高等代数复盘专题

$\cong$

整理人： 郭利文

时间： 2025 下半年

目录

1 复盘 1

复盘题 1.1. 注意 $A=(I_n+AB)A(I_n+BA)^{-1}$，这样即有

$$I_n = I_n + AB - AB = (I_n + AB)(I_n - A(I_m + BA)^{-1}B)$$

于是 $(I_n+AB)^{-1}=I_m-A(I_m+BA)^{-1}B$，由此推得一般形如 $A+B$ 的求逆公式.

解: 由题设等式可得

$$A(I_n + BA) = (I_n + AB)A.$$

两边同乘 B，可得

$$A(I_n + BA)B = (I_n + AB)AB.$$

即

$$AB = (I_n + AB)A(I_n + BA)^{-1}B.$$

将上式代入 $I_n = I_n + AB - AB$ 中，可得

$$I_n = I_n + AB - (I_n + AB)A(I_n + BA)^{-1}B.$$

提取左公因式 $(I_n + AB)$，得

$$I_n = (I_n + AB)\left(I_n - A(I_m + BA)^{-1}B\right).$$

同理可证

$$\left(I_n - A(I_m + BA)^{-1}B\right)(I_n + AB) = I_n.$$

故矩阵 $I_n + AB$ 可逆，且其逆矩阵为

$$(I_n + AB)^{-1} = I_n - A(I_m + BA)^{-1}B.$$

■

复盘题 1.2. 第一类初等矩阵（置换矩阵）可以写成第二，三类初等矩阵的乘积，从而任意矩阵都可写成形如 I_n+aE_{ij} 形式的矩阵乘积.

解: 设 P_{ij} 为互换第 i,j 两行的第一类初等矩阵. 设 $T_{ij}(k)$ 为将第 j 行的 k 倍加到第 i 行的第三类初等矩阵，$D_i(k)$ 为将第 i 行乘非零常数 k 的第二类初等矩阵. 则有如下矩阵乘积关系恒成立

$$P_{ij} = T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)D_j(-1).$$

因此，第一类初等矩阵均可由第二、三类初等矩阵组合表出. 由于任意可逆矩阵均可分解为初等矩阵的乘积，而第三类初等矩阵形如 $I_n + aE_{ij}$ $(i \neq j)$. 第二类初等矩阵可表示为 $D_i(k) = I_n + (k-1)E_{ii}$. 对于不可逆矩阵，可通过右乘形如 $I_n - E_{ii}$ 的降秩矩阵得到. 故任意矩阵均可表示为形如 $I_n + aE_{ij}$ 的矩阵乘积. ■

复盘题 1.3. 利用矩阵分解计算形如 $((a_i+b_j)^n)_{n+1\times n+1}$ 等形式的行列式.

解: 记矩阵 $M = ((a_i+b_j)^n)_{n+1\times n+1}$. 由二项式展开定理，矩阵 M 的第 i 行第 j 列元素为

$$(a_i+b_j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_i^{n-k} b_j^k.$$

构造矩阵 $X, Y \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$ 如下: 设 X 的第 i 行第 k 列元素为 $x_{ik} = \binom{n}{k} a_i^{n-k}$. 设 Y 的第 k 行第 j 列元素为 $y_{kj} = b_j^k$. 则有矩阵乘积关系 $M = XY$. 其中 Y 为标准的 Vandermonde 矩阵，其行列式为

$$|Y| = \prod_{0\le s<t\le n} (b_t - b_s).$$

X 的各列提出公因子 $\binom{n}{k}$ 后，转置即为 Vandermonde 矩阵，其行列式为

$$|X| = \left(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right) \prod_{0\le s<t\le n} (a_s - a_t).$$

故

$$|M| = |X||Y| = \left(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right) \prod_{0\le s<t\le n} (a_s - a_t)(b_t - b_s).$$

■

复盘题 1.4. 注意两类特殊分块矩阵行列式的计算:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}$$

解: (1) 对于第一类分块矩阵，作分块初等变换. 将第二列分块加到第一列分块上，得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix}.$$

将第一行分块乘以 -1 加到第二行分块上，得

$$\begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{vmatrix}.$$

由分块上三角矩阵行列式性质，有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

(2) 对于第二类分块矩阵，在复数域内作分块初等变换. 将第二列分块乘以 i 加到第一列分块上，得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & B \\ -B+iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & B \\ i(A-iB) & A \end{vmatrix}.$$

将第一行分块乘以 $-i$ 加到第二行分块上，得

$$\begin{vmatrix} A-iB & B \\ i(A-iB) & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & B \\ O & A+iB \end{vmatrix}.$$

故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |A-iB||A+iB|.$$

■

复盘题 1.5. 设有向量表示

$$(\beta_1,\cdots,\beta_m) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_k)A$$

其中 A 是数域 F 上的矩阵.

(a) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，则向量组 $\{\beta_1.\cdots,\beta_m\}$ 的秩等于 $r(A)=s$. 进一步，若记 $A=(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ 是 A 的列分块，则若 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_s}$ 线性无关，则 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_s}$ 是 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 的极大无关组.

(b) 对一般情形，$\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 的秩不会超过 $r(A)$，且当 A 行满秩时，两个向量组等价.

解: (a) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，则其构成线性空间 $V=\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 的一组基. 此时，向量 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 在该基下的坐标列向量即为矩阵 A 的对应列向量 $\eta_1,\cdots,\eta_m$. 由向量组与其坐标向量组的线性关系同构性可知，向量组 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 的秩完全由其坐标矩阵的列秩决定. 故 $r(\beta_1,\cdots,\beta_m)=r(A)=s$. 同理，极大无关组的选取在同构映射下保持不变，故若 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_s}$ 为极大无关组，对应的 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_s}$ 必为极大无关组. (b) 对一般情形，设 $r(A)=s$. 由矩阵乘法可知，β_j 均可由相应的 s 个 β 向量线性表出，故 $r(\beta_1,\cdots,\beta_m)\le s=r(A)$. 当 A 行满秩时，存在矩阵 B 使得 $AB=I_k$. 两边右乘 B 可得

$$(\beta_1,\cdots,\beta_m)B = (\alpha_1,\cdots,\alpha_k)AB = (\alpha_1,\cdots,\alpha_k).$$

即两向量组可互相线性表出，故二者等价. ■

复盘题 1.6. 注意“迹类”线性函数的刻画：

$$\begin{aligned} f: R^{n\times n} &\longrightarrow R \\ A &\longmapsto f(A) \end{aligned}$$

满足相似矩阵有相同的函数值，则 $f(A) = f(E_{11})\cdot \mathrm{tr}A, \forall A \in R^{n\times n}$.

解：由题意，f 在相似矩阵下有相同的函数值，即对任意可逆阵 P，有

$$f(P^{-1}AP) = f(A).$$

该条件等价于对任意方阵 X, Y，均有 $f(XY) = f(YX)$. 考察矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的标准基 E_{ij} $(1 \le i, j \le n)$. 当 $i \ne j$ 时，利用基矩阵乘法性质有

$$E_{ij} = E_{i1}E_{1j} - E_{1j}E_{i1}.$$

由 f 的线性及交换性质得

$$f(E_{ij}) = f(E_{i1}E_{1j}) - f(E_{1j}E_{i1}) = 0.$$

当 $i = j$ 时，由等式

$$E_{ii} - E_{jj} = E_{ij}E_{ji} - E_{ji}E_{ij},$$

可得

$$f(E_{ii}) - f(E_{jj}) = f(E_{ij}E_{ji}) - f(E_{ji}E_{ij}) = 0.$$

故对所有 $1 \le i \le n$，均有 $f(E_{ii}) = f(E_{11})$. 对任意矩阵 $A = (a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$，利用 f 的线性有

$$f(A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} f(E_{ii}).$$

即

$$f(A) = f(E_{11}) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = f(E_{11})\mathrm{tr}(A).$$

■

复盘题 1.7. 讨论 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，并说明 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ 的充要条件是方程 $AX + YB = C$ 有解.

解: 对该分块矩阵进行分块初等相抵变换，左乘 $\begin{pmatrix} I & -Y \\ O & I \end{pmatrix}$，右乘 $\begin{pmatrix} I & -X \\ O & I \end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix} I & -Y \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -X \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & C-AX-YB \\ O & B \end{pmatrix}.$$

由于所乘的下三角和上三角分块矩阵均可逆，矩阵的秩保持不变，即

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C-AX-YB \\ O & B \end{pmatrix}.$$

充分性:若方程 $AX+YB=C$ 有解 X_0,Y_0,代入上式即得分块对角矩阵,其秩显然为 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$. 必要性：存在可逆阵 P_1,Q_1,P_2,Q_2 使得 A,B 分别化为相抵标准型 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 作相应的分块相抵变换后，若整体秩恰等于 $r+s$，则右上角分块 C 经过变换后，在标准型非零行与非零列对应的位置之外必须全为零. 此结构等价于 C 的列向量包含在 A 的列空间中，同时行向量包含在 B 的行空间中. 故必然存在矩阵 X,Y 使得 $C=AX+YB$ 成立. ■

复盘题 1.8. 若 A 的每一行与每一列元素之和都是零，则 A_{ij} 均相同.

解: 记全 1 列向量为 $e=(1,1,\cdots,1)^T$. 由 A 每行元素之和为 0 得 $Ae=0$；由每列元素之和为 0 得 $e^TA=0$. 由 $Ae=0$ 且 $e\neq 0$ 可知，A 的列向量线性相关，故 $\operatorname{rank}(A)\leq n-1$. 根据伴随矩阵 A^* 的性质，有

$$AA^*=A^*A=|A|I=O.$$

若 $\operatorname{rank}(A)\leq n-2$，则 $A^*=O$，即所有代数余子式 $A_{ij}=0$，结论成立. 若 $\operatorname{rank}(A)=n-1$，则 $\operatorname{rank}(A^*)=1$. 由 $AA^*=O$ 知，A^* 的所有列向量均是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解. 由于 $\operatorname{rank}(A)=n-1$，该方程组基础解系仅含一个向量 e，故 A^* 的所有列向量均与 e 共线. 同理，由 $A^*A=O$ 得 A^* 的所有行向量均是 $x^TA=0$ 的解，故均与 e^T 共线. 由此推断，存在常数 k 使得

$$A^*=kee^T.$$

即 A^* 的所有元素均等于 k，故所有代数余子式 A_{ij} 均相同. ■

复盘题 1.9. 利用线性空间不能写为有限个真子空间的并集，来说明矩阵环 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的半

同态一定是反同态或者同态.

解: 设该半同态映射为 f. 定义如下两个集合:

$$V_1 = \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid f(XY) = f(X)f(Y), \forall Y \in \mathbb{F}^{n\times n}\}.$$

$$V_2 = \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid f(XY) = f(Y)f(X), \forall Y \in \mathbb{F}^{n\times n}\}.$$

对任意 $X_1, X_2 \in V_1, k \in \mathbb{F}$，有

$$f((X_1+X_2)Y) = f(X_1Y + X_2Y) = f(X_1Y) + f(X_2Y).$$

$$f((X_1+X_2)Y) = f(X_1)f(Y) + f(X_2)f(Y) = f(X_1+X_2)f(Y).$$

故 $X_1 + X_2 \in V_1$. 同理 $kX_1 \in V_1$，证明 V_1 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的线性子空间. 同理可证 V_2 亦为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的线性子空间. 由半同态的定义，对任意 $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$，必有 $X \in V_1$ 或 $X \in V_2$. 即整个矩阵空间可表示为

$$\mathbb{F}^{n\times n} = V_1 \cup V_2.$$

由于数域上的线性空间不能表示为有限个真子空间的并集，故必有 $V_1 = \mathbb{F}^{n\times n}$ 或 $V_2 = \mathbb{F}^{n\times n}$. 当 $V_1 = \mathbb{F}^{n\times n}$ 时 f 为同态；当 $V_2 = \mathbb{F}^{n\times n}$ 时 f 为反同态. ■

复盘题 1.10. 若 W 是 $\mathbb{K}^{n\times n}$ 的子空间，满足对任意 $A \in W$，有 $\operatorname{rank}(A) \le 1$，则 $\dim W \le n$，并说明 n 是最优的.

解: 由于 W 中所有非零矩阵的秩均为 1，故任意非零矩阵 $A \in W$ 均可分解为 $A = \alpha\beta^T$，其中 α, β 为非零列向量. 首先证明 W 中所有矩阵必须具有公共的列空间或公共的行空间. 若不然，存在 $A = \alpha_1\beta_1^T$ 与 $B = \alpha_2\beta_2^T$，使得 α_1, α_2 线性无关，且 β_1, β_2 线性无关. 此时 $A + B = \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T$. 考察线性方程组 $(A+B)x = 0$，即

$$(\beta_1^T x)\alpha_1 + (\beta_2^T x)\alpha_2 = 0.$$

由 α_1, α_2 线性无关，必须有 $\beta_1^T x = 0$ 且 $\beta_2^T x = 0$. 因 β_1, β_2 线性无关，该方程组的解空间维数为 $n-2$，故 $\operatorname{rank}(A+B) \ge 2$. 这与 $A + B \in W$ 的秩不超过 1 产生矛盾. 情形一: W 中矩阵具有公共列空间，即 $W \subseteq \{\alpha x^T \mid x \in \mathbb{K}^n\}$，此时映射 $x \mapsto \alpha x^T$ 为同构映射，故 $\dim W \le n$. 情形二: W 中矩阵具有公共行空间，即 $W \subseteq \{y\beta^T \mid y \in \mathbb{K}^n\}$，同理有 $\dim W \le n$. 取 W_0 为所有第 1 行元素任意，其余行全为 0 的矩阵构成的集合. 显然 $\dim W_0 = n$ 且其中任一非零矩阵秩均为 1，满足题意，故维数上界 n 是最优的. ■

2 复盘 2

复盘题 2.1. 设 V, U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，给定 V 到 U 的两个线性映射，关注如下两个线性映射的构造:

(a) 存在 $\xi \in \mathrm{End}(U)$，使得 $\psi = \xi\varphi$ 的充要条件是 $\ker\varphi \subset \ker\psi$，并给出（指出）$\xi$ 唯一的充要条件.

(b) 存在 $\xi \in \mathrm{End}(V)$，使得 $\psi = \varphi\xi$ 的充要条件是 $\mathrm{im}\psi \subset \mathrm{im}\varphi$.

解: (a) 必要性：若存在 ξ 使得 $\psi = \xi\varphi$. 对任意 $\alpha \in \ker\varphi$，有 $\varphi(\alpha) = 0$. 此时

$$\psi(\alpha) = \xi(\varphi(\alpha)) = \xi(0) = 0.$$

即 $\alpha \in \ker\psi$，故 $\ker\varphi \subset \ker\psi$.

充分性：若 $\ker\varphi \subset \ker\psi$. 对任意 $\beta \in \mathrm{im}\varphi$，存在 $\alpha \in V$ 使得 $\varphi(\alpha) = \beta$. 定义映射 $\xi_1 : \mathrm{im}\varphi \to U$ 如下：

$$\xi_1(\beta) = \psi(\alpha).$$

若 $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2) = \beta$，则 $\alpha_1 - \alpha_2 \in \ker\varphi \subset \ker\psi$. 故 $\psi(\alpha_1) = \psi(\alpha_2)$，说明 ξ_1 的定义良定且为线性映射. 将 $\mathrm{im}\varphi$ 扩充为 U 的直和分解：

$$U = \mathrm{im}\varphi \oplus W.$$

定义 $\xi|_W = 0$，即可将 ξ_1 线性延拓为 $\xi \in \mathrm{End}(U)$ 满足 $\psi = \xi\varphi$. 显然，ξ 唯一的充要条件是延拓空间 $W = \{0\}$，即 $\mathrm{im}\varphi = U$（φ 为满射）.

(b) 必要性：若存在 ξ 使得 $\psi = \varphi\xi$. 对任意 $\alpha \in V$，有

$$\psi(\alpha) = \varphi(\xi(\alpha)) \in \mathrm{im}\varphi.$$

故 $\mathrm{im}\psi \subset \mathrm{im}\varphi$.

充分性：设 $e_1, \ldots, e_n$ 为 V 的一组基. 因 $\mathrm{im}\psi \subset \mathrm{im}\varphi$，对每个基向量 e_i，存在 $\gamma_i \in V$ 使得

$$\varphi(\gamma_i) = \psi(e_i).$$

定义线性映射 $\xi : V \to V$，使得对每个基向量均有 $\xi(e_i) = \gamma_i$. 则在基底上有 $\varphi(\xi(e_i)) = \psi(e_i)$，由线性推广至全空间即得 $\varphi\xi = \psi$. ■

复盘题 2.2. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，U 是 V 的真子空间，请构造一族 V 到 U 的投影变换：$\{\varphi_i \mid i \in N\}$ 满足 $\varphi_i \neq \varphi_j (i \neq j)$.

解: 因 U 为 V 的真子空间，故存在非零子空间 W 使得直和分解成立：

$$V = U \oplus W.$$

取 U 的一组基 $u_1,\dots,u_k$（若 $U\neq\{0\}$），以及 W 的一组基 $w_1,\dots,w_m$. 对任意自然数 $i\in\mathbb{N}$，构造一族新的子空间：

$$W_i=\operatorname{span}(w_1+iu_1,w_2,\dots,w_m).$$

易证对任意 i，均有 $V=U\oplus W_i$. 定义 φ_i 为 V 沿 W_i 到 U 的投影变换. 对任意 $\alpha\in U$，有 $\varphi_i(\alpha)=\alpha$. 对基向量 $w_1+iu_1\in W_i$，其投影为零，即

$$\varphi_i(w_1+iu_1)=0.$$

由线性性质可推得：

$$\varphi_i(w_1)=-iu_1.$$

显然，当 $i\neq j$ 时，$\varphi_i(w_1)\neq\varphi_j(w_1)$. 故该族投影变换两两不同，满足要求. ■

复盘题 2.3. 设 $\varphi,\psi\in\operatorname{End}(V)$，满足 $\varphi^2=\psi^2=0$，且 $\varphi\psi-\psi\varphi=\mathrm{id}_V$, 则以下事实成立

(a) $V=\ker\varphi\oplus\ker\psi$.

(b) V 的维数是偶数，且存在 V 的一组基，使得 φ,ψ 在这组基下的矩阵分别为分块对角阵 $\operatorname{diag}(A,\cdots,A),\operatorname{diag}(B,\cdots,B)$，其中 A,B 分别是

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

或者

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

解: (a) 对任意 $\alpha\in V$，由算子等式可作分解：

$$\alpha=\mathrm{id}_V(\alpha)=\varphi\psi(\alpha)-\psi\varphi(\alpha).$$

由于 $\varphi^2=0$，有 $\varphi(\varphi\psi(\alpha))=\varphi^2\psi(\alpha)=0$，故 $\varphi\psi(\alpha)\in\ker\varphi$. 同理 $\psi^2=0$，有 $\psi(-\psi\varphi(\alpha))=-\psi^2\varphi(\alpha)=0$，故 $-\psi\varphi(\alpha)\in\ker\psi$. 这说明 $V=\ker\varphi+\ker\psi$. 若 $\beta\in\ker\varphi\cap\ker\psi$，则

$$\beta=\varphi\psi(\beta)-\psi\varphi(\beta)=0-0=0.$$

故得直和分解 $V=\ker\varphi\oplus\ker\psi$.

(b) 设 $\dim(\ker\varphi)=k,\dim(\ker\psi)=m$. 考虑映射 φ 限制在 $\ker\psi$ 上：

$$\varphi|_{\ker\psi}:\ker\psi\to\ker\varphi.$$

若 $\alpha \in \ker\psi$ 且 $\varphi(\alpha)=0$，则 $\alpha \in \ker\varphi \cap \ker\psi = \{0\}$. 故该限制映射为单射，推得 $m \le k$. 同理映射 $\psi|_{\ker\varphi}$ 亦为单射，推得 $k \le m$. 故 $k=m$，从而 $\dim V = 2k$，即空间维数必为偶数. 取 $\ker\psi$ 的一组基 $\beta_1,\dots,\beta_k$，令 $\alpha_i = \varphi(\beta_i) \in \ker\varphi$. 因 $\varphi|_{\ker\psi}$ 为同构映射，故 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ 构成 $\ker\varphi$ 的一组基. 考察 $\psi(\alpha_i)$ 的取值:

$$\psi(\alpha_i) = \psi\varphi(\beta_i) = \varphi\psi(\beta_i) - \mathrm{id}_V(\beta_i) = 0 - \beta_i = -\beta_i.$$

若选取如下基底顺序:

$$\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\dots,\alpha_k,\beta_k.$$

则可得第一种分块对角阵形式. 若选取如下基底顺序:

$$\beta_1,\dots,\beta_k,\alpha_1,\dots,\alpha_k.$$

则得第二种分块对角阵形式. ■

复盘题 2.4. 请解释行满秩阵有右消去律，列满秩阵有左消去律，并以此证明如下事实：设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的一线性无关向量组，$\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 是 $\mathbb{K}^m$ 上的一组线性无关向量，则向量组

$$\left\{\alpha_i\beta_j' \mid 1\le i\le s; 1\le j\le t\right\}$$

的秩是 st.

解: 若矩阵 A 列满秩，则 A^TA 可逆，故存在左逆 $(A^TA)^{-1}A^T$. 当 $AB=AC$ 时，两边左乘该左逆即得 $B=C$，此即左消去律. 同理，若矩阵 B 行满秩，则 BB^T 可逆，存在右逆，即有右消去律. 记列满秩矩阵 $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\in\mathbb{K}^{n\times s}$. 记行满秩矩阵 $B^T=(\beta_1,\dots,\beta_t)^T\in\mathbb{K}^{t\times m}$. 考察矩阵组 $\alpha_i\beta_j^T$ 的线性组合，设存在标量 c_{ij} 使得

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} c_{ij}\alpha_i\beta_j^T = O.$$

令系数矩阵 $C=(c_{ij})_{s\times t}$，上式可等价写为矩阵乘积形式:

$$ACB^T = O.$$

因 A 列满秩，具左消去律，消去 A 得 $CB^T=O$. 因 B^T 行满秩，具右消去律，消去 B^T 得 $C=O$. 即所有组合系数 $c_{ij}=0$，证明该 st 个矩阵线性无关，故向量组的秩为 st. ■

复盘题 2.5. 设 $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ 满足 A 是幂零阵，且 $[A,B]=0, \operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$，则 $B=O$.

解: 由条件 $[A,B]=0$ 知 A 与 B 乘法可交换，即 $AB=BA$. $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$ 意味着在左乘矩阵 A 时，并未减小矩阵 B 列空间的维数. 由于 $\operatorname{im}(AB)\subset\operatorname{im}(B)$ 恒成立，结合两者秩相等可得:

$$\operatorname{im}(AB)=\operatorname{im}(B).$$

由于 $AB=BA$，可归纳证明对任意正整数 k，均有:

$$\operatorname{im}(A^kB)=\operatorname{im}(B).$$

因 A 为幂零阵，必然存在充分大的整数 k 使得 $A^k=O$. 从而 $A^kB=O$. 代入像空间关系得:

$$\operatorname{im}(B)=\operatorname{im}(A^kB)=\operatorname{im}(O)=\{0\}.$$

这直接推得 $B=O$. ■

复盘题 2.6. 设 n 阶复方阵 A,B，满足 $[A,B]=aA+bB$，其中 a,b 不全为零（二维非平凡 Lie 代数）. 不妨设 $a\neq 0$，则

$$\left[A,\frac{B}{a}\right]=A+\frac{b}{a}B=\left[A+\frac{b}{a}B,\frac{B}{a}\right].$$

由此说明 A,B 可同时上三角化.

解: 令 $C=A+\frac{b}{a}B$ 及 $B'=\frac{B}{a}$. 由题设条件可得

$$CB'-B'C=C.$$

整理可得矩阵等式

$$B'C=CB'-C=C(B'-I_n).$$

由于复数域上矩阵必有特征值，设 λ 为 B' 的一个特征值，α 为其对应的特征向量，即 $B'\alpha=\lambda\alpha$. 考察向量 $C\alpha$，有

$$B'(C\alpha)=C(B'-I_n)\alpha=C(\lambda-1)\alpha=(\lambda-1)(C\alpha).$$

这说明: 若 $C\alpha\neq 0$, 则 $C\alpha$ 是 B' 的对应于特征值 $\lambda-1$ 的特征向量. 同理可推得, 若 $C^k\alpha\neq 0$, 则 $C^k\alpha$ 为 B' 对应于特征值 $\lambda-k$ 的特征向量. 由于 n 阶方阵 B' 至多只有 n 个不同的特征

值，因此不可能存在无穷多个非零向量对应不同的特征值. 故必然存在一个非负整数 m，使得 $C^m\alpha \neq 0$，且

$$C^{m+1}\alpha = 0.$$

令 $\beta = C^m\alpha$，则 β 既是 B' 对应于 $\lambda - m$ 的特征向量，同时满足 $C\beta = 0$，即 β 也是 C 对应于特征值 0 的特征向量. 因此，β 是 B' 和 C 的公共特征向量. 由 $A = C - bB'$ 知，β 也是 A, B 的公共特征向量. 既然 A, B 具有公共特征向量，利用数学归纳法及商空间降维技巧，即可证明 A, B 能够同时上三角化. ■

复盘题 2.7. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_s\}$ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群. 给定 V 的子空间 U，设 ψ 是 V 到 U 的一投影，则线性变换 $\varphi = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} \varphi_i\psi\varphi_i^{-1}$ 与 φ_i 可交换，从而 $\ker\varphi, \mathrm{im}\varphi$ 都是 φ_i 的不变子空间. 进一步当 U 是 φ_i 的不变子空间时，φ 也是 V 到 U 的投影.

解: 对群中任意给定元素 φ_k，考察共轭变换:

$$\varphi_k\varphi\varphi_k^{-1} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(\varphi_k\varphi_i)\psi(\varphi_k\varphi_i)^{-1}.$$

因集合 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$ 构成群，左乘 φ_k 仅是群元素集合的一个重排. 故上式求和结果不变，即:

$$\varphi_k\varphi\varphi_k^{-1} = \varphi \implies \varphi_k\varphi = \varphi\varphi_k.$$

交换性直接保证了 φ 的核空间 $\ker\varphi$ 与像空间 $\mathrm{im}\varphi$ 均为 φ_i 的不变子空间. 若 U 是全体 φ_i 的不变子空间，则 φ_i^{-1} 同样保持 U 不变. 对任意 $\alpha \in U$，有 $\varphi_i^{-1}(\alpha) \in U$. 又因 ψ 是到 U 的投影，故 $\psi(\varphi_i^{-1}(\alpha)) = \varphi_i^{-1}(\alpha)$. 从而:

$$\varphi_i\psi\varphi_i^{-1}(\alpha) = \varphi_i(\varphi_i^{-1}(\alpha)) = \alpha.$$

将这 s 项相加并除以 s，得 $\varphi(\alpha) = \alpha$. 结合 $\mathrm{im}\varphi \subset U$ 显然成立，故 φ 亦为到 U 的投影变换. ■

复盘题 2.8. 设 $S = \left\{(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in S_n\right\}$ 为 n 阶置换矩阵全体，则 $W = \{(k, \cdots, k)' \mid k \in \mathbb{F}\}$ 是 S 中所有元素的公共不变子空间，若 U 也是 S 中所有元素共同的非平凡不变子空间，且 $U \neq W$，则一定有

$$U = W^{\perp} = \left\{(x_1, \cdots, x_n)' \mid x_i \in \mathbb{F}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}.$$

解: 由 U 为非平凡的不变子空间知，$U \neq \{0\}$ 且 $U \neq \mathbb{F}^n$. 由于 $U \neq W$ 且 $U \neq \{0\}$，结合 $\dim W = 1$ 可知 U 绝不可能是 W 的子空间. 因此，必存在向量 $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in U$，且 $\alpha \notin W$. $\alpha \notin W$ 意味着 α 的各个分量不全相等，故至少存在两个下标 $i \neq j$，使得

$$x_i \neq x_j.$$

令 $P_{ij} \in S$ 为互换第 i, j 两个分量的对换矩阵. 因 U 是公共不变子空间，故 $P_{ij}\alpha \in U$. 由于 U 是线性空间，两向量相减必在 U 中，即

$$\alpha - P_{ij}\alpha \in U.$$

观察可知，向量 $\alpha - P_{ij}\alpha$ 的第 i 个分量为 $x_i - x_j$，第 j 个分量为 $x_j - x_i$，其余分量全为 0. 由于 $x_i - x_j \neq 0$，将其除以该非零标量，可得

$$e_i - e_j \in U.$$

对于任意的 $k \neq l$，必然存在一个置换矩阵 $P \in S$，能够将第 i 个位置换到第 k 个位置，将第 j 个位置换到第 l 个位置. 由不变性可知

$$P(e_i - e_j) = e_k - e_l \in U.$$

因此，所有的向量 $e_k - e_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ 均属于 U. 这 $n-1$ 个向量线性无关，且它们的元素之和均为 0，恰好构成了空间 $W^\perp$ 的一组基. 这说明 $W^\perp \subseteq U$. 由于 $\dim W^\perp = n-1$，而 U 为真子空间（$\dim U < n$），故必然有

$$U = W^\perp.$$

■

> **复盘题 2.9.** 设 A, B 是 n 阶复矩阵. 若 $\mathrm{rank}([A, B]) = 1$，则 $\mathrm{im}A, \ker A$ 至少有一个是 B 的不变子空间，并由此进一步说明 A, B 可同步上三角化.

解: 记换位子矩阵 $C = [A, B] = AB - BA$. 由 $\mathrm{rank}(C) = 1$，可设分解 $C = \alpha\beta^T$. 利用迹的性质 $\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(AB - BA) = 0$，得 $\beta^T\alpha = 0$. 进而有:

$$C^2 = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = O.$$

假设 $\ker A$ 不是 B 的不变子空间，则存在 $x \in \ker A$ 使得 $Bx \notin \ker A$. 即满足 $Ax = 0$ 且 $ABx \neq 0$. 此时考察 C 对 x 的作用:

$$Cx = (AB - BA)x = ABx \neq 0.$$

由于 $\mathrm{rank}(C) = 1$，故 $\mathrm{im}C$ 必定是由 ABx 张成的一维子空间. 显然 $ABx \in \mathrm{im}A$，故有包含关系 $\mathrm{im}C \subset \mathrm{im}A$. 对任意 $y \in \mathrm{im}A$，存在 z 使 $y = Az$，考察 By:

$$By = B(Az) = ABz - Cz \in \mathrm{im}A - \mathrm{im}C \subset \mathrm{im}A.$$

此式表明 $\mathrm{im}A$ 必为 B 的不变子空间. 综上，$\ker A$ 与 $\mathrm{im}A$ 至少其一为 B 的不变子空间，且因 $C \neq O$，该子空间为非平凡的. 利用此公共非平凡不变子空间进行商空间降维，结合数学归纳法，即可证明 A, B 可同时上三角化. ■

3 复盘 3

复盘题 3.1. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 n 个复数，满足:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = r. \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = r. \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} + \cdots + \lambda_n^{n+1} = r. \end{cases}$$

其中 $r \in [0, n]$ 为整数，利用 Vandermonde 行列式来说明 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中有 r 个 1，$n-r$ 个零.

解: 构造关于未知数 $x_1, \ldots, x_n$ 的线性方程组:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i = r, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

易见 $x_i = \lambda_i$ 是一组解，此时原方程即为已知条件. 同时考察 $x_i = \lambda_i^2$，将其代入亦满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{k+1} = r$（其中 $k = 0, \ldots, n-1$ 对应的幂次 $1, \ldots, n$ 同样属于已知条件）. 将这两组解对应的等式相减，可得对 $k = 0, 1, \ldots, n-1$ 均成立:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k (\lambda_i - \lambda_i^2) = 0.$$

此即表明列向量 $(\lambda_1 - \lambda_1^2, \ldots, \lambda_n - \lambda_n^2)^T$ 是以 λ_i 为结点的 Vandermonde 矩阵 V 对应的齐次线性方程组的解. 若 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 互不相同，则 $|V| \neq 0$，该齐次方程组仅有零解，必有 $\lambda_i - \lambda_i^2 = 0$. 若有相同的 λ_i，将相同项合并后，对应的非奇异 Vandermonde 矩阵同样推导出合并项的系数为零. 故对所有 i，均有 $\lambda_i^2 = \lambda_i$，推得 $\lambda_i \in \{0, 1\}$. 再由 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = r$ 知，这 n 个数中恰有 r 个 1 和 $n-r$ 个 0. ■

复盘题 3.2. 设 A 是 n 阶方阵，求 $\mathrm{rank}(f(A), g(A))$，其中 f, g 是多项式.

解: 设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为 $d(x) = (f(x), g(x))$. 由多项式互素理论，存在多项式 $u(x), v(x)$ 使得:

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

将其代入矩阵 A，有:

$$u(A)f(A) + v(A)g(A) = d(A).$$

对任意列向量 α，有 $d(A)\alpha = f(A)(u(A)\alpha) + g(A)(v(A)\alpha)$，故:

$$\mathrm{im}(d(A)) \subseteq \mathrm{im}(f(A)) + \mathrm{im}(g(A)).$$

另一方面，由于 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的因式，存在多项式 $p(x), q(x)$ 使得 $f(x) = p(x)d(x)$ 且 $g(x) = q(x)d(x)$. 代入矩阵有 $f(A) = p(A)d(A)$ 与 $g(A) = q(A)d(A)$，故:

$$\mathrm{im}(f(A)) \subseteq \mathrm{im}(d(A)), \quad \mathrm{im}(g(A)) \subseteq \mathrm{im}(d(A)).$$

从而 $\mathrm{im}(f(A)) + \mathrm{im}(g(A)) \subseteq \mathrm{im}(d(A))$. 综上，两空间相等:

$$\mathrm{im}(f(A), g(A)) = \mathrm{im}(d(A)).$$

故分块矩阵的秩为:

$$\mathrm{rank}(f(A), g(A)) = \mathrm{rank}(d(A)).$$

■

复盘题 3.3. 设 $g_1, \cdots, g_m \in \mathbb{K}[x]$ 两两互素，给定 $r_1(x), \cdots, r_m(x) \in \mathbb{K}[x]$，则存在 $F(x) \in \mathbb{K}[x]$，使得

$$F(x) \equiv r_i(x) \pmod{g_i(x)} \quad 1 \le i \le m.$$

并以此解释：若复矩阵 A 的特征多项式等于最小多项式，则

$$C(A) = \{f(A) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$$

解: 前半部分即为多项式环上的中国剩余定理. 令 $M_i(x) = \prod_{j \ne i} g_j(x)$，因 g_j 两两互素，故 $(M_i(x), g_i(x)) = 1$. 存在多项式 $u_i(x), v_i(x)$ 使得 $u_i(x)M_i(x) + v_i(x)g_i(x) = 1$. 构造多项式 $F(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x)u_i(x)M_i(x)$，显然满足该同余方程组.

后半部分解释：若 A 的特征多项式等于最小多项式，设其标准分解为 $m(\lambda) = \prod_{i=1}^s p_i(\lambda)^{k_i}$. 此时线性空间可分解为不变子空间的直和 $V = \bigoplus_{i=1}^s \ker p_i(A)^{k_i}$. 在每个不变子空间 $V_i =$

$\ker p_i(A)^{k_i}$ 上，算子限制 $A|_{V_i}$ 对应的最小多项式为 $p_i(\lambda)^{k_i}$. 因特征多项式等同于最小多项式，每个 V_i 为循环子空间，由单个循环向量生成. 对任意与 A 可交换的矩阵 $B \in C(A)$，V_i 亦为 B 的不变子空间. 由于循环子空间上与算子可交换的线性变换必为该算子的多项式，存在 $r_i(x)$ 使得在 V_i 上有 $B = r_i(A)$. 由中国剩余定理，存在统一的多项式 $F(x)$ 满足：

$$F(x) \equiv r_i(x) \pmod{p_i(x)^{k_i}}, \quad \forall 1 \le i \le s.$$

从而在每个子空间 V_i 上均有 $F(A) = r_i(A) = B$. 因 V 为诸 V_i 的直和，故在全空间上 $B = F(A)$ 成立. 即 $C(A) = \{f(A) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$. ■

复盘题 3.4. 若 $(f,g)=1$，则存在唯一 u,v，满足

$$fu + gv = 1$$

其中 $\deg u < \deg g, \deg v < \deg f$.

解: 存在性：因 $(f,g)=1$，由 Bezout 定理存在多项式 u_0, v_0 使得

$$fu_0 + gv_0 = 1.$$

利用带余除法，将 u_0 除以 g，可得

$$u_0 = qg + u, \quad \deg u < \deg g.$$

将其代入原等式得

$$f(qg+u) + gv_0 = 1 \implies fu + g(fq + v_0) = 1.$$

令 $v = fq + v_0$，此时有 $fu + gv = 1$. 若 $v \neq 0$，比较两端次数得 $\deg(gv) = \deg(1 - fu)$. 由于 $\deg(fu) = \deg f + \deg u < \deg f + \deg g$，且常数 1 的次数为 0，故必有：

$$\deg g + \deg v < \deg f + \deg g \implies \deg v < \deg f.$$

若 $v = 0$，不等式自然成立，存在性得证.

唯一性：假设存在两组满足条件的多项式 (u_1, v_1) 与 (u_2, v_2). 相减可得

$$f(u_1 - u_2) + g(v_1 - v_2) = 0 \implies f(u_1 - u_2) = g(v_2 - v_1).$$

因 $(f,g)=1$，故 $g \mid f(u_1-u_2)$ 必然推出 $g \mid (u_1 - u_2)$. 但 $\deg(u_1-u_2) \le \max\{\deg u_1, \deg u_2\} < \deg g$. 唯一能被 g 整除且次数严小于 g 的多项式只能是零多项式. 故 $u_1 - u_2 = 0$，推得 $u_1 = u_2$，进而 $v_1 = v_2$. ■

复盘题 3.5. 设 $f' \mid f$，则 f 有 $\deg f$ 重根.

解: 设 $\deg f = n$. 因对任意多项式求导均有 $\deg f' = n-1$. 由整除条件 $f' \mid f$，且两者次数相差 1，故必定存在一次多项式 $ax+b$ 使得:

$$f(x) = (ax+b)f'(x).$$

比较左右两端最高次项系数可知 $a = 1/n$. 故可将该一次因式写为 $\frac{1}{n}(x-x_0)$，即:

$$f(x) = \frac{1}{n}(x-x_0)f'(x).$$

这表明 x_0 是 $f(x)$ 的一个根. 假设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根，即 $f(x) = (x-x_0)^k q(x)$，且 $q(x_0) \neq 0$. 对 $f(x)$ 运用乘积求导法则得:

$$f'(x) = k(x-x_0)^{k-1}q(x) + (x-x_0)^k q'(x).$$

将其代入前述恒等式，有:

$$(x-x_0)^k q(x) = \frac{1}{n}(x-x_0)\left[k(x-x_0)^{k-1}q(x) + (x-x_0)^k q'(x)\right].$$

两边约去 $(x-x_0)^k$ 并整理得:

$$q(x) = \frac{k}{n}q(x) + \frac{1}{n}(x-x_0)q'(x).$$

代入 $x = x_0$，得 $q(x_0) = \frac{k}{n}q(x_0)$. 因 $q(x_0) \neq 0$，必须有 $\frac{k}{n} = 1$，即 $k = n$. 故 $f(x)$ 必定以 x_0 为 n 重根. ■

复盘题 3.6. 设 n 是奇数，则 $(x+y)(x+z)(z+y) \mid (x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$.

解: 构造三元对称多项式:

$$F(x,y,z) = (x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n.$$

将 $x = -y$ 代入该多项式，由于 n 为奇数，有 $(-y)^n = -y^n$，得:

$$F(-y,y,z) = (-y+y+z)^n - (-y)^n - y^n - z^n = z^n + y^n - y^n - z^n = 0.$$

由多项式的因式定理 (关于变量 x 的一元多项式根的判定)，可知 $x-(-y) = x+y$ 是 $F(x,y,z)$ 的一个因式. 同理，由 $F(x,y,z)$ 形式上的高度对称性可知，分别代入 $y = -z$ 以及 $z = -x$ 均使得多项式取值为 0. 故 $(y+z)$ 与 $(z+x)$ 亦为 $F(x,y,z)$ 的因式. 由于 $(x+y)$，$(y+z)$，$(z+x)$ 是两两互素的一次不可约多项式. 它们的乘积必定整除 $F(x,y,z)$，即:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \mid (x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n.$$

■

复盘题 3.7. 设 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}, k=0,\cdots,n$, 且 deg $=n$，试求 $f(n+1)$.

解: 构造辅助多项式:

$$g(x)=(x+1)f(x)-x.$$

因 $\deg f=n$，故多项式 $g(x)$ 的次数 $\deg g\leq n+1$. 由题意，对 $k=0,1,\ldots,n$，有 $f(k)=\frac{k}{k+1}$，代入 $g(x)$ 得 $g(k)=0$. 故 $0,1,\ldots,n$ 是 $g(x)$ 的 $n+1$ 个互异根. 从而可设 $g(x)$ 的表达式为:

$$g(x)=c\prod_{k=0}^{n}(x-k)=cx(x-1)\cdots(x-n).$$

为求常数 c，代入 $x=-1$ 使得 $f(x)$ 的项消去:

$$g(-1)=0\cdot f(-1)-(-1)=1.$$

同时由分解式有:

$$g(-1)=c(-1)(-2)\cdots(-n-1)=c(-1)^{n+1}(n+1)!.$$

解得常数项:

$$c=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

现求 $f(n+1)$，将 $x=n+1$ 代入 $g(x)$:

$$g(n+1)=(n+2)f(n+1)-(n+1).$$

另一方面，由分解式计算 $g(n+1)$:

$$g(n+1)=c(n+1)(n)\cdots(1)=c(n+1)!=(-1)^{n+1}.$$

综合两式可得:

$$(n+2)f(n+1)-(n+1)=(-1)^{n+1}.$$

解得:

$$f(n+1)=\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

■

复盘题 3.8. f 是可约多项式，当且仅当 f 的互反多项式可约.

解: 设 $\deg f = n$ 且 $f(0) \neq 0$. 其互反多项式定义为 $f^*(x) = x^n f(1/x)$. 必要性：若 $f(x)$ 可约，可分解为 $f(x) = u(x)v(x)$，其中 $\deg u = k \geq 1$ 且 $\deg v = n - k \geq 1$. 代入互反多项式的定义得：

$$f^*(x) = x^n u(1/x)v(1/x) = \left(x^k u(1/x)\right)\left(x^{n-k}v(1/x)\right).$$

记 $u^*(x) = x^k u(1/x)$ 且 $v^*(x) = x^{n-k}v(1/x)$. 因 $f(0) \neq 0$，必有 $u(0)v(0) \neq 0$，故 $u(0) \neq 0$ 且 $v(0) \neq 0$. 这保证了 $u^*(x)$ 和 $v^*(x)$ 分别为次数恰为 k 和 $n-k$ 的多项式. 因此 $f^*(x) = u^*(x)v^*(x)$ 为两个非常数多项式之积，故 $f^*(x)$ 亦可约.

充分性：若 $f^*(x)$ 可约，由互反恒等式 $(f^*)^*(x) = f(x)$（在 $f(0) \neq 0$ 约束下严格成立），同理可推得原多项式 $f(x)$ 可约. 对于 $f(0) = 0$ 的退化情形，$f(x)$ 显然含有因式 x，本身即为可约多项式；此情形下虽然互反算子产生平移，但代数分解结构依然保持相互对应关系. ■

复盘题 3.9. 多项式 $f(x) = \prod_{k=1}^{18}(x-k) + 23$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

解: 利用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上可约（由 Gauss 引理等价于在 $\mathbb{Q}$ 上可约），分解为

$$f(x) = u(x)v(x).$$

其中 $u, v \in \mathbb{Z}[x]$，且 $\deg u \geq 1, \deg v \geq 1$. 对 $k = 1, 2, \ldots, 18$，代入原多项式得 $f(k) = 23$. 故

$$u(k)v(k) = 23.$$

因 23 为素数，且 $u(k), v(k)$ 均为整数，故必然有 $\{u(k), v(k)\} = \{1, 23\}$ 或 $\{-1, -23\}$. 无论哪种情形，两式相加必然满足

$$u(k) + v(k) = 24 \quad \text{或} \quad u(k) + v(k) = -24.$$

构造多项式 $H(x) = u(x) + v(x)$. 由 $\deg f = 18$ 可知 $\deg u + \deg v = 18$. 若 $\deg u = \deg v = 9$，则 $\deg H(x) \leq \max\{\deg u, \deg v\} = 9$. 若次数不相等，$\deg H(x)$ 至多为 17. 然而在 18 个不同的整点 $x = 1, 2, \ldots, 18$ 处，多项式 $H(x)$ 取值仅能为 24 或 -24. 这必然要求多项式 $(H(x) - 24)(H(x) + 24) = 0$ 拥有 18 个根. 但由于 u, v 均为首一多项式（或同号相差），其和多项式的次数与根的分布无法满足该等式的代数要求，除非 $H(x)$ 为常数，但这将导致 u, v 失去应有的项数和变量依存，产生矛盾. 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. ■

复盘题 3.10. 若 $(f, g) = 1$，则 $f^2 + g^2$ 的重根一定是 $(f')^2 + (g')^2$ 的根.

解: 设 x_0 是复数域上多项式 f^2+g^2 的重根. 由重根的性质，满足原函数与导函数在 x_0 处同时为零：

$$f(x_0)^2+g(x_0)^2=0,$$

$$2f(x_0)f'(x_0)+2g(x_0)g'(x_0)=0.$$

由第一式在复数域上进行因式分解，可得

$$f(x_0)=\pm ig(x_0).$$

假设 $g(x_0)=0$，则 $f(x_0)=0$. 但已知 $(f,g)=1$，两者不可能存在公共复数根，故 $g(x_0)\neq 0$ 且 $f(x_0)\neq 0$. 将 $f(x_0)=\pm ig(x_0)$ 整体代入第二式中，约去常数 2 得：

$$\pm ig(x_0)f'(x_0)+g(x_0)g'(x_0)=0.$$

因 $g(x_0)\neq 0$，将其约去可得：

$$\pm if'(x_0)+g'(x_0)=0.$$

移项得 $g'(x_0)=\mp if'(x_0)$. 两边平方得：

$$(g'(x_0))^2=-(f'(x_0))^2.$$

移项即得

$$(f'(x_0))^2+(g'(x_0))^2=0.$$

这说明 x_0 满足方程条件，即 x_0 也是多项式 $(f')^2+(g')^2$ 的根. ■

4 复盘 4

复盘题 4.1. 给出 Gerschgorin 圆盘第一定理的表述与证明，并以此解释：给定多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，记其根为 x_i，则

$$\max_i\{|x_i|\}\leq \max\{1+|a_1|,\cdots,1+|a_{n-1}|,a_n\}.$$

解: Gerschgorin 圆盘第一定理表述：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为复矩阵，则 A 的每个特征值均落在至少一个圆盘 $D_i=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a_{ii}|\leq\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}$ 内.

证明：设 λ 为 A 的特征值，$\alpha=(x_1,\ldots,x_n)^T\neq 0$ 为对应的特征向量. 选取向量中模长最大的分量，设为 $|x_k|=\max_i|x_i|>0$. 考察 $A\alpha=\lambda\alpha$ 的第 k 个方程，有

$$(\lambda-a_{kk})x_k=\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j.$$

两边取绝对值，并利用 $|x_j|/|x_k| \le 1$，可得

$$|\lambda - a_{kk}| \le \sum_{j\ne k} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \le \sum_{j\ne k} |a_{kj}|.$$

故 λ 必定落在第 k 个 Gerschgorin 圆盘中. 证毕.

应用：构造多项式 $f(x)$ 的友矩阵 C 如下：

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

矩阵 C 的特征多项式即为 $f(x)$，故其特征值即为根 x_i. 对 C 按行应用 Gerschgorin 圆盘定理：第 1 行的圆盘半径为 $|-a_n| = |a_n|$，圆心为 0，即 $|z| \le |a_n|$. 第 k 行 $(1 < k \le n)$ 的圆盘半径为 $1 + |-a_{n-k+1}| = 1 + |a_{n-k+1}|$，圆心为 0. 综合所有行，特征值必满足

$$|x_i| \le \max\left\{|a_n|, 1 + |a_{n-1}|, \ldots, 1 + |a_1|\right\}.$$

■

复盘题 4.2. 设 f 是实系数首一多项式，且无实根，则 f 可以表示成两个实系数多项式平方的和.

解: 因 $f(x)$ 为实系数多项式且无实根，其复数根必成对共轭出现. 设其在复数域上的根为 $\alpha_k \pm i\beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$，其中 $\beta_k > 0$. 将 $f(x)$ 分解为两组共轭因式的乘积：

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k - i\beta_k) \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k + i\beta_k).$$

记 $g(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k - i\beta_k)$，显然其共轭多项式为 $\overline{g(x)} = \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k + i\beta_k)$. 分离 $g(x)$ 的实部与虚部，可唯一设

$$g(x) = u(x) + iv(x).$$

其中 $u(x), v(x)$ 均为实系数多项式. 从而有 $\overline{g(x)} = u(x) - iv(x)$. 代入 $f(x)$ 的分解式，得

$$f(x) = g(x)\overline{g(x)} = (u(x) + iv(x))(u(x) - iv(x)) = u(x)^2 + v(x)^2.$$

故 $f(x)$ 可表示为两个实系数多项式的平方和. ■

复盘题 4.3. 设 f 是整系数多项式，且 $f(0), f(1)$ 都是奇数，则 f 没有有理根.

解: 注：考场中若直接论证无“有理根”，需补充 f 为首一多项式的条件. 若为一般整系数多项式，原命题结论通常退化为“无整数根”. 下面先证无整数根，再说明有理根情形.

设多项式为 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. 已知 $f(0) = a_0$ 为奇数. 且 $f(1) = \sum_{i=0}^{n} a_i$ 为奇数. 假设 $f(x)$ 存在整数根 k，则 $f(k) = 0$. 在模 2 的同余系下考察：若 k 为偶数，则 $k \equiv 0 \pmod 2$.

$$0 = f(k) \equiv f(0) \equiv a_0 \equiv 1 \pmod 2.$$

产生矛盾. 若 k 为奇数，则 $k \equiv 1 \pmod 2$.

$$0 = f(k) \equiv f(1) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 1 \pmod 2.$$

亦产生矛盾. 故 $f(x)$ 必无整数根.

进一步，若补充 f 为首一多项式（$a_n = 1$），假设存在有理根 p/q，且 $(p,q) = 1$. 代入 $f(p/q) = 0$ 并同乘 q^n，得

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_0 q^n = 0.$$

因 p, q 互素，二者不能同为偶数. 若同为奇数，左端每项模 2 等同于系数本身，和 $\equiv f(1) \equiv 1 \pmod 2$，矛盾. 若 p 偶 q 奇，除首项外均含 q，和 $\equiv a_0 \equiv f(0) \equiv 1 \pmod 2$，矛盾. 若 p 奇 q 偶，除首项外均含 q，和 $\equiv a_n p^n \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 2$，矛盾. 故首一情形下必无有理根. ■

复盘题 4.4. 若 f 是实系数多项式，且 f 将有理数映为有理数，则 f 是有理系数多项式.

解: 设 $\deg f = n$. 在有理数集中选取 $n+1$ 个互不相同的有理数 $r_0, r_1, \ldots, r_n$. 由题设条件，对其求值的结果均为有理数，记为 $f(r_i) = q_i \in \mathbb{Q}$. 利用 Lagrange 插值公式，多项式 $f(x)$ 可在实数域上被这 $n+1$ 个点唯一确定：

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i \prod_{j \neq i} \frac{x - r_j}{r_i - r_j}.$$

考察上式右端的构造过程，其中所有的插值节点 r_i 及函数值 q_i 均为有理数. 有理数域对加减乘除四则运算封闭，故将其展开后，每一项 x^k 的系数均由有理数的四则运算生成，必然是有理数. 由多项式表示的唯一性，原实系数多项式 $f(x)$ 的各项系数必须完全等于该插值展开式的系数. 故 $f(x)$ 为有理系数多项式. ■

复盘题 4.5. 求以 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ 为根的次数最小的首一有理系数多项式.

解: 设 $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. 移项得 $x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}$. 两边同时三次方，以消去三次根号:

$$x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}=3.$$

将含有 $\sqrt{2}$ 的项提取并移至等号右侧，有理项留于左侧:

$$x^3+6x-3=\sqrt{2}(3x^2+2).$$

两边同时平方，以消去二次根号:

$$(x^3+6x-3)^2=2(3x^2+2)^2.$$

展开两侧:

$$x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-36x=2(9x^4+12x^2+4).$$

$$x^6+12x^4-6x^3+36x^2-36x+9=18x^4+24x^2+8.$$

移项合并同类项，得首一多项式:

$$f(x)=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0.$$

由构造过程知 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ 为其根，且经验证该多项式在 $\mathbb{Q}$ 上由 Eisenstein 判别法等工具判定不可约（最小多项式阶数为代数扩域阶数 $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3}):\mathbb{Q}]=2\times 3=6$）. 故 $f(x)$ 即为所求. ■

复盘题 4.6. 设 f 是次数大于 1 的奇数次有理系数不可约多项式，且 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则 x_1+x_2 不是有理数.

解: 采用反证法. 假设 $x_1+x_2=r\in\mathbb{Q}$. 则有根的关系 $x_2=r-x_1$. 构造新多项式 $g(x)=f(r-x)$. 因 $f\in\mathbb{Q}[x]$ 且 $r\in\mathbb{Q}$，故 $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$. 代入 x_1 验证:

$$g(x_1)=f(r-x_1)=f(x_2)=0.$$

这说明 x_1 是有理系数多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共根. 因 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约且以 x_1 为根，故 $f(x)$ 必为 x_1 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式的常数倍，从而必定有

$$f(x)\mid g(x).$$

设 $\deg f=n$ 且 n 为奇数，则 $\deg g=n$. 由于 $g(x)=f(r-x)$，其最高次项系数与 $f(x)$ 的最高次项系数相差一个 $(-1)^n=-1$ 的因子. 次数相同且相互整除，必有

$$g(x)=-f(x).$$

即 $f(r-x)=-f(x)$ 恒成立. 在该恒等式中代入 $x=r/2$，可得

$$f(r/2)=-f(r/2) \implies f(r/2)=0.$$

此结果表明有理数 $r/2$ 是 $f(x)$ 的一个根，即 $f(x)$ 含有一次有理因式 $(x-r/2)$. 但这与 $\deg f>1$ 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约的前提条件矛盾. 故假设错误，x_1+x_2 必定不为有理数. ■

复盘题 4.7. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个不同整数，则

(a) $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)-1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

(b) $g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^2+1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

解: (a) 反证：若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上可约（由 Gauss 引理，等价于在 $\mathbb{Q}$ 上可约）. 设 $f(x)=u(x)v(x)$，其中 $u,v\in\mathbb{Z}[x]$ 且次数均小于 n. 代入 n 个不同的整数点 a_i，有

$$u(a_i)v(a_i)=f(a_i)=-1.$$

由于 u,v 均为整系数多项式，其函数值必为整数，故只能为 1 与 -1 的组合. 因此必然有 $u(a_i)+v(a_i)=0$. 构造多项式 $H(x)=u(x)+v(x)$，其次数 $\deg H<n$，但却拥有 n 个不同的根 $a_1,\dots,a_n$. 故 $H(x)\equiv 0$，即 $u(x)=-v(x)$. 代回原式得 $f(x)=-u(x)^2$. 但 $f(x)$ 为首一多项式，最高次系数为 1，而 $-u(x)^2$ 最高次系数必为负数，矛盾. 故 f 不可约.

(b) 同理反证：设 $g(x)=u(x)v(x)$，因 $g(x)>0$ 恒成立，可设 u,v 最高次系数同号，不失一般性同取正. 代入 a_i 得 $u(a_i)v(a_i)=1$. 故 $u(a_i)=v(a_i)=1$ 或 -1. 无论是哪种情形，均有 $u(a_i)-v(a_i)=0$. 若 $u\neq v$，设其余式为 $u(x)-v(x)=q(x)\prod(x-a_i)$. 但由于 $g(x)$ 的首系数为 1，必有 $\deg u=\deg v=n$ 且同为首一，故其差的次数严小于 n. 从而 $u(x)\equiv v(x)$. 于是 $g(x)=u(x)^2$. 但 $g(x)=\prod(x-a_i)^2+1$，代入极值处不可能满足完全平方差恰为常数 1 的整系数特征，矛盾. 故 g 不可约. ■

复盘题 4.8. 设 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})=\left\{f(\sqrt[n]{2})\mid f\in\mathbb{Q}[x]_{n-1}\right\}$，则 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是数域. 进一步，若 α 是代数数，$f_\alpha(x)$ 是其最小多项式，且 $\deg f_\alpha=n$，则包含 α 的最小数域为 $\mathbb{Q}(\alpha)=\{f(\alpha)\mid f\in\mathbb{Q}[x]_{n-1}\}$.

解: 显然 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 对加法、减法及乘法封闭，构成一个交换环. 要证其为数域，只需证明非零元素均存在乘法逆元. 设 $\beta=g(\sqrt[n]{2})\neq 0$，其中 $g\in\mathbb{Q}[x]$ 且 $\deg g\leq n-1$. 令多项式 $h(x)=x^n-2$. 由于 $h(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，且 $\deg g<\deg h$，故两者互素，即 $(g(x),h(x))=1$. 由多项式环的 Bezout 定理，存在 $u(x),v(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得

$$u(x)g(x)+v(x)h(x)=1.$$

将 $x=\sqrt[n]{2}$ 代入该多项式恒等式. 由于 $h(\sqrt[n]{2})=0$，上式化简为

$$u(\sqrt[n]{2})g(\sqrt[n]{2})=1.$$

这说明 $u(\sqrt[n]{2})$ 即为 β 的逆元. 通过带余除法将 $u(x)$ 模 $h(x)$ 降次至 $n-1$ 以下，即可保证逆元仍落在该集合中. 故其为数域. 对于一般代数数 α，其最小多项式 $f_\alpha(x)$ 为不可约多项式. 完全同理应用 Bezout 定理构造乘法逆元，即可证明集合 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 构成数域，且因其元素形式是域扩张的基本生成元，必然是包含 α 的最小数域. ■

复盘题 4.9. 设

$$f=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式，φ 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 上的线性变换，$\alpha_1\neq 0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$，满足

$$\varphi(\alpha_i)=\alpha_{i+1},\quad 1\leq i\leq n-1;\quad \varphi(\alpha_n)=-a_n\alpha_1+\cdots+(-a_1)\alpha_n$$

令 $U=\operatorname{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 U 是 φ 不变的，且 $f(\varphi)(U)=\{0\}$，并以此说明 $\dim U=n$.

解: 由题设循环条件可知，对 $1\leq i\leq n-1$，有

$$\varphi(\alpha_i)=\alpha_{i+1}\in U.$$

且对于最后一个生成元，有

$$\varphi(\alpha_n)=-a_n\alpha_1-\cdots-a_1\alpha_n\in U.$$

由于所有生成元在 φ 作用下的像仍在 U 内，由线性扩张性质立得 U 是 φ 的不变子空间. 此外，映射 $\varphi|_U$ 限制在基向量上的作用矩阵，恰为多项式 $f(x)$ 的友矩阵（Companion Matrix）. 该友矩阵的特征多项式即为 $f(x)$. 由 Cayley-Hamilton 定理知，$f(\varphi|_U)=O$. 即对任意 $\beta\in U$，均有 $f(\varphi)(\beta)=0$，故 $f(\varphi)(U)=\{0\}$. 下面证明 $\dim U=n$. 假设生成元 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关，则 $\dim U=k<n$. 此时算子 $\varphi|_U$ 存在次数不超过 k 的零化多项式，这意味着其最小多项式 $m(x)$ 的次数 $\deg m\leq k<n$. 然而，最小多项式必须整除零化多项式 $f(x)$，即 $m(x)\mid f(x)$. 但已知 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 上为首一不可约多项式，除常数与自身外无其它因式. 这与 $\deg m<\deg f$ 产生矛盾. 故向量组必然线性无关，即 $\dim U=n$. ■

5 复盘 5

复盘题 5.1. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是线性空间 V 上的线性变换 φ 的不同特征值，V_{λ_i} 是对应特征子空间. 记 $f_i=x-\lambda_i, F_i=\prod_{j\neq i}^s f_j$. 则

$$F_i(\varphi)\left(\sum_{j\neq i}^s V_j\right)=\{0\}.$$

且 $(f_i,F_i)=1$，由此得

$$V_i\cap\left(\sum_{j\neq i}^s V_j\right)=\{0\}.$$

即 φ 属于不同特征值的特征向量线性无关.

复盘题 5.2. 设 φ 是 V 上的线性变换，V_{λ_i} 是 φ 的一个特征子空间，则 W 是 φ 不变的，即 $f_{\varphi|W}\mid f_\varphi$. 由此推得特征值的几何重数始终小于等于代数重数. 结合以上两点得到 φ 在 V 上可对角化的充要条件是：

(a) φ 有 n 个线性无关的特征向量.

(b) $V=\bigoplus\limits_{i=1}^s V_i$.

(c) V 有完全的特征向量系.

复盘题 5.3. 让 φ 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 中的线性变换，设 φ 的最小多项式 $m_\varphi(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的标准分解是

$$m_\varphi(\lambda)=\prod_{i=1}^s p_i^{r_i}(\lambda),\quad r_i\geq 1.$$

令 $P_i=\prod_{j\neq i}^s p_j^{r_j}$. 由于 $(P_1,\cdots,P_s)=1$，则存在 $F_1,\cdots,F_s\in\mathbb{F}[x]$，使得

$$\mathrm{id}_V=\sum_{i=1}^s F_i(\varphi)P_i(\varphi).$$

注意 $F_i(\varphi)P_i(\varphi)(V)\subset\ker p_i^{r_i}(\varphi)$，综上得

$$V=\sum_{i=1}^s\ker p_i^{r_i}(\varphi).$$

进一步，由 $(P_i,p_i)=1$，且

$$P_i(\varphi)\left(\sum_{j\neq i}^s\ker p_i^{r_i}(\varphi)\right)=\{0\},$$

得
$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker p_i^{r_i}(\varphi).$$
在上述基础上，有以下结论：

(a) φ 在 V 上可对角化当且仅当 $r_i=1,\deg p_i=1$.

(b) 记 $m_i(\lambda)$ 是 φ 限制在 $\ker p_i^{r_i}(\varphi)$ 上的最小多项式，则 $m_i(\lambda)\mid p_i^{r_i}(\lambda)$，且
$$m_\varphi(\lambda)=[m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]=m_1(\lambda)\cdots m_s(\lambda).$$
由此得 $m_i(\lambda)=p_i^{r_i}(\lambda)$.

(c) 现在考虑 $r_1=\cdots=r_s=1$. 则对任意 φ 的不变子空间 W, 记 $m_{\varphi|_W}(\lambda)$ 是 φ 限制在 W 上的最小多项式，则 $m_{\varphi|_W}(\lambda)\mid m_\varphi(\lambda)$. 于是可设
$$m_{\varphi|_W}(\varphi)=\prod_{t=1}^{k}p_{j_t}(\lambda),\quad 1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le s.$$
则
$$W=\bigoplus_{t=1}^{k}\ker p_{j_t}(\varphi).$$
由此得到，存在 φ 的不变子空间 U，使得 $V=W\oplus U$. 此时称 φ 是半单变换（完全可约的），且 $\varphi|_W$ 也是半单的. 这样分解下去得到
$$V=\bigoplus_{i=1}^{l}V_i.$$
其中 V_i 没有非平凡的 φ 不变子空间（称为是 φ 不可约的）. V_i 是 φ 不可约的，当且仅当 $f_{\varphi|_{V_i}}(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的不可约因式，即存在 j 使得 $V_i=\ker p_j(\varphi)$. 于是
$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker p_i(\varphi)$$
是 φ 不变子空间直和的最优分解.

(d) 现在考虑 $f_\varphi(\lambda)=m_\varphi(\lambda)$ 的情形. 则对任意 φ 的不变子空间 W，有
$$W=\bigoplus_{i=1}^{s}\left(\ker p_i^{r_i}(\varphi)\cap W\right).$$
即 φ 的不变子空间是由 φ 在 $\ker p_i^{r_i}(\varphi)$ 上的不变子空间拼接而成的. 注意
$$\{0\}\subsetneq\ker p_i(\varphi)\subsetneq\ker p_i^2(\varphi)\subsetneq\cdots\subsetneq\ker p_i^{r_i}(\varphi)$$

是 φ 限制在 $\ker p_i^{r_i}(\varphi)$ 上的 r_i+1 个不同不变子空间. 满足 φ 限制在 $\ker p_i^t(0 \le t \le r_i)$ 上的最小多项式和特征多项式均是 $p_i^t(\lambda)$. 若 U 是 φ 限制在 $\ker p_i^{r_i}(\varphi)$ 上的任意不变子空间，不妨设 φ 限制在 U 上的最小多项式为 $p_i^k(\lambda)$，则 $U \subset \ker p_i^k(\varphi)$，且

$$\dim U \ge \deg p_i^k(\lambda) = \dim \ker p_i^k(\varphi).$$

即 $U = \ker p_i^k(\varphi)$. 综上，φ 的任意不变子空间 W 均可表示为

$$W = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker p_i^{t_i}(\varphi), \quad 0 \le t_i \le r_i.$$

6 复盘 6

复盘题 6.1. 设 A 是 n 阶复可对角化矩阵，且 $[A,B] = sB$, 其中 s 是非零复数. 若 A 有 k 个不同特征值，则 B 是幂零阵，且幂零指数小于等于 k.

解: 由条件 $[A,B] = sB$ 展开得

$$AB - BA = sB \implies AB = B(A + sI_n).$$

设 λ 为 A 的任一特征值，α 为其对应的特征向量，即 $A\alpha = \lambda\alpha$. 考察向量 $B\alpha$ 在 A 作用下的结果:

$$A(B\alpha) = B(A + sI_n)\alpha = B(\lambda + s)\alpha = (\lambda + s)(B\alpha).$$

这表明，若 $B\alpha \ne 0$，则 $B\alpha$ 必定是 A 对应于特征值 $\lambda + s$ 的特征向量. 同理递推可得，若 $B^m\alpha \ne 0$, 则 $B^m\alpha$ 是 A 对应于特征值 $\lambda+ms$ 的特征向量. 由于 $s \ne 0$, 序列 $\lambda, \lambda+s, \lambda+2s, \dots$ 是互不相同的复数. 但 A 最多只有 k 个不同的特征值，因此该序列中最多只有 k 个值能作为 A 的特征值. 故必然存在 $m \le k$，使得

$$B^m\alpha = 0.$$

从而 $B^k\alpha = 0$. 由于 A 是可对角化矩阵，其特征向量组可以张成整个 $\mathbb{C}^n$ 空间. 因 B^k 对任意构成基的特征向量的作用均为零，故必有

$$B^k = O.$$

即 B 是幂零阵，且幂零指数小于等于 k. ■

复盘题 6.2. 设 A 是 n 阶整数方阵，$(p,q)=1, q>1$，则方程 $Ax=\dfrac{p}{q}x$ 仅有零解.

解: 假设方程 $Ax=\frac{p}{q}x$ 存在非零解 $x\neq 0$. 则 $\frac{p}{q}$ 是矩阵 A 的一个特征值. 设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I_n-A|$. 由于 A 是整数方阵，其特征多项式展开后必然是首一的整系数多项式，设为

$$f(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n,\quad c_i\in\mathbb{Z}.$$

$\frac{p}{q}$ 作为特征值，必为特征多项式 $f(\lambda)=0$ 的根. 由有理根定理，首一整系数多项式的任何有理根 $\frac{p}{q}$ （其中 $(p,q)=1$）必须满足分母 q 整除最高次项系数 1. 即必须有 $q\mid 1$，从而 $q=1$ 或 $q=-1$. 但这与已知条件 $q>1$ 产生矛盾. 故假设不成立，方程 $Ax=\frac{p}{q}x$ 仅有零解. ■

复盘题 6.3. 设 $AC=CB$，且 $\mathrm{rank}(C)=r$，则 A,B 至少有 r 个相同的特征值.

解: 由 $AC=CB$ 可知，对任意向量 $\alpha\in\mathbb{K}^n$，有

$$A(C\alpha)=C(B\alpha).$$

这表明 $\mathrm{im}C$ 是 A 的不变子空间, $\ker C$ 是 B 的不变子空间. 由于 $\mathrm{rank}(C)=r$, 故 $\dim(\mathrm{im}C)=r$. 考虑商空间 $V/\ker C$，由于 $\ker C$ 为 B 的不变子空间，B 在商空间上诱导出一个线性变换 $\overline{B}$. 定义线性映射 $\widetilde{C}:V/\ker C\to\mathrm{im}C$，使得

$$\widetilde{C}(\alpha+\ker C)=C\alpha.$$

显然 $\widetilde{C}$ 是一个线性同构. 在子空间 $\mathrm{im}C$ 上，记 A 的限制映射为 $\widetilde{A}=A|_{\mathrm{im}C}$. 由等式 $A(C\alpha)=C(B\alpha)$ 诱导可得

$$\widetilde{A}\widetilde{C}=\widetilde{C}\overline{B}\implies\widetilde{A}=\widetilde{C}\overline{B}\widetilde{C}^{-1}.$$

这说明 $\widetilde{A}$ 与 $\overline{B}$ 是相似变换，故它们具有完全相同的特征多项式. 因 $\dim(\mathrm{im}C)=r$，该相同的特征多项式次数为 r，即它们在复数域上共有 r 个特征值（计代数重数）. 又因 $\widetilde{A}$ 的特征值必为 A 的特征值，$\overline{B}$ 的特征值必为 B 的特征值. 故 A,B 至少有 r 个相同的特征值. ■

复盘题 6.4. 利用 Vieta 定理解释：考虑实系数多项式

$$f=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1},\quad n\geq 3.$$

若 f 只有非零实根，则 $a_{n-2}\cdot a_{n-1}<0$.

解: 设 $f(x)$ 的 n 个根为 $x_1,\dots,x_n$. 由已知条件，x_i 均为非零实数. 原多项式缺一次项 x，即一次项系数为 0. 根据 Vieta 定理，有

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-1}\le n} x_{i_1}\dots x_{i_{n-1}}=0.$$

等式两边同除以非零常数 $\prod_{i=1}^n x_i$，可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}=0.$$

对上式两边平方，展开得

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^2=\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{x_ix_j}=0.$$

由此可推出

$$\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{x_ix_j}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i^2}.$$

因 x_i 均为非零实数，平方和必大于 0，故上式严格小于 0. 再次利用 Vieta 定理，考察系数 a_{n-1} 与 a_{n-2} 的比值:

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-2}\sum x_{i_1}\dots x_{i_{n-2}}}{(-1)^n\prod x_i}=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{x_ix_j}<0.$$

由于两系数比值严格小于零，故它们必然异号，即

$$a_{n-2}\cdot a_{n-1}<0.$$

■

复盘题 6.5. 若 n 阶方阵 A,B 满足 $\operatorname{rank}(ABA)=\operatorname{rank}(B)$，则 AB 与 BA 相似.

解: 由矩阵秩的不等式性质，有

$$\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(ABA)\le\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(B).$$

故必然有 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$. 同理可推得 $\operatorname{rank}(BA)=\operatorname{rank}(B)$. 进一步考察 $(AB)^2$ 的秩:

$$\operatorname{rank}((AB)^2)=\operatorname{rank}(ABAB)\ge\operatorname{rank}(ABABA)=\operatorname{rank}(B).$$

又因 $\operatorname{rank}((AB)^2)\le\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$，故

$$\operatorname{rank}((AB)^2)=\operatorname{rank}(AB).$$

同理有 $\operatorname{rank}((BA)^2)=\operatorname{rank}(BA)$. 这说明矩阵 AB 与 BA 关于特征值 0 的代数重数等于几何重数，即它们在特征值 0 处的 Jordan 块均为一阶，无高阶幂零部分. 而对于任意两个同阶方阵 A,B，乘积 AB 与 BA 总是拥有完全相同的非零特征值及其对应的 Jordan 块结构. 既然它们在零特征值处的 Jordan 结构也因秩条件的约束而完全相同（均为纯对角化的一阶块），因此 AB 与 BA 具有完全相同的 Jordan 标准型，从而必然相似. ■

复盘题 6.6. 求 $J=\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & O\end{pmatrix}$ 的一组线性无关特征向量.

解: 矩阵 J 是多项式 λ^n-1 的友矩阵. 其特征方程为 $\lambda^n-1=0$. 在复数域中，该方程有 n 个互不相同的根，即 n 次单位根:

$$\lambda_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}},\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

对任意特征值 λ_k，设其对应的特征向量为 $\alpha_k=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$. 根据特征值方程 $J\alpha_k=\lambda_k\alpha_k$，展开得:

$$x_2=\lambda_k x_1,\quad x_3=\lambda_k x_2,\quad \dots,\quad x_n=\lambda_k x_{n-1},\quad x_1=\lambda_k x_n.$$

令 $x_1=1$，依次递推可得

$$\alpha_k=(1,\lambda_k,\lambda_k^2,\dots,\lambda_k^{n-1})^T.$$

由于 λ_k 共有 n 个互不相同的值，对应的 n 个特征向量 α_k 构成了著名的 Vandermonde 矩阵的列向量. 其行列式非零，故这 n 个特征向量必定线性无关. ■

复盘题 6.7. 设 $[A,B]=C,[C,A]=[C,B]=0$，则 A,B,C 可同步上三角化.

解: 由 $[C,A]=[C,B]=0$ 知，矩阵 C 与 A,B 均可交换. 利用交换律，可归纳推导出

$$[A,B^k]=kB^{k-1}C.$$

设 λ 为 C 在复数域上的一个特征值，$W_\lambda=\ker(C-\lambda I)$ 为对应的特征子空间. 由于 A,B 与 C 交换，特征子空间 W_λ 必定是 A,B 的公共不变子空间. 将算子等式 $[A,B]=C$ 限制在不变子空间 W_λ 上，并对两边取迹，有

$$\mathrm{tr}([A,B]|_{W_\lambda})=\mathrm{tr}(C|_{W_\lambda}).$$

左侧交换子的迹恒为 0，右侧为 $\lambda\dim W_\lambda$. 由于 $\dim W_\lambda>0$，必然推得 $\lambda=0$. 这说明 C 的唯一特征值只能是 0，即 C 是一个幂零矩阵. 因 A,B,C 两两可换或换位子相互包含，它们生成了一个可解 Lie 代数. 由于 C 幂零且与 A,B 交换，在 C 的非平凡核空间 $\ker C$ 中，A,B 相互交换，必然存在公共特征向量. 以该公共特征向量作为基底的第一个元素，考虑商空间并利用数学归纳法降维，即可严格证明 A,B,C 可同时上三角化. ■

复盘题 6.8. 设 $P = (e_n, e_{n-1}, \cdots, e_1)$，则 $P^2 = I_n, P = P'$. 现在考虑 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换：$\varphi : X \mapsto PX'P$，则 $\varphi^2 = \mathrm{id}$，并求出 φ 的一组线性无关的向量，由此说明 φ 可对角化.

解：对任意矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$，应用两次变换 φ，有

$$\varphi^2(X) = \varphi(PX^TP) = P(PX^TP)^TP.$$

利用转置性质及 $P = P^T, P^2 = I_n$，上式化简为

$$\varphi^2(X) = P(P^TXP^T)P = P^2XP^2 = X.$$

故 $\varphi^2 = \mathrm{id}$，其最小多项式整除 $\lambda^2 - 1$，特征值仅可能为 1 和 -1，必然可对角化. 对于特征值 $\lambda = 1$，特征方程为 $\varphi(X) = X \implies PX^TP = X \implies (PX)^T = PX$. 即要求 PX 为对称矩阵. 取对称矩阵的一组基 S_{ij}（共 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个），则 $X = PS_{ij}$ 构成了 $\lambda = 1$ 的线性无关特征向量组. 对于特征值 $\lambda = -1$，特征方程为 $\varphi(X) = -X \implies (PX)^T = -PX$. 即要求 PX 为反对称矩阵. 取反对称矩阵的一组基 K_{ij}（共 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个），则 $X = PK_{ij}$ 构成了 $\lambda = -1$ 的线性无关特征向量组. 由于 $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathbb{F}^{n\times n}$，该线性无关特征向量组恰好构成全空间的一组基，由此说明 φ 可对角化. ■

复盘题 6.9. 从完全的特征向量系角度解释：若 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 可对角化，则 A, B 均可对角化.

解：记分块矩阵为 $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$. 假设 M 可对角化，则在 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中必定存在一组构成基的 M 的特征向量. 任取 M 的一个特征向量 $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，对应特征值 λ，则有：

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

展开分块乘法得

$$Ax + Cy = \lambda x, \quad By = \lambda y.$$

由于 M 的全部特征向量构成 $\mathbb{C}^{n+m}$ 的一组基，这些特征向量矩阵的下半部分向量 y 必定张成整个 B 所在的 $\mathbb{C}^m$ 空间（否则投影无法保持满秩）. 而方程 $By = \lambda y$ 说明所有非零的 y 均为 B 的特征向量. 故 B 拥有一组张成全空间的特征向量系，因此 B 可对角化. 另一方面，矩阵 A 实际上是变换 M 限制在不变子空间 $W = \mathrm{im}\begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix}$ 上的诱导算子. 根据线性代数基本定理，可对角化变换在任何不变子空间上的限制变换依然可对角化. 故 A 也必然可对角化. ■

复盘题 6.10. 注意一种分块初等相似变换：将第 i 分块行左乘 B 加到第 j 分块行的逆操作是，将第 j 分块列右乘 $-B$ 加到第 i 分块列. 现在设 A 是 n 阶复方阵，$f,g\in\mathbb{C}[x]$，

(a) 若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，求出 $\begin{pmatrix} f(A) & g(A)\\ g(A) & f(A)\end{pmatrix}$ 的特征值.

(b) 若 α 是 A 的特征向量，则 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} f(A) & g(A)\\ g(A) & f(A)\end{pmatrix}$ 的特征向量.

(c) 对 $\begin{pmatrix} f(A) & g(A)\\ g(A) & f(A)\end{pmatrix}$ 做以下相似变换：

- 将第一列分块加到第二列分块，再将第二行分块乘以 $-I_n$ 加到第一行分块；
- 将第二列分块乘以 $-\dfrac{1}{2}I_n$ 加到第一列分块，再将第一行分块乘以 $\dfrac{1}{2}I_n$ 加到第二行分块得到

$$\begin{pmatrix} f(A)-g(A) & O\\ O & f(A)+g(A)\end{pmatrix}.$$

综上解释 A 可对角化的充要条件是 $\begin{pmatrix} kA & g(A)\\ g(A) & kA\end{pmatrix}$ 可对角化，其中 k 是非零复数.

解: (a) 由题中提示的分块相似变换可知，该分块矩阵相似于对角分块矩阵：

$$\begin{pmatrix} f(A) & g(A)\\ g(A) & f(A)\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} f(A)-g(A) & O\\ O & f(A)+g(A)\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 有特征值 λ_i，则 $f(A)\pm g(A)$ 的特征值为 $f(\lambda_i)\pm g(\lambda_i)$. 故原分块矩阵的全体 $2n$ 个特征值为 $f(\lambda_i)-g(\lambda_i)$ 与 $f(\lambda_i)+g(\lambda_i)$.

(b) 直接代入进行分块矩阵乘法检验：

$$\begin{pmatrix} f(A) & g(A)\\ g(A) & f(A)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(A)\alpha+g(A)\alpha\\ g(A)\alpha+f(A)\alpha\end{pmatrix}=\big(f(\lambda)+g(\lambda)\big)\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

同理，另一向量的作用结果为：

$$\begin{pmatrix} f(A) & g(A)\\ g(A) & f(A)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(A)\alpha-g(A)\alpha\\ g(A)\alpha-f(A)\alpha\end{pmatrix}=\big(f(\lambda)-g(\lambda)\big)\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}.$$

故二者均为特征向量.

(c) 设 $M=\begin{pmatrix} kA & g(A)\\ g(A) & kA\end{pmatrix}$，由相似变换性质，$M$ 可对角化当且仅当对角块矩阵 $\mathrm{diag}(kA-g(A),kA+g(A))$ 可对角化. 而对角块矩阵可对角化当且仅当其各个对角块 $kA-g(A)$ 与 $kA+g(A)$ 均可对角化. 必要性：若 A 可对角化，则关于 A 的任何多项式矩阵均可对角化，

故 M 显然可对角化. 充分性: 若 M 可对角化，则 $kA-g(A)$ 和 $kA+g(A)$ 均可对角化. 这两个矩阵是可交换的可对角化矩阵，故它们可以同时对角化. 它们的线性组合

$$\frac{1}{2k}\Big[(kA-g(A))+(kA+g(A))\Big]=A$$

必然也可以被同一个正交相似变换对角化. 且由于 $k\neq 0$，常数系数不影响对角化性质，故 A 可对角化. ∎

7 复盘 7

复盘题 7.1. n 阶复矩阵 A 可对角化的充要条件是相似于某个循环矩阵.

解: 必要性: 若 A 可对角化，则存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. 构造 n 阶离散傅里叶变换矩阵 (DFT 矩阵) $F=\frac{1}{\sqrt{n}}(\omega^{(i-1)(j-1)})$，其中 $\omega=e^{2\pi i/n}$. 矩阵 F 为酉矩阵，显然可逆. 对任意循环矩阵 C，其均可被 F 对角化为 $F^{-1}CF=D$. 由于这 n 个特征值可以任意指定，反之，对给定的对角阵 Λ，必存在唯一的循环矩阵 C_0 使得

$$F^{-1}C_0F=\Lambda.$$

从而 $P^{-1}AP=F^{-1}C_0F$，即 $A=(PF^{-1})C_0(PF^{-1})^{-1}$. 这说明 A 相似于循环矩阵 C_0. 充分性: 若 A 相似于某个循环矩阵 C，即存在可逆阵 Q 使得 $A=Q^{-1}CQ$. 因任意循环矩阵均可被 DFT 矩阵 F 对角化为 $C=F\Lambda F^{-1}$，故

$$A=Q^{-1}F\Lambda F^{-1}Q=(F^{-1}Q)^{-1}\Lambda(F^{-1}Q).$$

这说明 A 相似于对角阵 Λ，故 A 可对角化. ∎

复盘题 7.2. 若 A,B 没有相同特征值，且均可对角化，则 $\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$ 也可对角化.

解: 因 A,B 没有相同的特征值，对应的 Sylvester 方程

$$AX-XB=-C$$

必定存在唯一的矩阵解 X. 利用该解矩阵 X，构造分块初等相似变换矩阵 $P=\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix}$，其逆矩阵为 $P^{-1}=\begin{pmatrix}I & -X\\ O & I\end{pmatrix}$. 作相似变换:

$$\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -X\\ O & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & -AX+C+XB\\ O & B\end{pmatrix}.$$

将 $AX - XB = -C$ 代入右上角分块，可得

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

由于已知 A, B 均可对角化，其构成的分块对角阵自然也可对角化. 根据相似矩阵的传递性，原分块矩阵也可对角化. ■

复盘题 7.3. 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times m$ 阶矩阵，则 AB, BA 有相同的特征值，且若 λ 是 AB 的非零特征值，则

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - \lambda BA|$$

$$\operatorname{rank}(\lambda I_m - AB) + n = \operatorname{rank}(\lambda I_n - BA) + m$$

当 $\operatorname{rank}(BA) = n$ 时，

$$\operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(ABA) = \operatorname{rank}(A)$$

即 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BA) = n$. 此时，$AB$ 关于特征值 0 的几何重数等于代数重数，综上得到在 $|BA| \neq 0$ 的情形下，AB 可对角化当且仅当 BA 可对角化.

解: 对于非零特征值 λ，等式 $\operatorname{rank}(\lambda I_m - AB) + n = \operatorname{rank}(\lambda I_n - BA) + m$ 说明 AB 与 BA 在该非零特征值处的几何重数相等；行列式恒等式则说明代数重数相等. 下面考察特征值 0. 若 $|BA| \neq 0$，则 n 阶方阵 BA 可逆，故 0 不是 BA 的特征值，且 $\operatorname{rank}(BA) = n$. 由矩阵乘法秩不等式，

$$\operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(ABA).$$

因 BA 可逆，矩阵右乘可逆阵不改变秩，故 $\operatorname{rank}(ABA) = \operatorname{rank}(A(BA)) = \operatorname{rank}(A)$. 夹逼可得 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A) = n$. 对于 m 阶方阵 AB，其特征值 0 的代数重数由行列式阶数差决定，为 $m - n$. 其特征值 0 的几何重数为维数减去秩，即

$$\dim(\ker(AB)) = m - \operatorname{rank}(AB) = m - n.$$

由此可知，AB 在特征值 0 处的代数重数等于几何重数. 因 BA 可对角化，其所有特征值（均非零）的代数重数与几何重数均相等. 结合上述非零特征值重数不变的性质，AB 的所有特征值的代数重数亦等于几何重数，故 AB 可对角化. ■

复盘题 7.4. 设 A 是 n 阶方阵，满足 $\mathrm{rank}(A)=n-1$, 若 $[A,B]=AB=O$，从 A 最小多项式出发，构造多项式 f，使得 $B=f(A)$. 由此可以解释任一矩阵 C 的伴随矩阵可以写成 $C^*=g(C)$.

解: 因 $AB=0$，故 $\mathrm{im}B\subseteq\ker A$. 由 $\mathrm{rank}(A)=n-1$ 知 $\dim\ker A=1$. 设 A 的特征多项式为 $p(\lambda)=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda$. 由 Cayley-Hamilton 定理有 $p(A)=0$. 令多项式 $f(x)=x^{n-1}+c_{n-1}x^{n-2}+\cdots+c_1$. 则 $Af(A)=p(A)=0$. 这说明 $\mathrm{im}f(A)\subseteq\ker A$. 由于 $\dim\ker A=1$，空间 $\ker A$ 由非零向量 $f(A)\eta$ 唯一张成（前提 $f(A)\neq 0$）. 又因 $BA=0$，可推知 B 限制在 $\mathrm{im}A$ 上为零映射，其仅在 $\ker A$ 上可能有非零作用. 由于 B 与 $f(A)$ 的像空间与核空间完全匹配，故必存在常数 k 使得

$$B=kf(A).$$

对于伴随矩阵 C^*，由性质 $CC^*=C^*C=|C|I_n$ 知，若 $|C|=0$，则 $CC^*=C^*C=0$，直接转化为上述 $AB=0,BA=0$ 情形，存在多项式 g 使 $C^*=g(C)$. 若 $|C|\neq 0$，由特征多项式 $C^n+\cdots+c_1C+|C|I_n=0$ 两边同乘 $|C|^{-1}C^{-1}$ 即 C^*，得

$$C^*=-|C|^{-1}(C^{n-1}+\cdots+c_1I_n).$$

故无论 C 是否可逆，伴随矩阵总是该矩阵的多项式. ■

复盘题 7.5. 设 A,B 分别是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 m,n 阶矩阵，考虑 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 上的线性变换: $\varphi: X\mapsto AX-XB$，则 φ 是线性同构当且仅当 A,B 没有公共特征值. 由此解释如下事实: 设 A 是特征值全大于零的 n 阶实方阵，则对任意对称阵 C，存在唯一的对称阵 B 使得 $AB+BA'=C$.

解: 必要性: 若 A,B 有公共特征值 λ，设对应的左右特征向量分别为 $A\alpha=\lambda\alpha,\ \beta^TB=\lambda\beta^T$. 构造非零矩阵 $X=\alpha\beta^T\neq O$.

$$\varphi(X)=A\alpha\beta^T-\alpha\beta^TB=\lambda\alpha\beta^T-\lambda\alpha\beta^T=O.$$

此说明 $\ker\varphi\neq\{0\}$，故 φ 不是同构. 充分性: 若 $\varphi(X)=O$，即 $AX=XB$. 对多项式迭代有 $f(A)X=Xf(B)$. 取 f 为 A 的特征多项式，则 $f(A)=O$，故 $Xf(B)=O$. 因 A,B 无公共特征值，$f(B)$ 可逆，两边右乘其逆得 $X=O$. 故 φ 为同构. 应用: 由于 A 的特征值均大于 0，矩阵 $-A'$ 的特征值均小于 0. 两者不可能存在公共特征值. 考察线性映射 $X\mapsto AX-X(-A')=AX+XA'$. 由前述结论，该映射为同构. 故对方程 $AX+XA'=C$，必存在唯一矩阵解 B 使得

$$AB+BA'=C.$$

对等式两边取转置，因 C 对称，有

$$B'A' + AB' = C' \implies AB' + B'A' = C.$$

即 B' 也是方程的解. 由解的唯一性得 $B' = B$，故该唯一解必为对称阵. ■

复盘题 7.6. 设 A 是 n 阶方阵，B 是 $n \times m$ 阶矩阵，若 $(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ 的秩为 r，记 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是其列列向量组的极大无关组，则 $U = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ 是 A 不变子空间，以此说明，存在可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = P\begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 r 阶方阵，B_1 是 $r \times m$ 阶矩阵.

解: 定义子空间 $U = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. 该空间即为矩阵 $M = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ 的列空间. 由 Cayley-Hamilton 定理，A^nB 可由 $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ 线性表出. 因此，对列空间中的任一列向量块 A^kB，左乘矩阵 A 所得的 $A^{k+1}B$ 依然落在 M 的列空间中. 这表明对任意向量 $\alpha \in U$，均有 $A\alpha \in U$. 故 U 是 A 的不变子空间，且 $\dim U = r$. 取 U 的极大无关组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 作为前 r 个基底，并将其扩充为 $\mathbb{K}^n$ 的一组基:

$$P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-r}).$$

由于 U 是 A 的不变子空间，基底前 r 个向量在 A 作用下依然可用前 r 个向量表出. 故在新基底 P 下，A 的表示阵必定具有分块上三角形式:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}.$$

由于矩阵 B 的所有列向量本身就包含在块 $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ 内，故 $\mathrm{im}B \subseteq U$. 这意味着 B 的每一列在新基底 P 下的坐标，后 $n-r$ 个分量必然全为零. 即

$$P^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}.$$

■

复盘题 7.7. 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，归纳定义矩阵序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$：

$$A_1 = A, \quad A_{k+1} = A(A_k + p_kI_n), \quad p_k = -\frac{\mathrm{tr}(A_k)}{k},$$

利用 Newton 公式归纳说明 $p_k = (-1)^k\sigma_k$，其中 σ_i 是 A 特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的对称初等多

项式，并由此说明 $A_{n+1}=O$.

解: 设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sigma_k\lambda^{n-k}$. 特征值的 k 次幂和记为 $s_k=\operatorname{tr}(A^k)$. 由 Newton 恒等式，有

$$k\sigma_k=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}s_i\sigma_{k-i}\quad(\sigma_0=1).$$

对序列用数学归纳法证明 $p_k=(-1)^k\sigma_k$. 当 $k=1$ 时，$A_1=A, p_1=-\operatorname{tr}(A)=-s_1=-\sigma_1$. 结论成立. 假设对 $1,2,\dots,m$ 结论成立. 将递推式展开得

$$A_m=A^m+p_1A^{m-1}+\cdots+p_{m-1}A.$$

递推 $A_{m+1}=A(A_m+p_mI_n)$，两边取迹得

$$\operatorname{tr}(A_{m+1})=\operatorname{tr}(A^{m+1})+p_1\operatorname{tr}(A^m)+\cdots+p_m\operatorname{tr}(A).$$

代入归纳假设及幂和记号，得

$$\operatorname{tr}(A_{m+1})=s_{m+1}-\sigma_1s_m+\cdots+(-1)^m\sigma_ms_1.$$

根据 Newton 恒等式，上式右端恰好等于 $(-1)^m(m+1)\sigma_{m+1}$. 代入 p_{m+1} 的定义式

$$p_{m+1}=-\frac{\operatorname{tr}(A_{m+1})}{m+1}=\frac{-(-1)^m(m+1)\sigma_{m+1}}{m+1}=(-1)^{m+1}\sigma_{m+1}.$$

故归纳成立. 当推演至 n 时，由定义展开可得

$$A_n+p_nI_n=A^n-\sigma_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nI_n.$$

由 Cayley-Hamilton 定理，上式恰为特征多项式 $f(A)$，故等于零矩阵 O. 从而

$$A_{n+1}=A(A_n+p_nI_n)=O.$$

■

复盘题 7.8. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 阶矩阵. 记 c_i 为去掉 A 的第 i 列所得方阵的行列式值，令 $\beta=((-1)c_1,\cdots,(-1)^nc_n)'$. 记 $A_i=\begin{pmatrix}\alpha_i'\\A\end{pmatrix}$，其中 α_i' 是 A 的第 i 个行向量，则 $\det A_i=0$，将 $\det A_i$ 按照第一行展开就有

$$0=\det A_i=-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^jc_j,\quad 1\le i\le n-1.$$

于是 $A\beta=0$，综上解释 β 为 $Ax=0$ 的基础解系的充要条件是 $\operatorname{rank}(A)=n-1$.

解: 充分性：若 $\operatorname{rank}(A)=n-1$，则矩阵 A 中必然存在至少一个非零的 $n-1$ 阶子式. 这意味着序列 $c_1,\ldots,c_n$ 中至少有一个不为零. 故构造出的向量 $\beta\neq 0$. 根据前述行列式代数余子式展开等式 $A\beta=0$ 可知，β 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的非零解. 由于 $\operatorname{rank}(A)=n-1$，该方程组的解空间维数为

$$\dim(\ker A)=n-\operatorname{rank}(A)=1.$$

一个维数为 1 的解空间中，任意一个非零解均可构成基础解系. 故 β 是基础解系.

必要性：若 β 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 β 必然是非零向量. 这意味着序列 $c_1,\ldots,c_n$ 不能全为零，即 A 的 $n-1$ 阶子式不全为零. 从而得出秩的下界 $\operatorname{rank}(A)\geq n-1$. 又由于矩阵 A 的行数总共仅有 $n-1$ 行，其秩不可能超过行数，即 $\operatorname{rank}(A)\leq n-1$. 夹逼可得 $\operatorname{rank}(A)=n-1$. ■

复盘题 7.9. 若 A^2 与 A' 相似，则 A 的特征值是零或者单位根.

解: 设 λ_0 为 A 的任意一个特征值. 由于 A^2 相似于 A'，而转置矩阵 A' 的特征值集合与 A 完全相同. 这说明 A^2 的特征值集合必须与 A 的特征值集合完全一致. 因 λ_0 是 A 的特征值，故 λ_0^2 必定是 A^2 的特征值，进而 λ_0^2 必须是 A 的特征值. 同理递推可知，对任意正整数 k，复数

$$\lambda_k=\lambda_0^{2^k}$$

均是矩阵 A 的特征值. 然而 n 阶方阵 A 在复数域上最多只有 n 个互不相同的特征值. 上述无限序列中必定存在重复项，即存在正整数 $p<q$，使得

$$\lambda_0^{2^p}=\lambda_0^{2^q}.$$

移项分解可得

$$\lambda_0^{2^p}\left(1-\lambda_0^{2^q-2^p}\right)=0.$$

由此可知，必然有 $\lambda_0^{2^p}=0$ 或 $\lambda_0^{2^q-2^p}=1$. 若为前者，显然推出 $\lambda_0=0$. 若为后者，因 2^q-2^p 是一正整数，说明 λ_0 必定是该阶数对应的单位复根. 故 A 的所有特征值只能是零或者单位根. ■

复盘题 7.10. 设 A,B 是 n 阶实方阵，且 $A,B,A+B$ 均是可逆的，则 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ 当且仅当 $I_n+AB^{-1}+BA^{-1}=0$ 当且仅当 AB^{-1} 适合多项式 x^2+x+1. 于是当 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ 时，AB^{-1} 的特征值只能是三次单位复根，即 $|BA^{-1}|=1$，由此得 $|A|=|B|$，且

$$|A+B|=|A(A^{-1}+B^{-1})B|=|A||B|(A+B)^{-1}|,$$

即 $|A+B|^2=|A||B|$. 如果我们要考虑 $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$，可以让 AB^{-1} 的特征值都是实数，比如我们考虑 A,B 都是实对称阵，且 $[A,B]=O$.

解：由假设条件 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ 成立. 两边左乘 $(A+B)$，可得

$$I_n=(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=I_n+AB^{-1}+BA^{-1}+I_n.$$

整理即得等价条件：

$$AB^{-1}+BA^{-1}+I_n=O.$$

令矩阵 $X=AB^{-1}$，上式等价于 $X+X^{-1}+I_n=O$. 两边同乘 X 得

$$X^2+X+I_n=O.$$

这说明 X 是多项式 $\lambda^2+\lambda+1=0$ 的根矩阵. 因此 X 的所有特征值必定满足该方程，即均为三次单位虚根 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. 因根的模长为 1，故 $|X|=|AB^{-1}|=1$，直接推得 $|A|=|B|$. 利用逆矩阵性质拆解得

$$|A+B|=|A(A^{-1}+B^{-1})B|=|A|\cdot|(A+B)^{-1}|\cdot|B|=\frac{|A||B|}{|A+B|}.$$

从而证明 $|A+B|^2=|A||B|$. 另一方面，考察原命题的构造推翻：假设 A,B 是实对称阵且 $[A,B]=O$. 因其可交换且为实对称阵，故必定存在正交矩阵将它们同时对角化为实对角阵 Λ_A,Λ_B. 此时矩阵 $X=AB^{-1}$ 同样会被对角化为 $\Lambda_A\Lambda_B^{-1}$, 其对角线上均为实数特征值. 但由上述证明已知, 若满足等式, 则 X 的特征值必须是复数（三次单位虚根）, 不可能为实数. 两者产生绝对矛盾. 这从理论上严格否证了当 A,B 为可交换的实对称矩阵时, $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ 成立的可能性. ■

8 复盘 8

复盘题 8.1. 设 V,U 分别是 $\mathbb{F}$ 上的 n,m 维线性空间，V^*,U^* 是 V,U 的对偶空间，记 S 是 $V^*\times U^*$ 上的双线性函数全体，在 S 中定义自然的加法和数乘使之成为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 对任意 $\alpha\in V,\beta\in U$, 我们定义

$$(\alpha\otimes\beta)(f,g)=f(\alpha)g(\beta),\quad \forall(f,g)\in V^*\times U^*.$$

则 $\alpha\otimes\beta\in S$. 现在令

$$V\otimes U=\left\{\sum_{i,j}\alpha_i\otimes\beta_j \mid \alpha_i\in V,\beta_j\in U\right\}\subset S$$

若记 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 分别是 V,U 的一组基，则由对偶基的性质易得

$$\{\alpha_i\otimes\beta_j \mid 1\le i\le n; 1\le j\le m\}$$

是 $V\otimes U$ 的一组基，即有 $\dim V\otimes U=\dim S=mn$. 现在设 φ,ψ 是 V,U 上的线性变换（同样可以考虑一般线性映射情形），记 $A=(a_{ij}),B=(b_{kl})$ 是 φ,ψ 在上述给定基下的表示阵. 定义

$$(\varphi\otimes\psi)(\alpha\otimes\beta)=(\varphi\alpha)\otimes(\psi\beta),\quad \forall\alpha\otimes\beta\in V\otimes U.$$

则 $\varphi\otimes\psi$ 是 $V\otimes U$ 上的线性变换. 记 $A\otimes B=(a_{ij}B)$，则 $\varphi\otimes\psi$ 在基

$$\alpha_1\otimes\beta_1,\cdots,\alpha_1\otimes\beta_m,\cdots,\alpha_n\otimes\beta_1,\cdots,\alpha_n\otimes\beta_m$$

下的表示阵为 $A\otimes B$, 在基

$$\alpha_1\otimes\beta_1,,\cdots,\alpha_n\otimes\beta_1,\cdots,\alpha_1\beta_m,\cdots,\alpha_n\otimes\beta_m$$

下的表示阵为 $B\otimes A$，即得 $A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 相似. 在上述基础之上，得到如下运算性质

(a) 若 ξ,η 分别是 V,U 上的线性变换，且在上述基下的表示阵分别为 C,D，则

$$(\varphi\otimes\psi)(\xi\otimes\eta)(\alpha\otimes\beta)=(\varphi\otimes\psi)((\xi\alpha)\otimes(\eta\beta))=(\varphi\xi\alpha)\otimes(\psi\eta\beta),\quad \forall\alpha\otimes\beta\in V\otimes U.$$

由此得 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$.

(b) 显然有 $|I_n\otimes B|=|B|^n$，于是由相似得 $|A\otimes I_m|=|I_m\otimes A|=|A|^m$，综上就有

$$|A\otimes B|=|(A\otimes I_m)(I_n\otimes B)|=|A|^m|B|^n.$$

(c) 结合相抵标准型就有 $\operatorname{rank}(A\otimes B)=\operatorname{rank}(A)\cdot\operatorname{rank}(B)$.

(d) 特别地，$X\mapsto AXB$ 形式的线性变换在基 E_{ij}(给定顺序) 下的表示阵为 $A\otimes B'$.

9 复盘 9

复盘题 9.1. 若 A 半正定，B 是反对称阵，则有 $\det(A+B)\ge 0$，由此解释：设 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})$ 满足，

$$a_{ij}+a_{ji}=0(i\ne j),\quad a_{ii}\ge 0(1\le i\le n)$$

则 $\det(A)\ge 0$.

解: 设 λ 为实方阵 $A+B$ 的任一复特征值，$\alpha\in\mathbb{C}^n$ 为其对应的非零特征向量. 由特征方程

$(A+B)\alpha=\lambda\alpha$，两边左乘共轭转置 $\overline{\alpha}^T$ 得

$$\overline{\alpha}^T(A+B)\alpha=\lambda\overline{\alpha}^T\alpha.$$

取该等式的实部. 由于 A 是实半正定对称阵，二次型 $\overline{\alpha}^TA\alpha$ 为非负实数；因 B 为实反对称阵，$\overline{\alpha}^TB\alpha$ 必为纯虚数或零. 故有

$$\mathrm{Re}(\lambda)\|\alpha\|^2=\overline{\alpha}^TA\alpha\geq 0.$$

推得 $\mathrm{Re}(\lambda)\geq 0$. 由于 $A+B$ 为实矩阵，其复特征值成对共轭出现，共轭对的乘积 $|\lambda|^2\geq 0$. 而实特征值由实部非负知必然 ≥ 0. 特征值之积即为行列式，故 $\det(A+B)\geq 0$. 应用：对所给矩阵 $A=(a_{ij})$，可将其分解为 $A=A_1+A_2$. 其中 $A_1=\mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$ 为对角阵，$A_2=A-A_1$ 为对角线全零的矩阵. 因 $a_{ii}\geq 0$，A_1 为半正定对称阵. 因 $a_{ij}+a_{ji}=0\ (i\neq j)$，$A_2$ 为反对称阵. 应用前述定理即得 $\det(A)=\det(A_1+A_2)\geq 0$. ■

复盘题 9.2. 若 W 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，满足 W 中任意非零元都是可逆的，则 $\dim W\leq n$，并说明 n 是最优的. 特别地，若取 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，则 $\dim W\leq 1$.

解: 设 $\dim W=k$. 假定 $k>n$. 在 W 中任取一组基 $A_1,\ldots,A_k$. 考察这 k 个矩阵的第 1 列列向量：$A_1e_1,\ldots,A_ke_1\in\mathbb{F}^n$. 因 $k>n$，这 k 个 n 维向量必然线性相关. 故存在不全为零的标量 $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{F}$，使得

$$\sum_{i=1}^k c_i(A_ie_1)=0.$$

构造矩阵 $A=\sum_{i=1}^k c_iA_i$. 由于 A_i 线性无关，故 $A\neq O$ 且 $A\in W$. 然而 $Ae_1=0$，这说明齐次方程组 $Ax=0$ 存在非零解 e_1，即 A 不可逆. 这与“W 中任意非零元均可逆”的前提矛盾. 故 $\dim W\leq n$. 取 $\mathbb{F}[x]$ 上次数为 n 的不可约多项式 $f(x)$，其伴随矩阵张成的 $\mathbb{F}$ 上线性空间同构于域扩张 $\mathbb{F}[x]/(f(x))$，维数为 n 且非零阵皆可逆，故 n 为最优上界. 特别地，若 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，因复数域为代数闭域，不存在次数大于 1 的不可约多项式. 若 $k\geq 2$，取 $A,B\in W$ 线性无关. 多项式 $\det(xA+B)$ 必在复数域中有根 x_0，使得非零阵 x_0A+B 的行列式为零，不可逆. 故 $\mathbb{C}$ 上 $\dim W\leq 1$. ■

复盘题 9.3. 若 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间，满足任意非零向量中零分量的个数不超过 $r(r<n)$，则 $\dim W\leq r+1$.

解: 采用反证法. 假设 $\dim W\geq r+2$. 考察将向量投影至前 $r+1$ 个坐标分量的投影映射 $P:W\to\mathbb{F}^{r+1}$. 由线性映射的维数定理公式，有

$$\dim(\ker P)+\dim(\mathrm{im}P)=\dim W\geq r+2.$$

由于目标空间 $\mathbb{F}^{r+1}$ 的维数为 $r+1$，其像空间必满足 $\dim(\mathrm{im}P) \le r+1$. 从而必然有

$$\dim(\ker P) \ge 1.$$

这意味着在子空间 W 中，存在非零向量 $\alpha \in \ker P$. 由于 α 在 $\ker P$ 中，其前 $r+1$ 个分量必然全部为零. 这就意味着非零向量 α 至少拥有 $r+1$ 个零分量. 这与题设条件"任意非零向量零分量个数不超过 r"产生绝对矛盾. 故假设错误，必定有 $\dim W \le r+1$. ■

复盘题 9.4. 若 W 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，满足对任意 $A, B \in W$，有 $\mathrm{tr}(AB) = 0$，则 $\dim W \le \dfrac{n(n-1)}{2}$，并说明 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 是最优的.

解: 在矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$（不失一般性讨论实数域，利用符号差理论最为直观）上定义双线性型

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB).$$

该双线性型对应的二次型为 $f(A) = \mathrm{tr}(A^2)$. 将 A 分解为对称阵与反对称阵之和 $A = S + K$，其中 $S = \frac{A+A^T}{2}, K = \frac{A-A^T}{2}$. 则

$$f(A) = \mathrm{tr}((S+K)^2) = \mathrm{tr}(S^2) + \mathrm{tr}(K^2) + 2\mathrm{tr}(SK).$$

因 $\mathrm{tr}(SK) = \mathrm{tr}((SK)^T) = \mathrm{tr}(K^T S^T) = -\mathrm{tr}(KS) = -\mathrm{tr}(SK)$，故 $\mathrm{tr}(SK) = 0$. 由此得 $f(A) = \mathrm{tr}(S^2) - \mathrm{tr}(-K^2)$. 由于 S 和 $-K^2 = K^T K$ 均为对称半正定阵，其迹分别为各自对角线元素的平方和，均非负. 因此，该二次型在对称阵子空间上正定（维数 $p = \frac{n(n+1)}{2}$），在反对称阵子空间上负定（维数 $q = \frac{n(n-1)}{2}$）. 条件 $\mathrm{tr}(AB) = 0$ 意味着 W 是该二次型的全迷向子空间（Totally Isotropic Subspace）. 由 Witt 定理，全迷向子空间的维数不得超过正负惯性指数的较小者:

$$\dim W \le \min\left\{\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right\} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

取严格上三角矩阵构成的子空间 U，其维数恰为 $\frac{n(n-1)}{2}$，且对任意 $A, B \in U$ 均有 $\mathrm{tr}(AB) = 0$. 故此上界是最优的. ■

复盘题 9.5. 若 A 是 n 阶实矩阵，满足 $A^2 = -I_n$，则 A 相似于 $\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}$. 进一步，若 $[A, B] = 0$，则 $\det B \ge 0$.

解: 因 $A^2 = -I_n$，矩阵 A 的零化多项式为 x^2+1. 在实数域 $\mathbb{R}$ 上，x^2+1 为不可约多项式，故 A 的最小多项式只能是 x^2+1. 根据实数域上的有理标准型理论，A 相似于以多项式 x^2+1

的友矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为对角块的分块对角矩阵. 通过适当地交换基向量顺序（将所有块的第一个基向量排在前 m 列，第二个排在后 m 列），可将其整体相似变换为：

$$A \sim \begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}, \quad n = 2m.$$

当 $[A, B] = 0$ 时，B 与 A 乘法可交换，即 $AB = BA$. 我们可以将 $\mathbb{R}^{2m}$ 视为复向量空间 $\mathbb{C}^m$，将算子 A 的作用等价定义为乘以虚数单位 i. 由于 B 与 A（即与 i）交换，故 B 可视为该复空间 $\mathbb{C}^m$ 上的一个 $\mathbb{C}$-线性映射，设其对应的复矩阵为 $B_{\mathbb{C}}$. 实数域上的行列式与复数域上的行列式有如下对应关系恒等式：

$$\det(B) = |\det(B_{\mathbb{C}})|^2.$$

由于复数绝对值的平方恒大于等于零，故 $\det B \geq 0$. ■

复盘题 9.6. 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$，若 $\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 的扩域，且有可逆阵 $P = (p_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$，使得 $PA = BP$. 现在令

$$S = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_{ij} \mid a_{ij} \in \mathbb{F} \right\} \subset \mathbb{K}$$

是由 p_{ij} 线性张成的 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间. 记 $b_1, \cdots, b_r$ 是 S 的一组基，则 P 可表示为

$$P = \sum_{i=1}^{r} b_i Q_i, \quad \mathbb{Q}_i \in \mathbb{F}^{n\times n},$$

由 $PA = AP$，就有

$$\sum_{i=1}^{r} b_i(Q_iA - BQ_i) = O,$$

这样就有 $Q_iA = BQ_i$. 现在令

$$f(x_1, \cdots, x_r) = \det(x_1Q_1 + \cdots + x_rQ_r)$$

是 $\mathbb{F}$ 上的多元多项式，由 $f(b_1, \cdots, b_r) = |P| \neq 0$，推得 f 是非零多项式. 故一定存在 $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{F}$ 使得 $f(a_1, \cdots, a_r) \neq 0$，即 $N = \sum_{i=1}^{r} a_iQ_i$ 是可逆阵，且 $NA = BN$. 由此得相似不依赖数域的选取.

复盘题 9.7. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 中的线性变换，且 φ 只有有限个不变子空间，对任意 $\alpha \in V$，

$$C(\varphi, \alpha) = \{f(\varphi)\alpha \mid f \in \mathbb{K}[x]\},$$

则 $C(\varphi,\alpha)$ 是 φ 不变子空间，且 $V=\bigcup\limits_{\alpha\in V}C(\varphi,\alpha)$，于是存在 $\beta\in V$, 使得 $V=C(\varphi,\beta)$，即 φ 的特征多项式等于最小多项式.

复盘题 9.8. 设 φ 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 中线性变换，且 φ 的特征多项式和最小多项式分别为 $f(\lambda),m(\lambda)$. 若 $f(\lambda)\neq m(\lambda)$，由有理标准型理论，$\varphi$ 至少有两个非常数不变因子 $d(\lambda),m(\lambda)$，不妨设

$$C(\varphi,\beta)\oplus C(\varphi,\alpha)$$

其中 φ 限制在 $C(\varphi,\alpha)$ 上的最小多项式为 $m(\lambda)$，φ 限制在 $C(\varphi,\beta)$ 上的最小多项式为 $d(\lambda)$. 现在构造 φ 的不变子空间集

$$S_\varphi=\{C(\varphi,\alpha+k\beta)\mid k\in\mathbb{K}\}$$

则若 $C(\varphi,\alpha+k_1\beta)=C(\varphi,\alpha+k_2\beta)$，则存在 $g\in\mathbb{K}[x]$ 使得

$$g(\varphi)(\alpha+k_1\beta)=\alpha+k_2\beta,$$

由直和就有

$$(g(\varphi)-\mathrm{id}_V)\alpha=(k_1g(\varphi)-k_2\mathrm{id}_V)\beta=0$$

一这样一定有 $g(x)=1$，即 $k_1=k_2$. 于是我们得到了 φ 无限个不同的不变子空间. 综上，我们从不变子空间个数的角度给出了 φ 特征多项式等于最小多项式的等价判定，并在前面详细讨论过当最小多项式等于特征多项式时，如何找出 φ 的所有不变子空间.

复盘题 9.9. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，M 是 $\mathrm{End}(V)$ 的子空间，满足其中元素都可以对角化，且两两可换，则 M 中元素可同时对角化，于是 $\dim M\in[0,n]$. 记 M^* 是 M 的对偶空间，对任意 $f\in M^*$，定义

$$V_f=\{\alpha\in V\mid\varphi(\alpha)=f(\varphi)(\alpha),\forall\varphi\in M\}$$

则 V_f 是 V 的子空间，且若 $V_f\neq\{0\}$, 则对任意非零元素 $\alpha\in V_f$，α 是 M 中所有元素公共的特征向量. 反之，若 α 是 M 中 M 所有元素公共特征向量，则 α 诱导了 M 的一个线性函数 f_α，使得 $V_{f_\alpha}\neq\{0\}$.

若 $f_1,\cdots,f_s$ 是 M 上 s 个不同的线性函数，且 $V_{f_i}\neq\{0\}$，则 $\ker(f_i-f_j)(i\neq g)$ 是 M 的真子空间，由此得

$$M\neq\bigcup_{i,j=1}^{s}\ker(f_i-f_j),\quad i\neq j.$$

即存在 $\psi \in M$ 使得 $f_i(\psi) \neq f_j(\psi)$. 现在设 $0 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i, \alpha_i \in V_{f_i}$，则

$$0 = \psi^k \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{s} f_i(\psi)^k \alpha_i, \quad 1 \leq k \leq s$$

由 Vandermonde 行列式的性质即得 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$，于是有 $\bigoplus\limits_{i=1}^{s} V_{f_i}$. 综上解释：集合

$$\varOmega = \{ f \in M^* \mid V_f \neq \{0\} \}$$

是非空有限集，且 $V = \bigoplus\limits_{f \in \varOmega} V_f$.

10 复盘 10

复盘题 10.1. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵，若 A 不是数乘变换，则存在 $\alpha \in \mathbb{K}^n$，使得 $\alpha, A\alpha$ 线性无关. 由此证明：若 $\operatorname{tr}(A) = 0$，则 A 相似于 $\mathbb{K}$ 上的一个主对角元全为零的矩阵.

解: 第一步证明存在性. 假设对任意 $\alpha \in \mathbb{K}^n$，向量 α 与 $A\alpha$ 均线性相关. 则对每个非零向量 α，存在标量 c_α 使得 $A\alpha = c_\alpha \alpha$. 任取两个线性无关的向量 α, β. 则有 $A(\alpha+\beta) = c_{\alpha+\beta}(\alpha+\beta)$. 又因 $A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = c_\alpha \alpha + c_\beta \beta$. 比较可得 $(c_{\alpha+\beta} - c_\alpha)\alpha + (c_{\alpha+\beta} - c_\beta)\beta = 0$. 因 α, β 线性无关，故 $c_\alpha = c_\beta = c_{\alpha+\beta}$. 这说明 A 对应所有向量的特征值均相同，即 $A = cI_n$ 为数乘变换，与已知条件矛盾. 故必然存在 α 使得 $\alpha, A\alpha$ 线性无关.

第二步采用数学归纳法证明相似性. 对矩阵阶数 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时, $\operatorname{tr}(A) = 0 \implies A = 0$，显然成立. 假设对于 $n-1$ 阶迹为零的矩阵，结论均成立. 对于 n 阶迹为零的矩阵 A，若 $A = O$，结论显然. 若 $A \neq O$，因 $\operatorname{tr}(A) = 0$ 且矩阵非零，知 A 绝不可能是非零的数乘变换. 由第一步结论，存在 α_1 使得 $\alpha_1, A\alpha_1$ 线性无关. 将 $\alpha_1, A\alpha_1$ 扩充为 $\mathbb{K}^n$ 的一组基 $P = (\alpha_1, A\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 在此基底下，$A$ 的相似矩阵 $P^{-1}AP$ 的第一列为 $(0, 1, 0, \ldots, 0)^T$. 即 A 相似于分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A_1 \end{pmatrix}$，其中 A_1 为 $n-1$ 阶方阵. 由相似矩阵迹相同的性质，有 $\operatorname{tr}(A_1) = \operatorname{tr}(A) = 0$. 根据归纳假设，$A_1$ 相似于主对角元全为零的矩阵 B_1，即存在可逆阵 Q_1 使 $Q_1^{-1} A_1 Q_1 = B_1$. 令分块对角阵 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$，作相似变换:

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A_1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B_1 \end{pmatrix}.$$

该矩阵的主对角线元素全为零，归纳成立. ■

复盘题 10.2. 注意 $[E_{ij}, E_{kl}] = \begin{cases} E_{ii} - E_{jj}, & i = l, j = k. \\ E_{il}, & i \neq l, j = k. \end{cases}$，这样就有

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{E_{11} - E_{kk}, E_{ij} \mid 2 \leq k \leq n, 1 \leq i \neq j \leq n\} &\subset \left\{\sum_i [A_i, B_i] \mid A_i, B_i \in \mathbb{K}^{n\times n}\right\} \\ &\subset \left\{A \mid A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \operatorname{tr}(A) = 0\right\} \end{aligned}$$

即

$$\left\{\sum_i [A_i, B_i] \mid A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}\right\} = \left\{A \mid A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \operatorname{tr}(A) = 0\right\}$$

复盘题 10.3. 设 A 是 n 阶复矩阵，则 A 可以唯一分解为 $A = B + C$，其中 B 是半单的，C 是幂零的，且 $[B, C] = O$. 进一步，对任意 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换:

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{C}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n} \\ X &\longmapsto [A, X] \end{aligned}$$

则 $\varphi_A = \varphi_B + \varphi_C$，且 φ_B 是半单的，φ_C 是幂零的，且对任意 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$，有

$$[\varphi_B, \varphi_C](X) = [B, [C, X]] - [C, [B, X]] = [[B, C], X] = O,$$

即 $[\varphi_B, \varphi_C] = 0$，综上就有 $\varphi_A = \varphi_B + \varphi_C$ 是 φ_A 的 Jordan-Chevalley 分解. 若我们记 $U = \{\varphi_A \mid A \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$，则 U 是 $\operatorname{End}(\mathbb{C}^{n\times n})$ 的子空间，且 $\dim U = n^2 - 1$.

解: 此处仅补充对空间 U 维数的证明. 定义映射 $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \operatorname{End}(\mathbb{C}^{n\times n})$，其对应规则为

$$\Phi(A) = \varphi_A.$$

显然 Φ 保持加法和数乘，是一个线性映射，且其像空间 $\operatorname{im}\Phi = U$. 考察 Φ 的核空间 $\ker\Phi$. 若 $A \in \ker\Phi$，则 $\varphi_A = O$. 即对任意矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$，均有

$$[A, X] = AX - XA = O.$$

这表明矩阵 A 必须与所有 n 阶方阵乘法可交换. 由 Schur 引理（或矩阵乘法基本性质）可知，与所有方阵交换的矩阵必定是数量矩阵. 故 $\ker\Phi = \{kI_n \mid k \in \mathbb{C}\}$. 显然 $\ker\Phi$ 的维数为 1. 由线性映射的维数定理公式，有

$$\dim(\operatorname{im}\Phi) + \dim(\ker\Phi) = \dim(\mathbb{C}^{n\times n}).$$

代入数值即得 $\dim U + 1 = n^2$. 故 $\dim U = n^2 - 1$. ∎

复盘题 10.4. 设有 n^2 个非零矩阵 A_{ij} 满足 $A_{ij}A_{kl} = \delta_{jk}A_{il}$. 若 $P = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 满足 $A_{ij}P = PE_{ij}$，则 P 需满足 $A_{ij}\alpha_k = \delta_{jk}\alpha_i$. 由于 $A_{11} \neq O$，存在 β 使得 $A_{11}\beta \neq 0$，现在令 $\beta_i = A_{i1}\beta$，则 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 线性无关，且满足 $A_{ij}\beta_k = \delta_{jk}\beta_i$，即存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}A_{ij}P = E_{ij}$. 综上解决：设 φ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的可逆线性变换，且满足

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B),$$

找出所有满足条件的 φ.

解: 由题意，映射 φ 保持矩阵乘法结构. 考察标准基矩阵 E_{ij}，它们满足乘法关系 $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. 对等式两边作用 φ，有

$$\varphi(E_{ij})\varphi(E_{kl}) = \varphi(E_{ij}E_{kl}) = \delta_{jk}\varphi(E_{il}).$$

令 $A_{ij} = \varphi(E_{ij})$. 由于 φ 是可逆线性变换，基的像必不为零，故 $A_{ij} \neq O$. 上述关系完全符合题目推导给出的 $A_{ij}A_{kl} = \delta_{jk}A_{il}$ 结构. 由题干中的结论已知，必定存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}\varphi(E_{ij})P = E_{ij} \implies \varphi(E_{ij}) = PE_{ij}P^{-1}.$$

由于 $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ 构成了全空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的一组基，且 φ 是线性变换. 对任意矩阵 $X = \sum x_{ij}E_{ij}$，由线性扩张可得

$$\varphi(X) = \varphi\left(\sum_{i,j} x_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j} x_{ij}\varphi(E_{ij}).$$

代入可得

$$\varphi(X) = \sum_{i,j} x_{ij}PE_{ij}P^{-1} = P\left(\sum_{i,j} x_{ij}E_{ij}\right)P^{-1} = PXP^{-1}.$$

故所有满足该条件的代数自同构 φ，均可唯一表示为某个可逆矩阵 P 导出的内自同构形式 $\varphi(X) = PXP^{-1}$. ■

复盘题 10.5. 设 $J(\lambda, n)$ 是关于 λ 的 n 阶 Jordan 块，则当 $\lambda \neq 0$ 时，$J^m(\lambda, n)$ 的 Jordan 型为 $J(\lambda^m, n)$，其中 m 是非零整数. 当 $\lambda = 0$ 时，讨论 $J^k(0, n)$ 的 Jordan 型，其中 k 是正整数.

解: (1) 当 $\lambda \neq 0$ 时，将 Jordan 块分解为 $J = \lambda I_n + N$，其中 N 为幂零指数等于 n 的标准上移位矩阵. 由二项式展开有

$$J^m = (\lambda I_n + N)^m = \lambda^m I_n + m\lambda^{m-1}N + \dots$$

由于 $m \neq 0$ 且 $\lambda \neq 0$，其次对角线元素 $m\lambda^{m-1} \neq 0$. 这保证了 $J^m - \lambda^m I_n$ 的秩恰好为 $n-1$，从而对应特征值 λ^m 的几何重数为 $n-(n-1)=1$. 故其特征子空间仅有一维，只能构成一个 Jordan 块. 其 Jordan 型为 $J(\lambda^m, n)$.

(2) 当 $\lambda = 0$ 时，$J = J(0,n) = N$. 矩阵 N^k 的作用是将向量的坐标统一上移 k 个位置. 其秩为 $\max\{0, n-k\}$，从而零特征值的几何重数为

$$\dim(\ker N^k) = n - \max\{0, n-k\} = \min\{n, k\}.$$

这意味着 N^k 对应的 Jordan 标准型中恰好包含 $\min\{n,k\}$ 个 Jordan 块. 进一步，利用带余除法设 $n = qk + r$，其中 $0 \leq r < k$. 矩阵 N^k 的幂零指数为 $\lceil n/k \rceil$. 其 Jordan 块大小的分布规律为：共有 r 个阶数为 $q+1$ 的 Jordan 块，以及 $k-r$ 个阶数为 q 的 Jordan 块. 所有这些块的对角拼接，即为 $J^k(0,n)$ 的 Jordan 型. ■

复盘题 10.6. 复矩阵 A 可以分解为 $A = BC$，其中 B, C 是对称阵，并可指定其中之一可逆，由此证明 A 相似于一个复对称阵.

解：根据题意，不失一般性可设分解 $A = BC$ 中，对称矩阵 B 是可逆阵. 由于 B 是一个非奇异的复对称矩阵，根据复对称矩阵的相抵标准型理论，必定存在一个可逆的复矩阵 P，使得

$$B = P^T P.$$

将该表达式代入 A 的分解式中，有

$$A = P^T P C.$$

采用矩阵 $(P^T)^{-1}$ 对 A 进行相似变换：

$$(P^T)^{-1} A P^T = (P^T)^{-1}(P^T P C) P^T = P C P^T.$$

考察所得新矩阵 PCP^T 的对称性. 对其转置有

$$(PCP^T)^T = (P^T)^T C^T P^T = PCP^T.$$

这里利用了 C 是对称矩阵（$C^T = C$）的条件. 该等式表明，相似变换后得到的矩阵 PCP^T 确为复对称矩阵. 故复矩阵 A 必定相似于一个复对称阵. ■

复盘题 10.7. 设 A 是 n 阶复矩阵，则存在复对称阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = A'$.

解：由 Jordan 标准型理论，任意方阵 A 必定相似于其转置阵 A'. 具体而言，对于单个 Jordan 块 J，引入副对角线全为 1 的对称正交矩阵 P_0. 易验证 $P_0 = P_0^T, P_0^2 = I_n$，且满足 $P_0 J P_0 =$

$J^T \implies JP_0 = P_0J^T$. 对 A 的 Jordan 标准型 $J_A = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_k)$，拼接对应的副对角阵 $P = \mathrm{diag}(P_1, \ldots, P_k)$，则 P 对称可逆且满足

$$J_AP = PJ_A^T.$$

设存在可逆阵 M 使 $A = MJ_AM^{-1}$. 则有 $J_A = M^{-1}AM$. 代入上式有

$$M^{-1}AMP = P(M^{-1}AM)^T = PM^TA^T(M^T)^{-1}.$$

两边左乘 M，右乘 M^T，整理可得

$$AMPM^T = MPM^TA^T.$$

构造矩阵 $Q = MPM^T$. 首先，因 M, P 均可逆，故 Q 必为可逆阵. 其次，对 Q 取转置:

$$Q^T = (MPM^T)^T = (M^T)^TP^TM^T = MPM^T = Q.$$

故 Q 是复对称阵. 将 Q 代回原等式即得 $AQ = QA^T$，从而

$$Q^{-1}AQ = A^T = A'.$$

■

复盘题 10.8. 若 $AB = BA = O$，且 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$，则 $\mathrm{rank}(A + B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

解: 由秩的性质 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$ 可知，映射限制 $A|_{\mathrm{im}A}$ 为满射，故 $\mathrm{im}A \cap \ker A = \{0\}$. 结合维数定理可得全空间的直和分解:

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{im}A \oplus \ker A.$$

由 $BA = O$ 知，$\mathrm{im}A \subseteq \ker B$. 由 $AB = O$ 知，$\mathrm{im}B \subseteq \ker A$. 考察变换 $A + B$ 的核空间 $\ker(A + B)$. 设 $(A + B)x = 0$，即 $Ax + Bx = 0$. 由于 $Ax \in \mathrm{im}A$，且 $Bx \in \mathrm{im}B \subseteq \ker A$. 根据直和分解 $\mathrm{im}A \cap \ker A = \{0\}$，必须有

$$Ax = 0 \quad 且 \quad Bx = 0.$$

故 $\ker(A + B) = \ker A \cap \ker B$. 由维数公式，有

$$\mathrm{rank}(A + B) = n - \dim(\ker A \cap \ker B).$$

考察 B 限制在子空间 $\ker A$ 上的映射 $B|_{\ker A} : \ker A \to \mathbb{K}^n$. 由于全空间中任意向量 $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in \mathrm{im}A, x_2 \in \ker A$)，由 $\mathrm{im}A \subseteq \ker B$ 知 $Bx = Bx_2$. 故 $\mathrm{im}(B|_{\ker A}) = \mathrm{im}B$，即该限制映射

的像空间维数与 B 的秩相同. 该限制映射的核空间恰为 $\ker A \cap \ker B$. 对该限制映射应用维数公式:

$$\dim(\ker A) = \dim(\ker A \cap \ker B) + \dim(\mathrm{im} B).$$

即 $n - \mathrm{rank}(A) = \dim(\ker A \cap \ker B) + \mathrm{rank}(B)$. 代入前述 $\mathrm{rank}(A+B)$ 的等式，得

$$\mathrm{rank}(A+B) = n - [n - \mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(B)] = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

∎

复盘题 10.9. 设 $J(0,n)X = XJ(0,m)$. 当 $m = n$ 时，$X = f(J(0,n))$. 否则不妨设 $n > m$，则

$$0 = \begin{pmatrix} O & I_{n-m} \\ O & O \end{pmatrix} X = J^m(0,n)X = XJ^m(0,m),$$

由此得 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ O \end{pmatrix}$，其中 X_1 是 m 阶方阵. 且 $J(0,m)X_1 = J(0,m)X_1$，由此得 $X = \begin{pmatrix} f(J(0,m)) \\ O \end{pmatrix}$. 综上解释：若 A 是 n 阶复矩阵，令

$$C(A) = \left\{X \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid [A, X] = O\right\}$$

记 A 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}, \quad 1 \le i \le s$, 则 $C(A)$ 的维数为

$$\dim C(A) = \sum_{i,j=1}^{s} \deg((\lambda - \lambda_i)^{r_i}, (\lambda - \lambda_j)^{r_j})$$

于是 $\dim C(A) \ge n$，且等号成立当且仅当 λ_i 互不相同.

复盘题 10.10. 设 A, B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 阶方阵. 现在取定 AB 的一个非零特征值 λ 和任意 $1 \le k \le n$，记

$$W_1 = \ker(\lambda I - AB)^k, \quad W_2 = \ker(\lambda I - BA)^k$$

对任意 $\alpha \in W_1$，有

$$0 = B(\lambda I - AB)^k(\alpha) = (\lambda I - BA)B(\lambda I - AB)^{k-1}(\alpha) = \cdots = (\lambda I - BA)^k(B\alpha),$$

即 $B(\alpha)\in W_2$. 于是可以定义

$$\begin{aligned}\varphi: W_1 &\longrightarrow W_2\\ \alpha &\longmapsto B\alpha\end{aligned}$$

对任意 $\alpha\in\ker\varphi$，有

$$0=(\lambda I-AB)^k\alpha=(\lambda I-AB)^{k-1}(\lambda\alpha)=\cdots=\lambda^k\alpha$$

即 φ 是单射，由此得 $\dim W_1\leq\dim W_2$，同理得 $\dim W_2\leq\dim W_1$，即 $\dim W_1=\dim W_2$. 由此得

$$\operatorname{rank}(\lambda I-AB)^{k-1}-\operatorname{rank}(\lambda I-AB)^k=\operatorname{rank}(\lambda I-BA)^{k-1}-\operatorname{rank}(\lambda I-BA)^k$$

综上解释：AB 与 BA 有相同的非零 Jordan 块.

11 复盘 11

复盘题 11.1. 设 A 是 n 阶可逆实矩阵，求 $\begin{pmatrix}O & A\\ A' & O\end{pmatrix}$ 的正负惯性指数.

解：记该对称矩阵为 $M=\begin{pmatrix}O & A\\ A' & O\end{pmatrix}$. 考察其特征多项式：

$$|\lambda I_{2n}-M|=\begin{vmatrix}\lambda I_n & -A\\ -A' & \lambda I_n\end{vmatrix}.$$

利用分块矩阵行列式的 Schur 补展开，有

$$|\lambda I_{2n}-M|=|\lambda I_n|\cdot|\lambda I_n-(-A')(\lambda I_n)^{-1}(-A)|=|\lambda^2 I_n-A'A|.$$

因 A 可逆，$A'A$ 是正定实对称矩阵. 设 $A'A$ 的 n 个特征值为 $\sigma_1^2,\ldots,\sigma_n^2>0$（即 A 的奇异值的平方）. 由 $|\lambda^2 I_n-A'A|=0$ 得，M 的特征值为 $\lambda=\pm\sigma_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. 这说明 M 恰好有 n 个正特征值和 n 个负特征值. 故该矩阵的正负惯性指数均为 n. ■

复盘题 11.2. 设 A 是 n 阶正定阵，则 $\begin{pmatrix}A & -I_n\\ -I_n & A^{-1}\end{pmatrix}$ 半正定，由此得 $\alpha'A\alpha+\beta'A^{-1}\beta-2\alpha'\beta\geq 0$.

解: 对该分块对称矩阵进行合同变换，左乘下三角块矩阵，右乘其转置：

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

因 A 正定，上述合同标准型显然是半正定的，故原矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{pmatrix}$ 半正定. 对任意向量 $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$，由半正定性有 $x'Mx \geq 0$. 展开二次型：

$$\begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \alpha' A\alpha + \alpha'(-I_n)(-\beta) + (-\beta')(-I_n)\alpha + (-\beta')A^{-1}(-\beta).$$

化简即得：

$$\alpha' A\alpha + \beta' A^{-1}\beta + 2\alpha'\beta \geq 0.$$

将 β 替换为 $-\beta$，即得

$$\alpha' A\alpha + \beta' A^{-1}\beta - 2\alpha'\beta \geq 0.$$

■

复盘题 11.3. *A 正定当且仅当存在唯一对角元全是正数的上三角阵 C，使得 $A = C'C$.*

解: 此即 Cholesky 分解定理. 充分性：若存在可逆矩阵 C 使得 $A = C'C$，对任意非零 x，有 $x'Ax = x'C'Cx = \|Cx\|^2 > 0$，故 A 正定. 必要性（存在性与唯一性）：对阶数 n 作数学归纳法. 当 $n = 1$ 时，$a_{11} > 0$，取 $c_{11} = \sqrt{a_{11}} > 0$ 唯一存在. 设 $n-1$ 阶正定阵结论成立. 对 n 阶正定阵 A 进行分块：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha' \\ \alpha & A_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & v' \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}.$$

令 $A = C'C$，展开对比分块得：

$$a_{11} = c_{11}^2 \implies c_{11} = \sqrt{a_{11}} > 0 \quad (\text{唯一}).$$

$$\alpha = c_{11}v \implies v = \frac{1}{c_{11}}\alpha \quad (\text{唯一}).$$

$$A_1 = vv' + C_1'C_1 \implies C_1'C_1 = A_1 - vv'.$$

由正定矩阵的 Schur 补性质知，$A_1 - vv' = A_1 - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha'$ 为正定阵. 由归纳假设，存在唯一的对角元全为正的上三角阵 C_1 满足上式. 故 C 存在且唯一. ■

复盘题 11.4. 设 A 是 n 阶实矩阵，记 A_k 是 A 的第 k 个顺序主子式，当 $A_k \neq 0(1 \leq k \leq n-1)$ 时，A 合同于

$$\operatorname{diag}\left\{A_1, \frac{A_2}{A_1}, \cdots, \frac{A_n}{A_{n-1}}\right\}.$$

特别地，当 $A = (|i-j|)$ 和 $A = (\max\{i,j\})$ 时，A 的顺序主子式有一致的结构，此时求 A 的正负惯性指数.

解: 先用数学归纳法证明对角化形式. 当 $n=1$ 时，$A=(A_1)$，结论显然成立. 假设对 $n-1$ 阶矩阵结论成立，即 A_{n-1} 合同于 $D_{n-1} = \operatorname{diag}\left\{A_1, \frac{A_2}{A_1}, \dots, \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\right\}$. 对 n 阶矩阵 A 作分块 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由于 A_{n-1} 可逆（$|A_{n-1}| = A_{n-1} \neq 0$），作分块合同变换:

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha' A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}.$$

两边取行列式，得 $|A| = |A_{n-1}| \cdot (a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1}\alpha)$. 即 $A_n = A_{n-1}(a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1}\alpha)$，故右下角元素为 $\frac{A_n}{A_{n-1}}$. 由归纳假设，A_{n-1} 合同于 D_{n-1}，故 A 合同于 $\operatorname{diag}\left\{D_{n-1}, \frac{A_n}{A_{n-1}}\right\}$. 归纳成立.

应用该结论于两个特殊矩阵: (1) 当 $A = (\max\{i,j\})$ 时，计算其顺序主子式. 求得 $A_k = k(-1)^{k-1}$. 代入对角化公式，合同标准型的对角元为 $d_1 = A_1 = 1$，且对于 $k \geq 2$ 有

$$d_k = \frac{A_k}{A_{k-1}} = \frac{k(-1)^{k-1}}{(k-1)(-1)^{k-2}} = -\frac{k}{k-1} < 0.$$

故该矩阵的正惯性指数为 1，负惯性指数为 $n-1$.

(2) 当 $A = (|i-j|)$ 时，计算其顺序主子式. 求得 $A_1 = 0$，且对于 $k \geq 2$ 有 $A_k = (-1)^{k-1}(k-1)2^{k-2}$.（注：当 $A_1 = 0$ 时需应用广义顺序主子式符号法则，即符号序列中非零项的变号数对应负惯性指数）. 由于序列 $1, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ 即 $1, 0, -1, 4, -12, \dots$. 依据 0 被异号项夹逼的变号规则，其符号变号数为 $n-1$. 故该矩阵的正惯性指数为 1，负惯性指数为 $n-1$. ■

复盘题 11.5. 设 A 是 n 阶正定实对称阵且非主对角元都是负数，则 A^{-1} 的每个元素都是正数.

解: 对矩阵的阶数 n 作数学归纳法. 当 $n=1$ 时，$A=(a_{11})$，因 A 正定，故 $a_{11} > 0$. 其逆 $A^{-1} = (1/a_{11}) > 0$，结论成立. 假设对 $n-1$ 阶满足条件的矩阵，结论均成立. 对于 n 阶矩阵 A，将其分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

其中 A_{n-1} 为 $n-1$ 阶正定实对称阵，且其非主对角元均为负数. 由归纳假设，A_{n-1}^{-1} 的每个元素均严格大于 0，即 $A_{n-1}^{-1}>0$. 同时，α 为 A 的最后列去掉 a_{nn} 的部分，由题意“非主对角元都是负数”知，$\alpha<0$（向量所有元素严格小于 0）. 设 A^{-1} 的对应分块为 $\begin{pmatrix} B & \beta \\ \beta' & b_{nn} \end{pmatrix}$. 作分块初等变换求解其逆矩阵，利用 Schur 补展开可得：

$$b_{nn}=(a_{nn}-\alpha' A_{n-1}^{-1}\alpha)^{-1}.$$

由于 A 正定，其 Schur 补 $a_{nn}-\alpha' A_{n-1}^{-1}\alpha>0$，故 $b_{nn}>0$. 右上角分块解得：

$$\beta=-A_{n-1}^{-1}\alpha b_{nn}.$$

因为矩阵 $A_{n-1}^{-1}>0$ 且向量 $\alpha<0$，其乘积必然为负向量，即 $A_{n-1}^{-1}\alpha<0$. 又因 $b_{nn}>0$，故 $\beta=-(A_{n-1}^{-1}\alpha)b_{nn}>0$（向量所有元素严格大于 0）. 左上角分块解得：

$$B=A_{n-1}^{-1}+A_{n-1}^{-1}\alpha b_{nn}\alpha' A_{n-1}^{-1}=A_{n-1}^{-1}+\frac{1}{b_{nn}}\beta\beta'.$$

由于 $A_{n-1}^{-1}>0$，且 $\beta>0, b_{nn}>0$ 使得矩阵 $\frac{1}{b_{nn}}\beta\beta'>0$. 两元素全为正的矩阵相加，必然有 $B>0$. 综上所述，A^{-1} 的所有分块（B,β,β',b_{nn}）的每个元素均严格大于 0. 归纳成立. ■

复盘题 11.6. 设 A 是 n 阶实对称阵，且 A 的正负惯性指数分别为 p,q，令

$$N_A=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x'Ax=0\}$$

记 $U\subset N_A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $\dim U\le n-\max\{p,q\}$，并说明等号可以取到，且 N_A 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间当且仅当 $p=0$ 或者 $q=0$. 类似定义

$$N_A^+=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x'Ax>0\},$$

记 $U\subset N_A^+$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $\dim U\le p$, 并说明等号可以取到, 同理可以考虑 N_A^-.

解: 存在可逆阵 P 使得 A 合同于 $\mathrm{diag}(I_p,-I_q,O)$. 对应的二次型为 $f(y)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$. 记 $W_+=\mathrm{span}(e_1,\ldots,e_p)$ 为正定子空间. 若 $\dim U>n-p$，由维数公式知 $U\cap W_+\ne\{0\}$. 取非零向量 $y\in U\cap W_+$，则 $f(y)>0$，与 $U\subset N_A$ 矛盾. 故 $\dim U\le n-p$. 同理可证 $\dim U\le n-q$. 综上，$\dim U\le n-\max\{p,q\}$. 等号可以取到：取 $y_i=y_{p+i}$ $(i=1,\ldots,\min(p,q))$ 且 y 的剩余非零分量均位于零特征值对应的坐标上，构成的子空间维数即为 $n-\max\{p,q\}$. 若 N_A 是子空间，则必须对加法封闭. 若 $p>0$ 且 $q>0$，则 $e_1+e_{p+1}\in N_A$ 且 $e_1-e_{p+1}\in N_A$，但其和 $2e_1\notin N_A$，产生矛盾. 故 N_A 为子空间当且仅当 $p=0$ 或 $q=0$. 对于 $U\subset N_A^+$，同样若 $\dim U>p$，则 U 必与由后 $n-p$ 个基向量生成的半负定子空间有非零交集，矛盾. 故 $\dim U\le p$. 取 W_+ 即达等号. ■

复盘题 11.7. 一个秩大于一的实二次型可以分解为两个实系数一次多项式之积的充要条件是它的秩是 2，且符号差为零.

解: 设二次型为 $f(x)=x'Ax$，其中 $x=(x_1,\dots,x_n)'$ 为变量列向量，A 为实对称阵. 必要性：若二次型可分解为两个实系数一次多项式之积，可设

$$f(x)=(\alpha'x)(\beta'x).$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 为两个常向量. 将其展开并配成对称矩阵形式，对应的矩阵为

$$A=\frac{1}{2}(\alpha\beta'+\beta\alpha').$$

由于 A 是两个秩至多为 1 的矩阵相加，其秩 $\operatorname{rank}(A)\le 2$. 已知二次型的秩大于 1，故 $\operatorname{rank}(A)=2$. 这也意味着向量 α,β 必须线性无关. 利用平方差公式，将二次型重写为：

$$f(x)=\frac{1}{4}\left((\alpha+\beta)'x\right)^2-\frac{1}{4}\left((\alpha-\beta)'x\right)^2.$$

由于 α,β 线性无关，向量 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 亦线性无关. 故可通过满秩线性变换，将 $y_1=(\alpha+\beta)'x$ 与 $y_2=(\alpha-\beta)'x$ 映射为新坐标系的前两个分量. 此时标准型恰含一个正平方项和一个负平方项，即正负惯性指数 $p=1,q=1$. 符号差为 $p-q=0$.

充分性：若 $\operatorname{rank}(A)=2$ 且符号差为 0，则必有 $p=1,q=1$. 经过非奇异线性代换 $x=Py$，二次型的标准型为

$$f(Py)=y_1^2-y_2^2.$$

在实数域内直接因式分解得

$$y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2).$$

由于 y_1,y_2 均为 x 的实系数一次齐次多项式，代回原坐标系即得 $f(x)$ 为两个实系数一次多项式之积. ■

复盘题 11.8. 设

$$f=\sum_{i=1}^{n}(x_i-s)^2,\quad s=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

令 $y_i=x_i-s(1\le i\le n-1),y_n=x_n$，则 $ns=\sum_{i=1}^{n}y_i+(n-1)s$，即 $s=\sum_{i=1}^{n}y_i$，于是 x_i 也可以由 y_i 表出，即上述所做变换是可逆，且

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)^2,$$

由此求出 f 的正规标准型.

解: 由题意，将二次型通过可逆线性变换化为关于变量 $y_1,\ldots,y_{n-1}$ 的二次型:

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)^2.$$

写成矩阵形式为 $f(y)=y'My$，其中 $y=(y_1,\ldots,y_{n-1})'$. 对应的 $(n-1)$ 阶矩阵为

$$M=I_{n-1}+ee',$$

其中 $e=(1,1,\ldots,1)'$. 矩阵 ee' 的秩为 1，其唯一非零特征值为其迹 $\mathrm{tr}(ee')=n-1$. 故矩阵 M 的特征值为 $1+(n-1)=n$（一重），以及 $1+0=1$（$n-2$ 重）. 由于所有特征值均大于 0，M 是正定矩阵. 因此，该二次型在 $(n-1)$ 维空间上的正负惯性指数为 $p=n-1,q=0$. 其正规标准型为

$$f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{n-1}^2.$$

■

复盘题 11.9. 求 $f(X)=\mathrm{tr}(X^2),X=(x_{ij})$ 和 $f=\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ 的正负惯性指数.

解: (1) 对于 $f(X)=\mathrm{tr}(X^2)$: 将方阵 X 唯一分解为对称阵与反对称阵之和 $X=S+K$. 则 $X^2=S^2+SK+KS+K^2$. 取迹得 $\mathrm{tr}(X^2)=\mathrm{tr}(S^2)+\mathrm{tr}(K^2)+2\mathrm{tr}(SK)$. 由于 S 对称，K 反对称，$\mathrm{tr}(SK)=0$. 且 $\mathrm{tr}(K^2)=-\mathrm{tr}(K^TK)$. 故 $f(X)=\mathrm{tr}(S^2)-\mathrm{tr}(K^TK)$. S 和 K 构成了全空间的直和分解. 其中 S 所在子空间维数为 $\frac{n(n+1)}{2}$，其上二次型严格正定；K 所在子空间维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$，其上二次型严格负定. 故 $p=\frac{n(n+1)}{2},q=\frac{n(n-1)}{2}$.

(2) 对于 $f=\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$: 其对应的实对称阵 A 为带状矩阵，主对角线全为 0，次对角线全为 $\frac{1}{2}$. 该矩阵 A 的特征值有显式解析解:

$$\lambda_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\quad k=1,2,\ldots,n.$$

显然，当 $1\le k<\frac{n+1}{2}$ 时，$\lambda_k>0$. 当 $\frac{n+1}{2}<k\le n$ 时，$\lambda_k<0$. 若 n 为偶数，没有特征值为 0，正特征值与负特征值各有 $\frac{n}{2}$ 个. 若 n 为奇数，存在一个零特征值，正负特征值各有 $\frac{n-1}{2}$ 个. 综合可得 $p=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,q=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. ■

复盘题 11.10. 设 $n\ge 3$，若 A 是正定实对称阵，S 是反对称阵，则 $\det(A+S)\ge\det A+\det(S)$，等号成立当且仅当 $A=O$. 由此解释: 若 A 是亚正定的，且 $A\ne A'$，则 $\det(2A)>\det(A+A')$.

解：提公因式 $A^{1/2}$，有

$$A+S=A^{1/2}(I_n+A^{-1/2}SA^{-1/2})A^{1/2}.$$

令 $K=A^{-1/2}SA^{-1/2}$，易证 K 亦为反对称阵. 故 K 的特征值在复数域上均为纯虚数或零，成对共轭出现，设为 $\pm i\mu_j$ $(j=1,\dots,\lfloor n/2\rfloor)$.

$$|I_n+K|=\prod_j(1+i\mu_j)(1-i\mu_j)=\prod_j(1+\mu_j^2).$$

展开连乘积可得

$$\prod_j(1+\mu_j^2)\geq 1+\prod_j\mu_j^2.$$

注意 $\prod\mu_j^2$ 恰为 $|K|$. 故 $|I_n+K|\geq 1+|K|$. 两边同乘 $|A|$，得

$$|A+S|=|A||I_n+K|\geq|A|+|A||K|=|A|+|S|.$$

等号成立要求展开项全为零，即 $S=O$.（题目中等号成立条件 $A=O$ 表述有误，应为 $S=O$）. 应用：若 A 亚正定，即将 A 唯一分解为对称部分 $H=\frac{A+A'}{2}$ 与反对称部分 $S=\frac{A-A'}{2}$. 亚正定意味着 H 是正定阵. 由前述不等式：

$$|A|=|H+S|\geq|H|+|S|.$$

因 $A\neq A'$，故 $S\neq O$，且对于反对称阵 $|S|\geq 0$. 若 $n\geq 3$，对于不可逆反对称阵严格不等号可能不取在 $|S|$ 上，但在特征值连乘展开中，只要 $S\neq O$，必存在 $\mu_j\neq 0$，从而 $|I+K|>1$. 故 $|A|>|H|=|\frac{A+A'}{2}|=2^{-n}|A+A'|$. 两边同乘 2^n 即得 $\det(2A)>\det(A+A')$. ■

复盘题 11.11. 设非零向量 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，则 $\alpha'\beta>0$ 当且仅当存在正定阵 A，使得 $\alpha=A\beta$.

解：充分性：若存在正定阵 A 使得 $\alpha=A\beta$. 因 $\beta\neq 0$ 且 A 正定，二次型必大于零：

$$\alpha'\beta=(A\beta)'\beta=\beta'A\beta>0.$$

必要性：若 $\alpha'\beta>0$. 取 $\beta_1=\beta/\|\beta\|$，并将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$. 设 α 在该基底下的坐标分解为 $\alpha=c_1\beta_1+\sum_{i=2}^n c_i\beta_i$. 由于 $\alpha'\beta>0$，有

$$c_1=\alpha'\beta_1=\frac{\alpha'\beta}{\|\beta\|}>0.$$

我们需要构造一个正定阵 M，使得 $Me_1=v$，其中 $v=(c_1/\|\beta\|,c_2/\|\beta\|,\dots,c_n/\|\beta\|)'$. 构造分块矩阵 $M=\begin{pmatrix}v_1 & u'\\ u & \lambda I\end{pmatrix}$，其中 $v_1=c_1/\|\beta\|>0$，$u=(v_2,\dots,v_n)'$. 由 Schur 补性质，只要选取足够大的实数 $\lambda>0$，使得 $\lambda I-\frac{1}{v_1}uu'$ 正定，则 M 必然正定. 在标准正交基 $P=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ 下，定义 $A=PMP'$. 显然 A 是正定阵，且

$$A\beta=PMP'(\|\beta\|\beta_1)=\|\beta\|P(Me_1)=\|\beta\|Pv=\alpha.$$

故存在满足条件的正定阵. ■

复盘题 11.12. 设 A,B 是 n 阶实对称阵，若 $|A+\mathbf{i}B|=0$，且 B 半正定，则存在非零 $\alpha\in\mathbb{R}^n$，使得 $A\alpha=B\alpha=0$.

解: 因 $|A+iB|=0$，复方阵 $A+iB$ 不可逆，必存在非零复向量 $x=u+iv\in\mathbb{C}^n$ 使得

$$(A+iB)x=0.$$

两边左乘共轭转置 x^*，得

$$x^*(A+iB)x=0 \implies x^*Ax+ix^*Bx=0.$$

因 A,B 为实对称阵，二次型 x^*Ax 和 x^*Bx 的取值必定为纯实数. 为使等式成立，实部与虚部必须同时为零，即

$$x^*Bx=0.$$

由于 B 半正定，二次型为零的充要条件是向量落在其核空间中，故 $Bx=0$. 将 $Bx=0$ 代回原方程 $(A+iB)x=0$，得 $Ax=0$. 由于 $x=u+iv\neq 0$，实部向量 u 和虚部向量 v 中至少有一个是非零实向量. 将 $A(u+iv)=0$ 与 $B(u+iv)=0$ 展开比较实部虚部可得

$$Au=0,\quad Av=0;\quad Bu=0,\quad Bv=0.$$

取 $\alpha=u$（若 $u\neq 0$）或 $\alpha=v$（若 $v\neq 0$），则 α 即为满足 $A\alpha=B\alpha=0$ 的非零实向量. ■

复盘题 11.13. 若 A,B 半正定，且 $C'(A+B)C=\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$，则

$$C'AC=\begin{pmatrix} A_r & O\\ O & O\end{pmatrix},\quad C'BC=\begin{pmatrix} B_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

由此解释：存在可逆阵 P，使得

$$P'AP=\operatorname{diag}\{d_1,\cdots,d_r\}$$

且

$$P'BP=\operatorname{diag}\{1-d_1,\cdots,1-d_r\}.$$

解: 令 $C'AC=\begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ A_2' & A_3\end{pmatrix}$, $C'BC=\begin{pmatrix} B_1 & B_2\\ B_2' & B_3\end{pmatrix}$. 因 A,B 半正定，其合同矩阵 $C'AC$ 与 $C'BC$ 亦半正定. 两式相加得

$$\begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2\\ A_2'+B_2' & A_3+B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

比较右下角分块有 $A_3+B_3=O$. 因半正定阵的主子式（包括对角块）必半正定，即 $A_3\geq 0, B_3\geq 0$. 其和为零矩阵唯一可能的情形是 $A_3=O$ 且 $B_3=O$. 半正定阵中若某对角块全为零，则其所在的整行整列必全为零，从而强制 $A_2=O, B_2=O$. 这就证明了块对角化形式 $C'AC=\begin{pmatrix}A_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$ 与 $C'BC=\begin{pmatrix}B_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$. 且有 $A_r+B_r=I_r$. 由于 A_r 为实对称阵，存在正交矩阵 Q 使得 $Q'A_rQ=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_r)$. 此时 $Q'B_rQ=Q'(I_r-A_r)Q=I_r-\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_r)$. 构造可逆矩阵 $P=C\begin{pmatrix}Q & O\\ O & I\end{pmatrix}$. 对其作合同变换，即同时给 A,B 实现了相应的对角化. ■

复盘题 11.14. 若 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_2' & A_3\end{pmatrix}$ 半正定，则 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A_1)$，由此证明：若 A,B 半正定，则 AB 可对角化.

解: 因 A 半正定，对任意列向量 x，若 $A_1x=0$，则 $x'A_1x=0$. 构造扩充向量 $\tilde{x}=\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$. 则二次型 $\tilde{x}'A\tilde{x}=x'A_1x=0$. 半正定阵的二次型为零，等价于该向量属于矩阵的核空间，即 $A\tilde{x}=0$. 展开得 $A_2'x=0$，转置后得 $x'A_2=0$. 这表明方程 $A_1x=0$ 的解均满足 $A_2^Tx=0$，即 $\ker(A_1)\subseteq\ker(A_2^T)$. 根据正交补空间性质，推得 $\mathrm{im}(A_2)\subseteq\mathrm{im}(A_1)$. 这意味着分块矩阵 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\end{pmatrix}$ 的列空间与 A_1 的列空间完全一致. 故 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A_1)$.

应用：若 $A,B\geq 0$，存在正交阵 Q 将 A 对角化为 $Q'AQ=\begin{pmatrix}\Lambda & O\\ O & O\end{pmatrix}$，其中 $\Lambda>0$. 同作相似变换，考察 $Q'ABQ=(Q'AQ)(Q'BQ)$. 设 $Q'BQ=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_2' & B_3\end{pmatrix}\geq 0$. 相乘得

$$Q'ABQ=\begin{pmatrix}\Lambda B_1 & \Lambda B_2\\ O & O\end{pmatrix}.$$

由第一部分的结论，$B\geq 0 \implies \mathrm{im}(B_2)\subseteq\mathrm{im}(B_1)$，存在矩阵 X 使 $B_2=B_1X$. 作可逆块上三角矩阵 $P=\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix}$ 的相似变换：

$$P^{-1}\begin{pmatrix}\Lambda B_1 & \Lambda B_1X\\ O & O\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}\Lambda B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

由于 $\Lambda>0$ 且 $B_1\geq 0$, 矩阵 ΛB_1 相似于对称阵 $\Lambda^{1/2}B_1\Lambda^{1/2}$, 故必然可对角化. 这说明 $Q'ABQ$ 相似于一个可对角化矩阵，故 AB 可对角化. ■

复盘题 11.15. 若 $A = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ 是 n 阶矩阵, 则 $A'A = \begin{pmatrix} B'B & B'C \\ CB' & C'C \end{pmatrix}$, 由此证明: $\det A^2 \leq \det(B'B)\det(C'C)$.

解: 首先由分块矩阵乘法规则，易得 $A'A = \begin{pmatrix} B' \\ C' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'B & B'C \\ C'B & C'C \end{pmatrix}$. 因为 $A'A$ 是半正定实对称阵（当 A 可逆时为正定阵），其满足著名的 Hadamard 不等式（Fischer 不等式的特例）. 对于正定（或半正定）分块矩阵，其行列式不超过对角块行列式的乘积. 即

$$\det(A'A) \leq \det(B'B) \cdot \det(C'C).$$

由于 A 是 n 阶方阵，利用行列式的乘法性质，有

$$\det(A'A) = \det(A')\det(A) = \det(A)^2.$$

代入不等式即得

$$\det(A)^2 \leq \det(B'B)\det(C'C).$$

■

复盘题 11.16. 设 A, B 是 n 阶半正定实对称阵, 则 $\frac{1}{n}\mathrm{tr}(AB) \geq |AB|^{1/n}$.

解: 由于 A 半正定，存在半正定的平方根矩阵 $A^{1/2}$. 利用迹的循环排列性质，有

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A^{1/2}A^{1/2}B) = \mathrm{tr}(A^{1/2}BA^{1/2}).$$

令 $C = A^{1/2}BA^{1/2}$. 因 B 半正定，且 $A^{1/2}$ 对称，矩阵 C 也是半正定对称阵. 设 C 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$. 则 C 的迹为特征值之和，行列式为特征值之积. 对这 n 个非负实数应用算术-几何平均（AM-GM）不等式，有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/n}.$$

即

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}(C) \geq |C|^{1/n}.$$

由于相似性和乘积性质，行列式 $|C| = |A^{1/2}||B||A^{1/2}| = |A||B| = |AB|$. 代回即得

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}(AB) \geq |AB|^{1/n}.$$

■

复盘题 11.17. 设 A, B 是 n 阶半正定实对称阵，则 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$ 也是半正定的，且 $\operatorname{rank}(A \circ B) \leq \operatorname{rank}(A) \cdot \operatorname{rank}(B)$.

解: 此即著名的 Schur 乘积定理. 由于 A, B 半正定，存在谱分解：

$$A = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k u_k', \quad B = \sum_{l=1}^{s} \mu_l v_l v_l'.$$

其中 $r = \operatorname{rank}(A), s = \operatorname{rank}(B)$，且 $\lambda_k > 0, \mu_l > 0$. 根据 Hadamard 乘积的分配律，有

$$A \circ B = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \mu_l (u_k u_k') \circ (v_l v_l').$$

易证列向量外积的 Hadamard 乘积满足 $(uu') \circ (vv') = (u \circ v)(u \circ v)'$. 故

$$A \circ B = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} (\lambda_k \mu_l)(u_k \circ v_l)(u_k \circ v_l)'.$$

因为 $\lambda_k \mu_l > 0$，上式表明 $A \circ B$ 是若干个半正定阵（列向量自乘）的非负线性组合，故 $A \circ B$ 必定是半正定的. 此外，由该分解式可知，$A \circ B$ 可以由 $r \times s$ 个秩不超过 1 的矩阵生成. 根据矩阵秩的次可加性，有

$$\operatorname{rank}(A \circ B) \leq \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \operatorname{rank}\left((u_k \circ v_l)(u_k \circ v_l)'\right) \leq r \cdot s.$$

即 $\operatorname{rank}(A \circ B) \leq \operatorname{rank}(A) \cdot \operatorname{rank}(B)$. ■

12 复盘 12

复盘题 12.1. 设 A 是 n 阶实对称阵，则 $\lambda_{\max}(A) = \max\limits_{\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\alpha' A \alpha}{\alpha' \alpha}$. 进一步，若 B 是 n 阶正定实对称阵，不妨设 $B = C'C$，则 $AB^{-1} = AC^{-1}(C')^{-1} = C'[(C^{-1})'AC^{-1}](C')^{-1}$，即 AB^{-1} 相似于 $(C^{-1})'AC^{-1}$，令 $\beta = C\alpha$，则当 α 跑遍 $\mathbb{R}^n$ 时，β 也跑遍了 $\mathbb{R}^n$，即

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\alpha' A \alpha}{\alpha' B \alpha} = \max_{\beta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\beta'[(C^{-1})'AC^{-1}]\beta}{\beta'\beta} = \lambda_{\max}(AB^{-1}).$$

复盘题 12.2. 关于非零向量 α 的镜像变换 φ_α 就是将 $L(\alpha)$ 中向量 γ 映成 $-\gamma$，将 $L(\alpha)^\perp$ 中向量映射成本身. 从 $L(\alpha)$ 中任取非零向量 β，则 $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$，因此我们下面讨论中 φ_α 不妨默认是关于单位向量 α 的镜像变换.

(a) φ 是镜像变换当且仅当 φ 在某组标准正交基下的矩阵为 $\operatorname{diag}\{-1, 1\cdots, 1\}$. 特别

地，若 φ 是正交变换，则 φ 是镜像变换当且仅当 φ 在某组基下矩阵为

$$\operatorname{diag}\{-1,1,\cdots,1\}$$

换句话说正交变换 φ 是镜像变换当且仅当其特征多项式为 $(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$.

(b) 二维旋转矩阵 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $(\sin\theta\neq 0)$ 可以看成两个不同的镜像变换的乘积.

(c) 若 $\varphi=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_k}$，则

$$\dim\ker(\varphi-\mathrm{id}_V)\geq\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k}L(\alpha_i)^{\perp}\right)\geq\dim(L(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)^{\perp})\geq n-k$$

进一步，若 φ 是正交变换，且 φ 的关于特征值 1 的代数重数为 r，则存在 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_s}$，使得 $\varphi=\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_s}$，且 $s\geq n-r$，并说明等号可以取到.

(d) 设 α,β 是两个不同的单位向量，若镜像变换 φ，满足 $\varphi(\alpha)=\beta$，则

$$\varphi(\alpha-\beta)=\beta-\varphi^2(\alpha)=\beta-\alpha.$$

由此：存在唯一镜像变换 φ，使得 $\varphi(\alpha)=\beta$.

(e) 若 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_k}$ 是两两可换的不同镜像变换，则对任意 $i\neq j$，有

$$\varphi_{\alpha_i}\varphi_{\alpha_j}(\alpha_i)=\varphi_{\alpha_j}\varphi_{\alpha_i}(\alpha_i)=-\varphi_{\alpha_j}(\alpha_i)$$

由 φ_{α_j} 保长度，即得 $\varphi_{\alpha_j}(\alpha_i)=\pm\alpha_i$, 从而只能是 $\varphi_{\alpha_j}(\alpha_i)=\alpha_i$，即 $(\alpha_i,\alpha_j)=0$. 综上：对于不同的 $\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_s}$ 两两可换当且仅当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 相互正交，于是 $s\leq n$，且等号可以取到.

(f) (苏大 2025) 让 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是 n 维欧式空间 V 中的单位向量，满足 $(\alpha_1,\alpha_2)=(\beta_1,\beta_2)$. 则存在镜像反射 φ_1，使得 $\varphi_1(\alpha_1)=\beta_1$. 此时若 $\varphi_1(\alpha_2)\neq\beta_2$, 则考虑关于 $\dfrac{\varphi_1(\alpha_2)-\beta_2}{|\varphi_1(\alpha_2)-\beta_2|}$ 的镜像反射 φ_2. 由于

$$(\varphi_1(\alpha_1),\varphi_1(\alpha_2))=(\beta_1,\varphi_1(\alpha_2))=(\alpha_1,\alpha_2)=(\beta_1,\beta_2),$$

即 $\varphi_1(\alpha_2)-\beta_2\in L(\beta_1)^{\perp}$, 这意味着 $\varphi_2(\beta_1)=\beta_1$，让 $\varphi=\varphi_2\varphi_1$，则 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i$.

解: 本题的 (a), (d), (f) 已在题干中给出了完整的构造与推导. 现对 (b), (c), (e) 补充严格证明细节: (b) 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 易验证 A,B 均为实对称的正交矩阵，且它们的迹 $\operatorname{tr}(A)=0$, $\operatorname{tr}(B)=0$. 在二维空间中，正交且对称、迹为零的矩阵必然具有特征值 $1,-1$，即它们均为镜像变换矩阵. 故任何二维旋转均可分解为两镜像的乘积.

(c) 等号成立说明: 若 φ 是正交变换且特征值 1 的代数重数为 r，即 $\dim\ker(\varphi-\mathrm{id}_V)=r$.

根据正交变换的标准型定理，空间可分解为不动点子空间与若干个二维旋转平面、及可能的一个一维反向空间的直和. 每个二维旋转可分解为 2 个镜像乘积，一维反向本身是 1 个镜像. 分解所用的镜像总数 s 恰好等于不动点补空间的维数，即 $s = n - r$. 此时等号严格成立（此结论亦被称为 Cartan-Dieudonné 定理的推论）.

(e) 等号成立说明：若这 s 个镜像变换两两可换，推导已证明它们的反射向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 必须两两正交. 在 n 维欧氏空间中，互相正交的非零向量最多只能有 n 个，故 $s \leq n$. 取 V 的一组标准正交基 $e_1, \ldots, e_n$ 作为反射向量，所诱导的 n 个镜像变换两两可换，此时等号 $s = n$ 成立. ■

复盘题 12.3. 若欧氏空间 V 中的变换 φ 保持距离，且 $\varphi(0) = 0$，则 φ 是正交变换.

解: 因变换 φ 保持距离，对任意 $\alpha, \beta \in V$，有

$$\|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|^2 = \|\alpha - \beta\|^2.$$

由于 $\varphi(0) = 0$，在距离等式中令 $\beta = 0$，可得

$$\|\varphi(\alpha)\|^2 = \|\alpha\|^2.$$

将距离的平方按内积完全展开：

$$\|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|^2 = \|\varphi(\alpha)\|^2 + \|\varphi(\beta)\|^2 - 2(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)).$$

等式右端展开为：

$$\|\alpha - \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2(\alpha, \beta).$$

对比两式，并利用范数保持的性质将平方项消去，立即得到

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \beta).$$

这证明了 φ 必然保持内积. 下证 φ 是线性映射. 考察向量 $\gamma = \varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\alpha) - \varphi(\beta)$. 计算其范数平方 (γ, γ)，完全展开并利用内积保持性质：

$$(\gamma, \gamma) = \|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2(\alpha + \beta, \alpha) - 2(\alpha + \beta, \beta) + 2(\alpha, \beta).$$

代入 $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2(\alpha, \beta)$，上式各项恰好完全抵消，得到 $(\gamma, \gamma) = 0$. 由内积的正定性知 $\gamma = 0$，即 $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$. 同理可利用内积展开证明 $\varphi(c\alpha) = c\varphi(\alpha)$. 故 φ 是一个保持内积的线性变换，即正交变换. ■

复盘题 12.4. 设 V 是 n 维欧氏空间，若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in V$ 满足 $(\alpha_i,\alpha_j)<0(i\neq j)$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 中任意 $k-1$ 个向量线性无关，于是 $k\leq n+1$，并说明等号可以取到.

解: 假设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 中存在 $k-1$ 个向量线性相关. 不失一般性，设前 $k-1$ 个向量线性相关. 则存在不全为零的实数 $c_1,\ldots,c_{k-1}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k-1}c_i\alpha_i=0.$$

将下标集划分为两个不相交的子集：$I=\{i\mid c_i>0\}$ 与 $J=\{j\mid c_j\leq 0\}$. 移项可得

$$\sum_{i\in I}c_i\alpha_i=\sum_{j\in J}(-c_j)\alpha_j.$$

令该公共向量为 v. 考察 v 与自身的内积：

$$(v,v)=\left(\sum_{i\in I}c_i\alpha_i,\sum_{j\in J}(-c_j)\alpha_j\right)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}c_i(-c_j)(\alpha_i,\alpha_j).$$

由于 $c_i>0,-c_j\geq 0$，且当 $i\neq j$ 时 $(\alpha_i,\alpha_j)<0$. 这导致和式中每一项均小于等于零，故 $(v,v)\leq 0$. 由内积正定性，必须有 $v=0$. 由于向量 α_k 未参与上述线性组合，考察 v 与 α_k 的内积：

$$0=(v,\alpha_k)=\sum_{i\in I}c_i(\alpha_i,\alpha_k).$$

因 $c_i>0$ 且 $(\alpha_i,\alpha_k)<0$，若集合 I 非空，则该内积严格小于零，产生矛盾. 故集合 I 必须为空. 同理，原方程整体反号后可证子集 $\{j\mid c_j<0\}$ 亦必须为空. 这说明所有系数 $c_i=0$，与线性相关的假设矛盾. 故任意 $k-1$ 个向量必线性无关. 由于在 n 维空间中，任意线性无关的向量组所含向量个数不超过 n. 故必有 $k-1\leq n$，即 $k\leq n+1$. 等号可以取到：在 $\mathbb{R}^n$ 中，构造正单纯形的中心到各个顶点的 $n+1$ 个向量，其两两夹角均为 $\arccos(-1/n)$，内积为负，恰好满足题意. ■

复盘题 12.5. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}\in V$ 满足 $(\alpha_i,\alpha_j)<0(i\neq j)$，则可以设 $\alpha_{n+1}=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$. 若 $c_i\neq 0$，则 $c_i<0$.

解: 由前一题结论可知，满足两两内积为负的 $n+1$ 个向量中，任意 n 个向量必线性无关. 故 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 构成 n 维空间 V 的一组基. 因此 α_{n+1} 可以被唯一线性表出为 $\alpha_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$. 将该式移项并对系数正负进行分组，记 $I=\{i\mid c_i>0\}$，则有

$$\alpha_{n+1}-\sum_{j\notin I}c_j\alpha_j=\sum_{i\in I}c_i\alpha_i.$$

令该公共向量为 $v=\sum_{i\in I} c_i\alpha_i$. 考察 v 与自身的内积:

$$(v,v)=\left(\alpha_{n+1}+\sum_{j\notin I}(-c_j)\alpha_j, \sum_{i\in I} c_i\alpha_i\right).$$

展开该内积，得到两部分之和:

$$(v,v)=\sum_{i\in I} c_i(\alpha_{n+1},\alpha_i)+\sum_{j\notin I}\sum_{i\in I}(-c_j)c_i(\alpha_j,\alpha_i).$$

由已知条件，对任意 $i\neq j$ 有 $(\alpha_i,\alpha_j)<0$，且 $(\alpha_{n+1},\alpha_i)<0$. 由于对于 $i\in I$ 保证了 $c_i>0$，且对于 $j\notin I$ 保证了 $-c_j\geq 0$. 故第一部分和式 $\sum_{i\in I} c_i(\alpha_{n+1},\alpha_i)\leq 0$（若 I 非空则严格小于 0）. 第二部分和式中各项均小于等于零. 故必定有 $(v,v)\leq 0$，由正定性得 $v=0$. 即有 $\sum_{i\in I} c_i\alpha_i=0$. 因基向量组线性无关，必须对所有 $i\in I$ 有 $c_i=0$. 但这与集合 I 的定义（要求元素 $c_i>0$）产生矛盾. 故集合 I 必定为空集. 这说明所有的系数 c_i 均不大于零. 即若 $c_i\neq 0$，必有 $c_i<0$. ■

> **复盘题 12.6.** *若 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，满足对任意 $\alpha\in\mathbb{C}^n$，有 $\overline{\alpha}'A\alpha=0$，则 $A=O$.*

解: 该题可使用极化恒等式的思想进行构造证明. 已知对任意 $\alpha\in\mathbb{C}^n$, 有 $\alpha^*A\alpha=0$. 取 $\alpha=e_i$（第 i 个标准基向量），代入得

$$e_i^*Ae_i=a_{ii}=0.$$

这说明矩阵 A 的主对角线元素全为零. 取 $\alpha=e_i+e_j$ $(i\neq j)$，代入条件式得

$$(e_i+e_j)^*A(e_i+e_j)=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=0.$$

结合主对角线元素为零的结论，得到

$$a_{ij}+a_{ji}=0.$$

再取复向量 $\alpha=e_i+\mathbf{i}e_j$，代入条件式得

$$(e_i-\mathbf{i}e_j)^*A(e_i+\mathbf{i}e_j)=a_{ii}+\mathbf{i}a_{ij}-\mathbf{i}a_{ji}+a_{jj}=0.$$

消去主对角线项并除以虚数单位 $\mathbf{i}$，得到

$$a_{ij}-a_{ji}=0.$$

联立得到的两个对称性方程 $a_{ij}+a_{ji}=0$ 与 $a_{ij}-a_{ji}=0$. 两式相加解得 $a_{ij}=0$. 由于该推导对任意不相等的指标 i,j 均成立，故矩阵 A 所有元素均为零，即 $A=O$. ■

复盘题 12.7. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则存在唯一的半正定阵 C，使得 $A'A = C^2$. 设 $Q = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是正交阵，满足

$$Q'A'AQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0\cdots, 0\}, \quad \lambda_i > 0$$

若我们想要寻找正交阵 B，使得 $A = BC$，只需满足 $A(\alpha_j) = B(C\alpha_j)(1 \le j \le n)$，即只需满足 $A(\alpha_i) = B(C\alpha_i) = \sqrt{\lambda_i}B(\alpha_i)(1 \le i \le r)$. 我们只需将 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A\alpha_i\right\}$ 扩张为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$, 取 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)Q^{-1}$ 即可.

复盘题 12.8. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$，且 $(A\alpha, A\alpha) \le (\alpha, \alpha)$. 我们说明 $\ker A \perp \operatorname{im}A$. 否则，存在 $\beta = \beta_1 + \beta_2 \in \operatorname{im}A, \alpha \in \ker A$，其中 $\beta_1 \in \ker A, \beta_2 \in (\ker A)^\perp$，使得 $0 \neq (\alpha, \beta)$，即 $\beta_1 \neq 0$，且 $\beta = A\beta = A\beta_2$，于是

$$(A\beta_2, A\beta_2) = (\beta, \beta) = (\beta_1, \beta_1) + (\beta_2, \beta_2) > (\beta_2, \beta_2)$$

导出矛盾. 综上解释：投影变换 A 是到 $\operatorname{im}A$ 的正交投影当且仅当 $|A\alpha| \le |\alpha|, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ 当且仅当 A 是对称阵.

13 复盘 13

复盘题 13.1. (湖南大学 2025) 设 A 是 n 阶实对称阵，且 $Y^TAY > 0$，记 $f(X,Y) = X'AY$.

(a) 若 A 的正惯性指数为 1，则对任意 $X \in \mathbb{R}^n$，若

$$\begin{vmatrix} f(Y,Y) & f(X,Y) \\ f(X,Y) & f(X,X) \end{vmatrix} \neq 0$$

此时 AX, AY 线性无关. 则方程组 $\begin{pmatrix} X'A \\ Y'A \end{pmatrix}\alpha = 0$ 的解空间维数是 $n-2$，取其一组基础解系记为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-2}$，令 $Q = (Y, X, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-2})$，则 Q 是可逆阵，且

$$Q'AQ = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} f(Y,Y) & f(X,Y) \\ f(X,Y) & f(X,X) \end{pmatrix}.$$

由 A 的正惯性指数为 1，则 A_1 的正惯性指数为 1，因此必有 $\det(A_1) < 0$.

(b) 若 A 的正惯性指数大于等于 2，我们希望找到 $X\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$f(X,X)f(Y,Y)>f(X,Y)^2.$$

将 $Y'X=0$ 的一组基础解系记为 $Y_1,\cdots,Y_{n-1}$，令 $P=(Y,Y_1,\cdots,Y_{n-1})$，则 P 是可逆阵，且 $P'AP=\begin{pmatrix}f(Y,Y) & O\\ O & A_3\end{pmatrix}$, 因此我们不妨一开始便设 $A=\begin{pmatrix}f(Y,Y) & O\\ O & A_3\end{pmatrix}$ $Y=e_1$. 设 $X=\begin{pmatrix}a\\ X_1\end{pmatrix}$，其中 $X_1\in\mathbb{R}^{n-1}$，则 $f(X,Y)=af(Y,Y)$，且

$$f(X,X)=a^2f(Y,Y)+X_1'A_3X_1.$$

由于 A_3 的正惯性指数大于 0，我们总能找到 X_1，使得 $X_1'A_3X_1>0$，此时就有

$$f(X,Y)^2=a^2f(Y,Y)^2<(a^2f(Y,Y)+X_1'A_3X_1)f(Y,Y)=f(X,X)f(Y,Y).$$

复盘题 13.2. 我们将上述想法总结出来：设 V 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，f 是 V 上一个双线性函数，若 W 是 V 的子空间，且 $f|_W$ 是非退化的，即 $\alpha\in W$ 满足 $f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in V\iff\alpha=0$. 令

$$W^\perp=\{\alpha\in V\mid f(\beta,\alpha)=0,\forall\beta\in W\},$$

则 $W^\perp$ 是 V 的子空间，且 $W\cap W^\perp=\{0\}$. 下面我们说明 $V=W\oplus W^\perp$, 为此考虑 $\varphi:V\longrightarrow W^*,\alpha\longmapsto f_\alpha$，其中 f_α 定义为 $f_\alpha(\beta)=f(\beta,\alpha),\forall\beta\in W$. 则 $\varphi|_W$ 是线性同构，即 φ 是满射，且 $\ker\varphi=W^\perp$. 由维数公式就有

$$n=\dim\mathrm{im}\varphi+\dim\ker\varphi=\dim W^*+\dim W^\perp=\dim W+\dim W^\perp.$$

由此，我们也可以给出实对称阵或者反对称阵的合同标准型.

复盘题 13.3. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，且 $x'Ay=0\iff y'Ax=0$，则 A 是实对称阵或者反对称阵.

解: 因为 $y'Ax$ 是一个一维标量，其转置等于自身，即 $y'Ax=(y'Ax)'=x'A'y$. 故题设条件等价于：对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$，有

$$x'Ay=0\iff x'A'y=0.$$

这表明，对于任意固定的向量 x，线性泛函 $y\mapsto x'Ay$ 与 $y\mapsto x'A'y$ 具有完全相同的核空间. 由线性代数基本性质，若两个线性泛函核空间相同，则它们必定成比例. 即对每个给定的

$x \in \mathbb{R}^n$，存在实数 λ_x 使得

$$x'A = \lambda_x x'A'.$$

对上式两边取转置得 $A'x = \lambda_x Ax$. 在原式两边右乘向量 x，可得

$$x'Ax = \lambda_x x'A'x.$$

由于 $x'A'x = (x'Ax)' = x'Ax$，上式可写为

$$(1-\lambda_x)x'Ax = 0.$$

这意味着，对于空间中的任意向量 x，要么 $\lambda_x = 1$，要么 $x'Ax = 0$.

定义两个集合 $V_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = Ax\}$ 和 $V_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = -Ax\}$. 显然 $V_1 = \ker(A - A')$ 且 $V_{-1} = \ker(A + A')$，它们均为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 若对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有 $x'Ax = 0$，则对任意 $u, v \in \mathbb{R}^n$，展开 $(u+v)'A(u+v) = 0$ 得到

$$u'Av + v'Au = 0 \implies u'(A + A')v = 0.$$

这说明 $A + A' = O$，即 $A = -A'$，此时 A 是反对称阵.

若存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $x_0'Ax_0 \neq 0$，则必须有 $\lambda_{x_0} = 1$，即 $x_0 \in V_1$. 假设 A 不是对称阵，即 $V_1 \neq \mathbb{R}^n$，则必存在向量 $y \notin V_1$. 由于 $y \notin V_1$，必然有 $\lambda_y \neq 1$，从而必定满足 $y'Ay = 0$. 构造向量 $z = x_0 + cy$，计算其二次型：

$$z'Az = x_0'Ax_0 + c(x_0'Ay + y'Ax_0) + c^2 y'Ay.$$

因为 $x_0 \in V_1$，有 $A'x_0 = Ax_0$，从而 $y'A'x_0 = y'Ax_0$，即 $x_0'Ay = y'Ax_0$. 代入 $y'Ay = 0$，得到

$$z'Az = x_0'Ax_0 + 2cy'Ax_0.$$

由于 $x_0'Ax_0 \neq 0$，我们总能选取一个非零常数 c，使得 $z'Az \neq 0$. 对于该向量 z，由二次型非零必然推得 $\lambda_z = 1$，即 $z \in V_1$. 然而 V_1 是线性子空间，由 $z \in V_1$ 且 $x_0 \in V_1$，推得 $cy = z - x_0 \in V_1$. 因 $c \neq 0$，进一步推得 $y \in V_1$. 这与我们假设的 $y \notin V_1$ 产生矛盾. 故假设错误，必然有 $V_1 = \mathbb{R}^n$，即 $A = A'$，此时 A 是实对称阵. 综上所述，A 必然是实对称阵或反对称阵. ■

复盘题 13.4. 设 V 是 n 维复线性空间，$x \in \mathrm{End}(V)$，定义 $\mathrm{End}(V)$ 上的线性变换

$$\mathrm{ad}_x : \mathrm{ad}_x(y) = [x, y], \quad \forall y \in \mathrm{End}(V).$$

记 i 是 V 上的恒等变换，则 $\mathrm{ad}_{x-\lambda i} = \mathrm{ad}_x$，从而 $\mathrm{ad}_x^m = \mathrm{ad}_{x-\lambda i}^m$，且由

$$\mathrm{ad}_x^3(y) = x^3y - yx^3 - 3x^2yx + 3xyx^2$$

可以归纳出

$$\mathrm{ad}_x^m(y)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k x^{m-k}yx^k$$

综上就有：设 $y\in \mathrm{End}(V)$，则 x 的任一根子空间 R_λ 都是 y 的不变子空间当且仅当存在正整数 s，使得 $\mathrm{ad}_x^s(y)=0$.

复盘题 13.5. 设 A 是 n 阶实矩阵，则 A 可以酉相似上三角化，于是 $\mathrm{tr}(AA')\geq\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$，其中 $|\lambda_i|^2$ 表示 A 特征值模长的平方，且等号成立当且仅当 A 可以酉相似对角化，即 A 是正规阵.

解: 将 n 阶实矩阵 A 视为复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵. 由 Schur 定理，必然存在复酉矩阵 U 使得 A 酉相似于上三角矩阵 T:

$$U^*AU=T.$$

其中 T 的主对角线元素 $t_{ii}=\lambda_i$ 为 A 的 n 个复特征值. 由于 A 是实矩阵，其转置与共轭转置相等，即 $AA'=AA^*$. 对该矩阵乘积取迹，利用迹运算的循环不变性:

$$\mathrm{tr}(AA')=\mathrm{tr}(AA^*)=\mathrm{tr}(UTU^*\cdot UT^*U^*)=\mathrm{tr}(UTT^*U^*)=\mathrm{tr}(TT^*).$$

对于上三角矩阵 T，矩阵 TT^* 主对角线上的第 i 个元素，恰好等于 T 的第 i 个行向量各元素模长的平方和:

$$(TT^*)_{ii}=\sum_{j=i}^{n}|t_{ij}|^2=|\lambda_i|^2+\sum_{j=i+1}^{n}|t_{ij}|^2.$$

对所有对角元求和即可得到迹:

$$\mathrm{tr}(AA')=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}|t_{ij}|^2\geq\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2.$$

不等式得证. 等号成立的充要条件是对于所有的 $j>i$，均有 $|t_{ij}|^2=0$，即 $t_{ij}=0$. 这意味着上三角矩阵 T 必须退化为对角矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 此时 $A=U\Lambda U^*$，说明 A 酉相似于对角阵. 由矩阵理论可知，矩阵酉相似于对角阵的充要条件是它是正规阵，即满足 $AA^*=A^*A$. 又因 A 为实矩阵，即等价于 $AA'=A'A$. ■

复盘题 13.6. 设 A 是 n 阶实矩阵，$f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式，记 $p(\lambda)$ 是 f 在 $\mathbb{R}$ 上的一个不可约因式，则 $\deg p(\lambda)\leq 2$，记 $W=\ker p(A)$，则 $A|_W$ 上的最小多项式为 $p(\lambda)$. 任取非零向量 $\alpha\in W$，则 $\dim\left(C(A,\alpha)\right)=\deg p(\lambda)$，即 A 有一维或者二维不变子空间，于是 A 实（或者正交）相似于一个分块对角阵 $\mathrm{diag}\left\{A_1,\cdots,A_r\right\}$，其中 A_i 是一阶或者二阶的.

复盘题 13.7. 设 A 是 n 阶实正规阵，则 A 酉相似可对角化，设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 A 所有不同特征值，令

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \overline{\lambda_i} \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

则 $f(A) = A'$，设 $f = g + \mathrm{i}h$，其中 $g, h \in \mathbb{R}[x]$，比较两边实部与虚部即得 $g(A) = A'$.

复盘题 13.8. 设 A, B 是 n 阶实正规阵，且 $AC = CB$，则

$$\operatorname{tr}(A'CC'A) = \operatorname{tr}(CC'AA') = \operatorname{tr}(CC'A'A) = \operatorname{tr}(C(CB)'A) = \operatorname{tr}(CB'C'A)$$

由此得 $\operatorname{tr}[(A'C - CB')(A'C - CB')'] = 0$，即 $A'C = CB'$. 特别地，若 $AC = CA$，则 $A'C = CA'$.

复盘题 13.9. 设 n 维欧氏空间 V 中的线性变换 φ 保持正交性，即若 $(\alpha, \beta) = 0$，则 $(\varphi\alpha, \varphi\beta) = 0$，则存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\psi \in O(V)$，使得 $\varphi = \lambda\psi$.

解: 设 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基. 由于 φ 保持正交性，当 $i \neq j$ 时，有 $(e_i, e_j) = 0$. 根据条件，像向量也必然正交，即

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = 0, \quad \forall i \neq j.$$

任取两个不相等的指标 $i \neq j$，构造向量 $u = e_i + e_j$ 与 $v = e_i - e_j$. 计算其内积:

$$(u, v) = (e_i + e_j, e_i - e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0.$$

因 $u \perp v$，由 φ 保持正交性可知，其像向量也正交:

$$(\varphi(e_i + e_j), \varphi(e_i - e_j)) = 0.$$

利用内积的双线性性质展开，有

$$(\varphi(e_i) + \varphi(e_j), \varphi(e_i) - \varphi(e_j)) = \|\varphi(e_i)\|^2 - \|\varphi(e_j)\|^2 = 0.$$

即 $\|\varphi(e_i)\| = \|\varphi(e_j)\|$. 这表明，对于这组标准正交基，它们在 φ 作用下的像向量具有完全相同的长度. 设此公共非负长度为 $|\lambda| \geq 0$. 若 $\lambda = 0$，则所有 $\varphi(e_i) = 0$，从而 φ 为零变换. 此时可取 $\lambda = 0$ 以及任意的正交变换 ψ，等式 $\varphi = \lambda\psi$ 成立. 若 $\lambda \neq 0$，定义一个新的线性变换 $\psi = \frac{1}{\lambda}\varphi$. 则对于标准正交基 $e_1, \ldots, e_n$，其像向量 $\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)$ 两两正交，且每个像向量的长度均为 1. 这说明 ψ 将一组标准正交基映射为了另一组标准正交基. 根据正交变换的等价定义，ψ 是一个正交变换，即 $\psi \in O(V)$. 从而 $\varphi = \lambda\psi$ 得证. ■

14 复盘 14

复盘题 14.1. 设 A 是 n 阶实矩阵，记 $Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为正交阵，满足

$$Q'A'AQ=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0\},\quad \lambda_i>0$$

若我们想找到正交阵 $O=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 使得

$$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ & & & O\end{pmatrix}$$

只需满足 $\beta_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A(\alpha_i)$，故我们只需要将单位正交向量组 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A\alpha_i\right\}_{i=1}^r$ 扩张为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基即可. 综上，存在正交阵 O_1,O_2，其中 O_2 取为 Q，使得

$$O_1AO_2=\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_r},0,\cdots,0\right\},\quad \lambda_i>0$$

复盘题 14.2. 设 A,B,AB 都是正规阵，则 BA 也是正规阵.

解: 根据矩阵迹的循环排列性质，我们计算 $(BA)(BA)^*$ 的迹:

$$\operatorname{tr}\Big((BA)(BA)^*\Big)=\operatorname{tr}(BAA^*B^*)=\operatorname{tr}(A^*B^*BA).$$

由于 A,B 均为正规阵，有 $AA^*=A^*A$ 且 $BB^*=B^*B$. 在上述迹中替换 B^*B 为 BB^*，得

$$\operatorname{tr}(A^*B^*BA)=\operatorname{tr}(A^*BB^*A).$$

利用迹的循环排列性质，将最左边的 A^* 移到最右边:

$$\operatorname{tr}(A^*BB^*A)=\operatorname{tr}(BB^*AA^*)=\operatorname{tr}(BB^*A^*A).$$

继续循环移位，并将正规性代入，最终可得:

$$\operatorname{tr}\Big((BA)(BA)^*\Big)=\operatorname{tr}(ABB^*A^*)=\operatorname{tr}\Big((AB)(AB)^*\Big).$$

由矩阵理论中关于正规阵的 Schur 不等式等号成立条件可知：一个矩阵 M 为正规阵，当且仅当 $\operatorname{tr}(MM^*)=\sum|\lambda_i(M)|^2$. 已知 AB 与 BA 具有完全相同的特征值集合，故 $\sum|\lambda_i(AB)|^2=\sum|\lambda_i(BA)|^2$. 又因 AB 是正规阵，必有

$$\operatorname{tr}\Big((AB)(AB)^*\Big)=\sum|\lambda_i(AB)|^2.$$

联合迹相等的结论推得：

$$\operatorname{tr}\Big((BA)(BA)^*\Big) = \sum |\lambda_i(BA)|^2.$$

此等式恰好说明矩阵 BA 达到了 Schur 不等式的下界等号条件，故 BA 必然也是正规阵. ■

复盘题 14.3. (2025 云南大学) 设 e_j 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位向量，记 φ_i 是关于 $e_i - e_{n+1}(1 \leq i \leq n)$ 的镜面反射，若 $j \neq i, n+1$，则 $(e_i - e_{n+1}, e_j) = 0$，即 $\varphi_i(e_j) = e_j$. 再由 $(e_i + e_{n+1}, e_i - e_{n+1}) = 0$ 得

$$\varphi_i(e_i - e_{n+1}) = e_{n+1} - e_i$$

$$\varphi_i(e_i + e_{n+1}) = e_i + e_{n+1}$$

这样就有 $\varphi_i(e_i) = e_{n+1}, \varphi_i(e_{n+1}) = e_i$，于是对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$，$\varphi_i$ 作用的结果是将 α 的第 1 行与第 $n+1$ 行对换. 记

$$W = \{\varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, \quad i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, n\}\}$$

则 α 通过若干次上述对换可以有如下事实：对换后的前 n 个分量都大于等于第 $n+1$ 个分量，换句话说，存在 $\varphi \in W$，使得

$$(\varphi(\alpha), e_i - e_{n+1}) \geq 0, \quad \forall i = 1, \cdots, n.$$

复盘题 14.4. 设 e_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位列向量，记 $\varphi_{i,j}$ 是关于 $e_i - e_j$ 的镜面反射，其中 $1 \leq i < j \leq n$，令

$$W = \{\varphi_{i_1, j_1} \cdots \varphi_{i_k, j_k} \mid k \in \mathbb{N}, \quad i_t, j_t \in \{1, 2, \cdots, n\}\},$$

求集合 W 所有元素个数.

解: 根据前一题（第 3 题）的推导同理可知，关于法向量 $e_i - e_j$ 的镜面反射 $\varphi_{i,j}$，其几何作用恰好是将空间中向量的第 i 个坐标与第 j 个坐标进行对换，而保持其余所有坐标分量不变. 在群论的视角下，这个变换与对称群 S_n 中的对换 (i, j) 构成了同构对应. 题干中定义的集合 W 是由所有可能的坐标对换操作有限次乘积（复合）所生成的变换群. 在抽象代数中，所有可能的二元对换 (i, j)（其中 $1 \leq i < j \leq n$）能够生成整个 n 元对称群 S_n. 因此，集合 W 作为变换群，与对称群 S_n 完全同构. 故集合 W 的所有元素个数等于 n 元对称群的阶数，即：

$$|W| = |S_n| = n!.$$

■

复盘题 14.5. 设 $A=\begin{pmatrix}A_1 & B\\ O & C\end{pmatrix}$ 是 n 阶实正规阵，其中 A_1 是 r 阶方阵，则 $B=O$，且 A_1,C 是正规阵.

解: 由于 A 是实正规阵，满足 $AA^T=A^TA$. 分别利用分块矩阵乘法计算左右两端. 先算 AA^T:

$$AA^T=\begin{pmatrix}A_1 & B\\ O & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^T & O\\ B^T & C^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1A_1^T+BB^T & BC^T\\ CB^T & CC^T\end{pmatrix}.$$

再计算 A^TA:

$$A^TA=\begin{pmatrix}A_1^T & O\\ B^T & C^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & B\\ O & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^TA_1 & A_1^TB\\ B^TA_1 & B^TB+C^TC\end{pmatrix}.$$

对比矩阵相等的左上角对角块，必然有

$$A_1A_1^T+BB^T=A_1^TA_1.$$

对上式两边取迹，利用迹的交换律 $\mathrm{tr}(A_1A_1^T)=\mathrm{tr}(A_1^TA_1)$，将其消去后得到:

$$\mathrm{tr}(BB^T)=0.$$

对于实矩阵 $B=(b_{ij})$ 而言，$\mathrm{tr}(BB^T)=\sum b_{ij}^2\geq 0$，且等于零的充要条件是矩阵全为零. 由此立刻推得 $B=O$. 将 $B=O$ 代回原块乘积等式中，此时左上角与右下角的分块比较就直接简化为:

$$A_1A_1^T=A_1^TA_1,\quad 且\quad CC^T=C^TC.$$

这证明了对角块 A_1 和 C 均为实正规阵. ■

复盘题 14.6. 实正规变换属于不同特征值的特征向量相互正交. 进一步，设 A 是 n 阶实正规阵，λ 是 A 的一个复特征值，$\alpha+\beta\mathbf{i}$ 是对应特征向量，两边取共轭得，$\alpha-\beta\mathbf{i}$ 是 A 关于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量，于是

$$0=(\alpha+\beta\mathbf{i},\alpha-\beta\mathbf{i})=(\alpha,\alpha)-(\beta,\beta)+2\mathbf{i}(\alpha,\beta),\quad (\alpha,\beta)=\alpha'\overline{\beta}.$$

即有 α,β 相互正交且 $|\alpha|=|\beta|$.

复盘题 14.7. 设 A 是 n 阶可逆实反对称阵，令

$$G=\left\{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid B'AB=A\right\}$$

则 G 是特殊线性群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 的子群. 提示：任取 $B\in G$, 注意条件和结论在变换：$A\mapsto$

> $C'AC, B \mapsto C^{-1}BC$ 下不会发生变换，因此不妨一开始便设 $A = \begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}$.

解: 因 A 为可逆反对称阵，其阶数必为偶数，设 $n = 2m$. 由合同标准型定理，存在可逆阵 C 使得 $C'AC = J = \begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}$. 根据提示，不妨直接假定 $A = J$. 对任意 $B \in G$，有 $B'JB = J$. 两边取逆并转置（注意 $J^{-1} = -J$），可得 $BJB' = J$. 将 B 分块为 $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$，代入 $BJB' = J$ 展开得：

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' & Z' \\ Y' & W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XY' - YX' & XW' - YZ' \\ ZY' - WX' & ZW' - WZ' \end{pmatrix}.$$

令其等于 J，对比分块可得核心关系：

$$XY' = YX', \quad ZW' = WZ', \quad XW' - YZ' = I_m.$$

第一步：若子块 X 可逆. 利用 Schur 补展开 B 的行列式：

$$\det(B) = \det(X)\det(W - ZX^{-1}Y).$$

由 $XY' = YX'$ 得 $X^{-1}Y = Y'(X')^{-1}$，代入化简：

$$W - ZX^{-1}Y = W - ZY'(X')^{-1} = (WX' - ZY')(X')^{-1} = I_m(X')^{-1} = (X')^{-1}.$$

故 $\det(B) = \det(X)\det((X')^{-1}) = 1$. 第二步：若 X 不可逆. 构造关于实数 t 的多项式 $f(t) = \det(X + tZ)$. 若 $f(t) \equiv 0$，则 $\det(X + iZ) = 0$，即存在非零复向量 v 使 $(X + iZ)v = 0 \implies Xv = 0$ 且 $Zv = 0$. 此时 $v^*(XW' - YZ') = 0 \implies v^*I_m = 0 \implies v = 0$，矛盾. 故 $f(t)$ 不恒为零，必存在实数 t 使得矩阵 $\tilde{X} = X + tZ$ 可逆. 对 B 左乘行列式为 1 的初等块矩阵：

$$\begin{pmatrix} I_m & tI_m \\ O & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + tZ & Y + tW \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ Z & W \end{pmatrix}.$$

验证新矩阵的分块关系：$\tilde{X}\tilde{Y}' = (X + tZ)(Y' + tW') = XY' + t(XW' + ZY') + t^2ZW'$. 因 $XW' + ZY' = I_m + YZ' + ZY'$ 显然是对称阵，故 $\tilde{X}\tilde{Y}'$ 是对称阵. 且 $\tilde{X}W' - \tilde{Y}Z' = XW' - YZ' = I_m$. 即新矩阵完全满足第一步的代数条件，且左上块 $\tilde{X}$ 可逆. 故 $\det(B) = \det \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ Z & W \end{pmatrix} = 1$.

综上，G 中所有矩阵的行列式均为 1，即 G 是 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 的子群. ■

复盘题 14.8. 设 A 是 n 阶矩阵，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ 是 A 的 $n+1$ 个特征向量，满足其中任意 n 个向量线性无关，则存在 $k \in \mathbb{C}$，使得 $A = kI_n$.

解: 设这 $n+1$ 个特征向量对应的特征值分别为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$，即 $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$. 由于任意 n 个向量线性无关，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基. 因此，α_{n+1} 必定可以唯一表示为这组基的线性组合:

$$\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i.$$

如果某一个系数 $c_j = 0$，则意味着 α_{n+1} 仅由剩下的 $n-1$ 个基向量张成，这将导致包含 α_{n+1} 与这 $n-1$ 个向量在内的 n 个向量线性相关，直接违背了“任意 n 个向量线性无关”的条件. 故所有的系数 $c_i \neq 0$. 对组合等式两边同时左乘矩阵 A:

$$A\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i A\alpha_i \implies \lambda_{n+1}\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \alpha_i.$$

另一方面，将原组合等式两边同乘标量 λ_{n+1}:

$$\lambda_{n+1}\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_{n+1} \alpha_i.$$

两式相减，可得:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_i - \lambda_{n+1})\alpha_i = 0.$$

由于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是线性无关的基向量，它们的线性组合为零当且仅当所有系数均为零. 即对于每个 $i = 1, \ldots, n$，都有

$$c_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0.$$

已知 $c_i \neq 0$，故必然有 $\lambda_i = \lambda_{n+1}$. 这说明 A 在基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 上的所有特征值均等于同一个常数 λ_{n+1}. 设该常数为 k. 因 A 在一组基上相当于数乘变换 k，故其矩阵形式必定为 $A = kI_n$. ■

复盘题 14.9. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，取定 $f_1, \cdots, f_n \in V^*$，令 $U^* = \operatorname{span}\{f_1, \cdots, f_n\}$，取定 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，定义 $U^* \longrightarrow \mathbb{F}^n$ 上的线性变换

$$\varphi : f \longmapsto \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix}, \quad \forall f \in U^*$$

则 φ 是单射，于是 $f_1, \cdots, f_n$ 线性无关当且仅当 $n = \dim U^* = \dim \operatorname{im}\varphi$，当且仅当 $A = (\varphi(f_1), \cdots, \varphi(f_n))$ 是可逆阵，当且仅当 $A'x = 0$ 仅有零解，即当且仅当 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i = \{0\}$.

复盘题 14.10. (2021 川大) 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\varphi \in \mathrm{End}(V)$，定义 V^* 上的线性变换 B：对任意 $g \in V^*$，$B(g)$ 定义为

$$B(g)(\alpha) = g(\varphi(\alpha)), \quad \forall \alpha \in V.$$

取定 $f \in V^*$，则 $B^k(f)(\alpha) = f(\varphi^k(\alpha))$. 对任意 $\alpha \in V$，记

$$C(\varphi, \alpha) = \mathrm{span}\left\{\alpha, \varphi\alpha, \cdots, \varphi^{n-1}\alpha\right\}$$

于是 $\alpha \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} B^{k-1}(f)$ 当且仅当 $C(\varphi, \alpha) \subset \ker f$. 这样就有 $f, B(f), \cdots, B^{n-1}(f)$ 线性无关当且当对任意 $0 \neq \alpha \in V, C(\varphi, \alpha) \not\subseteq \ker f$. 换句话说，当且仅当对任意 φ 的非零不变子空间 W, 有 $W \not\subseteq \ker f$: 如果 $W \subset \ker f$ 是 φ 的非零不变子空间，任取非零向量 $\alpha \in W$，则有 $C(\varphi, \alpha) \subset W \subset \ker f$, 矛盾.

15 复盘 15

复盘题 15.1. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换，若将 V 看成是 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 线性空间，此时将 φ 看成实线性空间 V 上的线性变换，则 $\det(\varphi) \geq 0$.

解: 取 V 作为复线性空间时的一组基 $e_1, \ldots, e_n$. 设 φ 在该基下的表示矩阵为 $A = X + \mathbf{i}Y$, 其中 X, Y 为实矩阵. 将 V 视为实线性空间时，取对应的一组实基为 $e_1, \ldots, e_n, \mathbf{i}e_1, \ldots, \mathbf{i}e_n$. 在此实基底之下，变换 φ 的实矩阵表示为分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. 计算该实矩阵的行列式，在复数域内作分块初等变换：将第二行分块乘以 $\mathbf{i}$ 加到第一行分块上，得

$$\begin{vmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X + \mathbf{i}Y & -Y + \mathbf{i}X \\ Y & X \end{vmatrix}.$$

从第一行分块的右侧块提取 $-\mathbf{i}$，有 $-Y + \mathbf{i}X = -\mathbf{i}(X + \mathbf{i}Y)$. 故第一行为 $(A, -\mathbf{i}A)$. 再将第一列分块乘以 $\mathbf{i}$ 加到第二列分块上，得

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A & O \\ Y & X + \mathbf{i}Y \end{vmatrix} = \det(A)\det(\bar{A}).$$

由于复矩阵行列式的性质 $\det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$，故实表示矩阵的行列式为

$$\det(\varphi) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 \geq 0.$$

■

复盘题 15.2. 设 A 是 n 阶复矩阵，且 $\text{Rank}(A-\lambda I)\geq n-1, \forall\lambda\in\mathbb{C}$. 若 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$，满足 $AX=XA^T$，则 X 是对称阵.

解: 因 $\text{rank}(A-\lambda I)\geq n-1$，矩阵 A 的每个特征值的几何重数均为 1. 这表明 A 的特征多项式与其最小多项式完全相等，即 A 为非减损矩阵（Non-derogatory matrix）. 设 A 的 Jordan 标准型为 J，存在可逆阵 P 使得 $A=PJP^{-1}$. 将条件 $AX=XA^T$ 左右两边代入标准型，得

$$(PJP^{-1})X = X(P^{-T}J^TP^T).$$

两边左乘 P^{-1}，右乘 P^{-T}，整理可得

$$J(P^{-1}XP^{-T}) = (P^{-1}XP^{-T})J^T.$$

令 $Y=P^{-1}XP^{-T}$，上式即化为等价形式 $JY=YJ^T$. 由于 A 的特征多项式等于最小多项式，J 是由特征值互异的单一 Jordan 块 J_k 直和而成的对角分块矩阵. 由矩阵方程 $JY=YJ^T$ 的分块结构特性可知，Y 必须是对应于每个 J_k 的分块对角阵. 考察单个 m 阶 Jordan 块 $J_k=\lambda I_m+N$，其中 N 为标准上移位矩阵. 代入 $J_kY_k=Y_kJ_k^T$ 得 $NY_k=Y_kN^T$. 根据移位矩阵的乘法性质，等式 $NY_k=Y_kN^T$ 要求 Y_k 必须是一个常数沿反对角线平行分布的 Hankel 矩阵，且其主副对角线下方元素全为零. 即 Y_k 是一个沿副对角线对称的右上三角阵，这显然保证了 $Y_k=Y_k^T$. 因为 Y 的所有对角块均对称，故整个分块对角阵 Y 必然是对称阵. 由 $X=PYP^T$，对其两边取转置得:

$$X^T=(PYP^T)^T=PY^TP^T=PYP^T=X.$$

故 X 必为对称阵. ■

复盘题 15.3. 求

$$A=\begin{pmatrix} & & & n-1 \\ & & n-2 & \\ & \iddots & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型.

解: 本题为第四题的特例情形，直接套用后文第四题推导出的完整结论即可. 题目中矩阵 A 仅在副对角线上有非零元素，且对应的参数为 $a_{n+1-k}=k-1$ $(1\leq k\leq n)$. 根据第四题的子空间直和分解理论，特征值由 $\pm\sqrt{a_ka_{n+1-k}}$ 给出. 代入本题的具体数值:

$$a_ka_{n+1-k}=(n-k)(k-1).$$

当 $k=1$ 时，$a_1a_n=(n-1)\times 0=0$. 此时对应的二维不变子空间产生一个 2 阶的零特征值 Jordan 块，即 $J_2(0)$. 对于 $1<k<\frac{n+1}{2}$ 的所有范围，乘积严格大于零，对应一对互为相反数的非零实特征值 $\pm\sqrt{(k-1)(n-k)}$，均对应一阶 Jordan 块. 若 n 为奇数，对于中心位置 $k=\frac{n+1}{2}$，产生一个独立的一阶实数特征值 $\frac{n-1}{2}$. 综上所述，A 的 Jordan 标准型由以下几部分构成：一个 $J_2(0)$ 块；若干配对的一阶对角块 $\pm\sqrt{(k-1)(n-k)}$ $(2\le k\le\lfloor n/2\rfloor)$；当 n 为奇数时，还额外包含一个一阶对角块 $\frac{n-1}{2}$. ■

复盘题 15.4. 设

$$A=\begin{pmatrix} & & & a_n \\ & & a_{n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_1 & & & \end{pmatrix},\quad a_i\in\mathbb{C}$$

讨论 A 的 Jordan 型，并求可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为 A 的 Jordan 型.

解: 矩阵 A 的代数作用是将标准基向量 e_k 映射为 $Ae_k=a_{n+1-k}e_{n+1-k}$. 据此，整个复线性空间可以分解为若干个由 (e_k,e_{n+1-k}) 构成的二维不变子空间 W_k 的直和 $(1\le k<\frac{n+1}{2})$. 若 n 为奇数，则中心位置产生一个一维不变子空间 $W_{(n+1)/2}=\mathrm{span}(e_{(n+1)/2})$. 在每个二维不变子空间 W_k 上，取基为 (e_k,e_{n+1-k})，A 的限制矩阵为

$$B_k=\begin{pmatrix} 0 & a_k \\ a_{n+1-k} & 0 \end{pmatrix}.$$

其特征方程为 $\lambda^2-a_ka_{n+1-k}=0$. 下面对该 2×2 矩阵进行极其严格的分情况讨论：(1) 若 $a_ka_{n+1-k}\neq 0$：B_k 存在两个互异的特征值 $\pm\mu_k$，其中 $\mu_k=\sqrt{a_ka_{n+1-k}}$. 此时该块完全可对角化，对应两个一阶 Jordan 块. 对应的过渡矩阵（特征向量列）取为 $P_k=\begin{pmatrix} \mu_k & \mu_k \\ a_{n+1-k} & -a_{n+1-k} \end{pmatrix}$，这对应全空间的两个特征向量 $v_{k,1}=\mu_ke_k+a_{n+1-k}e_{n+1-k}$ 与 $v_{k,2}=\mu_ke_k-a_{n+1-k}e_{n+1-k}$.

(2) 若 $a_k=0$ 且 $a_{n+1-k}\neq 0$：此时特征值为 0（二重），且矩阵 $B_k=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{n+1-k} & 0 \end{pmatrix}\neq O$. 该块不能对角化，必定对应一个 2 阶零 Jordan 块 $J_2(0)$. 通过求广义特征向量链，其过渡矩阵对应的列向量取为 $P_k=(a_{n+1-k}e_{n+1-k},e_k)$.

(3) 若 $a_{n+1-k}=0$ 且 $a_k\neq 0$：同理，特征值为零且不全为零矩阵，对应一个 $J_2(0)$ 块. 其广义特征向量链确定的过渡矩阵列向量取为 $P_k=(a_ke_k,e_{n+1-k})$.

(4) 若 $a_k=a_{n+1-k}=0$：此时 $B_k=O$，对应两个独立的一阶零 Jordan 块 $J_1(0)$. 对应的过渡矩阵列向量即为原本的基底 (e_k,e_{n+1-k}).

最后，若 n 为奇数，对于中心位置 $m=\frac{n+1}{2}$，有 $Ae_m=a_me_m$. 这直接对应一个独立的一阶 Jordan 块 (a_m)，相应的过渡基向量即为 e_m. 将上述所有子空间分析得到的列向量（特征

向量或广义特征向量）按对应 Jordan 块的顺序横向拼合为总矩阵 P，$P^{-1}AP$ 即为分类讨论下最终的 Jordan 标准型. ■

复盘题 15.5. 设 n 阶反对称阵 A 的所有元素都是整数，则存在整数 m，使得 $|A| = m^2$.

解: 对于实反对称阵 A，若其阶数 n 为奇数，则由性质有:

$$\det(A) = \det(-A^T) = (-1)^n \det(A) = -\det(A).$$

必然推得 $\det(A) = 0$. 此时取整数 $m = 0$ 即可满足 $|A| = 0^2$.

若阶数 n 为偶数，设 $n = 2k$. 在抽象代数中，任意偶数阶反对称矩阵的行列式均可以恒等分解为其帕法式（Pfaffian）的完全平方，即

$$\det(A) = (\mathrm{Pf}(A))^2.$$

帕法式 $\mathrm{Pf}(A)$ 在代数结构上定义为一个严格由矩阵 A 中主对角线一侧元素构成的高次多项式，且该多项式展开后所有的系数均精确为 $+1$ 或 -1. 由于题目已知反对称阵 A 的所有元素都是整数，即 $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. 将整数元素代入整系数多项式 $\mathrm{Pf}(A)$ 中进行有限次纯整数的加法和乘法运算，根据环的封闭性，其计算结果必定是一个确定的整数. 设该整数为 $m = \mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{Z}$. 代回行列式等式即得 $\det(A) = m^2$. 故必然存在整数 m，使得 $|A| = m^2$. ■

复盘题 15.6. 若 A, B, C 是正定阵，则 ABC 正定当且仅当 $ABC = CBA$.

解: 必要性: 若 ABC 为正定阵，则 ABC 必为实对称阵. 对其取转置操作有 $(ABC)^T = ABC$. 又因 A, B, C 均是给定的正定对称阵，它们的转置等于自身，故:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T = CBA.$$

联合上式立即得到 $ABC = CBA$.

充分性: 已知 A, B, C 均正定且满足 $ABC = CBA$. 首先由等式直接推得 $(ABC)^T = C^T B^T A^T = CBA = ABC$，故复合矩阵 $M = ABC$ 是对称矩阵. 对于对称阵 M，要证其正定，只需证明其所有特征值均严格大于零. 利用合同变换，令 $Z = A^{-1/2}MA^{-1/2} = A^{1/2}BCA^{-1/2}$. 由于合同变换不改变矩阵正定性，要证 M 正定只需证明 Z 正定. 再对 Z 进行因式拆解，定义 $P = A^{1/2}BA^{1/2}$，显然 P 是合同于 B 的正定阵. 定义 $Q = A^{-1/2}CA^{-1/2}$，由于 Q 合同于 C，故 Q 亦为严格正定阵. 则有乘积关系 $Z = PQ$. 由于矩阵 $M = A^{1/2}ZA^{1/2}$ 为对称阵，结合对称合同变换的性质，矩阵 Z 必定亦为对称阵. 即 $Z^T = Z \implies (PQ)^T = PQ \implies QP = PQ$. 这表明 Z 是两个相互可交换的正定矩阵 P 和 Q 的乘积. 根据高等代数中的经典定理，两个

可交换的实正定矩阵必定可以同步正交对角化，且其乘积的所有特征值均等于两正定阵对应正特征值的乘积，依然严格大于零. 故 Z 必定为正定阵. 从而 $ABC = A^{1/2}ZA^{1/2}$ 必定也是正定阵. ■

复盘题 15.7. 设 $M = N + S$，其中 N 是 n 阶实对称阵，S 是实反对称阵，且 $SN = M^2 = O$，则 $M = O$.

解: 将 $M = N + S$ 展开计算其平方:

$$M^2 = (N+S)^2 = N^2 + NS + SN + S^2.$$

由于题设已知 $SN = O$ 且 $M^2 = O$，代入上式化简得

$$N^2 + NS + S^2 = O.$$

从 $SN = O$ 出发，两边同时取转置（注意 N 对称，S 反对称），得

$$(SN)^T = O \implies N^T S^T = O \implies N(-S) = O \implies NS = O.$$

将 $NS = O$ 这一结论代回前述的展开化简式中，方程进一步简化为

$$N^2 + S^2 = O \implies N^2 = -S^2.$$

考察这一代数恒等式：由于 N 是实对称矩阵，其平方 $N^2 = N^T N$ 为实半正定阵，其所有特征值均大于等于 0. 由于 S 是实反对称矩阵，等式右端的 $-S^2 = S^T S$ 同样为实半正定阵. 由于 $SN = O$，将该关系连续应用:

$$S^2 N = S(SN) = O \implies (-N^2)N = O \implies N^3 = O.$$

对于任意一个实对称阵 N，若其满足幂零条件 $N^3 = O$，由对称阵必然可对角化的强性质可知，其所有特征值必然全为零. 从而必然有 $N = O$. 将 $N = O$ 直接代回平方和等式 $N^2 = -S^2$ 中，立即得到

$$-S^2 = O \implies S^T S = O.$$

对于实矩阵而言，$S^T S = O$ 等价于矩阵所有元素的平方和为零，这直接要求 $S = O$. 综上推导，必须有 $N = O$ 且 $S = O$，故原矩阵 $M = N + S = O$. ■

复盘题 15.8. 设 A, B 是 2025 阶实矩阵，满足 $AB - BA = A$. 若 B 的最小多项式为 $\lambda^2(\lambda - 1)$，则 $A^2 = O$.

解: 由条件式 $AB - BA = A$ 进行移项提取，可得

$$AB = A(B + I_{2025}).$$

通过矩阵乘法的连续递推并运用数学归纳法，易证对任意多项式 $f(x)$，均有恒等映射关系

$$Af(B) = f(B + I_{2025})A.$$

已知 B 的最小多项式严格为 $m(x) = x^2(x-1)$，由多项式定义知 $m(B) = O$. 将 $f(x) = m(x)$ 整体代入前述多项式等式，可得

$$Am(B) = m(B + I_{2025})A \implies O = (B + I_{2025})^2(B + I_{2025} - I_{2025})A.$$

化简上述方程为

$$(B + I_{2025})^2 BA = O.$$

另一方面，利用极小多项式对空间进行不变子空间准素分解（Primary Decomposition）:

$$\mathbb{R}^{2025} = V_0 \oplus V_1.$$

其中准素子空间分别为 $V_0 = \ker(B^2)$，$V_1 = \ker(B - I_{2025})$. 对任意向量 $\alpha \in V_1$，有 $B\alpha = \alpha$. 此时考察 $AB\alpha = A(B + I_{2025})\alpha \implies A\alpha = 2A\alpha \implies A\alpha = 0$. 这严格说明了算子 A 将 V_1 映射为零，即 $A(V_1) = \{0\}$. 对任意向量 $\beta \in V_0$，有 $B^2\beta = 0$. 在等式 $(B + I_{2025})^2 BA = O$ 中，这表明像空间 $\mathrm{im}A \subseteq \ker((B + I_{2025})^2 B)$. 对于算子 B，其最小多项式的根（即特征值）仅为 0 和 1。故矩阵 $(B + I_{2025})$ 的特征值只能是 1 和 2，显然非奇异可逆. 故 $\ker((B + I_{2025})^2 B) = \ker B \subseteq \ker(B^2) = V_0$. 综上所述，矩阵 A 将全空间映射到了 V_0 内部，即 $\mathrm{im}A \subseteq V_0$. 进一步，考虑 A^2 对整个空间向量的映射情况：全空间可由 V_0 与 V_1 直接张成. $A(V_1) = \{0\}$ 完美保证了 $A^2(V_1) = \{0\}$. 对于 V_0 中的任何元素，由于 $AB^2 = (B + I_{2025})^2 A$，若 $x \in V_0 \implies B^2 x = 0 \implies (B + I_{2025})^2 Ax = 0$. 因 $B + I_{2025}$ 可逆，必有 $Ax = 0$. 故同样有 $A(V_0) = \{0\}$. 综合这两部分的分解，全空间内所有向量在 A 的连续两次作用下均落入 $\ker A$，即 $A^2 = O$. ■

复盘题 15.9. 设 A, B 是 $m \times n$ 阶矩阵，且 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A + B)$. 注意条件在相抵变换下不会发生变换，不妨一开始设 $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，并记 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 为对应分块，则 $\mathrm{rank}(B_4) = \mathrm{rank}(B)$，由此证明存在 P, Q，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

复盘题 15.10. 设 A 是 n 阶实对称阵，则存在实对称阵 B, C，使得 $A = BC$，且 $[B, C] = O$，B 正定，以及 $C^3 = C$.

解: 由于 A 是实对称矩阵，根据正交对角化定理，必定存在正交矩阵 Q 使得

$$A = QDQ^T.$$

其中 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 为全实数对角阵. 为了满足目标，我们需要构造具备指定性质的实对称矩阵 B, C. 分别令对角阵 $D_B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ 与 $D_C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$. 对于每一个确定的特征值 λ_i，设计对应的乘积拆解规则 $\lambda_i = b_i c_i$ 如下：(1) 若 $\lambda_i = 0$，强行取 $b_i = 1, c_i = 0$. (2) 若 $\lambda_i > 0$，强行取 $b_i = \lambda_i, c_i = 1$. (3) 若 $\lambda_i < 0$，强行取 $b_i = -\lambda_i, c_i = -1$. 验证可知：在任何情况下，均保持了 $b_i > 0$ 以及 $c_i \in \{0, 1, -1\}$，且精确满足原特征值的恢复条件 $b_i c_i = \lambda_i$. 利用此对角阵通过基变换反向构造矩阵 $B = QD_BQ^T$ 以及 $C = QD_CQ^T$. 显然 B, C 均为典型的实对称阵，且由于 D_B, D_C 均为对角阵，它们显然乘法可交换，即满足 $[B, C] = O$. 对它们取乘积，恢复出原矩阵：$BC = Q(D_BD_C)Q^T = QDQ^T = A$. 矩阵 B 的特征值 b_i 均被严格限定为大于零，故 B 是一个正定阵. 矩阵 C 的所有特征值 c_i 满足 $c_i \in \{0, 1, -1\}$，显然该集合中的数值满足 $c_i^3 = c_i$. 由于 C 与对角阵 D_C 正交相似，代入矩阵等式显然有 $C^3 = C$. 综上，采用谱分解法所构造出的实对称矩阵 B, C 完美符合题目给定的所有限制条件. ■

16 复盘 16

复盘题 16.1. 设 f, g 是首一整系数多项式，且 $(f, g) = 1$. 若 f 在 $\mathbb{C}$ 上的根为 $x_1, \cdots, x_n$，则 $\left|\prod_{i=1}^{n} g(x_i)\right| \in N^+$.

解: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式（Resultant）为 $R(f, g)$. 由结式的根表示公式可知，其值恰好等于连乘积：

$$R(f, g) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i).$$

由于 f, g 均为首一的整系数多项式，根据 Sylvester 矩阵的定义，$R(f, g)$ 是由多项式系数构成的整系数行列式，故 $R(f, g)$ 必然是一个整数. 又因互素条件 $(f, g) = 1$ 成立，说明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在复数域上没有任何公共根. 即对于 $f(x)$ 的每一个根 x_i，均有 $g(x_i) \neq 0$. 从而该连乘积不为零，即 $R(f, g) \neq 0$. 一个非零的整数，其绝对值必然是正整数. 故 $|\prod_{i=1}^{n} g(x_i)| = |R(f, g)| \in \mathbb{N}^+$. ■

复盘题 16.2. 设 $AB - BA = (A-B)^k, (k \in N^+)$，则 A, B 可同时上三角化，且当 $k=2$ 时，A, B 有相同的特征多项式.

解: 令 $C = A - B$. 则题设条件化为 $[A, B] = C^k$. 考察 A 与 C 的交换子:

$$[A, C] = [A, A-B] = -[A, B] = -C^k.$$

根据算子恒等式，由于 C 与 $-C^k$ 乘法可交换，即 $[A, C]$ 与 C 可交换. 由 Kleinecke-Shirokov 定理（或对 $[A, C^m]$ 递推取迹），若一个交换子 $[A, C]$ 与 C 交换，则该交换子必为幂零阵. 故 $-C^k$ 是幂零矩阵，这直接推得 $C = A - B$ 为幂零矩阵. 因此，交换子 $[A, B] = C^k$ 亦为幂零矩阵. 由于 A, B 的交换子幂零，根据 Lie 代数中对同时三角化的推广判定，即可由公共特征向量结合商空间降维，证明 A, B 可同时上三角化. 当 $k = 2$ 时，由上述证明知 $C = A - B$ 必为幂零阵. 对于幂零矩阵，其主对角线元素在任何上三角化基底下均为零. 由于 A, B 可同时上三角化，设其对角线元素分别为 a_i 与 b_i. 则 $A - B$ 的对角线元素即为 $a_i - b_i$. 因 C 幂零，必有 $a_i - b_i = 0 \implies a_i = b_i$. 这说明 A 与 B 拥有完全相同的特征值及其代数重数，故它们具有相同的特征多项式. ■

复盘题 16.3. 设 $A, B, X \in \mathbb{C}^{3\times 3}$，满足，存在多项式 f, g，使得 $f(X) = A, g(X) = B$，且 $A^2 = B^2 = O$，则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $A = \lambda B$ 或 $B = \lambda A$.

解: 因为 A, B 均是矩阵 X 的多项式，故 A, B 属于交换代数 $\mathbb{C}[X]$. 由矩阵的最小多项式理论，代数 $\mathbb{C}[X]$ 的维数不超过矩阵的阶数 3. 根据代数同构，$\mathbb{C}[X] \cong \mathbb{C}[t]/(m(t))$，其中 $m(t)$ 为 X 的最小多项式，且 $\deg m(t) \le 3$. 现在考察该局部代数结构中的幂零元：若 $m(t)$ 在复数域上无重根，则代数中无非零幂零元，此时必有 $A = B = O$，结论显然成立. 若 $m(t)$ 有重根，因次数不超过 3，其局部幂零理想至多由单个元素 y 生成（对应于最大的 Jordan 块中的移位矩阵）. 若 $m(t)$ 为 2 重根加 1 单根，则该幂零理想仅为 1 维空间，此时所有的幂零元共线，结论显然成立. 若 $m(t) = (t-c)^3$，则幂零理想的基底为 y 与 y^2. 设 $A = a_1 y + a_2 y^2, B = b_1 y + b_2 y^2$. 由 $A^2 = O$ 展开得:

$$A^2 = (a_1 y + a_2 y^2)^2 = a_1^2 y^2 = O.$$

因为 $y^2 \ne O$，必须有 $a_1 = 0$. 从而 $A = a_2 y^2$. 同理由 $B^2 = O$ 推得 $b_1 = 0$，从而 $B = b_2 y^2$. 这说明满足平方为零的幂零元，必然全部落在一维子空间 $\mathrm{span}(y^2)$ 内. 故 A, B 线性相关，即必存在复数 λ 使 $A = \lambda B$ 或 $B = \lambda A$. ■

复盘题 16.4. 设 A 是 n 阶复矩阵，且 $A^{n-1} \neq 0$，则对任意 $k \in N$，方程 $X^k + X^{k-1} + \cdots + X = A$ 在复数域上有解.（本题是对上海师范 2025 第八题推广）

解：设目标多项式为 $h(x) = x^k + x^{k-1} + \cdots + x$. 欲证方程 $h(X) = A$ 有解，根据矩阵多项式函数的反函数理论：若对于 A 的每一个特征值 λ，复系数方程 $h(z) = \lambda$ 均至少存在一个单根 μ（即 $h'(\mu) \neq 0$），则该方程在复数域上必有解矩阵 X. 采用反证法. 假设存在某复数 λ_0，使得方程 $h(z) - \lambda_0 = 0$ 的所有根均为重根. 由代数基本定理，一个 k 次多项式若全是重根且次数完全被吸收，必然可写成完全 k 次方形式：

$$h(z) - \lambda_0 = (z - c)^k.$$

将其展开并比对各项系数：

$$z^k + z^{k-1} + \cdots + z - \lambda_0 = z^k - kcz^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}c^2 z^{k-2} - \ldots$$

比较次高项 z^{k-1} 的系数，得 $1 = -kc \implies c = -1/k$. 将 $c = -1/k$ 代入第三高项 z^{k-2} 的系数中，应满足：

$$1 = \frac{k(k-1)}{2}\left(-\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{k-1}{2k}.$$

解此代数方程得 $2k = k - 1 \implies k = -1$. 但这与 $k \in \mathbb{N}^+$ 产生绝对矛盾. 故原假设错误，对任意的 λ，方程 $h(z) = \lambda$ 必定至少存在一个单根. 因此，对复数域上的任意方阵 A（无论是否满足 $A^{n-1} \neq 0$），该矩阵多项式方程均存在解 X. ■

复盘题 16.5. 设 A 是主对角元全为 2025 的 2025 阶复上三角矩阵，满足 $\operatorname{rank}(A - 2025I)^{2024} = 1$. 若多项式 f 满足 $f(0) = 2025, f'(0) = 2026$，则方程 $f(X) = A$ 在复数域上有幂零解.

解：令 $N = A - 2025I_{2025}$. 由于 A 是主对角元全为 2025 的上三角阵，N 是严格上三角的幂零阵. 由条件 $\operatorname{rank}(N^{2024}) = 1$ 可知，N 相似于一个完整的 2025 阶零 Jordan 块 $J_{2025}(0)$. 即 N 的幂零指数恰好为 2025. 欲求方程 $f(X) = A$ 的幂零解 X. 由于 X 幂零，可将 $f(X)$ 在 0 处进行有限项的 Taylor 展开：

$$f(X) = f(0)I + f'(0)X + \frac{f''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{f^{(2024)}(0)}{2024!}X^{2024}.$$

代入已知条件 $f(0) = 2025$ 且 $A = 2025I + N$，移项可得多项式方程：

$$f'(0)X + \frac{f''(0)}{2!}X^2 + \cdots = N.$$

因 $f'(0) = 2026 \neq 0$，该关于矩阵 X 的多项式无常数项，且一次项系数非零. 根据形式幂级数的反函数定理，必存在唯一的全纯反函数级数 $g(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \dots$，其中 $c_1 = 1/2026 \neq 0$，使得 $f(g(t)) - 2025 = t$. 将幂零阵 N 整体代入级数 $g(t)$ 中. 因 $N^{2025} = O$，该无穷级数在 N^{2024} 处自然截断，故 $X = g(N)$ 是一个有限项的多项式，且完全良定. 由于 X 是幂零矩阵 N 的无常数项多项式，X 必然也是幂零矩阵. 将 X 代回原函数即有 $f(X) = 2025I + N = A$. 故方程必存在幂零解. ■

复盘题 16.6. 设 A 是 n 阶实正交阵，记 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$，其中 A_1 是 A 的 k 阶顺序主子式，则由 $AA' = I_n$ 得

$$A \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}$$

于是

$$|A_4| = \begin{vmatrix} I_k & C \\ O & A_4 \end{vmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} A_1' & O \\ A_2' & I_{n-k} \end{pmatrix} = |A| \cdot |A_1'|$$

即 $|A_1| = |A|^{-1}|A_4|$，其中 $|A_4|$ 是 $|A_1|$ 的代数余子式. 由此证明：A 的任一 k 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的值为 $|A|^{-1}$ 乘以其代数余子式的值.

复盘题 16.7. 正交阵 A 的任一 k 阶子阵的特征值模长都不超过 1.

解: 设 M 为正交阵 A 的任一 k 阶子阵. M 可视为从 A 中选取 k 行与 k 列交叉处的元素构成的矩阵. 引入投影矩阵 $P \in \mathbb{R}^{k\times n}$ 与 $Q \in \mathbb{R}^{k\times n}$，其行向量分别取自单位矩阵 I_n 的对应行，从而使得子阵可以表示为

$$M = PAQ^T.$$

显然，投影矩阵对其作用的向量范数具有收缩性，即对任意 $x \in \mathbb{C}^k$ 且 $y \in \mathbb{C}^n$，有 $\|Q^T x\| = \|x\|$ 且 $\|Py\| \le \|y\|$. 设 λ 为 M 的任一复特征值，$\alpha \neq 0$ 为其对应的特征向量，即 $M\alpha = \lambda\alpha$. 对方程两边取二范数，有

$$|\lambda|\|\alpha\| = \|M\alpha\| = \|PAQ^T\alpha\| \le \|AQ^T\alpha\|.$$

由于 A 为实正交阵，它在复数域上依然是一个酉变换，严格保持向量的 2-范数，即 $\|Ay\| = \|y\|$. 故有等式

$$\|AQ^T\alpha\| = \|Q^T\alpha\| = \|\alpha\|.$$

将此结果代回前面的不等式中，连等即得

$$|\lambda|\|\alpha\| \leq \|\alpha\|.$$

由于特征向量非零，$\|\alpha\| > 0$，两边同时约去即得 $|\lambda| \leq 1$. ■

复盘题 16.8. 设 P 是 n 阶正交阵，且 A 是实对称阵，若 A 的特征值的绝对值落在 $[m, M]$，则 PA 特征值的模长也落在 $[m, M]$.

解: 因 A 为实对称阵，其奇异值 $\sigma_i(A)$ 恰好等于其特征值绝对值 $|\lambda_i(A)|$. 由题设知，A 的奇异值域严格落在区间 $[m, M]$ 内. 根据奇异值的瑞利商定义，对任意非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$，有

$$m\|x\| \leq \|Ax\| \leq M\|x\|.$$

现在考察矩阵 PA 作用下的向量范数. 由于 P 是正交矩阵，正交变换严格保持向量的 Euclidean 范数不变，即对任意向量 y，有 $\|Py\| = \|y\|$. 故对任意非零向量 x，有

$$\|PAx\| = \|P(Ax)\| = \|Ax\|.$$

这直接表明

$$m\|x\| \leq \|PAx\| \leq M\|x\|.$$

设 λ 为矩阵 PA 的任一复特征值，$\alpha \neq 0$ 为其对应的特征向量，即 $PA\alpha = \lambda\alpha$. 对两边取范数，有 $\|PA\alpha\| = |\lambda|\|\alpha\|$. 将该特征向量代入前述放缩不等式中，得

$$m\|\alpha\| \leq |\lambda|\|\alpha\| \leq M\|\alpha\|.$$

由于 $\|\alpha\| > 0$，两边同除以范数，即得

$$m \leq |\lambda| \leq M.$$

故 PA 的所有特征值的模长均严格落在 $[m, M]$ 区间内. ■

复盘题 16.9. 设 V 是 n 阶实矩阵全体，则 $(A, B) = \operatorname{tr}(AB^T)$ 是 V 上的一个内积. 定义 V 上的线性变换 $\varphi(X) = AXB$，则 φ 在标准正交基 $\{E_{ij}\}$（取定顺序）下的表示阵为 $A \otimes B^T$，则 φ^* 在这组基下矩阵为 $(A \otimes B^T)^T = A^T \otimes B$. 则 φ 是正规变换，当且仅当 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$，即

$$(AA^T) \otimes (B^TB) = (A^TA) \otimes (BB^T)$$

我们很容易验证张量的一个性质：若 A, B, C, D 均是 n 阶非零矩阵，则 $A \otimes B = C \otimes D$,

当且仅当存在 k，使得 $A = kC, B = \dfrac{1}{k}D$. 那么对于上述情形而言，若 A, B 均是非零矩阵，则有 $AA^T = kA^TA$，两边取迹得 $k = 1$，即 A, B 均是正规阵.

复盘题 16.10. 用白皮书 P511 的方法重写第 9 题，并解释：若定义 $f(A) = \mathrm{tr}(AA')$，取 n 阶实可逆阵 P，若 $f(P^{-1}AP) = f(A)$, 对任意 n 阶实矩阵 A 成立，则存在 c，使得 $P'P = cI_n$.

解: 在矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上定义 Frobenius 内积 $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(XY')$. 题设函数即为范数的平方，即 $f(A) = \|A\|_F^2$. 条件 $f(P^{-1}AP) = f(A)$ 表明线性映射 $\varphi(X) = P^{-1}XP$ 严格保范数. 由于保范数的线性变换必定保内积，因此 φ 是该空间上的正交变换. 即对任意矩阵 X, Y，均有 $\langle \varphi(X), \varphi(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$. 代入映射展开内积得：

$$\mathrm{tr}(P^{-1}XPP'Y'P^{-T}) = \mathrm{tr}(XY').$$

令矩阵 $M = PP'$. 由于 P 是可逆实矩阵，M 必为严格正定的对称阵. 上述内积等式可化简为：

$$\mathrm{tr}(M^{-1}XMY') = \mathrm{tr}(XY').$$

由于该等式对任意的矩阵 X, Y 均恒成立，由双线性内积的非退化性，对于给定的 X，其在两端内积对应位置上的算子必须相等. 即必有：

$$M^{-1}XM = X \implies XM = MX.$$

此等式对任意 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 成立. 由 Schur 引理（或矩阵乘法中心化子性质）可知，与所有 n 阶方阵乘法可交换的矩阵必须是数量矩阵. 故必定存在非零实数 c，使得 $M = cI_n$. 代回定义即推得 $PP' = cI_n$. ■

17 复盘 17

复盘题 17.1. 设 $AB^T = BA^T$，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD^T - BC^T|$. 问题的关键是对 A 如何进行摄动，使得摄动后的矩阵 A_t 保持 $A_tB^T = BA_t^T$ 的条件. 下面的想法值得积累：设 $PBQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，则 $BQ(P^{-1})^T$ 是对称阵，令 $C = Q(P^{-1})^T$，则 C 可逆且 $BC = C^TB^T$. 因此可以做摄动 $A \mapsto A + tC^T$.

解: 第一步: 若 A 为可逆矩阵. 对分块矩阵提取公因式, 有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B|.$$

由已知条件 $AB^T = BA^T$ 且 A 可逆, 两边同乘 A^{-1} 得 $B^T = A^{-1}BA^T$, 进而有 $B^T(A^T)^{-1} = A^{-1}B$. 将该对称性质代入上述行列式中:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A(D^T - B^T(A^T)^{-1}C^T)^T| = |AD^T - A(A^{-1}B)C^T| = |AD^T - BC^T|.$$

第二步: 若 A 不可逆. 根据题干中的构造提示, 存在可逆阵 C_0 使得 $BC_0 = C_0^T B^T$. 构造摄动矩阵 $A_t = A + tC_0^T$. 验证其交换条件:

$$A_t B^T = (A + tC_0^T)B^T = AB^T + tC_0^T B^T = BA^T + tBC_0 = B(A^T + tC_0) = BA_t^T.$$

这说明 A_t 对任意实数 t 均满足题设条件. 多项式 $f(t) = \det(A + tC_0^T)$ 不恒为零 (因 C_0 可逆), 故存在趋于 0 的实数序列 $\{t_k\}$ 使得 A_{t_k} 均可逆. 对 A_{t_k} 应用第一步的结论:

$$\begin{vmatrix} A_{t_k} & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A_{t_k} D^T - BC^T|.$$

令 $t_k \to 0$, 由行列式函数的连续性, 极限状态下原等式必然成立. 证毕. ■

复盘题 17.2. 设 A, B, C 是实矩阵, 且 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ 是半正定阵, 则 $\rho(B)^2 \leq \rho(A)\rho(C)$, 其中 $\rho(B)$ 是 B 特征值模长的最大值: 首先考虑矩阵正定情形, 此时 A, C 正定, 且 $C - B'A^{-1}B$ 也正定. 设 $|\lambda| = \rho(B)$, β 为 λ 对应特征向量, 则

$$\rho(C)\overline{\beta}'\beta \geq \overline{\beta}'C\beta > \overline{\beta}'(B'A^{-1}B)\beta = \rho(B)^2\overline{\beta}'A^{-1}\beta \geq \rho(B)^2\rho(A)^{-1}\overline{\beta}'\beta$$

即有 $\rho(B)^2 < \rho(A)\rho(C)$. 对于一般情形, 摄动即可.

解: 按照题干中正定情形的思路推广至半正定情形. 对于半正定分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix} \geq 0$, 构造摄动矩阵 $M_\epsilon = M + \epsilon I_{2n}$, 其中 $\epsilon > 0$. 此时 $M_\epsilon = \begin{pmatrix} A + \epsilon I & B \\ B' & C + \epsilon I \end{pmatrix}$ 为严格正定矩阵.

由 Schur 补性质，$(C+\epsilon I)-B'(A+\epsilon I)^{-1}B$ 必须为正定矩阵. 设 λ 为 B 的特征值，且满足 $|\lambda|=\rho(B)$. 设 β 为对应的特征向量. 对上述正定 Schur 补二次型应用向量 β:

$$\overline{\beta}'(C+\epsilon I)\beta > \overline{\beta}'B'(A+\epsilon I)^{-1}B\beta.$$

等式左端，由于 $C+\epsilon I$ 的最大特征值为 $\rho(C)+\epsilon$，故有

$$\overline{\beta}'(C+\epsilon I)\beta \leq (\rho(C)+\epsilon)\|\beta\|^2.$$

等式右端，由 $B\beta=\lambda\beta$ 且 $B'\overline{\beta}=\overline{\lambda\beta}$，代入得

$$\overline{\beta}'B'(A+\epsilon I)^{-1}B\beta = |\lambda|^2\overline{\beta}'(A+\epsilon I)^{-1}\beta = \rho(B)^2\overline{\beta}'(A+\epsilon I)^{-1}\beta.$$

由于 $A+\epsilon I$ 的最小特征值为 $\lambda_{\min}(A)+\epsilon \geq \epsilon > 0$，其逆矩阵的最小特征值为 $(\rho(A)+\epsilon)^{-1}$. 因此

$$\overline{\beta}'(A+\epsilon I)^{-1}\beta \geq \frac{1}{\rho(A)+\epsilon}\|\beta\|^2.$$

联立以上不等式，消去非零的 $\|\beta\|^2$，得到

$$\rho(C)+\epsilon > \frac{\rho(B)^2}{\rho(A)+\epsilon}.$$

整理得 $\rho(B)^2 < (\rho(A)+\epsilon)(\rho(C)+\epsilon)$. 令 $\epsilon \to 0^+$，由实数极限的保号性即得 $\rho(B)^2 \leq \rho(A)\rho(C)$. ∎

复盘题 17.3. 若 A 是 n 阶实对称阵，且其中元素均非负，设 A 的特征值为 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$，记 $|\lambda_k|=\rho(A)$，$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)'$ 是 λ_k 对应特征向量，则

$$\rho(A)\alpha'\alpha = |\lambda_k\alpha'\alpha| = |\alpha'A\alpha| \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|a_i||a_j| = \beta'A\beta \leq \lambda_n\beta'\beta = \lambda_n\alpha'\alpha$$

其中 $\beta=(|a_1|,\cdots,|a_n|)'$，由此得 $\lambda_n=\rho(A)$.

解: 该题题干已给出完整证明逻辑. 由 $\rho(A)\alpha'\alpha \leq \lambda_n\alpha'\alpha$ 且 $\alpha \neq 0$，两边约去 $\|\alpha\|^2$ 得到 $\rho(A) \leq \lambda_n$. 而根据谱半径的定义，$\rho(A)=\max_i|\lambda_i| \geq \lambda_n$. 两相夹逼，必然得出 $\rho(A)=\lambda_n$. 此结论是著名的 Perron-Frobenius 定理在实对称非负矩阵上的最直观代数证明. ∎

复盘题 17.4. 设 A,B 都是半正定阵，且 A,B 的特征值分别落在 $[a,b],[c,d]$ 中，则 AB 的特征值落在 $[ac,bd]$ 中.

解: 因 A 半正定，存在半正定的平方根矩阵 $A^{1/2}$. 矩阵 AB 相似于矩阵 $A^{1/2}BA^{1/2}$:

$$A^{-1/2}(AB)A^{1/2} = A^{1/2}BA^{1/2}.$$

（若 A 不可逆，可利用连续摄动 $A+\epsilon I$ 取极限，特征值依然保持该相似等价的实数范围）. 令 $M = A^{1/2}BA^{1/2}$，由于 B 对称且 $A^{1/2}$ 对称，M 必定是实对称矩阵，从而 AB 的特征值全部为实数. 设 λ 为 M 的任一特征值，α 为其对应的单位特征向量（$\|\alpha\| = 1$）. 根据二次型的瑞利商性质:

$$\lambda = \alpha^T M\alpha = \alpha^T A^{1/2}BA^{1/2}\alpha = (A^{1/2}\alpha)^T B(A^{1/2}\alpha).$$

记向量 $y = A^{1/2}\alpha$. 由已知 B 的特征值在 $[c, d]$ 内，故对其二次型有

$$c\|y\|^2 \leq y^T By \leq d\|y\|^2.$$

又因 $\|y\|^2 = \alpha^T A\alpha$，且 A 的特征值落在 $[a, b]$ 中，对于单位向量 α 有

$$a \leq \alpha^T A\alpha \leq b.$$

综合上述不等式，因半正定保证了特征值界限均非负:

$$\lambda = y^T By \leq d\|y\|^2 \leq db.$$

$$\lambda = y^T By \geq c\|y\|^2 \geq ca.$$

故 AB 的所有特征值 λ 均严格落在区间 $[ac, bd]$ 内. ■

复盘题 17.5. 设 A 是 n 阶实矩阵，且 $A+A'$ 正定. 若 C 是正定对称阵，则 $A'B+BA = C$ 有唯一正定解.

解: 设 λ 为 A 的任一复特征值，α 为对应的非零复特征向量. 由 $A\alpha = \lambda\alpha$，左乘共轭转置得 $\alpha^* A\alpha = \lambda\|\alpha\|^2$. 取共轭转置相加:

$$\alpha^*(A + A')\alpha = (\lambda + \bar{\lambda})\|\alpha\|^2 = 2\mathrm{Re}(\lambda)\|\alpha\|^2.$$

因 $A + A'$ 正定，上式严格大于 0，故 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. 这表明矩阵 A 与 A' 的所有特征值实部均严格为正. 根据 Lyapunov 方程定理，若矩阵所有特征值实部为正，则对于任意正定阵 C，连续 Lyapunov 方程 $A'B + BA = C$ 必定存在唯一的正定解 B. 其唯一正定解可通过积分显式构造:

$$B = \int_0^\infty e^{-A't}Ce^{-At}dt.$$

因被积函数在积分域内始终为正定二次型，故积分结果 B 必然严格正定. ■

复盘题 17.6. 设 A 是半正定阵，且存在正整数 k，使得 $A^kB = BA^k$，则 $AB = BA$.

解：由于 A 是半正定阵，必定存在正交矩阵 Q 将其对角化：

$$A = Q\Lambda Q^T, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

其中 $\lambda_i \geq 0$. 代入条件 $A^kB = BA^k$，有

$$(Q\Lambda^k Q^T)B = B(Q\Lambda^k Q^T).$$

两边左乘 Q^T，右乘 Q，并令 $\widetilde{B} = Q^TBQ$，可得：

$$\Lambda^k \widetilde{B} = \widetilde{B}\Lambda^k.$$

考察该等式的分量形式，对于任意 i, j 有

$$\lambda_i^k \tilde{b}_{ij} = \tilde{b}_{ij}\lambda_j^k \implies (\lambda_i^k - \lambda_j^k)\tilde{b}_{ij} = 0.$$

因为 $\lambda_i \geq 0$，函数 $f(x) = x^k$ 在 $[0, \infty)$ 上是严格单调递增的. 故 $\lambda_i^k = \lambda_j^k$ 成立的充要条件是 $\lambda_i = \lambda_j$. 因此，上述等式等价于：

$$(\lambda_i - \lambda_j)\tilde{b}_{ij} = 0.$$

这恰好是矩阵乘积可交换的分量形式，即推得

$$\Lambda\widetilde{B} = \widetilde{B}\Lambda.$$

反演回原矩阵基底：

$$(Q\Lambda Q^T)(Q\widetilde{B}Q^T) = (Q\widetilde{B}Q^T)(Q\Lambda Q^T) \implies AB = BA.$$

■

复盘题 17.7. 设 A 为 n 阶半正定阵对称阵，B 为 n 阶反对称阵，且 $AB + BA = O$，则 $|A + B| \neq 0$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) = n$.

解：由 $AB + BA = O$ 可知，$\mathrm{im}B \subseteq \ker A$ 且 $\mathrm{im}A \subseteq \ker B$. 假设 $x \in \ker(A + B)$，则 $(A + B)x = 0$. 左乘 x^T 得 $x^TAx + x^TBx = 0$. 因 B 是反对称阵，二次型 $x^TBx = 0$ 恒成立. 故 $x^TAx = 0$. 由于 A 半正定，二次型为零等价于 $Ax = 0$. 将 $Ax = 0$ 代回 $(A + B)x = 0$，立得 $Bx = 0$. 因此 $\ker(A + B) = \ker A \cap \ker B$. 这就证明了矩阵 $A + B$ 可逆（即 $|A + B| \neq 0$）当且仅当 $\ker A \cap \ker B = \{0\}$. 考察 $A + B$ 的秩：

$$\mathrm{rank}(A + B) = n - \dim(\ker A \cap \ker B).$$

由于 $\mathrm{im}A \subseteq \ker B$，矩阵 B 限制在 $\ker A$ 上的像空间恰好等于整个 $\mathrm{im}B$. 应用维数公式于限制映射 $B|_{\ker A}$：

$$\dim(\ker A) = \dim(\ker A \cap \ker B) + \dim(\mathrm{im}B).$$

将 $\dim(\ker A) = n - \mathrm{rank}(A)$ 代入，得

$$\dim(\ker A \cap \ker B) = n - \mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(B).$$

要使 $|A+B| \neq 0$，必须且只需 $\dim(\ker A \cap \ker B) = 0$. 这完全等价于 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) = n$. ■

复盘题 17.8. 设 A, B 是正定对称阵，且 $A \geq B$，则 $A^{1/2} \geq B^{1/2}$.

解: 此即 Loewner 偏序下的著名性质（算子单调性在幂指数 1/2 时的成立）. 设 $X = A^{1/2} - B^{1/2}$，及 $Y = A^{1/2} + B^{1/2}$. 由于 A, B 均为正定阵，其唯一正定平方根 $A^{1/2}, B^{1/2}$ 亦为正定阵，故两者的和 Y 必然严格正定，即 $Y > 0$. 考察乘积的对称展开:

$$XY + YX = (A^{1/2} - B^{1/2})(A^{1/2} + B^{1/2}) + (A^{1/2} + B^{1/2})(A^{1/2} - B^{1/2}).$$

将右端完全展开，交叉项 $A^{1/2}B^{1/2}$ 与 $B^{1/2}A^{1/2}$ 恰好完全抵消:

$$XY + YX = (A - A^{1/2}B^{1/2} + B^{1/2}A^{1/2} - B) + (A + A^{1/2}B^{1/2} - B^{1/2}A^{1/2} - B) = 2(A - B).$$

由已知条件 $A \geq B$，故 $2(A-B) \geq 0$. 即矩阵 X 与正定阵 Y 满足连续 Lyapunov 方程:

$$XY + YX \geq 0.$$

根据 Lyapunov 方程的经典稳定性定理：若 $Y > 0$ 且对称矩阵 X 满足 $XY + YX \geq 0$，则必然有 $X \geq 0$. 由此直接推得 $A^{1/2} - B^{1/2} \geq 0$，即 $A^{1/2} \geq B^{1/2}$. ■

复盘题 17.9. 设 A 是 n 阶正定实对称阵，取定 $\beta \in \mathbb{R}^n$，令

$$f(X) = \frac{1}{2}X^TAX - X^T\beta$$

则 f 有最小值，并求出取最小值的条件: 这是一类经典的用矩阵处理二次型的题目. 首先我们将 f 改写为

$$f(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -\beta \\ -\beta' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

并做如下合同变换

$$\begin{pmatrix} A & -\beta \\ -\beta' & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A & O \\ O & \beta' A^{-1}\beta \end{pmatrix}$$

其中所使用的初等阵 $C = \begin{pmatrix} I & A^{-1}\beta \\ O & 1 \end{pmatrix}$，设

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} Y \\ a \end{pmatrix}$$

则解出

$$\begin{pmatrix} Y \\ a \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - A^{-1}\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而当 $Y'AY = 0$，即 $AX = \beta$ 时，函数取最小值，且最小值为 $\beta' A^{-1}\beta$.

18 复盘 18

复盘题 18.1. 设 φ, ψ 是 V 上的线性变换，且 φ 可对角化，ψ 幂零，以及 $\varphi\psi = \psi\varphi$. 记 φ 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，对应特征子空间为 V_{λ_i}，则 V_{λ_i} 是 ψ 不变子空间，记 $\psi|_{V_{\lambda_i}}$ 上最小多项式为 $m_i(\lambda) = \lambda^{k_i}$，则 ψ 的最小多项式为 $[m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$，即 $m_i(\lambda)$ 中次数最大值，且 $\varphi + \psi$ 的最小多项式为

$$[(\lambda - \lambda_1)^{k_1}, \cdots, (\lambda - \lambda_s)^{k_s}] = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

于是 ψ 的最小多项式次数与 $\varphi + \psi$ 的最小多项式次数相同当且仅当 $s = 1$，即 φ 是数乘变换.

复盘题 18.2. 设 φ 是 $\mathbb{F}[x]$ 上的求导变换，W 是 φ 的一个有限维非零不变子空间，且 $\dim W = k$，则 W 中至少有一个 $k-1$ 次多项式，从而 $1, \cdots, x^{k-1} \in W$(不断求导), 构成 W 的一组基，即 $W = \operatorname{span}\left\{1, \cdots, x^{k-1}\right\}$.

复盘题 18.3. 设 φ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的求导变换，则 φ 在基 $\left\{1, x, \frac{x^2}{2}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$ 下矩阵为 J，其中 J 是上次对角元为 1 的 n 阶零 Jordan 块.

解: 根据导数算子的线性性质，计算该组基底下各个基向量的像. 对于第 1 个基向量 1，求导得 $\varphi(1) = 0$. 对于第 k 个基向量 $\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$（其中 $2 \le k \le n$），求导得

$$\varphi\left(\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) = \frac{(k-1)x^{k-2}}{(k-1)!} = \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}.$$

这恰好是序列中的第 $k-1$ 个基向量. 将上述映射关系写成矩阵的列向量形式，第 k 列除第 $k-1$ 行元素为 1 外，其余元素全为 0. 即表示矩阵 J 的形式为:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此即为标准的 n 阶零特征值 Jordan 块 $J_n(0)$. ■

复盘题 18.4. 设

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为 n 阶零 Jordan 块, 设 $W\subset\mathbb{R}^n$ 是 J 的 k 维非零不变子空间, 对任意 $\alpha=\sum_{k=1}^n a_ie_i\in W$, 由 C-H 定理,

$$0=J^k(\alpha)=a_{k+1}e_1+\cdots+a_ne_{n-k}$$

于是有 $a_{k+1}=\cdots=a_n=0$，即 $W\subset\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_k\}$，从而 $W=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_k\}$.

复盘题 18.5. 设 φ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，设 $m(\lambda)$ 是 φ 的最小多项式. 对任意 $\alpha\in V$，存在唯一次数最小的首一多项式 $m_\alpha(\lambda)$，使得 $m_\alpha(\varphi)(\alpha)=0$. 则存在 $\beta\in V$，使得 $m_\beta(\lambda)=m(\lambda)$.(不用现成的有理标准型角度理解)

解: 设 $m(\lambda)$ 的首一不可约因式分解为 $m(\lambda)=p_1(\lambda)^{r_1}\dots p_k(\lambda)^{r_k}$. 因为 $m(\lambda)$ 是全局最小零化多项式，故对每个不可约因式 $p_i(\lambda)$，必存在向量 $\alpha_i\in V$，使得

$$m_i(\varphi)(\alpha_i)\neq 0,\quad 其中m_i(\lambda)=\frac{m(\lambda)}{p_i(\lambda)}.$$

这表明 α_i 关于算子 φ 的极小多项式 $m_{\alpha_i}(\lambda)$ 必定包含因式 $p_i(\lambda)^{r_i}$. 令 $v_i=\left(\prod_{j\neq i}p_j(\varphi)^{r_j}\right)(\alpha_i)$. 则 v_i 在 φ 作用下的极小多项式恰好就是 $p_i(\lambda)^{r_i}$. 构造向量和 $\beta=v_1+v_2+\cdots+v_k$. 我们要证明 $m_\beta(\lambda)=m(\lambda)$. 假设存在更低次数的多项式 $g(\lambda)$ 使得 $g(\varphi)(\beta)=0$. 由于各个 v_i 分别属于不同的准素子空间 $\ker(p_i(\varphi)^{r_i})$，该全空间的直和分解性质决定了各个分量必须独立为零:

$$g(\varphi)(v_i)=0,\quad\forall 1\leq i\leq k.$$

这就要求 $g(\lambda)$ 必须同时是所有 v_i 的零化多项式. 因此，对每一个 i，$g(\lambda)$ 必须被 v_i 的极小多项式 $p_i(\lambda)^{r_i}$ 所整除. 因诸 $p_i(\lambda)$ 两两互素，其最小公倍式即为全乘积 $m(\lambda)$. 故 $g(\lambda)$ 必须被 $m(\lambda)$ 整除，从而 $m_\beta(\lambda)$ 不可能低于 $m(\lambda)$ 的次数. 故必然存在该向量 β，使得 $m_\beta(\lambda) = m(\lambda)$. ■

复盘题 18.6. 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶第一类正交阵，即 $|A| = 1$，不妨设 A 特征值为 $1, \lambda_1, \lambda_2$，则 $\lambda_1\lambda_2 = 1$，这样即有

$$\begin{aligned}(1 - \mathrm{tr}(A))^2 + \sum_{1\le i<j\le 3}(a_{ij} - a_{ji})^2 &= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(A - A^T)(A^T - A)] \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 3 - \mathrm{tr}(A^2) = 2 + 2\lambda_1\lambda_2 = 4.\end{aligned}$$

复盘题 18.7. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

则对任意正整数 k，A^k 的所有元素之和能被 6 整除.

解: 矩阵的所有元素之和可由双线性形式 e^TA^ke 表示，其中 $e = (1, 1, 1)^T$. 计算矩阵 A 对列向量 e 的作用:

$$Ae = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e.$$

这表明 e 是矩阵 A 的对应于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量. 对任意正整数 k，有

$$A^ke = 2^ke.$$

左乘全 1 行向量 e^T，即得所有元素之和 S_k:

$$S_k = e^T(A^ke) = e^T(2^ke) = 2^k(e^Te) = 3 \cdot 2^k.$$

由于 $k \ge 1$ 为正整数，必定有 $2^k \ge 2$. 故 $S_k = 6 \cdot 2^{k-1}$. 这表明对任意正整数 k，A^k 的所有元素之和必定能被 6 严格整除. ■

复盘题 18.8. 设 φ 是 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 中的线性变换，W 是 V 的一个子空间，记

$$\varphi^{-1}(W) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in W\},$$

> 则 $\varphi^{-1}(W)$ 是 V 的子空间，且
>
> $$\dim W \le \dim\left(\varphi^{-1}(W)\right) \le \dim W + \dim\ker\varphi.$$

解: 设映射的限制 $\varphi|_{\varphi^{-1}(W)} : \varphi^{-1}(W) \to W$. 显然该映射的核空间恰好为全核空间 $\ker\varphi$，即

$$\ker\left(\varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\right) = \varphi^{-1}(W) \cap \ker\varphi = \ker\varphi.$$

根据线性映射的维数定理公式，有

$$\dim(\varphi^{-1}(W)) = \dim(\ker\varphi) + \dim\left(\operatorname{im}\left(\varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\right)\right).$$

由于像空间 $\operatorname{im}\left(\varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\right)$ 是 W 与 $\operatorname{im}\varphi$ 的交集，即

$$\operatorname{im}\left(\varphi|_{\varphi^{-1}(W)}\right) = W \cap \operatorname{im}\varphi.$$

代入维数等式:

$$\dim(\varphi^{-1}(W)) = \dim\ker\varphi + \dim(W \cap \operatorname{im}\varphi).$$

一方面，由子空间交集性质，$\dim(W \cap \operatorname{im}\varphi) \le \dim W$. 故

$$\dim(\varphi^{-1}(W)) \le \dim W + \dim\ker\varphi.$$

另一方面，利用全局维数定理 $\dim\ker\varphi = n - \dim\operatorname{im}\varphi$，代入得

$$\dim(\varphi^{-1}(W)) = n - \dim\operatorname{im}\varphi + \dim(W \cap \operatorname{im}\varphi).$$

由子空间维数公式 $\dim(W + \operatorname{im}\varphi) = \dim W + \dim\operatorname{im}\varphi - \dim(W \cap \operatorname{im}\varphi)$ 可得

$$\dim(\varphi^{-1}(W)) = n - \dim(W + \operatorname{im}\varphi) + \dim W.$$

由于和空间 $W + \operatorname{im}\varphi$ 必定是全空间 V 的子空间，其维数必然小于等于 n. 故 $n - \dim(W + \operatorname{im}\varphi) \ge 0$. 从而直接推得下界:

$$\dim(\varphi^{-1}(W)) \ge \dim W.$$

■

> **复盘题 18.9.** 设 $B_1, \cdots, B_k$ 是幂等阵，则 $\operatorname{rank}(I - B_1 \cdots B_k) \le k(n - \operatorname{rank}(B_1 \cdots B_k))$.

解: 对于任何两个矩阵 X, Y，其差的秩满足基本的秩不等式 $\operatorname{rank}(I - XY) \le \operatorname{rank}(I - X) + \operatorname{rank}(I - Y)$. 利用该不等式对 k 个矩阵的乘积进行递推展开:

$$\operatorname{rank}(I - B_1 B_2 \cdots B_k) \le \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}(I - B_i).$$

由于 B_i 均为幂等矩阵，满足 $B_i^2 = B_i$. 对于幂等矩阵，其特征值只能为 0 或 1，且必然可对角化. 故其满足互补秩等式：

$$\operatorname{rank}(I - B_i) = n - \operatorname{rank}(B_i).$$

代入不等式得

$$\operatorname{rank}(I - B_1B_2\cdots B_k) \le \sum_{i=1}^{k}(n - \operatorname{rank}(B_i)).$$

另一方面，矩阵乘积的秩绝不会超过任意一个因子的秩，即对任意 i，均有

$$\operatorname{rank}(B_1B_2\cdots B_k) \le \operatorname{rank}(B_i).$$

两边取负号，等价于：

$$-\operatorname{rank}(B_i) \le -\operatorname{rank}(B_1B_2\cdots B_k).$$

将此下界代回求和式中，放缩即得：

$$\sum_{i=1}^{k}(n - \operatorname{rank}(B_i)) \le \sum_{i=1}^{k}(n - \operatorname{rank}(B_1B_2\cdots B_k)) = k\Big(n - \operatorname{rank}(B_1B_2\cdots B_k)\Big).$$

故不等式得证. ■

复盘题 18.10. 设 $V = \mathbb{R}^n$，内积取为 $(\alpha, \beta) = \alpha\beta'$. 设 W 是 V 的子空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 W 一组给定生成元，对于任意给定 $\alpha \in V$，如何求 α 在 W 中的正交投影：不妨设 $\beta = \sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i$ 是 α 在 W 中的正交投影，则 $(\alpha - \beta, \alpha_i) = 0$，即有方程组 $A'AX = A'\alpha$，其中

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

而方程 $A'AX = A'\alpha$ 总是有解的，解有可能不唯一，但是 AX 总是唯一的，因为正交投影唯一，且解唯一当且仅当 A 列满秩，即 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

19 复盘 19

复盘题 19.1. 设 φ 是 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间中的线性变换，则 $V = \operatorname{im}\varphi + \ker\varphi$ 当且仅当 $\varphi|_{\operatorname{im}\varphi}$ 是线性同构.

解：必要性：若 $V=\mathrm{im}\varphi+\ker\varphi$. 根据全局的维数定理公式 $\dim V=\dim(\mathrm{im}\varphi)+\dim(\ker\varphi)$. 由子空间直和维数判定准则，必然有 $\mathrm{im}\varphi\cap\ker\varphi=\{0\}$，即该和为直和 $V=\mathrm{im}\varphi\oplus\ker\varphi$. 考察限制映射 $\varphi|_{\mathrm{im}\varphi}:\mathrm{im}\varphi\to\mathrm{im}\varphi$. 其核空间为 $\mathrm{im}\varphi\cap\ker\varphi=\{0\}$. 由于线性变换在有限维空间中核空间为零必定是单射，进而必定是双射，故 $\varphi|_{\mathrm{im}\varphi}$ 是线性同构.

充分性：若 $\varphi|_{\mathrm{im}\varphi}$ 是线性同构. 说明该限制映射的核为零，即 $\mathrm{im}\varphi\cap\ker\varphi=\{0\}$. 对全空间的任一向量 $v\in V$，存在 $\varphi(v)\in\mathrm{im}\varphi$. 由于 $\varphi|_{\mathrm{im}\varphi}$ 为双射（同构），在 $\mathrm{im}\varphi$ 中必然存在唯一向量 u 使得 $\varphi(u)=\varphi(v)$. 令 $w=v-u$. 显然 $\varphi(w)=\varphi(v)-\varphi(u)=0$，故 $w\in\ker\varphi$. 因此任意向量均可分解为 $v=u+w$，其中 $u\in\mathrm{im}\varphi, w\in\ker\varphi$. 故 $V=\mathrm{im}\varphi+\ker\varphi$ 成立. ■

复盘题 19.2. 设 A 是 n 阶实矩阵，且存在实矩阵 P，使得 $A^T=AP$，则 A 的行向量组可以由 A 的列向量组线性表出，即 $(\mathrm{im}A)^{\perp}\subset\ker A$，结合维数公式

$$n=\dim\,\ker A+\dim\mathrm{im}A=\dim\mathrm{im}A+\dim(\mathrm{im}A)^{\perp}$$

即有 $(\mathrm{im}A)^{\perp}=\ker A$. 那么取 $\mathrm{im}A,\ker A$ 的一组标准正交基拼成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基:$Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}B&O\\O&O\end{pmatrix}$$

其中 B 是可逆阵.

复盘题 19.3. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 中的线性变换，则 $V=\mathrm{im}\varphi\perp\ker\varphi$ 当且仅当 $\ker\varphi\subset\ker\varphi^*$ 当且仅当 $\ker\varphi=\ker\varphi^*$ 当且仅当存在 $\psi\in\mathrm{End}(V)$，使得 $\varphi=\psi\varphi^*$ 当且仅当存在 $\psi\in\mathrm{End}(V)$，使得 $\varphi=\varphi^*\psi$.（上面是对中科大 2025 第 10 题的总结与推广）

复盘题 19.4. 设 $SL(2)$ 是二阶行列式为 1 的整数阵全体，若 $A\in SL(2)$，满足存在 k，使得 $A^k=I_2$，此时记 $o(A)$ 是满足 $A^k=I_2$ 的最小整数，求 $S=\{n\mid A\in SL(2),o(A)=n\}$：若 $A\in SL(2)$，满足 $A^k=I_2$，则 A 的特征值为单位根，从而 A 特征多项式为 $x^2+2\cos\theta\cdot x+1$ 为整系数多项式，即可能的情形为 $(x\pm1)^2,x^2\pm x+1,x^2+1$. 对于这当中的每个情形，很容易构造对应的 $A\in SL(2)$ 满足，于是 $S=\{1,2,3,6,4\}$.

复盘题 19.5. 设 A 可对角化，若 λ 是 A 的一个特征值，α 为对应特征向量，则 $(A-\lambda E)X=\alpha$ 无解.

解: 采用反证法. 假设方程 $(A-\lambda I)X=\alpha$ 存在解 X_0. 由于 α 是特征值 λ 对应的特征向量, 故 $\alpha\neq 0$ 且 $(A-\lambda I)\alpha=0$. 将方程两边同乘 $(A-\lambda I)$, 可得

$$(A-\lambda I)^2X_0=(A-\lambda I)\alpha=0.$$

这表明解向量 $X_0\in\ker((A-\lambda I)^2)$. 但另一方面, $(A-\lambda I)X_0=\alpha\neq 0$, 故 $X_0\notin\ker(A-\lambda I)$. 这意味着向量 X_0 是算子 A 对应于特征值 λ 的 2 阶广义特征向量. 在矩阵结构中, 广义特征向量的存在表明该特征值对应至少一个阶数大于等于 2 的 Jordan 块. 而题目明确给出矩阵 A 是可对角化的, 即可对角化矩阵的所有 Jordan 块均为 1 阶, 绝不可能存在高阶广义特征向量. 这两者产生绝对矛盾. 故假设错误, 方程 $(A-\lambda I)X=\alpha$ 在可对角化前提下必无解. ■

复盘题 19.6. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 则 φ 可对角化当且仅当对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, 有

$$V=\operatorname{im}(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)+\ker(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V).$$

解: 必要性: 若 φ 可对角化, 则其最小多项式没有重根, 即对任意特征值 λ, λ 在最小多项式中仅为单根. 这意味着空间必然满足直和分解 $V=\operatorname{im}(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)\oplus\ker(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)$. 既然存在直和, 自然满足等式 $V=\operatorname{im}(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)+\ker(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)$.

充分性: 若对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, 该空间和式均成立. 由维数定理可知, 该和必须是直和, 即 $\operatorname{im}(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)\cap\ker(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)=\{0\}$. 这就等价于核空间与像空间没有非零交集. 假设 φ 不可对角化, 则必然存在某个特征值 λ_0, 使得其对应的最小多项式因式含有高次幂 $(\lambda-\lambda_0)^k$ $(k\geq 2)$. 此时, 必存在至少一个二阶广义特征向量 v, 使得 $(\varphi-\lambda_0\mathrm{id}_V)^2v=0$ 且 $u=(\varphi-\lambda_0\mathrm{id}_V)v\neq 0$. 观察向量 u, 由定义知 $u\in\operatorname{im}(\varphi-\lambda_0\mathrm{id}_V)$. 同时 $(\varphi-\lambda_0\mathrm{id}_V)u=(\varphi-\lambda_0\mathrm{id}_V)^2v=0$, 知 $u\in\ker(\varphi-\lambda_0\mathrm{id}_V)$. 故非零向量 u 属于这两个子空间的交集, 破坏了直和分解, 这与推导出的核与像交集为零相矛盾. 故不存在高阶广义特征向量, φ 必定可对角化. ■

复盘题 19.7. 设 $A\in\mathbb{Q}^{n\times n}$ 的特征多项式是 $\mathbb{Q}[x]$ 上的不可约多项式, 记 $W=\{f(A)\mid f\in\mathbb{Q}[x]\}$, 则 W 中任何非零元都可逆. 进一步, 设 $\alpha\in\mathbb{C}$ 是 A 的一个特征值, 记 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 是包含 α 的最小数域, 可以将 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 看成 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间, 则 W 与 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 是线性同构的.

解: 因 A 的特征多项式 $P_A(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约, 由 Cayley-Hamilton 定理知其也是 A 的最小多项式. 对任意非零元素 $B=f(A)\in W$, 必有 $f(x)$ 不被 $P_A(x)$ 整除. 由于 $P_A(x)$ 是不可约多项式, 故二者必然互素, 即 $(f(x),P_A(x))=1$. 根据 Bezout 定理, 存在多项式 $u(x),v(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得

$$u(x)f(x)+v(x)P_A(x)=1.$$

将其矩阵化代入 A，因 $P_A(A)=O$，直接得到

$$u(A)f(A)=I_n.$$

这表明矩阵 $u(A)\in W$ 恰好是 $B=f(A)$ 的逆矩阵. 故 W 构成了一个域，所有非零元均可逆. 进一步，定义映射 $\Phi: W\to\mathbb{Q}(\alpha)$，其对应规则为 $\Phi(f(A))=f(\alpha)$. 若 $f(A)=g(A)$，则 $P_A(x)\mid(f(x)-g(x))$. 因 $P_A(\alpha)=0$，必有 $f(\alpha)=g(\alpha)$，映射良定. 若 $\Phi(f(A))=0$，即 $f(\alpha)=0$，因 $P_A(x)$ 是 α 的最小多项式，故 $P_A(x)\mid f(x)$，从而 $f(A)=O$，证明了 Φ 为单射. 由 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 的定义知该映射显然满射. 并且显然保持加法和数乘运算. 故 Φ 建立了一个双射线性同态，即 W 与 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 线性同构. ■

复盘题 19.8. 设有整系数多项式 $f=x^3+ax^2+bx+c$，不妨假设题意为 $f(0)$ 与 $f(1)$ 均为奇数（原命题中系数约束条件即等价于此），则 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

解: 因 f 是三次首一多项式，若其在 $\mathbb{Q}$ 上可约，则必然包含至少一个一次有理因式. 由有理根定理，首一整系数多项式的有理根必然是整数. 故假设 f 存在整数根 k，使得 $f(k)=0$. 我们采用模 2 约化方法进行反证考察. 在模 2 同余系 $\mathbb{Z}_2$ 中，任何整数 k 不是奇数就是偶数，即 $k\equiv 0 \pmod 2$ 或 $k\equiv 1 \pmod 2$. 若 $k\equiv 0 \pmod 2$，代入多项式得

$$0=f(k)\equiv f(0) \pmod 2.$$

但这与已知条件 $f(0)$ 为奇数（即 $f(0)\equiv 1 \pmod 2$）产生矛盾. 若 $k\equiv 1 \pmod 2$，代入多项式得

$$0=f(k)\equiv f(1) \pmod 2.$$

这同样与已知条件 $f(1)$ 为奇数（即 $f(1)\equiv 1 \pmod 2$）产生绝对矛盾. 故方程在模 2 意义下均无解，这直接排除了它在整数域上有解的可能性. 从而 f 无有理根，作为一个三次多项式，必然在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. ■

复盘题 19.9. 设 A,B 均为 n 阶实对称矩阵，且 A 正定，若 AB 的特征值全为 1，则存在次数小于 n 的多项式 f，使得 $B=f(A)$.

解: 因 A 为正定实对称阵，可分解为 $A=A^{1/2}A^{1/2}$，其中 $A^{1/2}$ 也是正定对称阵. 考察 AB 的相似变换，将 $A^{1/2}$ 移项:

$$A^{-1/2}(AB)A^{1/2}=A^{1/2}BA^{1/2}.$$

令对称矩阵 $M=A^{1/2}BA^{1/2}$. 由于 M 相似于 AB，故 M 的特征值与 AB 完全相同，即全为 1. 在实矩阵理论中，一个对称矩阵若其所有特征值均等于同一实数，则该对称矩阵必然等于

数量矩阵. 故 $M = I_n$. 将其代回定义式，有

$$A^{1/2}BA^{1/2} = I_n \implies B = (A^{1/2})^{-1}(A^{1/2})^{-1} = A^{-1}.$$

这表明 B 实际上就是 A 的逆矩阵. 设 A 的特征多项式为 $p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$. 由于 A 正定，其常数项 $c_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$. 由 Cayley-Hamilton 定理有 $A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I_n = O$. 两边提取并同乘 $-c_0^{-1}A^{-1}$，得

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1 I_n).$$

即 B 可以写成 A 的一个次数严小于 n 的多项式，结论得证. ■

复盘题 19.10. 设 A, B 均是半正定阵，则存在可逆阵 C，使得 $C'AC, C'BC$ 同为对角阵.

解: 虽然半正定阵在边界处可能不可逆，但通过分步的正交与合同变换依然可以实现同步对角化. 由于 $A \geq 0$，存在正交阵 Q_1 使得 $Q_1'AQ_1 = \begin{pmatrix} D_A & O \\ O & O \end{pmatrix}$，其中 D_A 是严格正定的对角阵. 构造可逆阵 $P = Q_1 \begin{pmatrix} D_A^{-1/2} & O \\ O & I \end{pmatrix}$，作合同变换:

$$P'AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

对 B 应用同样的合同变换, 设 $P'BP = M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{pmatrix}$. 因 $B \geq 0$, 故 $M \geq 0$. 由半正定矩阵零对角块的限制，存在矩阵 X 使得 $\begin{pmatrix} I & X \\ O & I \end{pmatrix}' M \begin{pmatrix} I & X \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 & O \\ O & M_3 \end{pmatrix}$. 令 $R = \begin{pmatrix} I & X \\ O & I \end{pmatrix}$, 由于 R 的左上角依然是 I_r，它作用在 $P'AP$ 上完全不改变其 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的形态. 此时，两矩阵均已化为块对角阵，且对应的非零块 $\tilde{M}_1$ 与 M_3 均为对称阵. 分别存在正交矩阵 U_1, U_2 对它们进行对角化. 令最终的可逆变换阵为 $C = PR \begin{pmatrix} U_1 & O \\ O & U_2 \end{pmatrix}$. 该矩阵即满足 $C'AC$ 与 $C'BC$ 同为对角阵. ■

20 复盘 20

复盘题 20.1. 设 n 维欧氏空间 V 中有 $n+1$ 个向量 $\alpha_0,\cdots,\alpha_n$，满足两两之间的距离为 $d>0$，令 $\beta_i=\alpha_i-\alpha_0(1\le i\le n)$，则对任意 $i\ne j$，有 $(\beta_i,\beta_j)=\dfrac{d^2}{2}$，且 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 构成 V 的一组基.

解: 根据距离定义，对所有 k 有 $\|\beta_k\|^2=\|\alpha_k-\alpha_0\|^2=d^2$. 对任意 $i\ne j$，考察距离平方：

$$d^2=\|\alpha_i-\alpha_j\|^2=\|(\alpha_i-\alpha_0)-(\alpha_j-\alpha_0)\|^2=\|\beta_i-\beta_j\|^2.$$

将内积完全展开：

$$\|\beta_i-\beta_j\|^2=\|\beta_i\|^2+\|\beta_j\|^2-2(\beta_i,\beta_j).$$

代入范数结果，得 $d^2=d^2+d^2-2(\beta_i,\beta_j)$. 解之即得

$$(\beta_i,\beta_j)=\frac{d^2}{2}.$$

现在证明这 n 个向量线性无关. 构造这组向量的 Gram 矩阵 $G=((\beta_i,\beta_j))_{n\times n}$. 根据前面的计算，主对角线元素均为 d^2，非主对角线元素均为 $\frac{d^2}{2}$. 即 $G=\frac{d^2}{2}(I_n+E)$，其中 E 是全 1 矩阵. 矩阵 E 的特征值为 n (一重) 和 0 ($n-1$ 重). 因此 G 的特征值为 $\frac{d^2}{2}(n+1)$ 和 $\frac{d^2}{2}$，均严格大于零. 这说明 Gram 矩阵 G 的行列式 $|G|>0$，故这组向量必然线性无关. 在 n 维空间中，n 个线性无关的向量必定构成该空间的一组基. ■

复盘题 20.2. 设 A 为 8 阶正交阵，则 A 不存在元素全为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的三阶子阵.

解: 假设存在一个 3×3 的子矩阵 M，其所有元素均为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 我们可以考察该子阵对应算子的谱范数（最大奇异值）. 计算矩阵 M^TM：

$$M^TM=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt2} & \cdots\\ \vdots & \ddots\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt2} & \cdots\\ \vdots & \ddots\end{pmatrix}.$$

由于 M 是由 9 个完全相同的常数 $c=\frac{1}{2\sqrt2}$ 构成，其可写为 $M=cee^T$，其中 $e=(1,1,1)^T$. 于是

$$M^TM=c^2e(e^Te)e^T=3c^2ee^T.$$

矩阵 $3c^2ee^T$ 是一个秩为 1 的矩阵，其唯一非零特征值为其迹 $\mathrm{tr}(3c^2ee^T)=9c^2$. 将 $c=\frac{1}{2\sqrt2}$ 代入，计算得

$$9c^2=9\times\frac18=\frac98.$$

这说明子阵 M 的最大特征值的模长平方为 $9/8>1$. 然而，M 是正交矩阵 A 的子矩阵. 正交变换的几何意义是在欧氏空间中严格保持范数不变，其所有子块构成的投影算子必定为范数收缩映射，即最大奇异值绝不能超过 1. 这就产生了绝对的分析学矛盾. 故假设错误，该子阵绝不可能存在. ■

复盘题 20.3. 设 A 为 n 阶实对称阵，则 A 有 n 个不同特征值当且仅当对任意 A 特征值 λ，以及相应的特征向量，矩阵

$$\begin{pmatrix} A-\lambda I & \alpha \\ \alpha' & 0 \end{pmatrix}$$

是可逆阵.

解: 设该分块矩阵为 M. 必要性：若 A 有 n 个互异的特征值，则每个特征值 λ 均为单根. 因 A 为对称阵，其代数重数等于几何重数，即 $\dim\ker(A-\lambda I)=1$. 设 α 为特征向量，则核空间由 α 唯一张成. 考察方程组 $M\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}=0$，展开得：

$$(A-\lambda I)x+k\alpha=0,\quad \alpha' x=0.$$

由于 $A-\lambda I$ 是对称阵，其像空间与核空间正交直和，即 $\operatorname{im}(A-\lambda I)=\ker(A-\lambda I)^{\perp}$. 已知 $\ker(A-\lambda I)=\operatorname{span}(\alpha)$，故 $\operatorname{im}(A-\lambda I)$ 中所有向量均与 α 正交. 而由第一式 $(A-\lambda I)x=-k\alpha$，可知向量 $-k\alpha\in\operatorname{im}(A-\lambda I)$. 因此必定有 $(-k\alpha)'\alpha=0 \implies -k\|\alpha\|^2=0$. 因特征向量 $\alpha\neq 0$，必解得 $k=0$. 代入原方程得 $(A-\lambda I)x=0$，即 $x\in\ker(A-\lambda I)=\operatorname{span}(\alpha)$. 设 $x=c\alpha$，代入第二式 $\alpha'(c\alpha)=c\|\alpha\|^2=0$，解得 $c=0 \implies x=0$. 方程仅有零解，故矩阵 M 可逆.

充分性：若 A 的某个特征值 λ 是多重根，由对称阵性质，其核空间维数 ≥ 2. 在核空间中任取两个线性无关的特征向量 α_1,α_2. 利用 Gram-Schmidt 正交化，我们总能选取一个特征向量 $\beta\in\ker(A-\lambda I)$，使得 $\beta\perp\alpha$. 即满足 $(A-\lambda I)\beta=0$ 且 $\alpha'\beta=0$. 将非零向量 $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入矩阵 M，显然映射结果为零. 此时方程存在非零解，矩阵 M 不可逆，与条件矛盾. 故 A 的每个特征值均只能是单根，即 A 拥有 n 个互异特征值. ■

复盘题 20.4. 设 A 是 n 阶半正定阵，则存在 $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，使得 $A+BB'$ 正定且 $|B'(A+BB')^{-1}B|=1$ 的充要条件是 $\operatorname{rank}(A)=n-m$.

解: 必要性: 已知 $A+BB'$ 正定, 记为 M. 利用逆矩阵性质, 二次型条件等价于 $|B'M^{-1}B|=1$. 对 M 左乘 M^{-1} 得 $I_n=M^{-1}A+M^{-1}BB'$. 两边取迹有 $n=\operatorname{tr}(M^{-1}A)+\operatorname{tr}(M^{-1}BB')$. 由迹的循环性 $\operatorname{tr}(M^{-1}BB')=\operatorname{tr}(B'M^{-1}B)$. 又因为 $B'M^{-1}B$ 是 m 阶矩阵，其特征值 μ_i 必定介于 0 和 1 之间（因为 $M^{-1}A\geq 0$）. 已知其行列式为 1，即所有特征值之积为 1. 介于 0 和 1 之间的数乘积为 1，要求它们必须全部严格等于 1. 故 $\operatorname{tr}(B'M^{-1}B)=m$. 代回迹等式，得 $\operatorname{tr}(M^{-1}A)=n-m$. 因 $M^{-1}A$ 的特征值均为 1 或 0，其迹恰等于其非零特征值的个数，也即等于 $\operatorname{rank}(A)$. 故推得 $\operatorname{rank}(A)=n-m$.

充分性：若 $\operatorname{rank}(A)=n-m$. 因 A 半正定，存在正交矩阵 Q 使得 $A=Q\begin{pmatrix}\Lambda & O\\ O & O\end{pmatrix}Q'$. 其中 Λ 是 $(n-m)$ 阶正定对角阵. 构造矩阵 $B=Q\begin{pmatrix}O\\ I_m\end{pmatrix}$. 则 $A+BB'=Q\begin{pmatrix}\Lambda & O\\ O & I_m\end{pmatrix}Q'$，显然是严格正定矩阵. 计算所需的二次型：

$$B'(A+BB')^{-1}B=\begin{pmatrix}O & I_m\end{pmatrix}Q'\left(Q\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & O\\ O & I_m\end{pmatrix}Q'\right)Q\begin{pmatrix}O\\ I_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & O\\ O & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O\\ I_m\end{pmatrix}=I_m.$$

其行列式显然为 $|I_m|=1$. 结论得证. ■

复盘题 20.5. 设 A 为 n 阶实对称阵，S 为 n 阶实可逆反对称阵，且 $AS=SA$，则 $|A+S|\geq|S|$，且等号成立当且仅当 $A=O$.

解: 因 S 是可逆反对称阵，其行列式 $|S|>0$. 提公因式 S，得

$$A+S=S(I+S^{-1}A).$$

两边取行列式得 $|A+S|=|S||I+S^{-1}A|$. 令 $M=S^{-1}A$. 由于 $AS=SA$，有 $S^{-1}A=AS^{-1}$. 考察 M 的对称性，利用转置性质：

$$M'=(S^{-1}A)'=A'(S^{-1})'=A(-S^{-1})=-AS^{-1}=-S^{-1}A=-M.$$

这说明 M 也是一个反对称矩阵. 实反对称阵 M 的特征值必然是成对共轭的纯虚数 $\pm i\mu_k$ 或 0. 计算行列式：

$$|I+M|=\prod_k(1+i\mu_k)(1-i\mu_k)=\prod_k(1+\mu_k^2).$$

显然，连乘积 $\prod(1+\mu_k^2)\geq 1$. 代回原式即有

$$|A+S|=|S|\prod_k(1+\mu_k^2)\geq|S|.$$

等号成立的充要条件是所有的 $\mu_k=0$. 由于 M 为实反对称阵，其在复数域上必定可对角化，所有特征值均为零的反对称阵必然为零矩阵，即 $M=O$. 由 $S^{-1}A=O$，两边左乘可逆阵 S 立即推得 $A=O$. ■

复盘题 20.6. 利用内积 $(A,B)=\operatorname{tr}(AB^T)$，可以得到对任意 n 阶实矩阵 A，有 $\operatorname{tr}(A)^2\leq n\cdot\operatorname{tr}(AA')$.

解：在矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上，Frobenius 内积定义为 $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(XY^T)$. 根据该内积诱导的 Cauchy-Schwarz 不等式，对任意两个矩阵 X, Y，均有：

$$\langle X, Y\rangle^2 \leq \langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle.$$

取目标矩阵 $X = A$，以及单位矩阵 $Y = I_n$. 计算各项内积如下：

$$\langle A, I_n\rangle = \operatorname{tr}(AI_n^T) = \operatorname{tr}(A).$$

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}(AA^T).$$

$$\langle I_n, I_n\rangle = \operatorname{tr}(I_n I_n^T) = \operatorname{tr}(I_n) = n.$$

将上述结果代入 Cauchy-Schwarz 不等式，直接可得：

$$\operatorname{tr}(A)^2 \leq n \cdot \operatorname{tr}(AA^T).$$

■

复盘题 20.7. 利用矩阵的奇异值分解，将上述结果改进为：对任意 n 阶实矩阵 A，有 $\operatorname{tr}(A)^2 \leq \operatorname{rank}(A) \cdot \operatorname{tr}(AA')$.

解：对实矩阵 A 进行奇异值分解 (SVD)：

$$A = U\Sigma V^T.$$

其中 U, V 为 n 阶正交阵，$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$，且 $r = \operatorname{rank}(A)$. 将该分解代入迹的计算，并利用迹的循环排列性质：

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(U\Sigma V^T) = \operatorname{tr}(\Sigma V^T U).$$

令正交矩阵的乘积 $W = V^T U$，显然 W 依然是正交阵，其所有元素的绝对值均满足 $|w_{ij}| \leq 1$. 特别地，其对角线元素 $|w_{ii}| \leq 1$. 于是迹可展开为

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i w_{ii} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i w_{ii}.$$

对上式应用有限项欧几里得空间的 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\operatorname{tr}(A)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} \sigma_i w_{ii}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{r} w_{ii}^2\right).$$

由于对所有对角元均有 $w_{ii}^2 \leq 1$，故 $\sum_{i=1}^{r} w_{ii}^2 \leq r = \operatorname{rank}(A)$. 又因为

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 = \operatorname{tr}(\Sigma^2) = \operatorname{tr}(U\Sigma^2 U^T) = \operatorname{tr}((U\Sigma V^T)(V\Sigma U^T)) = \operatorname{tr}(AA^T).$$

将这两项放缩结果代入不等式，即证明了改进的界限：

$$\operatorname{tr}(A)^2 \leq \operatorname{rank}(A) \cdot \operatorname{tr}(AA').$$

■

复盘题 20.8. 不存在正交阵 A, B，使得 $A^2 = cAB + B^2$，其中 c 是非零实数.

解: 假设存在符合条件的正交阵 A, B. 在等式 $A^2 = cAB + B^2$ 两边同时右乘 B^{-1}（即 B^T），并在左边同时左乘 A^{-1}（即 A^T），可得

$$AB^T = cI_n + A^T B.$$

令矩阵 $X = A^T B$. 因为 A, B 均为正交阵，其乘积的转置 $A^T B$ 也是正交阵，即 X 是正交阵. 此时，左端 $AB^T = (A^T B)^{-1} = X^{-1}$. 代入上式即得矩阵多项式方程:

$$X^{-1} = cI_n + X \implies X^2 + cX - I_n = O.$$

这说明正交矩阵 X 的任何特征值 λ 必然是实系数二次方程 $x^2 + cx - 1 = 0$ 的根. 该方程的两根分别为

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+4}}{2}.$$

由于 X 是正交阵，其在复数域上的所有特征值模长必须严格等于 1. 即要求 $|\lambda_i| = 1$. 由根与系数的关系（Vieta 定理），两根之积为 $\lambda_1\lambda_2 = -1$. 若 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ 且乘积为 -1，由实根性质（判别式大于零说明根均为实数），这两个根必须只能是 1 和 -1. 此时两根之和为 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. 根据 Vieta 定理，一次项系数必须为零，即 $c = 0$. 这与题干中明确给出的条件"c 是非零实数"产生绝对矛盾. 故假设错误，不存在这样的正交矩阵对. ■

复盘题 20.9. 设 A 是 n 阶正交阵，且 $|A| = 1$，若设 f 的特征多项式为

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

则有 $a_i = (-1)^n a_{n-i} (i = 0, 1, \cdots, n)$.

解: 根据特征多项式的定义 $f(x) = \det(xI_n - A)$. 因 A 是正交矩阵，满足 $A^T A = I_n$，且已知 $|A| = 1$. 考察 A^T 的特征多项式 $\det(xI_n - A^T)$. 由于矩阵转置不改变行列式值，故

$$\det(xI_n - A^T) = \det(xI_n - A) = f(x).$$

将 $A^T = A^{-1}$ 代入左端并作代数提取:

$$\det(xI_n - A^{-1}) = \det(-xA^{-1}(x^{-1}I_n - A)).$$

利用行列式的乘法公式:

$$\det(-xA^{-1}) \cdot \det(x^{-1}I_n - A) = (-x)^n |A^{-1}| f(x^{-1}).$$

因 $|A| = 1$ 则 $|A^{-1}| = 1$，得到恒等式：

$$f(x) = (-x)^n f(x^{-1}).$$

将其展开比较系数：左端项为 $a_i x^{n-i}$，右端对应项为 $(-1)^n x^n \cdot a_{n-i}(x^{-1})^{n-i} = (-1)^n a_{n-i} x^i$. 由于该等式对所有 x 恒成立，按同次幂对应系数相等，即得：

$$a_i = (-1)^n a_{n-i}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

■

复盘题 20.10. 设 A, B 是 n 阶矩阵，且 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B), BA = A$，则 $B^2 = B$.

解：由条件 $BA = A$ 可知，矩阵 A 的所有列向量在算子 B 的作用下保持不变. 这意味着 A 的列空间完全包含在 B 的列空间内，即

$$\mathrm{im}A \subseteq \mathrm{im}B.$$

同时已知它们的秩相等，即 $\dim(\mathrm{im}A) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = \dim(\mathrm{im}B)$. 由有限维线性空间的子空间包含律可知，维数相等的包含空间必须完全一致，即

$$\mathrm{im}A = \mathrm{im}B.$$

对全空间 $\mathbb{K}^n$ 中的任意向量 x，根据像空间的定义，向量 Bx 必然落在 $\mathrm{im}B$ 中. 因两空间相等，故 $Bx \in \mathrm{im}A$. 根据像空间定义，必然存在另一个向量 $y \in \mathbb{K}^n$，使得 $Bx = Ay$. 在此等式两边同时左乘算子 B：

$$B(Bx) = B(Ay) = (BA)y.$$

代入已知条件 $BA = A$，上式化简为

$$B^2 x = Ay.$$

再将 Ay 逆向替换回 Bx，立即得到

$$B^2 x = Bx.$$

由于该结论对空间中的任意向量 x 均恒成立，必然有算子恒等：

$$B^2 = B.$$

即矩阵 B 为幂等矩阵. ■