学号: 2100530121

常州大学

毕业论文

2025 届

题　　目　半单变换及其在高等代数中的应用

学　　生　郭利文

学　　院　阿里云大数据学院　专业班级　应数 211

指导教师　顾栋蔚　专业技术职务　讲师

二〇二五年六月

半单变换及其在高等代数中的应用

摘　要: 本文的主要内容分为两部分，即给出半单线性变换的判定准则及其在高等代数中的一些应用.

文章的第一部分是半单变换的判定准则. 首先引入并详细讨论了半单线性变换的定义、判定准则以及其与最小多项式之间的关系，指出一个变换是否为半单，关键在于其最小多项式是否无重因子，并将这一理论扩展到了复数域下的情形. 接着，讨论了线性变换的不变子空间个数.

文章的第二部分是半单变换的应用. 首先利用半单理论给出了正规算子的正交相似标准型，并讨论了两类特殊的正交变换，即镜像反射和置换. 其次给出了部分半单变换诱导的空间直和分解，并讨论了同步对角化和同步上三角化相关问题. 紧接着，给出了代数闭域上的 Jordan-Chevalley 分解及其一些应用. 最后详细讨论了三维空间的旋转.

关键词: 半单变换, 正交相似标准型，三维空间旋转，Jordan-Chevalley 分解.

Semisimple transformation and related applications in advanced algebra

Abstract: This paper is structured into two principal components: establishing criteria for identifying semisimple linear transformations and investigating their applications in advanced algebra.

The first section addresses criteria for semisimple transformations. We begin with a rigorous examination of the definition and characterization of semisimple linear transformations, emphasizing their intrinsic relationship with minimal polynomials. Specifically, a transformation is semisimple precisely when its minimal polynomial lacks repeated factors. This framework is subsequently generalized to the complex field. Furthermore, the count of invariant subspaces associated with linear transformations is systematically explored.

The second section focuses on applications. First, leveraging semisimple theory, we derive the orthogonal similarity canonical forms for normal operators, with particular attention to two specialized orthogonal transformations: reflections and permutations. Next, we present the direct sum decomposition of spaces induced by semisimple transformations and address challenges related to simultaneous diagonalization and upper triangularization. Additionally, the Jordan-Chevalley decomposition over algebraically closed fields is elucidated, accompanied by its practical implications. Finally, a thorough investigation of three-dimensional spatial rotations is conducted, featuring an in-depth analysis of Rodrigues' rotation formula.

Keywords: Semisimple transformations, Orthogonal similarity canonical forms, Three-dimensional rotations, Jordan-Chevalley decomposition.

目录

术　语　表

字母	含义
$\mathcal{A}$	V 上的线性变换
$\mathrm{End}(V)$	V 上所有线性变换全体作成的线性空间.
U	$\mathcal{A}$ 的不变子空间.
$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$	$\mathcal{A}$ 的最小多项式.
$f_{\mathcal{A}}(\lambda)$	$\mathcal{A}$ 的特征多项式.
$f_U(\lambda)$	$\mathcal{A}$ 限制在 U 上的特征多项式.
$m_{\mathcal{A}\|_U}(\lambda)$	$\mathcal{A}$ 限制在 U 上的最小多项式.
$\mathrm{SO}(3)$	三阶行列式为 1 的正交阵全体作成的群.
$\mathrm{SU}(2)$	二阶行列式为 1 的酉阵全体作成的群.
$[f(\lambda),g(\lambda)]$	$f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的最小公倍式.
$(f(\lambda),g(\lambda))$	$f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的最大公因式.
$\|\|\alpha\|\|$	欧氏空间中 α 的模长.
$\mathcal{A}^*$	内积空间中 $\mathcal{A}$ 的自伴随变换.
id	线性空间中的恒等变换.
$\simeq$	群同构表示符号.
$\sum_{i=1}^{s} V_i$	$\left\{\text{有限和} \sum_{i\in I} v_i \in V : \forall i, v_i \in V_i\right\}$
$\bigoplus_{i=1}^{s} V_i$	$V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$.
$A \otimes B$	$A \otimes B := (a_{ij}B)$
A^*	A 伴随矩阵 $:= (A_{ij})^T$, 这里 A_{ij} 是 A 代数余子式.
$\|\Sigma\|$	集合 Σ 元素的个数.
$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle$	$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle := \{\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \mid k_i \in \mathbb{F}\}$
$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})$	V 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射全体.
δ_{ij}	$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, i & = j \\ 0, i & \neq j. \end{cases}$
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	非负整数
$O(V)$	欧式空间 V 中正交变换全体
$O(n)$	n 阶实正交阵全体
n 阶基础循环阵	$\begin{pmatrix} O & E_{n-1} \\ 1 & O \end{pmatrix}$
S_n	集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的双射全体.
S^2	二维球面: $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\right\}$

1 绪论

1.1 研究背景和意义

半单线性变换是复数域上可对角化的线性变换在一般数域上的推广，研究半单线性变换的判定准则，就是探究这一类线性变换的本质.

高等代数是代数学习的基础，其中包含着诸多与后续课程相关的知识，比如高等代数中有很多群例子，Lie 代数例子，群表示的例子等. 但在国内主流高等代数教材如 [?, ?, ?] 等，很少建立与后续代数课程的联系. 本论文借助半单线性变换视角，在介绍半单变换的应用方面，自然的嵌入高等代数中与 Lie 理论，群论，群表示论等课程有联系的知识，是一个有意义，有创意的选题方向.

1.2 国内外研究现状

国外研究现状

Bourbaki 在 [?] 中详细讨论了 Jordan-Chevalley 分解的唯一性及其在可解 Lie 代数中的应用. Bump 在 [?] 中探讨了半单变换在紧 Lie 群中的角色. Fulton 和 Harris 在 [?] 中通过半单 Lie 群的表示理论，深入分析了 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 的覆盖关系. Varadarajan 在 [?] 从微分几何角度出发，研究了半单变换的导子与 Killing 型的关系.

国内研究现状

丘维声在文献 [?] 中系统阐述了半单变换与最小多项式的关系，指出了半单变换的最小多项式无重因式是其关键特征. 李文威在文献 [?] 中利用 $\sigma : \mathfrak{so}(2) \to SO(3), A \mapsto e^A$ 给出了 Rodrigues 旋转的另一种看法. 谢启鸿在教学论文 [?] 中利用循环子空间给出线性变换不变子空间个数的相关命题. 朱富海在文献 [?] 中提出了 $\mathrm{End}(V)$ 的导子的概念，并在文献 [?] 中给出了代数闭域上的 Jordan-Chevalley 分解和一些应用.

1.3 本文的主要研究内容

本论文主要是介绍了半单线性变换的判定准则及其在高等代数中的应用. 论文的主体是在半单线性变换的视角下，利用高等代数的工具，串联高等代数各章节内容，建立高等代数与 Lie 理论，群论, 群表示论等内容的联系. 具体来看主要完成了以下工作:

(i) 在2节，利用循环子空间和广义特征子空间分解等工具给出了半单变换的判定准则，并借助上面所提及的工具顺势解决了关于线性变换不变子空间个数的问题.

(ii) 在3.1和3.2节，利用半单变换相关理论，统一的给出欧式空间和酉空间中正规算子的正交相似标准型和酉相似标准型. 对于特殊的正规算子，如正交变换，对称变换，反对称变换，分别给出了它们具体的正交相似标准型和酉相似标准型. 利用正交变换的正交相似标准型，给出正交变换的一种表示，即任意正交变换均可以看成若干个镜像反射的合成. 最后从置换群出发，构造出 $O(V)$ 的一类特殊子群，即置换矩阵全体 Ω, 找出了 Ω 所有不变子空间:$\{W, W^{\perp}, \{0\}, \mathbb{R}^n\}$. 换言之，群 S_n 的一个置换表示 $(\rho, \mathbb{R}^n) : \rho(\sigma) = P_\sigma \in GL(\mathbb{R}^n)$ 是可约的，且 $\rho|_W$ 和 $\rho|_{W^\perp}$ 都是不可约的. 在本节的最后，找出了与 Ω 中所有元可换的矩阵.

(iii) 在3.3节，给出了复数域上的线性空间中一些两两可换的半单线性变换所作成的线性空间 M 诱导的空间分解：$V = \bigoplus_{f \in M^*} V_f$, 并由此讨论了一族线性变换 S 可同时对角化的充分必要条件. 同时进一步研究了线性变换可同时上三角化的判定条件，证明了可同时上三角化的判定要比可同时对角化的条件宽松许多，严格的充要条件适合从 Lie 理论观照.

(iv) 在3.4节，给出了基于半单线性变换的 Jordan-Chevalley 分解和其应用，中间穿插着引入了线性变换的导子，并利用高等代数的工具，证明了一般线性 Lie 代数的导子等于内导子，以及证明了线性变换导子的 Jordan-Chevalley 分解中的半单和幂零部分也是导子, 利用 Jordan-Chevalley 分解等高等代数工具证明了 Lie 代数中与 Cartan 准则相关的命题.

(v) 在3.5节，我们详细剖析了三维旋转群的结构以及给出其可能的有限子群的类型.

本论文还有诸多可以改进的点:

- 命题3.38, 能否去掉 A 可对角化的条件.
- 在3.4的 Jordan-Chevalley 分解中，如何利用 Galois 理论去掉代数闭域的限制.
- 在3.5中，$SO(3)$ 的每一类有限子群在共轭意义下是否唯一.
- 同步上三角化的充要条件，从 Lie 理论角度应如何给出.

2 半单线性变换及其判定准则

本小节的主要目的是给出半单线性变换的判定准则，其中有一个角度是半单变换可以分解为其不可约不变子空间的直和. 由此自然引入一个问题，线性变换不变子空间个数如何确定，我们在本小节的最后详细回答了这个问题.

2.1 判定准则

定义 2.1. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$, 称 $\mathcal{A}$ 是半单线性变换，若对任意 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 U, 都存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 W, 使得 $V = U \oplus W$.

引理 2.2. 设 M, N 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的两个子空间且 $M \subseteq N, L$ 为 M 的一个补子空间，即有 $V = M \oplus L$，则 $N = M \oplus (N \cap L)$.

证明. 首先 $N \cap L \subseteq L$, 所以自然有 $M \oplus (N \cap L)$. 又因为 $M \subseteq N$, 所以 $V = N + L$. 显然 $M \oplus (N \cap L) \subseteq N$, 由维数公式

$$\begin{aligned}\dim M + \dim(N \cap L) &= \dim M + \dim N + \dim L - \dim(N + L)\\ &= \dim M + \dim N - (n - \dim L) = \dim N.\end{aligned}$$

故引理得证. □

定理 2.3. 半单线性变换在不变子空间上的限制也是半单的.

证明. 设 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是半单的，W 是 $\mathcal{A}$ 的任一不变子空间，则对于 $\mathcal{A}|_W$ 的任一不变子空间 M, 自然 M 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间且 $M \subseteq W$. 于是存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 L 使得 $V = M \oplus L$. 于是由引理 2.2 有 $W = M \oplus (W \cap L)$, 注意 $W \cap L$ 是 $\mathcal{A}|_W$ 的不变子空间, 所以 $\mathcal{A}$ 限制在 W 上也是半单的. □

定义 2.4. 对任意非零向量 $\alpha \in V$, 称

$$C(\mathcal{A}, \alpha) := \{g(\mathcal{A})(\alpha) \mid g(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]\}. \tag{2.1}$$

是由 α 生成的 $\mathcal{A}$ 的不变子空间. 显然 $C(\mathcal{A}, \alpha)$ 是 V 中包含 α 的最小的 $\mathcal{A}$ 不变子空间.

引理 2.5. 设非零向量 $\alpha \in V, m(\lambda), f(\lambda)$ 分别是 $\mathcal{A}$ 在 $C(\mathcal{A}, \alpha)$ 上的最小多项式和特征多项式，这里 $C(\mathcal{A}, \alpha)$ 按 (2.1) 定义，则 $m(\lambda) = f(\lambda)$.

证明. 易知存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\{\alpha, \mathcal{A}(\alpha), \cdots, \mathcal{A}^{k-1}(\alpha)\}$ 是 $C(\mathcal{A}, \alpha)$ 的一组基，即 $\dim C(\mathcal{A}, \alpha) = \deg f(\lambda) = k$. 若 $\deg m(\lambda) \leq k - 1$, 则由于 $m(\mathcal{A})(\alpha) = 0$，即存在不全为零的 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 使得

$$a_1\alpha + a_2\mathcal{A}(\alpha) + \cdots + a_k\mathcal{A}^{k-1}(\alpha) = 0.$$

这与 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}^2(\alpha), \cdots, \mathcal{A}^{k-1}(\alpha)$ 线性无关相矛盾，于是 $m(\lambda) = f(\lambda)$. □

引理 2.6. 设 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$，且 $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = p(\lambda)$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的不可约因式，则对任意 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ 有 $C(\mathcal{A}, \alpha_1) = C(\mathcal{A}, \alpha_2)$ 或者 $C(\mathcal{A}, \alpha_1) \cap C(\mathcal{A}, \alpha_2) = \{0\}$.

证明. 首先对任意 $\mathcal{A}$ 的非零不变子空间 W, 记 $m_{\mathcal{A}|_W}(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 在 W 上的最小多项式，则由 $p(\lambda)$ 的不可约性，有 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)=m_{\mathcal{A}|_W}(\lambda)$. 若 $U=C(\mathcal{A},\alpha_1)\cap C(\mathcal{A},\alpha_2)\neq\{0\}$, 结合引理 2.5 有

$$\begin{aligned}\deg m_{\mathcal{A}}(\lambda)&=\deg m_{\mathcal{A}|_U}(\lambda)\leq\dim U\leq\ \dim C(\mathcal{A},\alpha_2)\\&=\dim C(\mathcal{A},\alpha_1)=\deg m_{\mathcal{A}}(\lambda).\end{aligned}$$

这迫使 $U=C(\mathcal{A},\alpha_1)=C(\mathcal{A},\alpha_2)$. □

在引理 2.6 条件下，对任意 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 W, 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 为 W 的一组基，则有 $W=\sum_{i=1}^{s}C(\mathcal{A},\alpha_i)$. 重复利用引理 2.6 结论，可以找到 $i_1,i_2,\cdots,i_r\in\{1,2,\cdots,s\}$ 使得

$$W=\bigoplus_{j=1}^{r}C(\mathcal{A},\alpha_{i_j}),$$

即 W 是 $\mathcal{A}$ 不变子空间，从而易得 $\mathcal{A}$ 是半单线性变换.

定理 2.7. 设 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$, 且 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)=p(\lambda)^r$，则 $\mathcal{A}$ 是半单变换的充要条件是 $r=1$.

证明. 充分性即是引理 2.6 及说明，下证必要性. 采用反证法. 若我们假设 $r>1$, 令 $V_1=\ker p(\mathcal{A})$, 则 V_1 是 $\mathcal{A}$ 的非平凡不变子空间. 由 $\mathcal{A}$ 是半单线性变换, 则存在 $\mathcal{A}$ 不变子空间 V_2 使得 $V=V_1\oplus V_2$. 又因为 $p(\lambda)$ 不可约，则有 $m_{\mathcal{A}|_{V_1}}(\lambda)=p(\lambda)$. 注意

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda)=[m_{\mathcal{A}|_{V_1}}(\lambda),m_{\mathcal{A}|_{V_2}}(\lambda)],$$

故 $m_{\mathcal{A}|_{V_2}}=p^r(\lambda)$. 即存在 $\alpha\in V_2$, 使得 $\beta=p^{r-1}(\mathcal{A})(\alpha)\neq 0$. 但 $p(\mathcal{A})(\beta)=m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\beta)=0$, 所以 $\beta\in V_1\cap V_2$, 这与 $V_1\cap V_2=\{0\}$ 矛盾，因此 $r=1$. □

定义 2.8. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$, 称 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 W 是不可约的，如果 W 没有非平凡的 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

引理 2.9. 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，$\mathbb{F}[z]$ 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式环，则 $\mathbb{F}[z]$ 是主理想整环.

证明. 明显地 $\mathbb{F}[z]$ 是一个整环. 设 J 是 $\mathbb{F}[z]$ 的任一理想. 如果 $J=\{0\}$, 此时 J 由 0 生成. 因此我们假定 $J\neq\{0\}$. 设 $d(z)$ 是 J 中次数最小的一个非零多项式，我们将证明 $J=d\mathbb{F}[z]$.

让 $f(z)\in J$ 是任意多项式，通过带余除法有 $f(z)=a(z)d(z)+r(z)$, 其中 $\deg r<\deg d$. 于是 $r(z)=f(z)-a(z)d(z)\in J$, 因此由 $d(z)$ 的取法可知一定有 $r(z)=0$ 于是 $f(z)\in d\mathbb{F}[z]$, 因此 $J\subset d\mathbb{F}[z]$. 反过来，因为 $d(z)\in J$, 我们有 $d(z)\mathbb{F}[z]\subset J$, 于是 $d\mathbb{F}[z]=J$. □

引理 2.10. 由 $p_1(z),\cdots,p_n(z)\in\mathbb{F}[z]$ 生成的理想 J, 即

$$J=\left\{\sum_{i=1}^{n}r_i(z)p_i(z)\mid r_i(z)\in\mathbb{F}[z]\right\},\tag{2.2}$$

可以写成 $J=d\mathbb{F}[z]$ 当且仅当 $d(z)$ 是 $p_1(z),\cdots,p_n(z)$ 的最大公因式.

证明. 由引理2.9存在 $d(z)\in J$，使得 $J=(d)$. 因为 $p_i(z)\in J$, 所以存在多项式 $q_i(z)$ 使得 $p_i(z)=d(z)q_i(z)$ 对任意 $i=1,\cdots,n$. 因此 $d(z)$ 是 $p_i(z)$ 的一个公因子. 我们将证明它是最大的. 假定

$d'(z)$ 是 $p_i(z)$ 的另一个公因子，即 $p_i(z) = d'(z)s_i(z)$. 因为 $d(z) \in J$, 所以存在 $a_i(z)$ 使得 $d(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i(z)p_i(z)$. 因此

$$d(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i(z)p_i(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i(z)d'(z)q_i(z) = d'(z)\sum_{i=1}^{n} a_i(z)q_i(z).$$

这意味着 $d'(z) \mid d(z)$, 所以 $d(z)$ 是 $p_i(z)$ 的最大公因式. □

命题 2.11 ([?]). 多项式 $p_1(z), \cdots, p_n(z) \in \mathbb{F}[z]$ 是互素的当且仅当存在 $a_1(z), \cdots, a_n(z) \in \mathbb{F}[z]$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(z)p_i(z) = 1. \tag{2.3}$$

证明. 见引理2.10. □

定理 2.12 ([?, ?]). 设 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$，$f_{\mathcal{A}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} f_i^{k_i}(\lambda)$，其中 $f_i(\lambda)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的不可约因式, 则有直和分解

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \left[V[f_i^{k_i}] := \ker f_i^{k_i}(\mathcal{A})\right]. \tag{2.4}$$

证明. 记 $F_i(\lambda) = \prod_{j\neq i} f_j^{k_j}(\lambda)$, 则有 $(F_1(\lambda), F_2(\lambda), \cdots, F_s(\lambda)) = 1$, 由命题2.11存在 $u_i(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 使得

$$\sum_{i=1}^{s} u_i(\lambda)F_i(\lambda) = 1, \tag{2.5}$$

对任意 $\alpha \in V$, 令 $\lambda = \mathcal{A}$ 代入 (2.5) 两边作用 α 得 $\alpha = \left(\sum_{i=1}^{s} u_s(\mathcal{A})F_s(\mathcal{A})\right)\alpha$. 注意 $u_i(\mathcal{A})F_i(\mathcal{A})(\alpha) \in V_i$, 从而 $V = \sum_{i=1}^{s} V[f_i^{k_i}]$.

为证明直和，设 $0 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$, 其中 $\alpha_i \in V_i$. 又因为 $(F_i(\lambda), f_i^{k_i}(\lambda)) = 1$, 存在 $n_i(\lambda), s_i(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 使得

$$n_i(\lambda)F_i(\lambda) + s_i(\lambda)f_i^{k_i}(\lambda) = 1, \tag{2.6}$$

令 $\lambda = \mathcal{A}$ 代入 (2.6)，并在等式两边作用 α_i 得 $\alpha_i = u(\mathcal{A})F_i(\mathcal{A})(\alpha_i)$. 则

$$0 = F_i(\mathcal{A})\left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j\right) = F_i(\mathcal{A})(\alpha_i) = \alpha_i,$$

即零向量表示唯一，这就证明了式 (2.4). □

引理 2.13. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 则有以下条件等价

(1) V 是不可约 $\mathcal{A}$-子空间

(2) 对任意 $0 \neq \alpha \in V$, 都有 $V = C(\alpha)$.

(3) $f(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式.

证明. (2)⇒(3) 采用反证法. 若设 $f_{\mathcal{A}}(\lambda)=g(\lambda)h(\lambda)$, 则由 $f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=h(\mathcal{A})h(\mathcal{A})=0$, 从而 $h(\mathcal{A}),g(\mathcal{A})$ 至少有一个是不可逆，不妨设 $g(\mathcal{A})$ 不可逆，则任取非零向量 $\alpha\in\ker g(\mathcal{A})$, 若设 $\deg g(\lambda)=r<n$, 则 $\dim C(\mathcal{A},\alpha)\le r<n$, 矛盾. □

定理 2.14. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$, 且 $\mathcal{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}p_i^{r_i}(\lambda)$, 其中 $p_i(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的不可约因式. 则下面条件等价:

(1) $\mathcal{A}$ 是半单的

(2) $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 没有重因式.

(3) V 可以分解为不可约 $\mathcal{A}$ 不变子空间的直和.

证明. (1) ⇒ (2). 令 $V[p_i^{r_i}]:=\ker p_i^{r_i}(\mathcal{A})$, 则 $V[p_i^{r_i}]$ 是 $\mathcal{A}$ 不变子空间，且 $\mathcal{A}|_{V[p_i^{r_i}]}$ 的最小多项式为 $p_i^{r_i}(\lambda)$. 结合定理2.3和定理 2.7 有 $r_i=1$.

(2) ⇒ (3). 由定理 2.12, 我们有 $V=\bigoplus_{i=1}^{s}V[p_i^{r_i}]$, 且 $\mathcal{A}$ 限制在 $V[p_i^{r_i}]$ 上的最小多项式为 $p_i(\lambda)$. 由引理 2.6, 存在 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{k_i}}\in V$ 使得

$$V[p_i^{r_i}]=\bigoplus_{j=1}^{k_i}C(\mathcal{A},\alpha_{i_j}),$$

即有

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{j=1}^{k_i}C(\mathcal{A},\alpha_{i_j}),\tag{2.7}$$

引理2.13表明，$C(\mathcal{A},\alpha_{ij})$ 是不可约 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

(3) ⇒ (1). 设 V 可以分解为不可约 $\mathcal{A}$ 不变子空间的直和: $V=\bigoplus_{i=1}^{m}V_i$. 对于 V 的任一 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 W, 令

$$\Theta=\{U<V\mid\mathcal{A}(U)\subset U,U\cap W=\{0\}\}\tag{2.8}$$

取 U_0 是 Θ 中维数最大的，断言 $V=W\oplus U_0$. 若不然，则存在 $V_i\nsubseteq U_0\oplus W$. 由于 V_i 是 $\mathcal{A}$ 不可约的，故 $V_i\cap(W\oplus U_0)=\{0\}$, 即 $W\cap(V_i\oplus U_0)=\{0\}$, 但 $\dim(V_i\oplus U_0)>\dim U_0$, 这与 (2.8) 中 U_0 的取法矛盾，所以 $V=U_0\oplus W$, 即 $\mathcal{A}$ 是半单的. □

若在域 $\mathbb{C}$ 上考虑，由于 $\mathbb{C}$ 上不可约因式是一次的，所以 $\mathcal{A}$ 半单当且仅当 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 无重根，当且仅当 $\mathcal{A}$ 可对角化，即半单变换可以看成域 $\mathbb{C}$ 上的线性变换在一般域上的推广.

2.2 线性变换的不变子空间个数

在引理2.13中，我们可以看到若线性变换 φ 的特征多项式是 $\mathbb{F}$ 上的不可约因式，则 φ 不变子空间个数仅有 $\{0\}$ 和 V.

现在，对于一般的线性变换 φ，我们同样想找出 φ 的全体不变子空间. 为方便起见，记 φ 的最小多项式和特征多项式分别是 $m(\lambda),f(\lambda)$.

当 $m(\lambda)\neq f(\lambda)$ 时，由 Jordan 型理论，φ 有大于等于 2 维的特征子空间，进而容易构造出 φ 的无数个不同不变子空间. 下面我们考虑 $m(\lambda)=f(\lambda)$ 的情形.

引理 2.15. 设 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ 满足 $f(\lambda) = m(\lambda) = p^r(\lambda)$, 其中 $p(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}[\lambda]$ 上的不可约多项式. 则

$$V_{[p^k]} := \ker p(\varphi)^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, r \tag{2.9}$$

是 φ 的所有不变子空间.

证明. 首先有 φ 不变子空间列

$$\{0\} = V_{[p^0]} \subsetneq V_{[p^1]} \subsetneq \cdots \subsetneq V_{[p^r]} = V. \tag{2.10}$$

若记 $m_k(\lambda), f_k(\lambda)$ 分别为 φ 限制在 $V_{[p^k]}$ 上的最小多项式和特征多项式. 则 $m_k(\lambda) = f_k(\lambda) = p^k(\lambda)$. 对任意 φ 不变子空间 W, 其最小多项式一定形如 $p^s(\lambda)$，故

$$\begin{aligned} \dim V_{[p^s]} = \deg p^s(\lambda) \leq \dim W, \\ W \subset \ker p^s(\varphi) = V_{[p^s]}. \end{aligned}$$

即 $W = V_{[p^s]}$. □

对一般 φ 不变子空间的讨论，通过如下命题，可以归化至引理2.15.

命题 2.16. 设 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$，$m(\lambda) = \prod_{i=1}^s p_i^{k_i}(\lambda)$，其中 $p_i(\lambda)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的不可约因式. 对任意 φ 不变子空间 W, 有

$$W = \bigoplus_{i=1}^s \left(V_{[p_i^{k_i}]} \bigcap W \right) \tag{2.11}$$

证明. 由定理2.12, 有直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^s V[p_i^{k_i}]$. 对任意 $\in W$，则 α 可唯一表示为 $\alpha = \sum_{i=1}^s \alpha_i$, 其中 $\alpha_i \in V_{[p_i^{k_i}]}$. 下面只需说明 $\alpha_i \in W$ 即可. 令 $g_i(\lambda) = \prod_{i \neq j} p_j^{r_j}(\lambda)$，则 $g_i(\varphi)\alpha_j = 0, i \neq j$. 于是

$$g_i(\varphi)(\alpha) = g_i(\varphi) \left(\sum_{i=1}^s \alpha_i \right) = g_i(\varphi)(\alpha_i) \in W, \quad i = 1, , 2 \cdots, s.$$

又由 $(g_1(\lambda), \cdots, g_s(\lambda)) = 1$，故存在 $u_1(\lambda), \cdots, u_s(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ 使得 $\sum_{i=1}^s u_i(\lambda) g_i(\lambda) = 1$，于是有 $\alpha_i = u_i(\varphi) g_i(\varphi) \alpha_i \in W$, 这就证明了命题成立. □

定理 2.17. 设 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$，$f(\lambda) = m(\lambda) = \prod_{i=1}^s p_i^{k_i}(\lambda)$，其中 $p_i(\lambda)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的不可约因式. 则 φ 的不变子空间的个数为 $\prod_{i=1}^s (k_i + 1)$. 且按(2.10)可以得到 φ 任一不变子空间 W 的一个表示:

$$W = \bigoplus_{i=1}^s V_{[p_i^{r_i}]}, \quad r_i \in [0, k_i] \cap \mathbb{Z}.$$

证明. 见引理2.15和命题2.16. □

3 半单变换的应用

3.1 正规算子的正交相似标准型及应用

3.1.1 正规算子的正交相似标准型

我们的研究思路是：对于正规算子 $\mathcal{A}$ 任一不变子空间 W,

$$\begin{tikzcd}
V=W\bigoplus W^{\perp} \arrow[r, "\text{不变子空间直和}"] & \mathcal{A}\text{半单} \arrow[r, two heads, "\text{限制}"] \arrow[d] & \mathcal{A}|_W\text{正规} \arrow[dl, bend left, "\text{归纳分解}"] \\
 & \text{不可约直和分解}V=\bigoplus_{i\in I}W_i \arrow[d, "\text{分类}"] & \\
 & \text{对应正交相似标准型} &
\end{tikzcd}$$

引理 3.1. 设 V 是 n 维内积空间，$\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$, 则存在唯一 $\mathcal{A}^*\in\mathrm{End}(V)$ 使得

$$(\alpha,\mathcal{A}(\beta))=(\mathcal{A}^*(\alpha),\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in V.$$

证明. 定义线性映射

$$\begin{aligned}\sigma:V&\longrightarrow V^*\\ \alpha&\longmapsto f_\alpha\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $f_\alpha:\beta\mapsto(\alpha,\beta),\forall\beta\in V$. 易证 σ 是线性同构. 于是给定 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V),\alpha\in V$, 定义 $g_\alpha:g_\alpha(\beta)=(\alpha,\mathcal{A}(\beta)),\forall\beta\in V$. 易验证 $g_\alpha\in V^*$. 利用(3.1)同构，存在唯一的 $\gamma\in V$ 使得 $g_\alpha=f_\gamma$, 即 $g_\alpha(\beta)=f_\gamma(\beta)=(\gamma,\beta)$. 则令 $\mathcal{A}^*:\alpha\mapsto\gamma$ 即可. □

称 $\mathcal{A}^*$ 为 $\mathcal{A}$ 的自伴随变换，易验证 $\mathcal{A},\mathcal{A}^*$ 在一组标准正交 (酉) 基下的矩阵互为转置 (共轭转置).

定义 3.2. 设 V 是 n 维内积空间，称 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$ 为正规算子，若 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

定义 3.3. 称实矩阵 A 是实正规矩阵，若 $A^TA=AA^T$. 称复矩阵 A 是复正规阵，若 $A^HA=AA^H$, 其中 A^H 表示 A 的共轭转置.

引理 3.4. 设 V 为 n 维欧氏空间，则 $\mathcal{A}$ 为正规算子的充要条件是 $\mathcal{A}$ 在任意一组标准正交基下的表示阵 A 为实正规阵.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 在标准正交基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 下的表示阵为 A, 则 $\mathcal{A}^*$ 在这组基下的表示阵为 A^T, 从而 $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 当且仅当 $AA^T=A^TA$. □

引理 3.5. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则 $\mathrm{tr}(AA^T)=0$ 当且仅当 $A=O$.

证明. 设 $A=(a_{ij}),AA^T=(b_{ij})$, 则 $b_{ii}=\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}^2$. 于是

$$\mathrm{tr}(AA^T)=\sum_{i=1}^n b_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2.$$

故 $\mathrm{tr}(AA^T)=0\Longleftrightarrow a_{ik}=0(1\le i,k\le n)$, 即 $A=O$. □

若 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间的线性变换，对任意 $\mathcal{A}$ 不变子空间 W, 任取 $\alpha \in W, \beta \in W^{\perp}$ 则有

$$0 = (\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*(\beta)).$$

所以 $\mathcal{A}^*(\beta) \in W^{\perp}$, 即 $W^{\perp}$ 是 $\mathcal{A}^*$ 的不变子空间.

引理 3.6. V 是 n 维欧式空间，设 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是正规算子，W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间. 则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，所以 $W, W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}^*$ 的不变子空间. 进一步，$\mathcal{A}|_W$ 也是正规算子.

证明. 设 $\dim W = k$. 取 W 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$, 将其扩张成 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, \cdots, \varepsilon_n$, 则 $\mathcal{A}$ 在这组基下的表示阵为、$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$, 其中 $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$, 则由 $A'A = AA'$, 我们有

$$\begin{pmatrix} B'B & B'C \\ C'B & C'C + D'D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB' + CC' & CD' \\ DC' & DD' \end{pmatrix}.$$

从而 $B'B = BB' + CC'$, 即有 $\mathrm{tr}(CC') = 0$. 由引理 3.5 有 $C = O$. 于是 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，特别地有 $BB' = B'B$. 由引理3.4，$\mathcal{A}|_W$ 上也是正规算子. □

因此，若 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间上的算子，则 $\mathcal{A}$ 是半单线性变换，即有 $V = W \perp W^{\perp}$, 若 W 是可约 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，则由定理 2.14 存在 $W = W_1 \perp W_2$, 其中 W_1, W_2 也是 $\mathcal{A}$ 不变子空间, 这样做下去即有

定理 3.7. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的正规算子，则有正交直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$, 其中 W_i 是不可约 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

证明. 见引理 3.6 和定理 2.14. □

由引理 2.13，$f_{\mathcal{A}|_{W_i}}(\lambda)$ 是实数域上的不可约因式，从而 $\deg f_{\mathcal{A}|_{W_i}}(\lambda) = 1$ 或者 2, 即 $\dim W_i = 1$ 或者 2.

引理 3.8. 设 A 为二阶正规阵，则 A 为对称阵或者形如

$$r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

其中 $r > 0, \sin\varphi \neq 0$.

证明. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其中 $b \neq c$. 由 $AA' = A'A$ 可得

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \\ c^2 + d^2 = b^2 + d^2 \\ ac + bd = ab + cd \end{cases} \tag{3.2}$$

解方程(3.2)，得到 $b = -c \neq 0, a = d$. 取 $r = \sqrt{a^2+b^2}, \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 即可. □

定理 3.9. *设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的正规算子，则存在 V 的一组标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 下的表示阵为*

$$\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, A_1, A_2, \cdots, A_t\},$$

其中 $A_i = r_i \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, r_i > 0, \sin\varphi_i \neq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

证明. 由定理 3.7 将 W_i 的标准正交基拼成 V 的一组标准正交基，结合引理 3.8 可证得命题成立. □

推论 3.10. *设 A 是 n 阶实正规阵，则存在正交阵 Q 使得*

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, A_1, A_2, \cdots, A_t\},$$

其中 $A_i = r_i \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, r_i > 0, \sin\varphi_i \neq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$. □

注意正交阵，实正规阵，反对称阵都是正规矩阵. 利用推论 3.10, 我们只要单独研究下其特征值的性质，即可得到相应的正交相似标准型.

推论 3.11. *设 A 是 n 阶实对称阵，则存在正交阵 Q 使得*

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

证明. 由推论 3.10, 存在正交阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, A_1, A_2, \cdots, A_t\},$$

其中 $A_i = r_i \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, r_i > 0, \sin\varphi_i \neq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, t \geq 0$. 若 $t > 0$, 由于 A 是对称阵，所以 A_i 仍是对称阵，则 $\sin\varphi_i = 0$, 这与 $\sin\varphi_i \neq 0$ 矛盾，于是 $t = 0$, 这就证明了(3.3). □

引理 3.12. *实反对称阵 A 的实特征值均为零.*

证明. 设 λ 是 A 的任一实特征值，α 为相对应的特征向量，即有 $A\alpha = \lambda\alpha$. 两边左乘 α^T 有

$$\alpha^T A\alpha = \lambda\alpha^T\alpha. \tag{3.4}$$

(3.4)两边再取转置有 $\alpha^T A^T\alpha = -\alpha^T A\alpha = \lambda\alpha^T\alpha$, 即 $\lambda\alpha^T\alpha = 0$, 这迫使 $\lambda = 0$. 即 A 的实特征值均为 0. □

推论 3.13. *设 A 是 n 阶实反对称阵，则存在正交阵 Q 使得*

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{0, 0, \cdots, 0, A_1, A_2, \cdots, A_t\}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}, b_i \neq 0. \tag{3.5}$$

证明. 由推论 3.10 和引理3.12, 存在正交阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{0, 0, \cdots, 0, A_1, A_2, \cdots, A_t\},$$

其中 $A_i = r_i \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, r_i > 0, \sin\varphi_i \neq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$. 注意 A_i 仍是反对称阵，所以 $\cos\varphi_i = 0$, 即得(3.5). □

推论 3.14. *设 A 是 n 阶正交阵，则存在正交阵 Q 使得*

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{1, 1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, A_1, A_2, \cdots, A_t\} \tag{3.6}$$

这里 $A_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, \sin\varphi_i \neq 0$.

证明. 由推论 3.10, 存在正交阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, A_1, A_2, \cdots, A_t\},$$

其中 $A_i = r_i \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, r_i > 0, \sin\varphi_i \neq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$. 由于 $Q^{-1}AQ$ 仍是正交阵，所以 $(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}AQ) = I_n$, 于是 $\lambda_i^2 = 1, r_i^2 = 1$, 即有 $\lambda_i = \pm 1, r_i = 1$. □

3.1.2 镜像反射与正交变换的合成

利用正交变换的正交相似标准型，我们可以给出正交变换的一个表示，即任意正交变换都是若干镜像反射的乘积.

定义 3.15. *取定 V 中的单位向量 α, 定义*

$$\varphi_\alpha(\beta) = \beta - 2(\alpha, \beta)\alpha, \quad \forall \beta \in V.$$

是关于 α 的镜像反射.

将 α 扩张为 V 的一组标准正交基，则 φ_α 在这组基下的矩阵是 $\operatorname{diag}\{-1, 1, \cdots, 1\}$.

引理 3.16. *正交变换 φ 是镜像反射当且仅当 φ 关于特征值 1 的特征子空间维数是 $n-1$.*

证明. 让 U 是 φ 关于特征值 1 的特征子空间，则 $\dim U^\perp = 1$, 即存在单位向量 α 使得 $U^\perp = L(\alpha)$. 由引理3.6, $U^\perp$ 是 φ 不变的，即 α 是 φ 的实特征向量. 注意 φ 仅有实特征值 ± 1, 所以 $\varphi(\alpha) = -\alpha$. 容易验证，此时 $\varphi = \varphi_\alpha$. □

引理 3.17. *二维空间 V 中的旋转 φ 可以写成两个镜像反射的乘积.*

证明. 存在 V 的一组标准正交基, 使得 φ 在这组基下矩阵为

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} := BA$$

注意 A, B 特征多项式均为 $\lambda^2 - 1$. 让 φ_1, φ_2 在这组标准正交基下的矩阵分别是 B, A，由引理3.16, φ_1, φ_2 都是镜像反射，且 $\varphi = \varphi_1\varphi_2$. □

命题 3.18. 让 V 是 n 维欧氏空间，则

$$O(V)=\left\{\text{有限积}\prod_{i\in I}\varphi_{\alpha_i}:\alpha_i\in V,(\alpha_i,\alpha_i)=1\right\},$$

这里规定恒等变换可以看成由 0 镜像反射构成.

证明. 对任意 $\varphi\in O(V)$，由推论3.14，存在 V 的一组标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，使得 φ 在这组基下矩阵为

$$A=\operatorname{diag}\left\{\underbrace{1,\cdots,1}_{r},\overbrace{-1,\cdots,-1}^{j},\underbrace{R_{\theta_1},\cdots,R_{\theta_s}}_{s}\right\}.$$

注意 A 可以写成如下两类矩阵的乘积

$$\mathit{\Xi}=\begin{cases}B_t:\text{第 } t \text{ 个对角元是 } -1\text{，其余对角元全是 } 1 \text{ 的对角阵,} & r+1\le t\le r+j.\\ B_{\theta_i}:\text{保持 } A \text{ 的 } R_{\theta_i} \text{ 分块元不动，将 } A \text{ 的其它分块对角元变为 } 1, & 1\le i\le s.\end{cases}$$

其中 B_t 所对的线性变换是镜像反射，由引理3.17，B_{θ_i} 所对的线性变换是两个镜像反射的乘积. 综上，φ 可以写成镜像反射的乘积，且所需的镜像反射个数为 $n-r$. □

推论 3.19. 对任意 $\varphi\in O(V)$，设 φ 关于关于特征值 1 的特征子空间为 U，且 $\dim U=r$. 记 s 是 φ 表示为镜像反射乘积所需要的最小个数，则 $s=n-r$.

证明. 由命题3.18的证明过程有 $s\le n-r$. 现在设 $\varphi=\varphi_1\cdots\varphi_s$，这里 φ_j 是关于单位向量 α_j 的镜像反射. 则

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)^{\perp}\subset\bigcap_{j=1}^{s}L(\alpha_j)^{\perp}\subset U,$$

两边取维数有

$$\dim U=r\ge\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)^{\perp}\ge n-s.$$

即 $s\ge n-r$，综上 $s=n-r$. □

3.1.3 置换矩阵群

定义 3.20. 让 S_n 是 n 元置换群，设 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ 是标准单位列向量组，称

$$P_\sigma=(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)}),\quad\sigma\in S_n.$$

是置换矩阵. 记 $\mathit{\Omega}$ 是 n 阶置换矩阵全体.

注意

$$P_\sigma P_\sigma^T=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{\sigma(j)}e_{\sigma(j)}^T=I_n,$$

即 $P_\sigma\in O(n)$. 对任意 $\sigma,\varphi\in S_n$，简单验证有 $P_{\sigma\varphi}=P_\sigma P_\varphi$，即 $\mathit{\Omega}$ 关于矩阵的乘法作成群，也就是

$\mathit{\Omega}$ 是 $O(n)$ 的有限子群. 明显地,

$$W := \mathbb{R} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \right) = \left\{ k(1, \cdots, 1)' \mid k \in \mathbb{R} \right\}, \tag{3.7}$$

是 $\mathit{\Omega}$ 不变的, 即 W 是 Ω 中所有元素公共不变子空间. 取 W 在标准内积下的正交补空间

$$W^{\perp} = \left\{ (x_1, \cdots, x_n)' \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

由引理3.6, $W^{\perp}$ 也是 $\mathit{\Omega}$ 不变的. 这启发我们:

命题 3.21. *让 G 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的有限子群, 若 W 是 G 不变的, 则存在 W 的补子空间 U, 使得 U 也是 G 不变的.*

证明. 取 $\mathbb{R}^n$ 中的内积为标准内积, 定义

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{\mathcal{A} \in G} (\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 上的双线性函数, 容易验证(3.8)是 $\mathbb{R}^n$ 的一个内积. 对任意 $\mathcal{B} \in G$, 有

$$\mathcal{B}G = \{\mathcal{B}\mathcal{A} \mid A \in G\} = G. \tag{3.9}$$

则

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta) \rangle &= \sum_{\mathcal{A} \in G} (\mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{B}\mathcal{A}(\beta)) \\ &= \sum_{\mathcal{A} \in G} (\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)) = \langle \alpha, \beta \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

即 $\mathcal{B}$ 是内积(3.8)下的正交变换. 将 U 取为 W 在内积(3.8)下的正交补空间, 则 U 是 G 不变的. □

推论 3.22. *让 G 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的有限子群, 令 $\mathcal{B} = \sum_{\mathcal{A} \in G} \mathcal{A}$, 则 $\operatorname{tr}(\mathcal{B}) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{B} = O$.*

证明. 不妨设 $|G| = n$. 由(3.9), 对任意 $\mathcal{A} \in G, \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}$, 即

$$\left(\sum_{\mathcal{A} \in G} \mathcal{A} \right) \mathcal{B} = \mathcal{B}^2 = n\mathcal{B}.$$

即 $\mathcal{B}$ 适合多项式 $\lambda^2 - n\lambda$. 当 $\operatorname{tr}(\mathcal{B}) = 0$ 时, $\mathcal{B}$ 的特征值只能都是零, 从而 $\mathcal{B}$ 一定适合多项式 λ, 即 $\mathcal{B} = O$. □

对一般数域 $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^n$ 上未必存在一个内积, 但是命题3.21仍然是成立的.

定理 3.23. *设 $\mathbb{F}$ 是数域, 且 G 是 $GL(n, \mathbb{F})$ 的有限子群. 若 W 是 G 不变的, 则存在 W 的补子空间 U, 使得 U 也是 G 不变的.*

证明. 设 M 是 W 的一个补空间，让 p_0 是 $\mathbb{F}^n$ 到 W 的投影，且 $\ker p_0 = M$. 若 p_0 与 G 中所有元素可换，则令 $U = \ker p_0$，否则考虑

$$p = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t\cdot p_0\cdot t^{-1}$$

于是，对任意 $s\in G$，有

$$\begin{aligned} sps^{-1} &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} st\cdot p_0\cdot t^{-1}s^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(st)\cdot p_0\cdot (st)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t\cdot p_0\cdot t^{-1} = p \end{aligned}$$

即 $sp = ps$. 注意，对任意 $v\in\mathbb{F}^n$，$p(v)\in W$，且当 $v\in W$ 时，$p(v)=v$，故 $p^2=p$ 且 $\operatorname{im} p = W$，即 p 也是 $\mathbb{F}^n$ 的投影，从而 $\mathbb{F}^n = W\oplus \ker p$，这里 $\ker p$ 即是 G 不变的. □

命题 3.24. *若 U 是 Ω 不变的，则 $U\in\left\{W, W^{\perp}, \{0\}, V\right\}$，其中 Ω 是置换矩阵全体，W 按(3.7)定义.*

证明. 设 U 是任意 Ω 的非平凡不变子空间，若 $U\neq W$，则存在非零向量 $v=(v_1,\cdots,v_n)\in U$, 使得 $v_1,\cdots,v_n$ 不全相等，即存在 $i\neq j$ 使得 $v_i\neq v_j$. 考虑 $P_\sigma\in\Omega$, 其中 σ 是关于 (ij) 的轮换，则 $P_{\sigma_{i,j}}(v)\in U$ 是对换 v 的 i,j 行所得向量. 于是

$$P_{\sigma_{i,j}}(v) - v = (v_i - v_j)(e_i - e_j)\in U,$$

即 $e_i - e_j\in U$. 进一步有 $e_k - e_l\in U, \forall k\neq l$. 于是

$$W^{\perp} = L(e_1-e_2, e_2-e_3,\cdots, e_n - e_1)\subset U,$$

结合 $\dim W^{\perp} = n-1$，则 $U = W^{\perp}$. □

命题 3.25. *设 Ω 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶置换阵全体，记*

$$C(\Omega) = \left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid AP = PA, \forall P\in\Omega\right\}.$$

则

$$C(\Omega) = \{aI_n + bB\mid a,b\in\mathbb{R}\}, \tag{3.10}$$

其中 B 是元素全为 1 的矩阵.

证明. 显然 $B\in C(\Omega)$, 于是 $\{aI_n + bB\mid a,b\in\mathbb{R}\}\subset C(\Omega)$. 对任意 $A\in C(\Omega)$，让 $P\in\Omega$ 是基础循环阵，则由 $AP = PA$, 一定存在 $f(\lambda)\in\mathbb{R}[\lambda]$，使得 $A = f(P)$，即 A 是循环阵. 让 $\sigma_{i,j} = (ij)$ 是关于 i,j 的轮换，则由 $AP_{\sigma_{i,j}} = P_{\sigma_{i,j}}A$，计算有 A 的非对角元全相等，即 A 形如 $aI_n + bB$ 的形式，这就证得了(3.10). □

3.2 正规算子的酉相似标准型

引理 3.26. 设 V 为 n 维酉空间，则 $\mathcal{A}$ 为正规算子的充要条件是 $\mathcal{A}$ 在任意一组标准正交基下的表示阵 A 为复正规阵.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 在标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 下的表示阵为 A, 则 $\mathcal{A}^*$ 在这组基下的表示阵为 A^H, 从而 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 当且仅当 $AA^H = A^H A$. □

引理 3.27. 设 V 为 n 维内积空间,$\mathcal{A}$ 是 V 上的正规变换, 证明: α 是 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量的充要条件是 α 是 $\mathcal{A}^*$ 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

证明. 首先对任意 $\alpha \in V$, 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) = (\alpha, \mathcal{A}^*\mathcal{A}\alpha) = (\alpha, \mathcal{A}\mathcal{A}^*\alpha) = (\mathcal{A}^*\alpha, \mathcal{A}^*\alpha).$$

即 $|\mathcal{A}\alpha| = |\mathcal{A}^*\alpha|$. 又因为 $(\lambda I - \mathcal{A})^* = \bar{\lambda}I - \mathcal{A}^*$, 且 $(\bar{\lambda}I - \mathcal{A}^*)(\lambda I - \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})(\bar{\lambda}I - \mathcal{A}^*)$, 所以 $\lambda I - \mathcal{A}$ 也是正规变换, 于是有 $\ker(\lambda I - \mathcal{A}) = \ker(\bar{\lambda}I - \mathcal{A}^*)$. □

引理 3.28. 设 V 是 n 维酉空间, 设 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是正规变换, W 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则 W 也是 $\mathcal{A}^*$-子空间, 所以 $W, W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}^*$-子空间. 进一步, $\mathcal{A}|_W$ 也是正规变换.

证明. 对不变子空间 W 的维数 k 进行归纳. 当 $k=1$ 时, 即 $W = L(\alpha)$, 则 α 是 $\mathcal{A}$ 是的特征向量, 由问题 3.27 可知 α 也是 $\mathcal{A}^*$ 的特征向量, 所以 W 也是 $\mathcal{A}^*$ 的不变子空间. 下假设结论对于维数小于 k 的不变子空间成立, 当 $\dim W = k$ 时, 将 $\mathcal{A}$ 限制在 W 上, 设 λ 是 $\mathcal{A}|_W$ 的特征值, β 为对应的特征向量, 则由引理 3.27 可知 $U = L(\beta)$ 是 $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$ 公共不变子空间. 于是 $U^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$ 公共不变子空间. 令 $U_0 = W \cap U^{\perp}$, 则由维数公式有

$$\dim U_0 = \dim W + \dim U^{\perp} - \dim(W + U^{\perp}) = k + n - 1 - n = k - 1.$$

由归纳假设可知 U_0 也是 $\mathcal{A}^*$ 的不变子空间, 且 $W = U \perp U_0$, 所以 W 也是 $\mathcal{A}^*$ 不变子空间. □

由引理 3.28 可知复正规算子 $\mathcal{A}$ 也是半单变换，类似实正规算子讨论有

定理 3.29. 设 V 是 n 维酉空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的正规算子, 则有正交直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$, 其中 W_i 是不可约 $\mathcal{A}$ 不变子空间.

证明. 见引理 3.28 和定理 2.14. □

由引理 2.13 可知 $f_{\mathcal{A}|_{W_i}}(\lambda)$ 是复数域上的不可约因式，从而 $\deg f_{\mathcal{A}|_{W_i}}(\lambda) = 1$ 即 $\dim W_i = 1$. 因此有

定理 3.30. 设 $\mathcal{A}$ 是酉空间 V 上的正规算子, 则存在 V 的一组标准正交基使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的表示阵为

$$\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}. \tag{3.11}$$

证明. 由定理3.29, 将 W_i 的标准正交基拼成 V 的一组标准正交基即可. □

推论 3.31. 设 A 是复正规阵，则存在酉阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}. \tag{3.12}$$

3.3 复线性空间上部分半单变换诱导的直和分解

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间，称 $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})$ 为 V 的对偶空间，记为 V^*. 若设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 为 V 的一组基，则

$$\begin{aligned} \sigma : \mathrm{Hom}(V,\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F}^{1\times n} \\ f &\longmapsto (f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)) \end{aligned} \tag{3.13}$$

是线性同构，于是 $\dim V = \dim V^* = n$. 另取 $\mathbb{F}^{1\times n}$ 的标准行向量基 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$, 记 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 满足 $\sigma(f_i) = \varepsilon_i$, 由同构(3.13),$\{f_1, \cdots, f_n\}$ 为 V^* 的一组基，且满足 $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. 称 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的对偶基.

命题 3.32. 设 $\mathcal{M}$ 是由 n 维复线性空间 V 中若干个线性变换组成的复线性空间，满足 $\mathcal{M}$ 中所有元素都是半单的，且两两可换，则

$$V = \bigoplus_{f\in M^*} \left[V_f := \{v \in V \mid x(v) = f(x)(v), \forall x \in \mathcal{M}\}\right]. \tag{3.14}$$

证明. 令

$$\Sigma := \{f \in \mathcal{M}^* \mid V_f \neq \{0\}\}.$$

设 $\{x_1, \cdots, x_s\}$ 是 M 的一组基. 归纳易得 $x_1, \cdots, x_s$ 有公共特征向量 α. 对任意 $x = \sum_{i=1}^{s} k_i x_i$, 设 $x_i(\alpha) = \lambda_{x_i}\alpha$，则

$$x(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i x_i\right)(\alpha) = \sum_{i=1}^{s} k_i x_i(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \lambda_{x_i}\right)(\alpha),$$

即 α 是 $\mathcal{M}$ 中所有元的公共特征向量，这样 α 诱导了 M 的一个线性函数:

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda_x \end{aligned}$$

易验证 $f_\alpha \in \Sigma$, 即 Σ 非空. 现在任取 Σ 中不同元素 f_1, f_2. 即存在 $x_i (1 \le i \le s)$ 使得 $f_1(x_i) \neq f_2(x_i)$. 于是对任意 $v \in V_{f_1} \cap V_{f_2}$, 有

$$\begin{aligned} x_i(v) &= f_1(x_i)v, \\ x_i(v) &= f_2(x_i)v. \end{aligned} \tag{3.15}$$

这迫使 $v = 0$, 即 $V_{f_1} \cap V_{f_2} = \{0\}$. 进一步归纳有 $\bigoplus_{f\in\Sigma} V_f \subset V$, 这说明 $|\Sigma| \le \dim V = n$ 有限. 下

面证明 $V=\bigoplus_{f\in\Sigma}V_f$ 即证:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \bigoplus_{f\in\Sigma}V_f\text{中包含}\mathcal{M}\text{中所有元的}n\text{个线性无关公共特征向量}\\
&\Longleftrightarrow \mathcal{M}\text{中所有元有}n\text{个线性无关的公共特征向量}\\
&\Longleftrightarrow \mathcal{M}\text{中所有元可同时对角化}\\
&\Longleftrightarrow \mathcal{M}\text{的一组基}\ \{x_1,\cdots,x_s\}\ \text{可同时对角化}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

当 $s=1$ 时，结论平凡. 因此我们假定 $s\geq 2$. 对维数 n 进行归纳. 假设结论对维数小于 n 的情形成立. 由于 $s\geq 2$, 于是 $x_1,\cdots,x_s$ 不全为数乘变换，不妨假定 x_1 不是数乘变换. 令

$$V=\bigoplus_{j=1}^{r}\left[V_{\lambda_j}:=\{v\in V\mid x_1(v)=\lambda_j v\}\right]$$

为 x_1 的特征子空间分解，其中 $r\geq 2$. 由 $[x_i,x_j]=0$, 易得 V_{λ_j} 是 $x_1,\cdots,x_s$ 的不变子空间，因此可将 x_i 限制在 V_{λ_j} 中. 由归纳假设 $x_1,\cdots,x_s$ 在 V_{λ_j} 中可同时对角化，进而有 $x_1,\cdots,x_n$ 在 V 中可同时对角化, 这就证明了(3.16). □

在证明命题3.32中，我们看到了可交换诱导的同步对角化性质. 由此不难得到

推论 3.33 ([?]). 设 S 是 $\mathrm{End}(V)$ 的子集，则 S 在 $\mathbb{F}$ 上可同步对角化的充要条件是以下两则性质成立.

- 对每个 $A\in S$ 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化.
- 对所有 $A,B\in S, AB=BA$.

证明. 这里只需要证明必要性. 让 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 的一组基满足

$$A(v_i)=\lambda_i(A)v_i,\quad A\in S,\quad 1\leq i\leq n.$$

其中 $\lambda_i(A)\in\mathbb{F}$ 是对应特征值. 则对任意 $A,B\in S$ 和所有 i 皆有

$$\begin{aligned}
AB(v_i)&=A(\lambda_i(B)v_i)=\lambda_i(A)\lambda_i(B)v_i,\\
BA(v_i)&=B(\lambda_i(A)v_i)=\lambda_i(B)\lambda_i(A)v_i.
\end{aligned}$$

由此可见 $AB=BA$. □

与推论3.33相比，一组线性变换 S 在 $\mathbb{F}$ 上可同时上三角化的条件要宽松很多，进而复杂许多，精确的充要条件适合从 Lie 理论来观照，下面的几个命题可以充分说明这一点.

命题 3.34. 让 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $r(AB-BA)\leq 1$, 则 A,B 可同步上三角化.

证明. 若 $AB=BA$, 此时结论的证明是常规的，现考虑 $r(AB-BA)=1$ 的情形. 将 A,B 视为 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换. 对 $\mathbb{C}^n$ 的维数 n 进行归纳. 假设维数小于 n 时，结论成立.

若 A 是奇异阵，则 $\ker A, \mathrm{im}A$ 都是 A 的非平凡不变子空间. 断言 $\ker A$ 或 $\mathrm{im}A$ 是 B 的不变子空间：若存在 $\alpha \in \ker A$ 使得 $AB(\alpha) \neq 0$. 则

$$AB(\alpha) = AB(\alpha) - BA(\alpha) \in \mathrm{im}(AB - BA).$$

由 $\dim \mathrm{im}(AB - BA) = 1$, 故

$$\mathrm{im}(AB - BA) = \mathbb{C} \cdot (AB)\alpha \subseteq \mathrm{im}A.$$

则任意 $\beta \in \mathbb{C}^n$, 有

$$BA(\beta) = AB(\beta) - (AB - BA)(\beta) \in \mathrm{im}A,$$

即 $\mathrm{im}A$ 是 B 的不变子空间. 不妨设 $\ker A$ 是 B 的不变子空间. 将 $\ker A$ 的一组基扩张为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，设 A, B 在这组基下的矩阵分别为 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & B_3 \end{pmatrix}$, 则

$$1 = r(AB - BA) \geq r(A_1B_1 - B_1A_1) + r(A_3B_3 - B_3A_3),$$

由归纳假设 A_1, B_1 与 A_3, B_3 可同步上三角化，这蕴含着 A, B 可同步上三角化.

若 A 是可逆阵，让 λ 是 A 的一个特征值，考虑 $\varphi(A) = A - \lambda I_n$, 则 $\varphi(A)$ 是奇异阵，且

$$r(\varphi(A)B - B\varphi(A)) = r(AB - BA) \leq 1.$$

即 $B, \varphi(A)$ 可同步上三角化，这蕴含着 A, B 可同步上三角化. □

引理 3.35 ([?]). *设 V 是复数域上的有限维线性空间，$\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 的子空间，满足对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$ 有 $xy \in \mathfrak{g}$, 且 $\mathfrak{g}$ 中元素都是幂零变换，则 $\mathfrak{g}$ 中元素存在公共特征向量.*

证明. 为更好的叙述证明过程, 首先作几点说明:

- 记 $[x, y] = xy - yx$, 则由条件 $\mathfrak{g}$ 对 $[,]$ 封闭，即 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$.
- 称 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数，如果 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.
- 称 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，如果 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$.
- 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，则
$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}\}.$$
是 $\mathfrak{g}$ 的子代数.
- 若 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 对 $[\overline{x}, \overline{y}] := \overline{[x, y]}$ 的定义合理，且封闭.
- 对于 $x \in \mathrm{End}(V)$, 定义 $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y], \forall y \in \mathrm{End}(V)$. 则容易验证 ad_x 是 $\mathrm{End}(V)$ 上的线性变换，且 $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$.
- 设 φ 是 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换，若 $\mathfrak{a}$ 是 φ 的不变子空间，则 φ 在商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 上诱导了一个线性变换 $\overline{\varphi} : x + \mathfrak{a} \mapsto \varphi(x) + \mathfrak{a}$. 且若 φ 是幂零变换，则 $\overline{\varphi}$ 也是幂零变换.

- $\mathfrak{g}$ 的真子代数 $\mathfrak{h}$ 称为是 $\mathfrak{g}$ 的极大子代数，如果包含 $\mathfrak{h}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的子代数只有 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}$. 若 $\mathfrak{h}$ 还是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$:

  若 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$, 则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 存在一维真子代数 $\bar{\mathfrak{l}}$. 让 $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是自然同态，则 $\mathfrak{l} = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{l}})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数满足 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{l} \subsetneq \mathfrak{g}$, 这与 $\mathfrak{h}$ 的取法矛盾.

对 $\mathfrak{g}$ 的维数进行归纳. 当 $\dim \mathfrak{g} = 0, 1$ 时，结论明显成立. 现假设结论对于维数小于 $n(n \geq 2)$ 的情形成立. 设 $\dim \mathfrak{g} = n$. 取 $\mathfrak{g}$ 的非零真子代数 $\mathfrak{a}$, 则对任意 $x \in \mathfrak{a}, \mathrm{ad}_x$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 上的幂零变换, 故将 ad_x 限制在 $\mathfrak{g}$ 上也是幂零变换. 又因为 ad_x 是 $\mathfrak{a}-$ 不变的，所以 ad_x 可以在商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 上诱导一个线性变换 $\overline{\mathrm{ad}_x}$ 也是幂零变换. 因此有

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{a} &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \\ x &\longmapsto \overline{\mathrm{ad}_x} \end{aligned}$$

易验证 φ 是保持 $[,]$ 结构的线性映射，则 $\varphi(\mathfrak{a}) = \left\{\overline{\mathrm{ad}_x} \mid x \in \mathfrak{a}\right\}$ 构成 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ 的子代数，且由维数公式

$$\dim \varphi(\mathfrak{a}) \leq \dim \mathfrak{a} < \dim \mathfrak{g}.$$

由归纳假设存在 $x + \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}(x \notin \mathfrak{a})$, 满足对任意 $y \in \mathfrak{a}$ 有 $\overline{\mathrm{ad}_y}(x + \mathfrak{a}) = \left\{\bar{0}\right\}$, 即 $\mathrm{ad}_y(x) = [y, x] \in \mathfrak{a}$. 这说明 $\mathfrak{a} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. 现在取 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大真子代数，由于 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，则一定有 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, 即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，于是 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$, 即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 $n-1$ 维理想.

任取 $z \notin \mathfrak{h}$, 有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Span}\left\{z\right\}$. 由归纳假设 $\mathfrak{h}$ 中所有元有公共特征向量，即 V 子空间

$$W = \{v \in V \mid x(v) = 0, \forall x \in \mathfrak{h}\},$$

中包含非零元. 现在我们要说明 W 是 $z-$ 不变的. 任取 $v \in W, x \in \mathfrak{h}$, 由于 $[x, z] \in \mathfrak{h}$, 则

$$x(z(v)) = [x, z](v) + z(x(v)) = [x, z](v) = 0.$$

即 $z(v) \in W$, 于是 W 是 $z-$ 不变的. 进一步 W 中存在 z 的非零特征量 v_0，则 v_0 是 $\mathfrak{h}$ 中所有元的公共特征向量. □

命题 3.36. 设 V 是复数域上的有限维线性空间，$\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 的子空间，满足对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$ 有 $xy \in \mathfrak{g}$, 且 $\mathfrak{g}$ 中元素都是幂零变换，则存在 V 的一组旗

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots \subset V_n = V. \tag{3.17}$$

使得 $\dim V_i = i$, 且 V_i 都是 $\mathfrak{g}$ 中元素的不变子空间. 即 $\mathfrak{g}$ 中元素可同步严格上三角化.

证明. 对 V 的维数进行归纳. 当 $\dim V = 1$ 时，显然成立. 假设结论对维数小于 n 的可解 Lie 代数成立. 由引理3.35，存在 $\mathfrak{g}$ 中元的一维不变子空间 V_1. 考虑 V/V_1, 记 $\bar{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 对应的诱导变换全体, 由归纳假设存在商空间 V/V_1 的一组旗

$$\left\{\bar{0}\right\} = V_0' \subset V_1' \subset \cdots \subset V_{n-1}' = V/V_1,$$

使得 $\dim V_i' = i$, 且 V_i' 是 $\bar{\mathfrak{g}}-$ 不变的. 让 π 是 $V \longrightarrow V/V_1$ 的自然映射. 记 $V_{i+1} = \pi^{-1}(V_i')$ 是 V_i'

的原像. 易验证 $\{V_i\}$ 满足(3.17). □

命题 3.37. *让 A,B 是 n 阶复方阵，满足 $[A,B]=aA+bB$, 则 A,B 可同步上三角化.*

证明. 为简化证明，这里从 Lie 理论角度来观照. 由条件 $\mathfrak{g}=L(A,B)$ 构成 Lie 代数，且 $\mathfrak{g}^2=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=L(aA+bB)$, 则 $\mathfrak{g}^3=\{0\}$, 即 $\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数. 由 Lie 定理 (见 [?, 可解 Lie 代数]), $\mathfrak{g}$ 中元可同步上三角化，即 A,B 可同步上三角化. □

若利用线性代数工具，命题3.37, 可以归化至 $[A,B]=\mu B$ 的情形. 若 $\mu\neq 0$, 此时易得 $\operatorname{tr}(B^k)=0$，即 B 幂零，则 A 是 V_0 不变的，这里 V_0 是 B 的零特征子空间，即 A,B 有公共特征向量. 进一步，归纳有 A,B 可同步上三角化. 下面我们进一步探究 B 的幂零指数.

命题 3.38. *若 A 在复数域上可对角化，且 $[A,B]=\mu B$，这里 μ 是非零复数. 设 A 有 k 个不同特征值，则 B 的幂零指数小于等于 k，即 $B^k=O$.*

证明. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是 A 全体不同特征值，令

$$V_\lambda=\ker(A-\lambda I_n),\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}.$$

对任意 $v_i\in V_{\lambda_i}$, 有

$$[A,B](v_i)=AB(v_i)-\lambda_iB(v_i)=\mu B(v_i),$$

即 $AB(v_i)=(\lambda_i+\mu)B(v_i)$, 则 $B^t(V_{\lambda_i})\subseteq V_{\lambda_i+t\mu}$. 由于集合

$$\{\lambda_i+\mu,\cdots,\lambda_i+k\mu\}\neq\{\lambda_j,1\leq j\leq k\},$$

则存在 $s\leq k$ 使得 $B^s(V_{\lambda_i})\subseteq V_{\lambda_i+s\mu}=\{0\}$, 这意味着 $B^k(V_{\lambda_i})=\{0\}$. 由 A 可对角化，有 $\mathbb{C}^n=\bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$，则

$$B(\mathbb{C}^n)=\bigoplus_{i=1}^s B(V_{\lambda_i})=\{0\}.$$

即 $B^k=0$. □

3.4 Jordan-Chevalley 分解及其应用

3.4.1 Jordan-Chevalley 分解

本节内容参考 [?, ?, ?, ?]. 在无特殊说明下，$\mathbb{F}$ 默认是特征为零的代数闭域.

引理 3.39 ([?]). *设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)\in\mathbb{F}[x]$ 两两互素,$r_1(x),\cdots,r_m(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则存在 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 满足同余方程*

$$\begin{cases} f(x)\equiv r_1(x)\pmod{f_1(x)}\\ f(x)\equiv r_2(x)\pmod{f_2(x)}\\ \qquad\vdots\\ f(x)\equiv r_m(x)\pmod{f_m(x)}\end{cases}\tag{3.18}$$

证明. 我们考虑从特殊情形到一般情形:

- 若 $r_1(x)=r_2(x)=\cdots=r_m(x)=0$, 则令 $f(x)=\prod_{i=1}^m f_i(x)$.
- 若 $r_k(x)=1$, 当 $j\neq k$ 时，$r_k(x)=0$, 令 $F_k(x)=\prod_{j\neq k} f_j(x)$, 则 $F_k(x)$ 与 $f_k(x)$ 互素，即存在 $u_k(x),v_k(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使得
$$F_k(x)u_k(x)+f_k(x)v_k(x)=1,$$
令 $f(x)=F_k(x)u_k(x)$ 即可.

对于一般情形，只需令 $f(x)=\sum_{k=1}^m u_k(x)r_k(x)F_k(x)$, 容易验证 $f(x)$ 满足同余方程(3.18). □

引理 3.40. *设 V 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathrm{End}(V)$, 满足 $[\mathcal{A},\mathcal{B}]=\mathcal{O}$. 若 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 都是半单的，则 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 也是半单的. 若 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是幂零的，则 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 也是幂零的.*

证明. 若 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 均是半单的，则由 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 可换，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 可同时对角化 (见命题3.32证明)，于是 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 半单. 若 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 均是幂零的，则
$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathcal{A}^k\mathcal{B}^{2n-k}=\mathcal{O},$$
即 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 也是幂零的. □

定理 3.41 ([?])**.** *设 $\mathbb{F}$ 为代数闭域，V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathcal{A}$ 为 V 上的线性变换，则存在 V 上的半单线性变换 $\mathcal{A}_s$ 和幂零线性变换 $\mathcal{A}_n$ 满足:*

- $\mathcal{A}=\mathcal{A}_s+\mathcal{A}_n,\quad [\mathcal{A}_s,\mathcal{A}_n]=\mathcal{A}_s\mathcal{A}_n-\mathcal{A}_n\mathcal{A}_s=0.$
- *存在常数项为零多项式 $p(\lambda),q(\lambda)$ 使得 $\mathcal{A}_s=p(\lambda),\mathcal{A}_n=q(\lambda)$.*
- *如果 $\mathcal{A}_s',\mathcal{A}_n'$ 分别为半单和幂零线性变换使得 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_s'+\mathcal{A}_n',[\mathcal{A}_s',\mathcal{A}_n']=0$. 则必有 $\mathcal{A}_s=\mathcal{A}_s',\mathcal{A}_n=\mathcal{A}_n'$.*

证明. 设 $f(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征多项式，则由 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，$f(\lambda)$ 有分解 $f(\lambda)=\prod_{i=1}^k(\lambda-a_k)^{l_k}$, 其中 $a_i\in\mathbb{F},l_i\in\mathbb{N}^*(i=1,2,\cdots,k),a_i\neq a_j,(i\neq j)$. 延续(2.4)的记号, 令
$$V_{[a_i],N}:=V[(\lambda-a_i)^N],\quad N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$
$$V_{[a_i]}:=\bigcup_{N\geq 0}V_{[a_i],N}.$$

则 $V_{[a_i]}$ 是 $\mathcal{A}$ 不变子空间, 由定理 2.12 有直和分解 $V=\bigoplus_{i=1}^k V_{[a_i]}$. 若 $v\in V_{[a_i]}$, 定义线性变换 $\mathcal{A}_s$ 使得 $\mathcal{A}_s|_{V_{[a_i]}}=a_i\mathcal{I}$, 从而 $\mathcal{A}_s$ 是半单的. 再令 $\mathcal{A}_n=\mathcal{A}-\mathcal{A}_s$, 则有 $\mathcal{A}_n^{l_i}(v)=(\mathcal{A}-a_i\mathcal{I}^{l_i}(v)=0$, 即 $\mathcal{A}_n$ 是幂等变换. 另注意到
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_s\mathcal{A}_n(v)&=\mathcal{A}_s(\mathcal{A}-\mathcal{A}_s)(v)=a_i\mathcal{A}(v)-a_i^2v,\\ \mathcal{A}_n\mathcal{A}_s(v)&=(\mathcal{A}-\mathcal{A}_s)\mathcal{A}_s(v)=a_i(\mathcal{A}-\mathcal{A}_s)(v)=a_i\mathcal{A}(v)-a_i^2v.\end{aligned}\tag{3.19}$$

所以 $[\mathcal{A}_s,\mathcal{A}_n]=0$.

(i) 若存在 $a_i=0$, 不妨设 $a_1=0$. 因为 $(\lambda-a_i)^{l_i}$ 互素，则由引理 3.39，存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $p(\lambda)$ 满足

$$p(\lambda)\equiv a_i \pmod{(\lambda-a_i)^{l_i}},\quad 1\le i\le k. \tag{3.20}$$

因此根据 $a_1=0$ 可知 $p(\lambda)$ 的常数项为零. 现考虑线性变换 $p(\mathcal{A})$, 设 $v\in V_{[a_i]}$, 将 $p(\mathcal{A})$ 写成 $p(\mathcal{A})=p_i(\mathcal{A})(\mathcal{A}-a_i\mathcal{I})^{l_i}+a_i\mathcal{I}$, 从而

$$p(\mathcal{A})v=p_i(\mathcal{A})(\mathcal{A}-a_i\mathcal{I})(v)+a_iv=a_iv=\mathcal{A}_sv.$$

于是 $p(\mathcal{A})=\mathcal{A}_s$. 由于 $\mathcal{A}_n=\mathcal{A}-\mathcal{A}_s$, 所以 $\mathcal{A}_n$ 也可以写成 $\mathcal{A}$ 多项式形式，且常数项为零.

(ii) 若 $a_i\neq 0, 1\le i\le k$. 则类似 (3.20)，做互素多项式 $\lambda,(\lambda-a_i)^{l_i}$ 的关于 $0,a_i$ 的同余多项式 $p(\lambda)$

$$\begin{cases} p(\lambda)\equiv 0 \pmod{\lambda} \\ p(\lambda)\equiv a_i \pmod{(\lambda-a_i)^{l_i}},\quad 1\le i\le k. \end{cases} \tag{3.21}$$

剩余证明同 (i).

下面证明分解的唯一性. 假如还存在满足条件的另一分解 $\mathcal{A}=\widetilde{\mathcal{A}}_s+\widetilde{\mathcal{A}}_n$. 则满足 $[\widetilde{\mathcal{A}}_s,\mathcal{A}]=[\widetilde{\mathcal{A}}_n,\mathcal{A}]=0$. 从而根据 $\mathcal{A}_s,\mathcal{A}_n$ 都可以写成 $\mathcal{A}$ 的多项式，有 $[\widetilde{\mathcal{A}}_s,\mathcal{A}_s]=[\widetilde{\mathcal{A}}_n,\mathcal{A}_n]=0$. 于是由引理3.40，$\widetilde{\mathcal{A}}_s-\mathcal{A}_s$ 也是幂零变换，$\widetilde{\mathcal{A}}_n-\mathcal{A}_n$ 也是半单线性变换. 从而 $\widetilde{\mathcal{A}}_s-\mathcal{A}_s=\widetilde{\mathcal{A}}_n-\mathcal{A}_n$ 是既半单又幂零的线性变换，从而只能是零变换，这就证明了唯一性. □

3.4.2 Jordan-Chevalley 分解的应用

引理 3.42. V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathfrak{gl}(V)$ 是 V 上线性变换全体. 对于 $x\in\mathfrak{gl}(V)$, 若 x 是幂零的，则 ad_x 也是幂零的. 若 x 是半单的，则 ad_x 也是半单的. 于是若设 $x=x_s+x_n$ 为 x 的 Jordan-Chevalley 分解，易验证 $\mathrm{ad}_x=\mathrm{ad}_{x_s}+\mathrm{ad}_{x_n}$，且 $[\mathrm{ad}_{x_s},\mathrm{ad}_{x_n}]=0$. 由定理 3.41 分解的唯一性，$\mathrm{ad}_x=\mathrm{ad}_{x_s}+\mathrm{ad}_{x_n}$ 即是 ad_x 的 Jordan-Chevalley 分解.

证明. 若 x 是半单的，取 V 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 使得 x 在这组基下矩阵为 $\mathrm{diag}\{a_1,\cdots,a_n\}$. 让 $e_{ij}\in\mathfrak{gl}(V)$, 满足 e_{ij} 在这组基下的矩阵为 E_{ij}. 则 $\{e_{ij}\mid 1\le i,j\le n\}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一组基. 由 $\mathrm{ad}_x(e_{ij})=(a_i-a_j)e_{ij}$, 可知 ad_x 也是半单的.

若 x 是幂零的，取 V 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 使得 x 在这组基下矩阵为严格上三角阵. 让 $e_{ij}\in\mathfrak{gl}(V)$, 满足 e_{ij} 在这组基下的矩阵为 E_{ij}. 则 $\{e_{ij}\mid 1\le i,j\le n\}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一组基. 易验证 ad_x 在 $\{e_{ij}\}$ 下的矩阵也是严格上三角阵，即 ad_x 幂零. □

引理 3.43. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 A 与 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中所有元可换，则 $A=kI_n, k\in\mathbb{F}$.

证明. 取基础矩阵组 $\{E_{ij};1\le i,j\le n\}$, 则有 $E_{ij}A=AE_{ij}, 1\le i,j\le n$. 所以

$$a_{jk}E_{il}=E_{ij}(AE_{kl})=(E_{ij}E_{kl})A=\begin{cases}0, & j\neq k\\ E_{il}A, & j=k\end{cases}$$

因此当 $j \neq k, a_{jk} = 0$. 当 $j = k$ 时，$a_{jj} = a_{ll}$, 所以 A 是数量矩阵. □

设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，称 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的线性变换 $\mathcal{D}$ 为一个导子，如果对任意 $x, y \in \mathfrak{gl}(V), k, l \in \mathbb{F}$, 满足

$$\mathcal{D}(kx + ly) = k\mathcal{D}(x) + l\mathcal{D}(y),$$
$$\mathcal{D}(xy) = \mathcal{D}(x) + x\mathcal{D}(y).$$

记 $\mathrm{Der}(\mathfrak{gl})$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的全体导子，易验证 $\mathrm{Der}(\mathfrak{gl})$ 为 $\mathrm{End}\,\{\mathfrak{gl}(V)\}$ 的子空间. 对任意 $x \in \mathfrak{gl}(V)$, 容易验证 $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{gl})$, 因此可作线性映射:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{gl}(V) &\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{gl}) \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}_x \end{aligned} \tag{3.22}$$

于是有

引理 3.44. $\mathrm{Der}(\mathfrak{gl}) = \mathrm{im}\varphi = \{\mathrm{ad}_x \mid x \in \mathfrak{gl}(V)\}$, 即 $\mathfrak{gl}(V)$ 的导子等于内导子.

证明. 在线性同构意义下，不妨将 $\mathfrak{gl}(V)$ 视为 $\mathbb{F}^{n\times n}$. 由引理3.43，$\ker\varphi = \{kI_n \mid k \in \mathbb{F}\}$, 这里 φ 由(3.22)定义. 于是

$$\dim \mathrm{im}\varphi = \dim \mathfrak{gl}(V) - \dim\ker\varphi = n^2 - \dim\ker\varphi = n^2 - 1.$$

下面只需说明 $\dim \mathrm{Der}(\mathfrak{gl}) \leq n^2 - 1$. 对任意 $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{gl})$, $\mathcal{D}$ 由其在 $\mathfrak{gl}(V)$ 的基础矩阵基 $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ 下的取值决定. 由 $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ 有

$$\mathcal{D}(E_{ij})E_{kl} + E_{ij}\mathcal{D}(E_{kl}) = \delta_{jk}\mathcal{D}(E_{il}).$$

当 $j = k$ 时，$\mathcal{D}(E_{ij})E_{jl} + E_{ij}\mathcal{D}(E_{jl}) = \mathcal{D}(E_{il})$. 即 $\mathcal{D}(E_{il})$ 除了第 i 行和第 l 列之外元素全为 0, 且 $\mathcal{D}(E_{il})$ 的 i 行和 l 列分别由 $\mathcal{D}(E_{ij})$ 和 $\mathcal{D}(E_{jl})$ 决定. 于是，$\mathcal{D}$ 由 $\mathcal{D}(E_{12}), \mathcal{D}(E_{23}), \cdots, \mathcal{D}(E_{n1})$ 所决定.

当 $k \neq j$ 时，有 $\mathcal{D}(E_{ij})E_{kl} + E_{ij}\mathcal{D}(E_{kl}) = O$. 若记 $\mathcal{D}(E_{ij})$ 的第 (k, l) 元素为 $\mathcal{D}(E_{ij})_{kl}$, 则

$$\mathcal{D}(E_{ij})E_{kl} = \mathcal{D}(E_{ij})_{ik}E_{il},$$
$$E_{ij}\mathcal{D}(E_{kl}) = \mathcal{D}(E_{kl})_{jl}E_{il}.$$

即 $\mathcal{D}(E_{ij})_{ik} + \mathcal{D}(E_{kl})_{jl} = 0$. 由此可知 $\mathcal{D}(E_{kl})$ 的第 l 列元素由 $\mathcal{D}(E_{ij})$ 的第 i 行元素决定.

综上讨论, $\mathcal{D}$ 是由 $\mathcal{D}(E_{12}), \mathcal{D}(E_{23}), \cdots, \mathcal{D}(E_{n1})$ 共 n 个矩阵的 n 行元素决定, 即 $\dim \mathrm{Der}(\mathfrak{gl}) \leq n^2$. 由定义 $\mathcal{D}(I_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(E_{ii}) = O$, 于是 $\dim \mathrm{Der}(\mathfrak{gl}) \leq n^2 - 1$, 这就证明了 φ 是满射. □

命题 3.45. 线性空间 $\mathfrak{gl}(V)$ 的导子 $\mathcal{D}$ 的 Jordan-Chevalley 分解为 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_s + \mathcal{D}_n$, 这里 $\mathcal{D}_s, \mathcal{D}_n$ 都是导子.

证明. 见引理3.42和引理3.44. □

引理 3.46. 让 V 是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 幂零当且仅当 $\mathcal{A}$ 特征值全为零.

证明. 若 $\mathcal{A}$ 是幂零的，即存在整数 k 使得 $\mathcal{A}^k = O$ 为零变换. 即 $\mathcal{A}$ 适合多项式 λ^k, 这意味着 $\mathcal{A}$ 特征多项式为 λ^n, 即 $\mathcal{A}$ 特征值全为零.

反之，若 $\mathcal{A}$ 特征值全为零，则 $\mathcal{A}$ 特征多项式为 λ^n. 由 Cayley-Hamilton 定理有 $\mathcal{A}^n = O$, 即 $\mathcal{A}$ 是幂零变换. □

引理 3.47 ([?, ?]). 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 且当 $i \neq j$ 时,$a_i \neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$.

证明. 定义线性映射

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{F}[x]_n &\longrightarrow \mathbb{F}^{1\times n} \\ f(x) &\longmapsto (f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)). \end{aligned}$$

σ 显然是单射, 且由于 $\dim \mathbb{F}[x]_n = \dim \mathbb{F}^{1\times n} = n$, 故 σ 是线性同构. 于是对任意 $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 存在唯一 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$, 满足 $\sigma(f(x)) = (b_1, \cdots, b_n)$, 即 $f(a_i) = b_i$. □

命题 3.48 ([?]). 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域，V 为 $\mathbb{F}$ 上线性空间，$M_1 \subseteq M_2$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的两个线性子空间，定义 $W = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, M_2] \subseteq M_1\}$. 又设 $x \in W$ 满足条件 $\mathrm{tr}(xy) = 0, \forall y \in W$. 则 x 是幂零线性变换.

证明. 因为 $\mathbb{F}$ 是特征为零的代数闭域，从而可以看成 $\mathbb{Q}$ 上的扩域，因此 $\mathbb{F}$ 可以看成 $\mathbb{Q}$-线性空间. 所以 x 是幂零变换当且仅当 x 的特征值全为零 (引理3.46). 不妨设 x 的特征值为 $a_1, \cdots, a_n, E$ 为 $\mathbb{F}$ 的由 $a_1, \cdots, a_n$ 线性张成的 $\mathbb{Q}$-线性子空间. 下面我们要证明 $E = 0$, 为此只需证明 $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{Q}) = 0$.

- 由 Jordan 标准型理论，存在 V 的一组基 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 使得 x 在这组基下的表示阵为上三角阵，且对角元为 $a_1, \cdots, a_n$. 对任意 $f \in \mathrm{Hom}(E, \mathbb{Q})$，定义 V 上的线性变换 y 使得 y 在这组基下的表示阵为 $A = \mathrm{diag}\{f(a_1), \cdots, f(a_n)\}$. 取定 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一组基 e_{ij}，使得 e_{ij} 在 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的表示阵为 E_{ij} 是基础矩阵，则 ad_y(见引理3.42) 在 $\mathfrak{gl}(V)$ 的基 e_{ij} 下的表示阵为 $A \otimes I_n - I_n \otimes A$(见 [?, 矩阵 Kronecker 积]) 为对角阵且对角元为 $f(a_i) - f(a_j), 1 \leq i, j \leq n$.

- 由引理 3.47，存在常数项为零的 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $g(x)$ 使得 $g(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$.

- 设 $x = x_s + x_n$ 为 x 的 Jordan-Chevalley 分解，则我们有 $g(\mathrm{ad}_{x_s}) = \mathrm{ad}_y$. 由引理3.42，$\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$, 且 ad_{x_s} 可以写成 ad_x 的多项式，所以 ad_y 也可以写成 ad_x 的多项式. 所以一定有 $[y, M_2] = \mathrm{ad}_y(M_2) \subseteq M_1$, 即 $y \in W$.

- 计算此时 $\mathrm{tr}(xy) = \sum_{i=1}^n f(a_i)a_i = 0$. 两边作用 f 得 $\sum_{i=1}^n f^2(a_i) = 0$. 由 $f(a_i)$ 为有理数得 $f(a_i) = 0$，即 $f = 0$.

□

命题3.48是证明 Lie 代数中证明 Cartan 准则的关键，并由此引入研究 Lie 代数的利器:Killing 型.

3.5 三维空间的旋转

本节主要探究三维旋转的相关内容，包括矩阵表示，群结构和几何表示，以及其有限子群的分类. 内容主要参考 [?, ?, ?].

3.5.1 Euler 角与三维空间的旋转

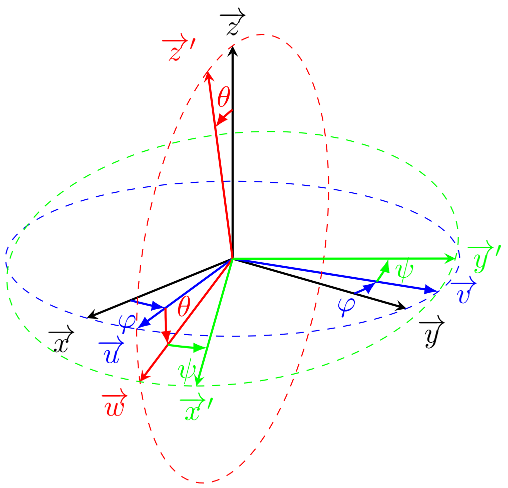
定理 3.49 ([?]). *三维空间的旋转矩阵都可以表示为*

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := B_\varphi C_\theta B_\psi \tag{3.23}$$

证明. 在 $\mathbb{R}^3$ 中取标准内积，则标准单位向量组 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基. 对任意的 $T \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, 记 $T = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3')$ 为 T 的列分块，则 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'$ 也是 V 的一组标准正交基. 首先将 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 绕 ε_3 旋转 φ 角，即

$$(\eta_1, \eta_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

然后将 $\eta_1, \eta_2, \varepsilon_3$ 绕 η_1 旋转 θ 角；最后将 $\eta_1, \xi_2, \varepsilon_3'$ 绕 ε_3' 旋转 ψ 角，使得 η_1 变为 ε_1', ξ_2 变为 ε_2'



旋转 Euler 角示意图，原图作者：Dorian Depriester

这样从 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'$ 的过度矩阵即是(3.23). □

推论 3.50 (Rodrigues 旋转公式). *给定单位向量 $u \in \mathbb{R}^3$, 将向量绕 u 所在的有向直线按右手法则旋转 θ 角对应的变换记为 $R_{u,\theta}$. 则对任意 $\xi \in \mathbb{R}^3$, 有*

$$R_{u,\theta}(\xi) = (\cos\theta)\xi + (u \cdot \xi)(1 - \cos\theta)u + (\sin\theta)(u \times \xi). \tag{3.24}$$

证明. 将 u 扩充为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基 $\{u,v,w\}$ 使得

$$R_{u,\theta}(u,v,w)=(u,v,w)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

设 $\xi=au+cw$, 则

$$\begin{aligned}R_{u,\theta}(\xi)&=au+(b\cos\theta-c\sin\theta)v+(b\sin\theta+c\cos\theta)w\\&=au+(\xi-au)\cos\theta+(bw-cv)\sin\theta.\end{aligned}\tag{3.25}$$

注意 $u\times\xi=a$ 且 $u\times\xi-u\times\xi=u\xi=-a+bw-cv$, 代入 (3.25) 整理即得(3.24). $\square$

若记 $u=(u_1,u_2,u_3)$, 则(3.24)的旋转变换 $R_{u,\theta}$ 对应的表示阵可写为

$$I_{3\times3}+\sin\theta\cdot A+(1-\cos\theta)\cdot A^2,\quad A:=\begin{pmatrix}0&-u_3&u_2\\u_3&0&-u_1\\-u_2&u_1&0\end{pmatrix}.\tag{3.26}$$

另记 $\mathfrak{so}(n):=\left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid A^T+A=O\right\}$. 任取 $A\in\mathfrak{so}(n)$, 有

$$e^A(e^A)^T=e^{A+A^T}=e^O=I_n,$$

且 $\det e^A=e^{\mathrm{tr}A}=e^0=1$(详见 [?, 矩阵函数]), 即 $e^A\in\mathrm{SO}(n)$. 于是可定义:

$$\begin{aligned}\mathrm{expt}:\mathfrak{so}(n)&\twoheadrightarrow\mathrm{SO}(n)\\A&\longmapsto e^A\end{aligned}$$

断言 expt 是满射: 令 $S(\theta):=\begin{pmatrix}0&-\theta\\\theta&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{so}(2)$, 则

$$\begin{aligned}e^S=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{k!}S^k&=\begin{pmatrix}\sum_{k=0,k\text{为偶}}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k/2}}{k!}\theta^k&-\sum_{k=0,k\text{为奇}}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1/2}}{k!}\theta^k\\\sum_{k=0,k\text{为奇}}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1/2}}{k!}\theta^k&\sum_{k=0,k\text{为偶}}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k/2}}{k!}\theta^k\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=R(\theta)\in\mathrm{SO}(2).\end{aligned}\tag{3.27}$$

对任意 $Q\in\mathrm{SO}(n)$, 存在正交阵 P 使得

$$Q=P^{-1}\mathrm{diag}\left\{I_{n-2m},R(\theta_1),\cdots,R(\theta_m)\right\}P,\quad\theta_i\in(0,2\pi).$$

取 $A=P^{-1}\mathrm{diag}\left\{O_{n-2m},S(\theta_1),\cdots,S(\theta_m)\right\}P\in\mathfrak{so}(n)$, 计算有

$$\mathrm{expt}(A)=e^A=P^{-1}\mathrm{diag}\left\{I_{n-2m},R(\theta_1),\cdots,R(\theta_m)\right\}P=Q.$$

这就证得 expt 是满射. 对于(3.26)中的 $A \in \mathfrak{so}(3)$, 计算有 A 特征多项式为 $\lambda^3+\lambda$, 故有 $A^3=-A$. 从而

$$\begin{aligned} e^{\theta A} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k A^k}{k!} \\ &= I_{3\times 3} + A\sum_{k=0,k\text{为奇}}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1/2}}{k!}\theta^k - A^2 \sum_{k=2,k\text{为偶}}^{\infty} \frac{(-1)^{k/2}}{k!}\theta^k \\ &= I_3 + \sin\theta + (1-\cos\theta)A^2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

这正是(3.26), 即 Rodrigues 旋转公式可以由 $\mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ 的指数映射 expt 给出. 更深角度看，指数映射 expt 也是从矩阵群出发，构造 Lie 代数的桥梁映射:

记 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \{T \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det T = 1\}$, 取 $\mathbb{R}$ 上可微函数 $f_{ij}(t), i,j=1,2,\cdots,n$, 定义映射

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto (f_{ij}(t)) \\ 0 &\longmapsto I_n \end{aligned} \tag{3.29}$$

记 V 为所有满足(3.29)的映射全体，对任意 $f(t) \in V$, 记 $f'(t) = (f'_{ij}(t))$. 称 $A = f'(0)$ 为 f 在 I_n 的切向量. 令 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) := \{f'(0) \mid f \in V\}$ 为所有切向量的全体，容易验证 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ 构成 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间. 由 $|f(t)| \equiv 1$, 有

$$0 = m(t) = \frac{d|f(t)|}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial |f(t)|}{\partial f_{ij}(t)} f'_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{i1}(t) & f'_{i2}(t) & \cdots & f'_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

于是 $m(0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{ii}(0) = \mathrm{tr} A = 0$, 即 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \subset \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

另一方面，对任意的 $A \in \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr} A = 0\}$, 考虑指数映射 $f(t) = e^{tA}$, 从而 $f'(t) = Ae^{tA}$, 即 $f'(0) = A$. 且

$$\det f(t) = \det e^{tA} = e^{\mathrm{tr} A} = e^0 = 1.$$

于是 $f(t) \in V$, 即有 $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. 故 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$. 易验证将 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 限制在子群 $\mathrm{SO}(\mathbb{R})$ 上得到的切空间即是 $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$.

3.5.2 三维旋转的群结构与几何表示

引理 3.51 ([?]). *设 $f: G \to G'$ 是群的满同态，则 $G/\ker f \simeq G'$, 即有交换图*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, twoheadrightarrow, "f"] \arrow[d, twoheadrightarrow, "\pi"'] & G' \\ G/\ker f \arrow[ur, "\simeq", "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

证明. 定义 $G/\ker f \to G'$ 的自然映射 $\overline{f}(g\ker f) := f(g)$. 易验证 $\overline{f}$ 定义是良定的.$\overline{f}$ 显然是双射，只需验证 $\overline{f}$ 是同态. 对任意 $g, h \in G$, 有

$$\overline{f}(g\ker f h\ker f) = \overline{f}(gh\ker f) = f(gh) = f(g)f(h) = \overline{f}(g\ker f)\overline{f}(h\ker f).$$

所以 $\overline{f}$ 是群同态. □

引理 3.52. 让 $SU(2) = \left\{g \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid gg^H = I_2, \det g = 1\right\}$, 则

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}. \tag{3.30}$$

证明. 设 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$, 则由 $g^* = g^H = g^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix},$$

从而 $\delta = \bar{\alpha}, \gamma = -\bar{\beta}$，即有(3.30). □

让 $W = \left\{g \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid g = g^H, \mathrm{tr} g = 0\right\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，即

$$W = \left\{ H_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + \mathbf{i}x_2 \\ x_1 - \mathbf{i}x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

定义 W 上内积:

$$(H_{\mathbf{x}}, H_{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^{3} x_j^2.$$

则

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

为 W 的一组标准正交基.

现在令 g 是 $SU(2)$ 的一个固定元，因为迹在相似关系下不会改变，且

$$(gH_{\mathbf{x}}g^{-1})^H = (g^{-1})^H H_{\mathbf{x}} g^H = gH_{\mathbf{x}}g^{-1},$$

从而

$$gH_{\mathbf{x}}g^{-1} = \begin{pmatrix} y_3 & y_1 + iy_2 \\ y_1 - iy_2 & -y_3 \end{pmatrix} = H_{\mathbf{y}} \in W,$$

于是有线性变换

$$\varphi_g : W \longrightarrow W$$

$$H_{\mathbf{x}} \longmapsto gH_{\mathbf{x}}g^{-1}.$$

且

$$(\varphi_g(\mathbf{x}),\varphi_g(\mathbf{x}))=(\mathbf{y},\mathbf{y})=-\det\varphi(H_{\mathbf{x}})$$
$$=-\det gH_{\mathbf{x}}g^{-1}=-\det H_{\mathbf{x}}=(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

即 $\varphi_g\in O(W)$. 注意 $\varphi_{gg'}=\varphi_g\varphi_{g'}$，则映射

$$\begin{aligned}\varphi: SU(2) &\longrightarrow O(W)\\ g &\longmapsto \varphi_g\end{aligned} \tag{3.31}$$

是 SU(2) 到 $O(W)$ 的群同态.

引理 3.53. 让 φ 按(3.31)定义，则 $\ker\varphi=\{\pm I_2\}$，$\mathrm{im}\varphi=SO(W)$.

证明. 注意

$$\ker\varPhi=\left\{g\in\mathrm{SU}(2)\mid gH=Hg,\forall H\in M_2^+\right\}$$
$$=\left\{g\in\mathrm{SU}(2)\mid gh_i=h_ig, j=1,2,3\right\}.$$

计算有 $\ker\varPhi=\{\pm I_2\}$.

对任意 $g\in\mathrm{SU}(2)$, 由标准型理论，存在酉阵 u 使得 $g=ub_\varphi u^{-1}$, 其中 b_φ 形如

$$b_\varphi=\begin{pmatrix}e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0\\ 0 & e^{\frac{-i\varphi}{2}}\end{pmatrix}\in SU(2),$$

令 A_g 是 φ_g 在标准正交基 h_1,h_2,h_3 下的矩阵，则

$$A_{b_\varphi}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=B_\varphi\in SO(3),$$

故

$$\det\varphi_g=\det\varphi(ub_\varphi u^{-1})=\det\varphi_{b_\phi}=\det A_{b_\varphi}=1,$$

即 $\mathrm{im}\varPhi\subset SO(W)$. 另取

$$c_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2)\\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}\in SU(2),$$

经计算有 $A_{c_\theta}=C_\theta\in SO(3)$. 所以对任意 $\eta\in SO(W)$, 设 η 在基 h_1,h_2,h_3 下矩阵为 A，则由定理 3.49 有 $A=B_\varphi C_\theta B_\psi$，即

$$\eta=\varphi_{b_\varphi}\varphi_{c_\theta}\varphi_{b_\psi}=\varphi_{b_\varphi c_\theta b_\psi}\in\mathrm{im}\varphi$$

故 $\mathrm{im}\phi=SO(W)$. □

推论 3.54. 由引理 3.51 和引理 3.31，$SO(3)$ 群同构于商群 $SU(2)/\{\pm I_2\}$. 而 SU_2 微分同胚于三维球面 S^3, 故 $SO(3)$ 同胚于三维实射影空间 $\mathbb{RP}^3$.

定理 3.55. 旋转群 $SO(3)$ 是单群.

证明. 通过(3.31)，我们已经建立了 $SU(2)\to SO(3)$ 的满同态 φ，为此只需说明 $SU(2)$ 中包含同态核 $\{\pm I_2\}$ 且不等于同态核的任一正规子群 K 都等于 $SU(2)$. 因为群 $SU(2)$ 的每个共轭类中包含对角阵 $d_\varphi=b_{2\varphi}=\operatorname{diag}\left\{e^{i\varphi},e^{-i\varphi}\right\}$，且 K 是 $SU(2)$ 的一些共轭类的并集，于是存在某个满足 $\sin\varphi\neq 0$ 的 $\varphi>0$, 使得 $d_\varphi\in K$.

由 K 正规，所以 K 中包含任意换位子

$$
\begin{aligned}
(d_\varphi,g)=d_\varphi(gd_\varphi^{-1}g^{-1})&=\begin{pmatrix}e^{i\varphi}&0\\0&e^{-i\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\overline{\beta}&\overline{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\varphi}&0\\0&e^{i\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\alpha}&-\beta\\\overline{\beta}&\alpha\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}|\alpha|^2+|\beta|^2e^{i2\varphi}&0\\0&|\alpha|^2+|\beta|^2e^{-i2\varphi}\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

其中 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. 则

$$
\operatorname{tr}(d_\varphi,g)=2|\alpha|^2+|\beta|^2(e^{i2\varphi}+e^{-i2\varphi})=2(1-2|\beta|^2\sin^2\varphi).
$$

这里 $|\beta|^2$ 可取区间 $[0,1]$ 的任意值. 又因为存在 $h\in SU(2)$ 满足

$$
h(d_\varphi,g)h^{-1}=d_\psi=\begin{pmatrix}e^{i\psi}&0\\0&e^{-i\psi}\end{pmatrix}\in K,\quad \psi\in[-\pi,\pi].
$$

则 $e^{i\psi},e^{-i\psi}$ 满足特征方程

$$
\lambda^2+(4|\beta|^2\sin^2\varphi-2)\lambda+1=0.
$$

当 $|\beta|^2$ 跑遍 $[0,1]$ 时，$\cos\psi$ 的值取遍 $[-1,1]$. 因此我们得到 ψ 可以取遍 $[-\pi,0]$ 或者 $[0,\pi]$. 又因为 $d_\psi^{-1}=d_{-\psi}\in K$, 于是 $d_\psi\in K,\forall\psi\in[-\pi,\pi]$. 所以 K 包含 $SU(2)$ 所有共轭类，即 $K=SU(2)$. □

3.5.3 正多面体的对称群和 $SO(3)$ 有限子群的分类

本小节我们的任务是给出 $SO(3)$ 所有可能的有限子群的阶数, 并给出每种情形对应的子群示例. 为此，先对群作用做基本介绍.

定义 3.56. 设 G 是一个群，X 是非空集合. 若映射 $f:G\times X\to X$，满足对任意 $x\in X$，$g_1,g_2\in G$ 都有

$$
\begin{aligned}
f(e,x)&=x,\\
f(g_1g_2,x)&=f(g_1,(g_2,x)).
\end{aligned}
$$

则称 f 决定了 G 在 X 上的一个作用，将 $f(g,x)$ 简记为 gx.

对任意 $x\in X$，称 X 的子集

$$
O_x=\{gx\mid g\in G\}.
$$

为 x 的轨道. 容易验证对任意 $x,y\in X$, 有 $G_x=G_y$ 或 $G_x\cap G_y=\varnothing$. 另记

$$
G_x=\{g\in G\mid gx=x\},
$$

则 G_x 是 G 的子群，称为是 G 的迷向子群. 注意

$$g_1x = g_2x \iff g_2^{-1}g_1 \in G_x \iff g_1G_x = g_2G_x \tag{3.32}$$

这样就有

$$|O_x| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}. \tag{3.33}$$

命题 3.57. 设有限群 G 在集合 X 上有一个作用，由(3.33)，

$$|X| = \left|\bigcup_{x\in X} O_x\right| = \sum_{x\in R} |O_x| = \sum_{x\in R} \frac{|G|}{|G_x|}. \tag{3.34}$$

其中 R 是选取不同轨道代表元组成的集合.

命题 3.58. 设 $\mathcal{D}_n$ 是正 n 边形的对称群，则 $|\mathcal{D}_n| = 2n$.

证明. 首先 $\mathcal{D}_n$ 中有 n 个旋转和 n 个翻转，即 $|\mathcal{D}_n| \geq 2n$. 另一方面，若我们给正 n 边形的顶点依次编号排序，则 $\mathcal{D}_n$ 在 $X = \{1, \cdots, n\}$ 上有个自然的作用，且该作用是可递的，即只有一个轨道. 由(3.34)，有

$$n = |X| = \frac{|\mathcal{D}_n|}{|(\mathcal{D}_n)_{x=1}|} = \frac{|\mathcal{D}_n|}{2}.$$

即 $|\mathcal{D}_n| = 2n$，其中元素即是旋转和翻折. □

下面我们解决本节的主问题. 首先 $SO(3)$ 有如下几类不同的有限子群 (详见 [?, 正多面体的对称群])：

- 保持 n 边形不变的旋转构成 n 阶循环群：$\mathcal{C}_n \simeq \mathbb{Z}_n$.
- 二面体群：$\mathcal{D}_n = \langle a, b \mid a^2 = b^n = (ab)^2 = 1\rangle$. 由命题3.58，$|\mathcal{D}_n| = 2n$.
- 保持中心在原点的正四面体不变的旋转所构成的正四面体群：$\mathcal{T} \simeq A_4$.
- 保持中心在原点的正八面体不变的旋转所构成的正八面体群：$\mathcal{O} \simeq S_4$.
- 保持中心在原点的正二十面体不变的旋转所构成的正二十面体群：$\mathcal{I} \simeq A_5$.

定义 3.59. 设 G 是 $SO(3)$ 的有限子群，$s \in G$，$s \neq I_3$，如果 $x \in S^2$ 满足 $sx = x$，则称 x 为 s(和 G) 的极点.

自然地，若 x 为极点，则 $-x$ 也是极点，故每个非幺元都有两个极点. 记 G 的所有极点的全体为 P. 设 $x \in P$ 为 s 的极点，则对任意 $t \in G$，有

$$tst^{-1}(tx) = tsx = tx,$$

即 tx 是 tst^{-1} 的极点. 因此 G 在 P 上有个自然的群作用.

命题 3.60. 设 $x \in P$，则 x 的迷向子群 G_x 为循环群.

证明. 确定直角坐标系 $oxyz$ 使得 $x=(0,0,1)'$，则 G_x 中元都是绕 $z-$ 轴的旋转，即形如

$$B_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\operatorname{diag}\{b_{2\varphi},1\}$$

其中 $b_{2\varphi}$ 对应着二维旋转. 注意 $(b_{2\varphi})^t=b_{2t\varphi}$，故二维旋转的有限子群一定是循环群，即 G_x 是循环群. □

设 $x,y\in P$，如果 $y=\pm x$，则 $G_x=G_y$. 如果 $y\neq\pm x$，则 x,y 线性无关，即 x,y 不会是 G 中同一个非幺元的极点，换言之，$G_x\cap G_y=\{I_3\}$. 记 $G'_x=G_x\setminus\{I_3\}$, 则

引理 3.61. *若 $y=\pm x$，则 $G'_x=G'_y$. 若 $y\neq\pm x$，则 $G'_x\cap G'_y=\varnothing$. 这样就有*

$$\sum_{x\in P}G'_x=2(|G|-1).\tag{3.35}$$

记 $P_1,\cdots,P_k$ 为该作用下的所有轨道，$p_i=|P_i|$ 和 $n_i=|G|/p_i$，则 n_i 为 P_i 中任意一点的迷向子群的阶，即有

$$\sum_{x\in P}|G'_x|=\sum_{i=1}^k\sum_{x\in P_i}|G'_x|=\sum_{i=1}^k p_i(n_i-1)=\sum_{i=1}^k(|G|-p_i)\tag{3.36}$$

结合(3.35)和(3.36)我们得到方程

$$\sum_{i=1}^k\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)\tag{3.37}$$

不妨设 $n_1\leq n_2\leq n_3$，则我们有

定理 3.62. *设 G 为 $SO(3)$ 的非平凡有限子群，则 P 的轨道数为 2 或 3，且方程 (3.37) 的解图为*

G	k	n_1	n_2	n_3	$\lvert G\rvert$
$\mathcal{C}_n$	2	n	n	$-$	n
$\mathcal{D}_n$	3	2	2	n	$2n$
$\mathcal{T}$	3	2	3	3	12
$\mathcal{O}$	3	2	3	4	24
$\mathcal{I}$	3	2	3	5	60

证明. 由于每个极点的迷向子群至少有两个元素，故 $n_i\geq 2$，且轨道至少有两条，即 $k\geq 2$. 进一步，

$$\frac{k}{2}\leq\sum_{i=1}^k\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)<2.$$

即 $k<4$，从而 $k=2$ 或 $k=3$.

当 $k=2$ 时，由(3.37)有

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{2}{|G|}.$$

由 $|n_i| \le |G|$, 故只能是 $n_1 = n_2 = |G|$. 因此，G 只有两个极点且只能为 $x, -x$.

如果 $k = 3$，则有

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{|G|} > 1.$$

于是有 $\dfrac{3}{n_1} > 1$，即 $n_1 < 3$. 因此 $n_1 = 2$. 从而我们有

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{|G|} > \frac{1}{2},$$

即有 $n_2 < 4$.

如果 $n_2 = 2$，则 $n_3 = \dfrac{|G|}{2}$，即 $|G|$ 是偶数，设为 $2n$，则 $n_3 = n$.

如果 $n_2 = 3$，则

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{|G|} > \frac{1}{6},$$

即 $n_3 < 6$. 当 $n_2 = 3, 4, 5$ 时，$|G|$ 分别为 $12, 24, 60$. □

致谢

本科阶段的学习快要结束了，在这期间，我得到了许多老师、同学的关心和帮助，在此，我想他们表示最诚挚的感谢.

首先我要特别感谢顾栋蔚老师和汤信佳老师，感谢他们在学习上给予我的无私帮助，感谢他们一直以来对我的鼓励和支持. 他们渊博的专业知识，严谨的治学态度，诲人不倦的精神都深刻地影响可我，为我以后的学习和生活树立了标杆.

最后我要感谢我的家人，感谢我的父母对我的支持，感谢我的姐姐对我的关心和生活上的帮助.