}} abr\mathrm{d}r=\frac{3}{4}\pi ab.$$

□

例 17.25. 设 $H(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$，且 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶正定阵，求

$$I=\iiint\limits_{H(x)\le 1} e^{\sqrt{H(x)}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

证明. 设 P 是正交阵，满足 $P^TAP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$. 令 $x=Py$，则 $J=|\det P|=1$，这样就有

$$\begin{aligned}I&=\iiiint\limits_{H(Py)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2\le 1} e^{\sqrt{H(Py)}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\\ &\xlongequal{\text{广义球}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}r^2e^r\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{\sqrt{\det A}}(e-2).\end{aligned}$$

□

例 17.26. 求

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2\le 4$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 的公共部分，且 $x,y\ge 0$.

证明. 在 [问题，17.23] 中，我们利用截面的方法处理积分区域，这里我们采用" 先一后二". 注意 Ω 在 xoy 平面的投影为 $D:\{x^2+y^2\le 3,x\ge 0,y\ge 0\}$，这样就有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{2-\sqrt{4-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}xyz\mathrm{d}z\\ &=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}r\int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}r^3\sin\theta\cos\theta z\mathrm{d}z\\ &=\int_0^{\sqrt{3}}r^3\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r-\frac{9}{4}\xlongequal{r=2\sin t}32\int_0^{\pi/3}\cos^2t\sin^3t\mathrm{d}t-\frac{9}{4}\\ &\xlongequal{\text{降次}}\int_0^{\pi/3}(-4\sin 3t+\frac{2}{5}\cos 5t-\frac{2}{3}\cos 3t)\mathrm{d}t-\frac{9}{4}=\frac{53}{60}.\end{aligned}$$

□

例 17.27. 计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 由曲面 $(x^2+y^2+z^2)=a^2xy$ 与平面 $z=0$ 所围成，曲面在上方，平面在下方.

证明. 做球坐标变换，则 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$，由对称性

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\cos\theta\sin\theta}} r^3 \cos\theta \sin\theta \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}r = \frac{a^4}{144}$$

□

例 17.28. 设 f 是连续函数，则

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(ku)\mathrm{d}u$$

其中 $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 且 a, b, c 不全为零.

证明. 令 $u = \frac{1}{k}(ax+by+cz)$，做正交变换 $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leq 1} f(ku)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= \int_{-1}^{1} f(ku)\mathrm{d}u \iint\limits_{v^2+w^2\leq 1-u^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}w = \pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(ku)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

□

特别地，

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \cos(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{\sin\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \cos\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right).$$

例 17.29 (苏大)**.** 求球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leq 12$ 在平面 $x+y+z=3$ 上方的球缺体积 V.

证明. 注意

$$V: 3 \leq x+y+z \leq 12; \quad x^2+y^2+z^2 \leq 4(x+y+z).$$

做正交变换 $(u,v,w)' = P(x,y,z)'$，其中 $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$，这样就有

$$V = \int_{\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} \mathrm{d}u \iint\limits_{v^2+w^2\leq 4\sqrt{3}u-u^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 27\sqrt{3}\pi.$$

□

例 17.30 (云南大学)**.** 计算三重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 的上半部分与抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 所围成区域.

证明. 由 $x^2+y^2+\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2\leq 8$ 解得 $x^2+y^2\leq 4$, 于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{8-(x^2+y^2)}} z\mathrm{d}z=\frac{28\pi}{3}.$$

□

例 17.31. 设连续曲线 $z=\varphi(x),x\in[a,b]$ 绕 z 轴旋转所得曲面记为 Σ，求 Σ 的面积.

证明. 设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=\varphi(r)$，则

$$S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b r\sqrt{1+[\varphi'(r)]^2}\mathrm{d}r$$

□

例 17.32. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则

$$\left\{\int_a^b\mathrm{d}x\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2\right\}^{1/2}\leq\int_c^d\mathrm{d}y\left[\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

证明. 令

$$F(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，就有

$$\begin{aligned}\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b\mathrm{d}x\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d F(x)f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b F(x)f(x,y)\mathrm{d}x\leq\int_c^d\mathrm{d}y\left\{\left(\int_a^b f(x,y)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right\}\\&=\int_c^d\mathrm{d}y\left[\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right]^{1/2}\cdot\left(\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\end{aligned}$$

这样即得

$$\left(\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leq\int_c^d\mathrm{d}y\left[\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

□

例 17.33. 设 $f,\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在闭区域

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$$

上连续，且 φ,ψ 在 $[a,b]$ 上连续，以及 $f(x,\varphi(x))\equiv 0$. 则存在常数 $K>0$，使得

$$\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le K\iint\limits_D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明. 首先有

$$\begin{aligned}f^2(x,y)=\left(\int_{\varphi(x)}^{y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\mathrm{d}t\right)^2&\le(y-\varphi(x))\int_{\varphi(x)}^{y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right)^2\mathrm{d}t\\&\le\sup_{x\in[a,b]}\{\psi(x)-\varphi(x)\}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right)^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

记 $d=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{\psi(x)\},c=\inf\limits_{x\in[a,b]}\{\varphi(x)\}$, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\le(d-c)\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right)^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\\&\le(d-c)\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right)^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\\&=(d-c)^2\iint\limits_D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

例 17.34. 计算

$$A=\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明. 为了去绝对值，将区域进行分割，并由对称性就有

$$\begin{aligned}A=&\int_{1/2}^{1}\mathrm{d}x\int_{1/2}^{1}\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y+\int_0^{1/2}\mathrm{d}x\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y\\&+2\int_{1/2}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{1/4x}\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y+2\int_{1/2}^{1}\mathrm{d}x\int_{1/4x}^{1/2}\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y=\frac{3}{32}+\frac{\ln 2}{8}.\end{aligned}$$

□

与一元函数 [问题，11.35] 类似，若 f 在 $D:[0,1]\times[0,1]$ 上连续，且

$$\iint_D f(x,y)xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,\qquad \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $|f(\xi,\eta)|\geq\dfrac{1}{A}$：否则，就有

$$1=\iint_D f(x,y)\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{1}{A}\iint_D\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$$

矛盾.

例 17.35. 设 f 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上四次连续可微，在其边界上取值为零，且

$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right|\leq B,\quad (x,y)\in D$$

则

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\frac{B}{144}.$$

证明. 将该问题与一元积分情形的 [问题，11.40] 做对比. 令 $g(x,y)=xy(1-x)(1-y)$，则 g 在 D 的边界上恒为零，且 $\dfrac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\equiv 4$. 这样就有

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\cdot g\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\\&=\iint_D f\cdot\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

于是

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\frac{B}{4}\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{B}{144}.$$

□

例 17.36. 设 p 在 $[a,b]$ 上非负连续，且 f,g 在 $[a,b]$ 上连续单调增加，则

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b p(x)\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{59}$$

证明. 将(59)两边积分看成二重积分，积分区域是 $[a,b]\times[a,b]$. 由对称性，左边被积函数为

$$p(x)p(y)f(x)g(y) \quad \text{或者} \quad p(x)p(y)f(y)g(x)$$

右边的被积函数为

$$p(x)p(y)f(y)g(y) \quad \text{或者} \quad p(y)p(x)f(x)g(x)$$

(59)右边两个被积函数相加减去(59)左边两个被积函数相加, 即是

$$p(x)p(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \ge 0$$

这样即得. □

例 17.37. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，单调减少且恒取正值，则

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \le \frac{\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证明. 方法见 [问题，17.36]. □

例 17.38. 设

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

若 $A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>R>0$，则

$$\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{A+R} \le I \le \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{A-R}.$$

证明. 只需注意

$$A-R \le \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} \le A+R.$$

□

例 17.39. 设 f, f_x, f_y, f_{xx} 均是 $D:[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数，且在 D 中成立 $f_y = f_{xx}$，

以及 $|f_x|\le 1$. 则对任意 $(x,y_1),(x,y_2)\in D$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le 5|t_1-t_2|^{1/2}.$$

证明. 对任意固定 $x_0,y_1,y_2\in[0,1]$，以及 $x'\in[0,1]$, 存在 ξ 介于 x_0,x' 之间，使得

$$\begin{aligned}(f(\xi,y_2)-f(\xi,y_1))(x'-x_0)&=\int_{x_0}^{x'}(f(x,y_2)-f(x,y_1))\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x'}\mathrm{d}x\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x'}\mathrm{d}x\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}y=\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y\int_{x_0}^{x'}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x\\&=\int_{y_1}^{y_2}(f_x(x',y)-f_x(x_0,y))\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{60}$$

我们总能找到合适的 x'，使得 $|x_0-x'|\le\dfrac{1}{2}|y_1-y_2|^{1/2}$，这样就有

$$|f(\xi,y_1)-f(\xi,y_2)|\le 2|y_1-y_2|^{-1/2}\int_{y_1}^{y_2}(|f_x(x',y)|+|f_x(x_0,y)|)\mathrm{d}y\le 4|y_1-y_2|^{1/2}$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x_0,y_1)-f(x_0,y_2)|&\le|f(x_0,y_1)-f(\xi,y_1)|+|f(\xi,y_1)-f(\xi,y_2)|+|f(\xi,y_2)-f(x_0,y_2)|\\&\le|x_0-\xi|+|x'-\xi|+4|y_1-y_2|^{1/2}\le 2|x_0-x'|+4|y_1-y_2|^{1/2}\\&\le 5|y_1-y_2|^{1/2}.\end{aligned}$$

□

例 17.40. 设 $\Omega\subset R^3$ 是有界闭区域，u 在 Ω 连续取正，则

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{1/p}=\exp\left\{\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}\ln u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right\}$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的体积.

证明. 一方面，由 [问题，11.3]，有

$$\frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\ge\frac{1}{p}\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}\ln u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}\ln u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

另一方面，由 $\ln u\le u-1$，即有

$$\frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\le\frac{1}{\Omega}\iiint\limits_{\Omega}\frac{u^p-1}{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

注意当 $p\to 0$ 时，$\dfrac{u^p-1}{p}\sim \ln u$，这样由迫敛性即证. □

§18 含参量积分

先来计算一个常用结果

求

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x},\quad |a|\le 1$$

当 $a=1$ 时，$I=\tan\dfrac{x}{2}+C$，当 $a=-1$ 时，$I=-\cot\dfrac{x}{2}+C$. 当 $|a|<1$ 时，令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，则

$$I=\int\frac{2\mathrm{d}t}{1+a+(1-a)t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\cdot t=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right).$$

特别地, 在有意义条件下，就有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{A+B\cos x}=2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{A+B\cos x}=\frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2}}$$

例 18.1 (Gauss 积分)**.** 计算

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

证明. 令

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

则

$$F'(y)=\int_0^{+\infty}(-2y)e^{-y^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=-2e^{-y^2}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u,\quad y>0 \tag{61}$$

故

$$\begin{aligned}-2I^2=I\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y&=\lim_{y\to+\infty}F(y)-\lim_{y\to 0^+}F(y)\\&=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\left(\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{62}$$

即 $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. 下面我们来说明(61)，(62)的合理性. 对任意 $[a,b] \subset (0,+\infty)$，有

$$|-2ye^{-y^2(1+x^2)}| \le 2be^{-a^2(1+x^2)} \le 2be^{-a^2x^2}$$

由 M 判别，含参量反常积分 $\int_0^{+\infty} -2ye^{-y^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，即 $F(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，且导函数满足(61). 由于含参量积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-y^2(1+x^2)}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，故有

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{y\to 0^+} \frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

最后我们只需说明

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1+x^2}{s^2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} F(y) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{s\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1+x^2}{s^2}}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x = 0 \tag{63}$$

为此，做延拓函数

$$H(s,x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1+x^2}{s^2}}}{1+x^2} & , \quad s > 0, x \in R. \\ 0 & , \quad s = 0, x \in R. \end{cases}$$

我们先来说明 $H(s,x)$ 是 $[0,+\infty] \times [0,+\infty)$ 上的连续函数：对任意固定 $x \ge 0$, 有 $0 \le H(s,x) \le s^2$，即 $H(s,x)$ 在直线 $\{(s,x) \mid s = 0, x \in R\}$ 上连续，从而是 $[0,+\infty] \times [0,+\infty)$ 上的连续函数. 另外，含参量反常积分 $\int_0^{+\infty} H(s,x)\mathrm{d}x$ 关于 s 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，故

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1+x^2}{s^2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0^+} \int_0^{+\infty} H(s,x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{s\to 0^+} H(s,x) \right) \mathrm{d}x = 0.$$

这样就说明了(63)的合理性. □

例 18.2. 计算

$$\varphi(r) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(rx)\mathrm{d}x$$

证明. 注意 $|-x\sin(rx)e^{-x^2}| \le xe^{-x^2}$，由 M 判别，即有 $\int_0^{+\infty} (-xe^{-x^2}\sin(rx))\mathrm{d}x$ 关于 r 在 R 中一致收敛，即 $\varphi(r)$ 在 R 上可导，且导函数为

$$\varphi'(r) = \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin rx\mathrm{d}x = -\frac{r}{2}\varphi(r)$$

这样就有 $\varphi(r)=ce^{-\frac{r^2}{4}}$. 注意 $\varphi(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，这样就有 $\varphi(r)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{r^2}{4}}$. □

例 18.3. 计算

$$J=\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x,\quad (p>0)$$

证明. 注意

$$J=\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-px}\left(\int_a^b\cos(xy)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

而 $|e^{-px}\cos(xy)|\leq e^{-px}$，由 M 判别，含参量积分 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos(xy)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 这样就有

$$J=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos(xy)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}\mathrm{d}y=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}.$$

□

让 $b=0$，即有

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\arctan\frac{a}{p},\quad p>0.$$

注意, 由 Abel 判别，含参量反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x$ 关于 p 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{p\to0^+}e^{-px}\frac{\sin ax}{x}\right)\mathrm{d}x&=\lim_{p\to0^+}\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{p\to0^+}F(p)=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a.\end{aligned}$$

例 18.4 (再算 Gauss 积分)**.** 令

$$f(t)=\left(\int_0^te^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2,\quad g(t)=\int_0^1\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

则 $f(t)+g(t)\equiv\frac{\pi}{4}$，并由此求出 Gauss 积分.

证明. 计算得

$$f'(t)=2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$g'(t)=\int_0^1 -2te^{-t^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=-2e^{-t^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}(tx)\xlongequal{tx=u}-2e^{-t^2}\int_0^t e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

这样就有 $f(t)+g(t)\equiv f(0)+g(0)=\dfrac{\pi}{4}$. 另注意

$$0<\int_0^1\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\mathrm{d}x\leq\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}x=e^{-t^2}$$

由迫敛性即有

$$\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\lim_{t\to+\infty}f(t)=\frac{\pi}{4}-\lim_{t\to+\infty}g(t)=\frac{\pi}{4}.$$

即得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

例 18.5 (又求 Gauss 积分)**.** 计算

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

证明. 注意

$$\begin{aligned}I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}ye^{-y^2(1+x^2)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}ye^{-y^2(1+x^2)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\tag{64}$$

我们来说明(64)换序的合理性. 注意含参量积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}ye^{-y^2(1+x^2)}\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，且含参量反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}ye^{-y^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，故而由推广的换序定理，(64)成立. □

例 18.6 (福州大学)**.** 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\cos x\mathrm{d}x$$

证明. 令 $\displaystyle I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-2\alpha x}}{x}\cos x$ 在 $\alpha>0$ 时可导，且

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}(2e^{-2\alpha x}-e^{-\alpha x})\cos x\mathrm{d}x=\frac{4\alpha}{1+4\alpha^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

这样就有

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha\left(\frac{4t}{1+4t^2}-\frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t+I(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+4\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

特别地

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\cos x\mathrm{d}x=I(1)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

□

例 18.7. 利用含参量积分工具，计算 Poisson 积分：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1+r^2-2r\cos x)\mathrm{d}x=2\ln r$$

其中 $r>1$.

证明. 令

$$I(a)=\int_0^{2\pi}\ln(a^2+r^2-2ar\cos x)\mathrm{d}x,\quad |a|<r.$$

则

$$I'(a)=\int_0^{2\pi}\frac{2a-2r\cos x}{a^2+r^2-2ar\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{r^2-a^2}{a^2+r^2-2ar\cos x}\right)\mathrm{d}x=0.$$

这样就有

$$\int_0^{2\pi}\ln(1+r^2-2r\cos x)\mathrm{d}x=I(1)=I(0)=4\pi\ln r.$$

□

我们举个例子来加深对 Poisson 积分的印象：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\left(5-4\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{\pi/n}&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{n}\ln\left(5-4\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right]\\&=\exp\left[\int_0^\pi\ln(5-4\cos x)\mathrm{d}x\right]=2^{2\pi}\end{aligned}$$

例 18.8. 计算

$$I(x)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta,\quad x>0.$$

证明. 注意

$$I'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{2x\cos^2\theta}{\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \xlongequal{\tan\theta=t} 2x\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{x\neq 1}\frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{t^2+x^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{1+x}$$

这样由 $I(x)$ 的连续性就有 $I(x)=\pi\ln(1+x)+C$. 让 $x=1$，得 $C=-\pi\ln 2$，即 $I(x)=\pi\ln\dfrac{1+x}{2}$. □

例 18.9. 计算

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x,\quad |\alpha|<1.$$

证明. 注意

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+\cos xy}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos xy}\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\alpha}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\arctan\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\mathrm{d}y$$
$$=\pi\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin\alpha.$$

□

这里用到了

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{sgn}x.\quad x\neq 0.$$

例 18.10. 证明

$$\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

证明. 令

$$f(t)=\int_0^{2\pi}e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

则 $f(0)=2\pi$，且

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}(\cos\theta\cos(t\sin\theta)-\sin\theta\sin(t\sin\theta))\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}\cos(\theta+t\sin\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

这样归纳即得

$$f^{(n)}(t)=\int_0^{2\pi} e^{t\cos\theta}\cos(n\theta+t\sin\theta)\mathrm{d}\theta, \quad n=0,1,\cdots$$

故而有 $f^{(n)}(0)=0$，且 $|f^{(n)}(t)|\le 2\pi e^t$. 对任意固定 $t\in R$，就有

$$|f'(t)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}t^n\right|\le\frac{2\pi e^t\cdot t^n}{n!}, \quad \forall n\in N^+$$

让 $n\to\infty$，即得 $f'(t)\equiv 0$. □

这里我们可以利用下一章节的 Green 公式进行重写：

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_{x^2+y^2=1} e^{tx}(\sin ty\mathrm{d}x+\cos ty\mathrm{d}y) \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(te^{tx}\cos ty-te^{tx}\cos ty)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \end{aligned}$$

其中单位圆盘取逆时针方向.

例 18.11. 求

$$F(\theta)=\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x, \quad |\theta|<1.$$

证明. 首先

$$F'(\theta)=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{1+\theta\cos x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\theta}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)$$

于是

$$F(\theta)=\pi\int_0^{\theta}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})-\pi\ln 2.$$

□

例 18.12. 设 $a, b > 0$，计算

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

证明. 注意

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y \cdot \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\end{aligned}$$

而

$$\int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \xlongequal{x=e^{-t}} \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t} \sin t \mathrm{d}t = \frac{1}{1+(y+1)^2}$$

于是就有

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{1+(y+1)^2} = \arctan(b+1) - \arctan(a+1).$$

$\square$

例 18.13. 设

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{x^2} \mathrm{d}x, \quad \alpha \geq 0$$

计算 $I(1)$

例 18.14. 设

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x, \quad \alpha \geq 0$$

计算 $I(2)$.

证明. $I(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时可导 (M 控制)，且

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(1+\alpha x^2)(1+x^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{\alpha x}{1+\alpha x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{\ln\alpha}{2(\alpha-1)}$$

$I(\alpha)$ 在 $\alpha \geq 0$ 时连续 (控制), 于是

$$\begin{aligned}I(2) = \int_0^2 \frac{\ln x}{2(x-1)} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

这里 $\dfrac{\ln x}{x-1}$ 在 $x=1$ 处应理解为极限值（补充定义即可）. $\square$

例 18.15. 讨论

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}\mathrm{d}x$$

在 $[0,+\infty)$ 中的一致收敛性.

证明. 注意 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ 是收敛的，且对任意固定 $y\geq 0$，$\dfrac{1}{1+x^y}$ 关于 x 单调减，且 $\left|\dfrac{1}{1+x^y}\right|\leq 1$，由 Abel 判别，$I(y)$ 关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. $\square$

例 18.16. 含参量积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明. 我们采用反证法. 若 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $M>1$，使得当 $A_2>A_1>M$，对任意 $\alpha>0$，有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

让 $\alpha\to 0^+$，即有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\sin x\mathrm{d}x\right|\leq\varepsilon$$

由 Cauchy 准则，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛，矛盾. $\square$

例 18.17. 含参量积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\sin xy}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$$

关于 y 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明. 对任意 $A>1$，取定 $A_0\geq\max\{A,a^2\},y=\dfrac{1}{2A_0}$，则有

$$\int_{A_0}^{2A_0}\frac{x\sin yx}{a^2+x^2}\mathrm{d}y\geq\sin\frac{1}{2}\cdot\int_{A_0}^{2A_0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\geq\frac{\sin(1/2)}{2}\int_{A_0}^{2A_0}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln 2\sin(1/2)}{2}.$$

由 Cauchy 准则，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\sin xy}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. $\square$

例 18.18. 设 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\lambda=a$ 和 $\lambda=b(a<b)$ 时收敛，则 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致收敛.

证明. 下面不妨设 $0,+\infty$ 处都是瑕点. 考虑

$$\int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x^b f(x)\cdot\frac{1}{x^{b-\lambda}}\mathrm{d}x$$

且 $\left|\frac{1}{x^b-\lambda}\right|\le 1$, 由 Abel 判别，$\int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\lambda\in[a,b]$ 上一致收敛. 同样考虑

$$\int_0^1 x^\lambda f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^a f(x)\cdot x^{\lambda-a}\mathrm{d}x$$

且 $\left|x^{\lambda-a}\right|\le 1$，于是 $\int_0^1 x^\lambda f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\lambda\in[a,b]$ 上一致收敛. □

例 18.19. 积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明. 对任意正数 A，取 $x=\frac{1}{A}$，则

$$\int_A^{2A} xe^{-xy}\mathrm{d}y=\int_A^{2A}\frac{1}{A}e^{-y/A}\mathrm{d}y=e^{-1}-e^{-2}$$

□

例 18.20. 设

$$f(x)=\int_0^{+\infty} y\sin(y^3-xy)\mathrm{d}y$$

则 $f\in C(\mathbb{R})$.

证明. 这里我们的主要想法是通过分部积分来升阶以此证明一致收敛性. 对任意 $x_0\in\mathbb{R}$，存在 A，使得 $y\ge A$ 时，有 $y^3-|x|y>0,\forall x\in[x_0-1,x_0+1]$. 于是

$$\begin{aligned}\int_A^{+\infty} y\sin(y^3-xy)\mathrm{d}y&=-\int_A^{+\infty}\frac{y}{3y^2-x}\mathrm{d}(\cos(y^3-xy))\\&=\frac{A}{3A^2-x}-\int_A^{+\infty}\frac{3y^2+x}{(3y^2-x)^2}\cos(y^3-xy)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

而

$$\int_A^{+\infty}\left|\frac{3y^2+x}{(3y^2-x)^2}\cos(y^3-xy)\right|\mathrm{d}y\le\int_A^{+\infty}\frac{3y^2+x_0+1}{(3y^2-x_0-1)^2}\mathrm{d}y<+\infty.\quad\forall x\in[x_0-1,x_0+1]$$

于是

$$f(x)=\frac{A}{3A^2-x}+\int_0^A y\sin(y^3-xy)\mathrm{d}y-\int_0^{+\infty}\frac{3y^2+x}{(3y^2-x)^2}\cos(y^3-xy)\mathrm{d}y \tag{65}$$

(65)三项中的每一项都在 $x=x_0$ 处连续，故 f 在 x_0 处连续. □

例 18.21. 求

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}(e^{-\alpha x^2}-1)\mathrm{d}x,\quad \alpha\geq 0.$$

证明. 这里可以选择对 α 求导吸收 $\dfrac{1}{x^2}$，下面我们通过分部积分吸收 $\dfrac{1}{x^2}$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}(e^{-\alpha x^2}-1)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x^2}-1)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-2\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=-\sqrt{\pi\alpha}.$$

□

例 18.22 (截断)**.** 设 $b\neq 0$，令

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(1-e^{-\alpha t})\cos bt\mathrm{d}t$$

则 $I(\alpha)$ 在 $[0,+\infty]$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可导，并求出 $I(\alpha)$.

证明. 为了使得 $\dfrac{1}{t}(1-e^{-\alpha t})$ 在 $t=0$ 时连续，做延拓

$$H(\alpha,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}(1-e^{-\alpha t}) & ,\quad \alpha\geq 0,t>0\\ \alpha & ,\quad \alpha\geq 0,t=0\end{cases}$$

则 $H(\alpha,t)$ 是 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上的连续函数，且 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}H(\alpha,t)\mathrm{d}t$. 注意 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos bt}{t}\mathrm{d}t$ 收敛，$1-e^{-\alpha t}$ 关于 t 单调，以及 $|1-e^{-\alpha t}|\leq 2$，由 Abel 判别，$\int_1^{+\infty}H(\alpha,t)\mathrm{d}t$ 关于 α 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，即 $\int_1^{+\infty}H(\alpha,t)\mathrm{d}t$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续. 注意在有限区间 $\int_0^1 H(\alpha,t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上也连续，于是 $I(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

对任意 $[c,d]\subset(0,+\infty)$，有 $|e^{-\alpha t}\cos bt|\leq e^{-ct}$，由 $\int_0^{+\infty}e^{-ct}\mathrm{d}t$ 收敛就有 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos bt\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上关于 α 内闭一致收敛，故 $I(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，且对每个 $\alpha>0$，有

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos bt\mathrm{d}t=\frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}$$

这样由 $I(\alpha)$ 的连续性，恒有 $I(\alpha)=\dfrac{1}{2}\ln(\alpha^2+b^2)+C$，让 $\alpha=0$，即得 $C=-\dfrac{1}{2}\ln b^2$，于

是 $I(\alpha) = \dfrac{1}{2}\ln(\alpha^2+b^2) - \dfrac{1}{2}\ln b^2$. □

举几个计算

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = -2\int_0^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x\mathrm{d}(2x)}{2x} = \pi.$$

2.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{x} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x + \sin x}{x}\mathrm{d}x = 0.$$

3.

$$\int_0^{+\infty}x^2e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}$$

例 18.23. 计算

$$I(a) = \int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \quad a \geq 0$$

证明. 明显 $I(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续（Abel 判别），且在 $(0,+\infty)$ 上可导（M 控制），并有

$$I'(a) = -\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+a^2}$$

于是 $I(a) = -\arctan a + C$，由连续性，此结果对 $a=0$ 也是正确的，则 $C = I(0) = \dfrac{\pi}{2}$. □

例 18.24. 计算

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x, \quad \alpha \geq 0$$

证明. $I(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续（M 控制），在 $[0,+\infty)$ 上也可导 (M 控制), 且

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)} = \frac{\pi}{2(1+\alpha)}$$

于是

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha).$$

□

例 18.25. 计算

$$I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2yx)\mathrm{d}x.$$

证明. $I(y)$ 在 R 上可导（M 控制），且

$$I'(y)=-2\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\sin(2yx)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sin(2yx)\mathrm{d}(e^{-x^2})=-2yI(y)$$

结合 $I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，就有 $I(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$. □

有关 Euler 积分关注

1.

$$\begin{aligned}\Gamma(s)&=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x=(s-1)\Gamma(s-1)\\&\xlongequal{x=y^2}2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2s-1}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}B(p,q)=B(q,p)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)&=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=\cos^2\theta}2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{x=1/(1+t)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}\mathrm{d}t}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^1\frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\end{aligned}$$

3.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=B(s,1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi}$$

例 18.26. 计算

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln\frac{1}{x}}}$$

证明. 令 $t=\ln\frac{1}{x}$，则

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln\frac{1}{x}}}=\int_0^{+\infty}t^{-1/2}e^{-t/2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\pi}.$$

□

例 18.27. 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

证明. 注意

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\cdot\frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

□

例 18.28. 计算

$$\int_0^{\pi/2}\tan^{\alpha}x\mathrm{d}x,\quad |\alpha|<1$$

证明. 令 $\sin x=t$，则

$$\int_0^{\pi/2}\tan^{\alpha}x\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{\alpha}(1-t^2)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}B\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{\alpha}{2}\pi}$$

□

例 18.29. 计算

$$\int_{-1}^1(1+x)^a(1-x)^b\mathrm{d}x,\quad a,b>0$$

证明. 令 $1+x=t$，则

$$\int_{-1}^1(1+x)^a(1-x)^b\mathrm{d}x=\int_0^2 t^a(2-t)^b\mathrm{d}t=2^{a+b+1}\cdot B\left(a+1,b+1\right).$$

□

例 18.30. 设 $\beta>0,\alpha>1$, 计算

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\beta x^{\alpha}}$$

证明. 令 $y=\beta x^\alpha$，则

$$I=\frac{1}{\alpha\beta^{1/\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{y^{1/\alpha-1}\mathrm{d}y}{1+y}=\frac{1}{\alpha\beta^{1/\alpha-1}}B\left(\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha\beta^{1/\alpha-1}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}$$

□

例 18.31. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，定义

$$I^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-s)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s,\quad \alpha>0$$

则对任意 $\alpha,\beta>0$，有 $I^\alpha(I^\beta f(x))=I^{\alpha+\beta}f(x)$.

证明. 利用积分换序有

$$\begin{aligned}
I^\alpha(I^\beta f(x))&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x(x-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\int_0^s(s-u)^{\beta-1}f(u)\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\int_u^x(x-s)^{\alpha-1}(s-u)^{\beta-1}\mathrm{d}s\\
&\xlongequal{s=u+t(x-u)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}(x-u)^{\alpha-1}t^{\beta-1}(x-u)^\beta\mathrm{d}t\\
&=\frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x(x-u)^{\alpha+\beta-1}f(u)\mathrm{d}u=I^{\alpha+\beta}f(x).
\end{aligned}$$

□

例 18.32. $\ln(\Gamma(x))$ 是下凸函数.

证明. 注意

$$[\ln\Gamma(x)]''=\frac{\Gamma''(x)\Gamma(x)-(\Gamma'(x))^2}{\Gamma^2(x)}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式即得 $[\ln\Gamma(x)]''\geq 0$. □

§19 曲线与曲面积分

例 19.1 (对称)**.** 求

$$\int_L(x^2+z)\mathrm{d}s$$

其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被 $x+y+z=0$ 所截的圆.

证明. 由对称性，有

$$\begin{aligned}
\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s,\\
\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_l z\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

这样就有

$$\int_L (x^2+z)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2+x+y+z)\mathrm{d}s = \frac{\pi a^2}{3}.$$

□

例 19.2. 设 $O=(0,0), A=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，求

$$I=\int_{\widetilde{OA}} (2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

证明. 记 $P=2x^3-y^2\cos x, Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$，则 $Q_x=P_y=6xy^2-2y\cos x$，由 Green 公式就有

$$I=\left(\int_{\widetilde{OB}}+\int_{\widetilde{BA}}\right)(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\int_0^1\left(1-2y\sin\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.$$

其中 $B=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$. □

例 19.3 (苏大)**.** 设 f 有二阶连续偏导数，且 $f(0,0)=2024, f_{xx}+f_{yy}=2xy$，$L_r: x^2+y^2=r^2(r>0)$. 求

$$I(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{L_r} f(x,y)\mathrm{d}s$$

证明. 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}
I(r)&=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r (f_x(t\cos\theta,t\sin\theta)\cos\theta+f_y(t\cos\theta,t\sin\theta)\sin\theta)\mathrm{d}t+f(0,0)\right)\mathrm{d}\theta\\
&=f(0,0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^r\mathrm{d}t\int_0^{2\pi}(f_x(t\cos\theta,t\sin\theta)\cos\theta+f_y(t\cos\theta,t\sin\theta)\sin\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

对每个固定 $t\in[0,r]$，由 Green 公式

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}(f_x(t\cos\theta,t\sin\theta)\cos\theta+f_y(t\cos\theta,t\sin\theta)\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\
&=\int_{x^2+y^2=1} f_x(tx,ty)\mathrm{d}y-f_y(tx,ty)\mathrm{d}x\\
&=\iint_{x^2+y^2\le 1} t(f_{xx}(tx,ty)+f_y(tx,ty))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2t^3\iint_{x^2+y^2\le 1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0
\end{aligned}$$

其中单位圆周取逆时针方向. 这样即得 $I_r = f(0,0) = 2024$. □

给定有向曲线 L 的参数方程 $x = x(t), = y(t), z = z(t), t : \alpha \to \beta$, 利用微元法，力向量值函数 $\vec{F} = (P, R, Q)$ 在 L 上所做功即为

$$\begin{aligned} W = \int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} \mathrm{d}s \xlongequal{\text{投影}} & \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ = & \int_\alpha^\beta (P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) + R \cdot z'(t))\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

梯度曲线 设 f 是区域 $D \subset R^3$ 上的 C^1 函数，并设 ∇f 是在 D 上处处不为零的向量. 若 L 是从某一点 $(x_0, y_0, z_0) \in D$ 出发的可微曲线，它的每一点的切线方向与 f 的梯度方向一致，则称 L 是 f 在 D 上的梯度曲线.

设 L 参数方程是 $x = x(t).y = y(t), z = z(t)$，则可以通过解微分方程组

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = \frac{1}{\nabla f}(f_x, f_y, f_z)$$

来说明梯度曲线的存在性.

例 19.4 ([问题，16.18] 的改进)**.** 设 f 在单位圆盘 $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \le 1\}$ 上具有连续的一阶偏导数，且满足 $|f(x, y)| \le 1, \forall (x, y) \in D$. 则存在 $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}D$，使得 $f_x(x_0, y_0)^2 + f_y^2(x_0, y_0) \le 4$

证明. 取 L 是从原点出发的 (f 在 D) 梯度曲线，且参数方程为 $x = x(t), y = y(t), t \in [0, \alpha]$. 则

$$f(x(\alpha), y(\alpha)) - f(0,0) = \int_0^\alpha (f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t))\mathrm{d}t = \int_L \nabla f \cdot \tau \mathrm{d}s$$

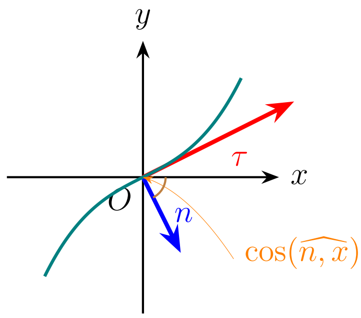
其中 τ 是 L 连续的单位切向量值函数. 由条件存在 $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}D$，使得 $\nabla f \cdot \tau|_{(x_0,y_0)} = |\nabla f|_{(x_0,y_0)}| \le 2$ □

例 19.5. 计算

$$I = \int_C \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}})}{|\boldsymbol{r}|}\mathrm{d}s$$

其中 C 是分段光滑的简单闭曲线，$\boldsymbol{r} = (x, y)$，$\boldsymbol{n}$ 是 C 上的单位外法向量.

证明. 设 τ 是 C 单位切向量值函数，由下图可知



$\boxed{\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}}) = \cos(\widehat{\tau,\boldsymbol{y}}), \cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}}) = -\cos(\widehat{\tau,\boldsymbol{x}})}$，这样就有

$$\int_C \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}})}{|\boldsymbol{r}|}\mathrm{d}s = \int_C \frac{x\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}}) + y\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}})}{|\boldsymbol{r}|^2}\mathrm{d}s = \int_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

记 $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$，则在有意义的条件下有

$$P_y = Q_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $(0,0)$ 在 C 外时，由 Green 公式

$$I = \int_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint\limits_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

其中 D 是 C 所围成的区域.

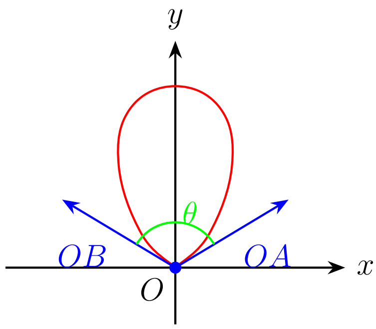
当 $(0,0)$ 在 C 的内部时，取充分小的 $\varepsilon > 0$，使得 $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \varepsilon^2\} \subset D$，令

$$L: x = \varepsilon\cos\theta, \quad y = \varepsilon\sin\theta, \quad \theta: 0 \to 2\pi.$$

则 P, Q 在 $D - D_1$ 上有连续的一阶偏导，且 $D - D_1$ 的边界曲线为 $C - L$，则由 Green 公式就有

$$I = \int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2\pi} \varepsilon^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

当 C 经过 $(0,0)$ 点时，如下图所示，过原点 $(0,0)$，做 C 的两条切线 OA, OB，记 OA, OB 的夹角是 θ.



现在做一个以 $(0,0)$ 为圆心，ε 为半径的圆 B_ε，记 B_ε 在 C 内的部分是 C_ε，则由前面讨论

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}s}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\theta_\varepsilon=\theta$$

其中 θ_ε 是 C_ε 所对圆心角. □

例 19.6. 计算

$$I=\int_C\frac{e^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y]$$

其中 C 是单位圆周，取逆时针方向.

证明. 令

$$P=\frac{e^y}{x^2+y^2}(x\sin x+y\cos x)$$
$$Q=\frac{e^y}{x^2+y^2}(y\sin x-x\cos x)$$

则 $P_y=Q_x$，令 C_ε 为含于 C 的任意半径为 ε 的圆周，并取逆时针方向，由 Green 公式就有

$$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{C_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}-2e^y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{中值定理}}-2\pi e^\xi\cos(\eta),\quad(\eta,\xi)\in D_\varepsilon$$

其中 D_ε 是由 C_ε 所围成的区域，让 $\varepsilon\to0^+$，即得 $I=-2\pi$. □

我们这样搞的目的是因为积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}e^x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi.\tag{66}$$

不是那么好求，我们曾在 [问题，17.21]，以及在 [问题，18.10] 给出过解答，这里的问题也可以看成是积分(66)求法的另一个角度.

例 19.7. 设 a,b,c 是常数，满足 $ac-b^2>0$, 求

$$\oint_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2}$$

其中 C 是围绕 $(0,0)$ 的任意简单封闭曲线，并取逆时针方向.

证明. 细节不再赘述，此时仍有 $Q_x=P_y$，令 $C_1: ax^2+2bxy+cy^2=1$，则由 Green 公式

$$\oint_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2}=\oint_{C_1} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2}=\int_{C_1} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2S_{C_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$$

□

这里我解释下椭圆的面积：椭圆方程可以写为

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

做正交变换化为标准方程 $\dfrac{u^2}{m^2}+\dfrac{v^2}{n^2}=1$，则 $\dfrac{1}{m^2},\dfrac{1}{n^2}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 对应的两个特征值，于是

$$S_{C_1}=\pi mn=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

例 19.8. 设 C 为包围原点的逐段光滑的简单闭曲线，且 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，若 $\det(A)\neq 0$，则

$$I=\oint\limits_C \frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=2\pi\mathrm{sgn}(\det(A))$$

证明. 首先有 $X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=\det(A)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$，利用 Green 公式，易验证积分与路径的选取无关，因此我们可以选取 C：$A^{-1}(X^2+Y^2=1)$ ，则

$$\begin{aligned} I=\det(A)\int_{A^{-1}(X^2+Y^2=1)} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x &= \det(A)\iint\limits_{A^{-1}(X^2+Y^2\leq 1)} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\det(A)\iint\limits_{Y^2+X^2\leq 1}\frac{1}{|\det(A)|}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y=2\pi\mathrm{sgn}(\det(A)). \end{aligned}$$

其中最后一步是做变量替换 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，则 $J=\dfrac{1}{|\det(A)|}$. □

例 19.9. 设 L 是单位圆周，并取逆时针方向，计算

$$\oint\limits_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

证明. 还是老样子，首先验证有 $Q_x = P_y$, 令 $C: x^2+4y^2=\varepsilon^2$ 包含于 L，并取逆时针方向，则由 Green 公式

$$\oint\limits_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_C (x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y = \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\pi\varepsilon^2}{2} = \pi.$$

□

例 19.10. 曲线积分有简单估计

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right| \le ML$$

其中 L 是曲线 C 的弧长，$M = \max\limits_{(x,y)\in C}\left\{\sqrt{P^2+Q^2}\right\}$

证明. Cauchy-Schwarz 不等式即得. □

例 19.11 (1 维 Green 第一恒等式)**.** 设 $u(x,y), v(x,y)$ 在封闭曲线 L 所围区域 D 上有二阶连续偏导数，则

$$\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$$

其中 n 是 L 的单位外法向量方向，$\dfrac{\partial u}{\partial u}$ 是 u 沿 n 方向的方向导数.

证明. 从右边出发，由 Green 公式，就有

$$\begin{aligned}
\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s &= \int_L (vu_x\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}}) + vu_y\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}}))\mathrm{d}s \\
&= \int_L vu_x\mathrm{d}y - vu_y\mathrm{d}x \\
&= \iint\limits_D (v_xu_x + vu_{xx} + vu_{yy} + v_yu_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

□

题目告诉你 $f_{xx}^2+f_{yy}^2$ 的信息时，保持警惕，要先想到 Green 第一恒等式.

例 19.12 (重庆大学)**.** 设 f 光滑闭区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上有二阶连续偏导数，且 $f|_{\partial D}\equiv 0$，则

$$\iint\limits_D (f^2+(\Delta f)^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 2\iint\limits_D \nabla f\cdot\nabla f\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明. 由 Green 第一恒等式就有

$$0=\int\limits_{\partial D} f\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\iint\limits_D (f\Delta f+\nabla f\cdot\nabla f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

结合基本不等式即得. □

例 19.13 (中国海洋大学)**.** 设 $D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$，且 H 是 D 上的调和函数. 若 $H|_{\partial D}\equiv 1$，则 $H\equiv 1,\forall(x,y)\in D$.

证明. 由 Green 第一恒等式就有

$$\iint\limits_D (H_x^2+H_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint\limits_D \Delta H\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

则 $H_x=H_y=0$，即 $H\equiv H|_{\partial D}=1$. □

例 19.14 (南开)**.** 设 f 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ 上存在二阶连续偏导数，且 $f_{xx}^2+f_{yy}^2=1$，则

$$\iint\limits_D (xf_x+yf_y)=\frac{\pi}{4}.$$

证明. 令 $g=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，则由 Green 第一恒等式就有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (xf_x+yf_y)&=\iint\limits_D \nabla g\cdot\nabla f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{\partial D} g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s-\iint\limits_D g\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s-\iint\limits_D g\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

□

利用第一 Green 恒等式，立马就可得到第二 Green 恒等式：

$$\iint\limits_D \begin{vmatrix} u & v\\ \Delta u & \Delta v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L \begin{vmatrix} u & v\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\end{vmatrix}\mathrm{d}s$$

例 19.15. 设 f 在 $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$ 上一阶连续可微，在 ∂G 上 $f\equiv 0$，则

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \frac{\pi}{3}a^3\max_G\left\{(f_x^2+f_y^2)^{1/2}\right\}$$

证明. 由 Green 公式，

$$0=\int_{\partial G} fg\mathrm{d}y=\iint\limits_G (fg_x+gf_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{67}$$

$$0=\int_{\partial G} fg\mathrm{d}x=-\iint\limits_G (fg_y+f_yg)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{68}$$

在 (67) 中取 $g=x$，在(68)中取 $g=y$，相加即得

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \frac{1}{2}\iint\limits_G (|f_xx|+|f_yy|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \max_G\left\{(f_x^2+f_y^2)^{1/2}\right\}\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =\frac{\pi}{3}a^3\max_G\left\{(f_x^2+f_y^2)^{1/2}\right\}.\end{aligned}$$

□

这里我们也可以利用中值公式：对任意 $(x,y)\in G$，从原点向 (x,y) 做射线，交 ∂G 于点 (x_0,y_0)，记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f_x(P)(x-x_0)+f_y(P)(y-y_0)\\&\le\max_G\left\{(f_x^2+f_y^2)^{1/2}\right\}(a-r)\end{aligned}$$

其中 P 是介于 $(0,0),(x,y)$ 之间的一点, 这样就有

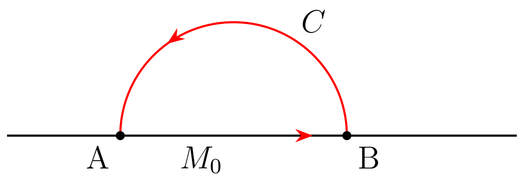
$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \max_G\left\{(f_x^2+f_y^2)^{1/2}\right\}\iint\limits_G (a-r)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{3}a^3\max_G\left\{(f_x^2+f_y^2)^{1/2}\right\}.$$

例 19.16. 设 P,Q 在平面上有连续的偏导数，而且对任意 $(x_0,y_0)\in R^2$ 为心，以任意 $r>0$ 为半径的半圆 $C: x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta(0\le\theta\le\pi)$ 都有

$$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

则 $P\equiv Q_x=0$.

证明. 对任意固定 $M_0=(x_0,y_0)\in R^2$ 和 $r>0$, 记 C 所围区域为 D_r 如下图所示，利用 Green 公式和中值定理，就有



$$\frac{\pi r^2}{2}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_{M\in D_r}=\iint\limits_{D_r}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{C+AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$
$$=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)\mathrm{d}x=2rP(\xi,y_0)$$

其中 ξ 介于 x_0-r 与 x_0+r 之间. 让 $r\to 0^+$，即有 $0=\lim\limits_{r\to 0^+}P(\xi,y_0)=P(x_0,y_0)$. 由 (x_0,y_0) 的任意性，得 $P\equiv 0$, 这样就有, 对任意半圆区域 D, 满足

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

若存在 $Q_x(x_0,y_0)\neq 0$，不妨设 $Q_x(x_0,y_0)>0$，则由连续函数的保号性，存在半圆域 D_1，使得 $(x,y)\in D_1$ 时，$Q_x(x,y)>0$, 即有

$$0=\iint\limits_{D_1}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$$

矛盾. □

例 19.17. 设 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 割下的部分，求

$$I=\iint\limits_{S}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\mathrm{d}S$$

证明. 注意 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$，则

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2ax}[x^2y^2+(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6.$$

□

例 19.18. 求

$$\iint\limits_{S}|xyz|\mathrm{d}S$$

其中 S 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被 $z=1$ 割下的部分.

证明. 直接就有

$$\iint\limits_S |xyz|\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 4\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

□

例 19.19. 求 $F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & z \ge \sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & z < \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

证明. 由条件就有 $F(t)$ 是偶函数，且当 $t>0$ 时

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{t^2}{2}} (x^2+y^2)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6}t^4.$$

□

设双侧曲面 Σ 的参数方程是 $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$，其中 $(u,v)\in D$. 在规定曲面的侧以后，即确定 Σ 连续的单位法向量场 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，给定速率值函数 $\vec{F}=P\vec{\mathbf{i}}+Q\vec{\mathbf{j}}+R\vec{\mathbf{k}}$，利用微元法我们就得到

$$\text{总流量} \xlongequal{\text{第一类曲面积分}} \iint\limits_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \xlongequal{\text{面投影}} \iint\limits_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{EF-G^2}}\iint\limits_D (P,Q,R)\cdot\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\cdot\underbrace{\sqrt{EF-G^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{\text{面积微元}}$$
$$\xlongequal{\text{二重积分}(\spadesuit)} \pm\iint\limits_D (P,Q,R)\cdot\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$\cos\alpha\mathrm{d}S$ 是面积微元 $\mathrm{d}S$ 在 oyz 平面的投影 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

下面我们用公式 ($\spadesuit$) 来完整算一个例子.

例 19.20. 计算

$$I = \iint\limits_\Sigma z\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}\right)\mathrm{d}S, \quad a,b,c>0$$

其中 Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{z^2}=1$ 中 $z\geq 0$ 的部分，α,β,γ 是 Σ 外方向余弦.

证明. 本题当然可以通过补面利用 Gauss 公式来做. 下面我们用求出法向量具体表达来做. 令

$$x=a\cos\theta\sin\varphi,\quad y=b\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\cos\varphi,\quad \theta\in[0,2\pi],\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}&=\begin{vmatrix} b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -c\sin\varphi\end{vmatrix}=-bc\cos\theta\sin^2\varphi.\\
\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}&=-ac\sin\theta\sin^2\varphi.\\
\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}&=-ab\sin\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}$$

这样就有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\left(\frac{bc^2\cos^2\theta\cos\varphi\sin^3\varphi}{a}+\frac{ac^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin^3\varphi}{b}+ab\sin\varphi\cos^3\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{bc^2\pi}{a}+\frac{ac^2\pi}{b}+\frac{ab\pi}{2}.
\end{aligned}$$

□

例 19.21 (上海交大)**.** 设 $\Sigma: x^4+y^4+z^4=1$，V 是 Σ 所围区域的体积，则

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}.$$

证明. Σ 在 (x,y,z) 处的单位法向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}(x^3,y^3,z^3)$，则由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x,y,z)\cdot(x^3,y^3,z^3)}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}.
\end{aligned}$$

□

例 19.22. 求

$$I=\iint\limits_{\Sigma}xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为第一卦限中的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$

证明. 取 Σ 的上侧，则 Σ 在 (x,y,z) 处的单位法向量为 $\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$，则

$$\begin{aligned}I&=a\iint\limits_{\Sigma}\left(y^3z^3\frac{x}{a}+z^3x^3\frac{y}{a}+x^3y^3\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}S\\&=a\iint\limits_{\Sigma}y^3z^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^3x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3a\iint\limits_{\Sigma}x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3a\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2\cap\{x\ge0,y\ge0\}}x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^9}{32}.\end{aligned}$$

□

例 19.23. 求

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx(0<r<R)$ 截下的位于 $z\ge 0$ 的部分，并取外侧.

证明. Σ 在 (x,y,z) 处法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)$，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z,z-x,x-y)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(z-y)\mathrm{d}S$$

注意 Σ 关于平面 oxz 对称，且 y 是奇函数，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2rx}\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi Rr^2.$$

□

例 19.24. 计算

$$I=\iint\limits_{S}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $-1\le z\le 1$ 及 $x\ge 0$ 的部分，取前侧.

证明. S 在 oxy 投影面积为零，且关于 oxy 平面对称，以及 zx 在对称点处取值相反，且两个点处的法向量与 x 轴夹角均是锐角，于是

$$I=\iint\limits_{S}yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{S\cap\{y\ge0\}}yx\mathrm{d}z\mathrm{d}z=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\sqrt{1-x^2}x\mathrm{d}z=\frac{4}{3}.$$

□

关于第二类曲面积分的对称性，以 $\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为例，其对称性主要看两个方面：若 S 关于 ozx 平面对称，且对称点处 $R(x,y,z)=R(x,-y,z)$，以及这两点与 z 轴夹角相同，则

$$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{S\cap\{y\geq 0\}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 19.25. 求

$$I=\iint_S 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是曲线 $z=e^y(0\leq y\leq a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面，取下侧.

证明. 由条件就有 S 参数方程为

$$z=e^r,\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad r\in[0,a],\quad \theta\in[0,2\pi].$$

为了使用 Gauss 公式，对 S 补上面 $S_1: z=e^a,\quad x^2+y^2\leq a^2$，并取上侧，计算有 $P_x+Q_y+R_z=0$，于是

$$I=\left(\iint_{S+S_1}-\iint_{S_1}\right)P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{S_1}(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(e^{2a}-1)\pi a^2.$$

□

例 19.26. 计算

$$I=\iint_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$，取外侧 $(a>0,b>0,c>0)$.

证明. 注意 P,Q,R 在原点处无定义，在任何不包含原点的领域上有 $P_x+Q_y+R_z=0$, 于是为了使用 Gauss 公式，挖掉一个充分小的椭球面 $\Sigma_1: ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2$，并取内侧，于是

$$\begin{aligned}I=\left(\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{ax^2+by^2+cz^2\leq\varepsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}\end{aligned}$$

□

例 19.27 (苏大)**.** 计算

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

其中 $\Sigma = \left\{(x,y,z)\middle|\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} + z - 4 = 0, z \geq 0\right\}$，并取外侧.

证明. 令 $\Sigma_1 := \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 4$，取外侧；$\Sigma_2 : x^2+y^2+z^2 = \varepsilon^2, z \geq 0$，其中 ε^2 充分小，并取外侧. 则在任何不包含原点的区域内有 $P_x + Q_y + R_z = 0$，由 Gauss 公式就有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \left(\iint\limits_{\Sigma-\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_2+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1}\right) P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 0 + 2\pi + 0 = 2\pi.\end{aligned}$$

□

例 19.28 (二维 Green 第一恒等式)**.** 设 Σ 是区域 Ω 的边界曲面，分片光滑，u, v 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微，则

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

证明. 从右侧出发，由 Gauss 公式，就有

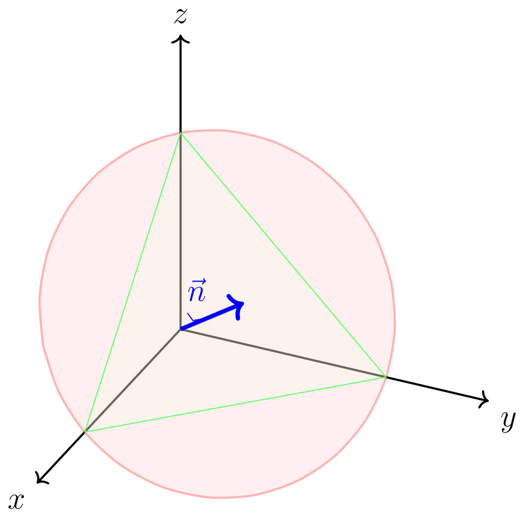
$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S &= \oiint\limits_{\Sigma}\left[v\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\widehat{n,x}) + v\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\widehat{n,y}) + v\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\widehat{n,z})\right]\mathrm{d}S \\ &= \oiint\limits_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + v\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(vu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(vu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(vu_z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

□

例 19.29 (苏大)**.** 设 Σ 是平面 $x+y+z=1$ 在球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ 内的部分，计算

$$I = \iint\limits_{\Sigma}(1 - x^2 - y^2 - z^2)\mathrm{d}S$$

证明. 记平面 $x+y+z=1$ 的从原点出发的法向量为 $\boldsymbol{n}$，现在将坐标轴 xyz 旋转至 uvw，使得 w 轴与 $\boldsymbol{n}$ 重合，



这样就有

$$\iint_{\Sigma}(1-x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}S=\iint_{u^2+v^2\le\frac{2}{3}}(1-\frac{1}{3}-(u^2+v^2))\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2\pi}{9}. \tag{69}$$

□

下面我们通过说明第一类曲面积分在正交变换下的不变性来说明(69)的合理性. 设曲面 Σ 的参数方程是 $x=x(s,t),y=y(s,t),z=z(s,t),(s,t)\in D$, 对 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 做正交变换

$$Y=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=AX$$

则

$$\iint_{\Sigma}f(X)\mathrm{d}S=\iint_{D}f(X(s,t))\sqrt{EF-G^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$\iint_{A(\Sigma)}f(A^TY)\mathrm{d}S=\iint_{D}f(A^TY(s,t))\sqrt{E_1F_1-G_1^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

其中

$$E=X_t\cdot X_t,\quad F=X_s\cdot X_s,\quad G=X_s\cdot X_t$$
$$E=Y_t\cdot Y_t,\quad F_1Y=Y_s\cdot Y_s,\quad G_1=Y_s\cdot Y_t$$

且 $Y_s = AX_s, Y_t = A_t$，即 $E = E_1, F = F_1, G = G_1$，这样就有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(X)\mathrm{d}S = \iint\limits_{A(\Sigma)} f(A^TY)\mathrm{d}S$$

例 19.30 (苏大重写). 计算

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (1 - x^2 - y^2 - z^2)\mathrm{d}S$$

其中 Σ 是平面 $x + y + z = 1$ 在球 $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ 内的部分.

证明. $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{3}$，且 Σ 在 oxy 的投影为

$$D_{xy} = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - (1 - (x + y))^2 \le 1\right\}$$

这个形式太难搞了，我们考虑将其中的二次型化为标准型（可以选择正交变换），注意

$$x^2 + y^2 - (1 - (x + y))^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2(x + y)$$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的两个特征值是 $1, 3$，对应的单位特征向量是 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，于是考虑做正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, 其中 P 是上面两个单位正交向量拼成的正交阵，则 D_{xy} 变为

$$D_{uv} = \left\{(u, v) \mid u^2 + 3\left(v - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \le \frac{2}{3}\right\}$$

于是

$$I = \sqrt{3} \iint\limits_{u^2 + 3(v - \frac{\sqrt{2}}{3})^2 \le \frac{2}{3}} \left[\frac{2}{3} - u^2 - 32\left(v - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{2\pi}{9}.$$

□

例 19.31. 设 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, f$ 是连续函数，则

$$\iint\limits_{S} f(ax + by + cz)\mathrm{d}S = 2\pi \int_{-1}^{1} f(ku)\mathrm{d}u$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$.

证明. 令 $ax+by+cz=ku$，做正交变换 $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, 则 S 变为 $u^2+v^2+w^2=1$，做球变换表示

$$u=\cos\varphi,\quad v=\sin\varphi\cos\theta,\quad w=\sin\varphi\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi],\quad \varphi\in[0,\pi].$$

则 $\boxed{\sqrt{EF^2-G^2}=\sin\varphi}$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\iint\limits_{u^2+v^2+z^2=1} f(ku)\mathrm{d}S&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(k\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=2\pi\int_{-1}^{-1} f(ku)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

□

例 19.32 (球面上的积分). 设 $u(x,y,z)$ 是连续函数，它在 $\boldsymbol{M}=(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续二阶偏导数，记

$$F(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{M})} u(x,y,z)\mathrm{d}S$$

则 $\lim\limits_{R\to0^+}F(R)=u(\boldsymbol{M})$，且

$$\lim_{R\to0^+}\frac{F(R)-u(\boldsymbol{M})}{R^2}=\frac{1}{6}\Delta u(\boldsymbol{M}).$$

证明. 做参数方程

$$x=x_0+R\cos\theta\sin\varphi,\quad y=y_0+R\sin\theta\sin\varphi,\quad z=z_0+R\cos\varphi,\quad \theta\in[0,2\pi],\quad \varphi\in[0,\pi].$$

则 $\boxed{\sqrt{EF-G^2}=R^2\sin\varphi}$，于是

$$F(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{M})} u(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n})\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的单位法向量. 这样就有

$\lim\limits_{R\to 0^+} F(R) = u(\boldsymbol{M})$，且由 Taylor 公式

$$u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n}) - u(\boldsymbol{M}) = R\nabla u(\boldsymbol{M})\cdot \boldsymbol{n}^T + \frac{R^2}{2}\boldsymbol{n}^T\cdot Q(\boldsymbol{M})\cdot \boldsymbol{n} + o(R^2)$$

其中 $Q(\boldsymbol{M})$ 是 u 在 $\boldsymbol{M}$ 处的 Hesse 矩阵. 计算得

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\nabla u(\boldsymbol{U})\cdot \boldsymbol{n}^T\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = 0$$
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\boldsymbol{n}^T\cdot Q(\boldsymbol{M})\cdot \boldsymbol{n}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})$$

于是

$$F(R)-u(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n})-u(\boldsymbol{M}))\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6}\Delta u(\boldsymbol{M})\cdot R^2 + o(R^2).$$

□

例 19.33. 设 Σ 是光滑的闭曲面，围成的区域为 Ω，$\boldsymbol{n}$ 为 Σ 上单位外法向量，(x_0, y_0, z_0) 为 Ω 内固定一点，$(x,y,z)\in\Sigma, \boldsymbol{r} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，则

$$\oint\!\!\!\!\iint_{\Sigma}\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}})\mathrm{d}S = 2\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

证明. 由 Gauss 公式，即有

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\!\iint_{\Sigma}\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}})\mathrm{d}S &= \oint\!\!\!\!\iint_{\Sigma}\frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}})(x-x_0)+\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}})(y-y_0)+\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{z}})(z-z_0)}{|\boldsymbol{r}|}\mathrm{d}S\\
&= \oint\!\!\!\!\iint_{\Sigma}\frac{(x-x_0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-y_0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\boldsymbol{r}|}\\
&= \iiint_{\Omega}\frac{|\boldsymbol{r}|^2-(x-x_0)^2+|\boldsymbol{r}|^2-(y-y_0)^2+|\boldsymbol{r}|^2-(z-z_0)^2}{|\boldsymbol{r}|^3}\\
&= 2\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}.
\end{aligned}$$

□

例 19.34 (Stokes 公式)**.** 设 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向看为逆时针方向，求曲线积分

$$\oint_C y^3\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}y + x^3\mathrm{d}z$$

证明. $x+y+z=0$ 在 (x,y,z) 处单位法向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，则由 Stokes 公式

$$\begin{aligned}\oint\limits_C y^3\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}z&=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}1&1&1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^3&z^3&x^3\end{vmatrix}\mathrm{d}S\\&=-\sqrt{3}\iint\limits_\Sigma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint\limits_{v^2+w^2\leq 4}v^2+w^2\mathrm{d}v\mathrm{d}w=-8\sqrt{3}\pi.\end{aligned}$$

□

例 19.35. 求

$$I=\oint\limits_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

其 C 是边长为 a 的立方体表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ 的交线，取向从 z 轴正向看去是逆时针方向.

证明. 话不多说，直接写

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}1&1&1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2&z^2-x^2&x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_\Sigma 4(x+y+z)\mathrm{d}S=-2\sqrt{3}a\cdot|\Sigma|=-\frac{9}{2}a^3.$$

□

总结

行文至此，意味着我这半年的备考生涯临近结束，时间有限，精力有限，能力有限，还有太多太多的问题没有解决. 但回过头看，不知不觉间已经记录了将近二百页的笔记，其中的每一页都映照着某个夜深人静的夜晚，细细想来，情绪还有些许波动，我觉得值得给自己比个赞.