苏州大学 · 数学科学学院

Lie Algebra

作者： 郭利文

时间： 2026 年 1 月 26 日

目录

1 Lie 代数的基本概念 **2**

1.1 Lie 代数定义与性质 2

1.2 可解 Lie 代数 5

1.3 幂零 Lie 代数 9

1.4 半单与单 Lie 代数 13

1.5 三维 Lie 代数进行分类 18

1 Lie 代数的基本概念

1.1 Lie 代数定义与性质

定义 1.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，称 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个 Lie 代数，如果 $\mathfrak{g}$ 中有一个二元运算 $[,]$ 满足

- 反对称性：$[x,y]=-[y,x]$.
- 双线性：$[k_1x_1+k_2x_2y]=k_1[x_1,y]+k_2[x_2,y],\forall k_1,k_2\in\mathbb{F},x_1,x_2,y\in\mathfrak{g}$.
- 对任意 $x,y,z\in\mathfrak{g}$, 满足 Jacobi 恒等式：$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$.

♯具体例子后期拾遗.

♮ 注意：若无特殊说明，$\mathfrak{g}$ 指的是特征为零的代数闭域上的 Lie 代数.

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，对任意 $x,y\in\mathfrak{g}$, 定义 $[x,y]=0$, 则 $\mathfrak{g}$ 为一个 Lie 代数，称为**平凡 Lie 代数**.

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数，

- 当 $\dim\mathfrak{g}=1,\mathfrak{g}$ 平凡.
- 当 $\dim\mathfrak{g}=2$, 若 $\mathfrak{g}$ 不是平凡的, 则存在 $x,y\in\mathfrak{g}$, 使得 $[x,y]\neq 0$. 这意味着 x,y 线性无关, 构成 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 不妨设 $[x,y]=k_1x+k_2y$, 这里假定 $k_2\neq 0$. 用 $\dfrac{1}{k_2}x$ 代替 x, 则有 $[x,y]=tx+y$. 故不妨一开始便假定 $k_2=1$. 于是 $[x,tx+y]=[x,y]=tx+y$, 注意 $\{x,tx+y\}$ 仍是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，所以存在 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{x_1,x_2\}$ 使得

$$[x_1,x_2]=x_2.$$

对于一般 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 记 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基，确定 $\mathfrak{g}$ 的结构，只需确定 $[x_i,x_j]$ 的值就好了.

定义 1.2. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数，其中的二元运算为 $[,]$. 称 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子 Lie 代数，若 $\mathfrak{h}$ 对 $[,]$ 运算封闭.

设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数，对任意 $x\in\mathfrak{g}$, 考虑 $\mathfrak{g}$ 上线性变换 $\mathrm{ad}_x(y):=[x,y],\forall y\in\mathfrak{g}$. 则有线性映射

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}:\mathfrak{g}&\longrightarrow \mathrm{End}\mathfrak{g}\\ x&\longmapsto \mathrm{ad}_x\end{aligned}\tag{1.1}$$

满足 $\mathrm{ad}([x,y])=\mathrm{ad}_{[x,y]}=[\mathrm{ad}_x,\mathrm{ad}_y]=[\mathrm{ad}(x),\mathrm{ad}(y)]$. 于是 imad 是 $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 的 Lie 子代数. 这里 $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 有自然的 Lie 代数结构：

$$[\mathscr{A},\mathscr{B}]=\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A},\quad \forall\mathscr{A},\mathscr{B}\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}).$$

称

$$\ker \mathrm{ad} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\} \tag{1.2}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的中心，记为 $C(\mathfrak{g})$.

Lie 代数同态

定义 1.3. 设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 都是域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数，称 $\pi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 为 Lie 代数同态，若

$$\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

映射(1.1)即是一个 Lie 代数同态.

命题 1.1. 设 ρ 是 $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 的 Lie 代数同态，则

- $\mathrm{im}\rho$ 是 $\mathfrak{h}$ 的 Lie 子代数.
- $\ker \rho$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 子代数，并且满足：对任意 $x \in \ker \rho, y \in \mathfrak{g}$, 有 $[x, y] \in \ker \rho$.

证明. 对任意 $x \in \ker \rho, y \in \mathfrak{g}$, 有

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] = [0, \rho(y)] = 0.$$

■

理想与商代数

命题1.1告诉我们可以考虑商空间 $\mathfrak{g}/\ker \rho$, 有自然的线性同构：$g/\ker \rho \simeq \mathrm{im}\rho$, 于是我们可以把 $\mathrm{im}\rho$ 中的括积 $[,]$ 平移到 $g/\ker \rho$ 中：$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]}$, 使得 $\mathfrak{g}/\ker \rho$ 成为一个 Lie 代数，称为**商 Lie 代数**.

对于 $\mathfrak{g}$ 的任一子空间 $\mathfrak{a}$, 我们都可以定义商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, 但是否可以定义

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]} \tag{1.3}$$

使得 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是商 Lie 代数呢?

要确保这件事情，只需要保证(1.3)的定义是良定的，即不依赖于代表元的选取. 即保证:

$$\begin{cases} x - x_1 \in \mathfrak{a}, \\ y - y_1 \in \mathfrak{a} \end{cases} \Longrightarrow [x, y] - [x_1, y_1] \in \mathfrak{a}. \tag{1.4}$$

定义 1.4. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上 Lie 代数，称 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，若

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] := \mathrm{Span}\,\{[a, g] \mid \forall a \in \mathfrak{a}, g \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{a}. \tag{1.5}$$

记为 $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$.

若 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则易验证 $\mathfrak{a}$ 满足(1.4), 从而 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是一个商 Lie 代数.

正如正规子群就是同态核那样，Lie 代数的理想与同态核也有一一对应关系:

命题 1.2. $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想当且仅当 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的某个 Lie 代数同态的核.

证明. 必要性在命题1.1中已告知. 若 $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$, 则考虑自然投影映射:

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \\ g &\longmapsto \overline{g} \end{aligned}$$

则 π 是 Lie 代数同态，且同态核为 $\mathfrak{a}$. ∎

满足(1.5)性质的集合，我们曾经见过:

例 1.1. 设 W 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，满足对任意 $A \in W, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 有 $AB, BA \in W$ 则 $W = \{O\}$ 或者 $W = \mathbb{F}^{n\times n}$.

证明. 若 $W \neq \{O\}$, 则存在非零阵 $A = (a_{ij}) \in W$. 不妨设 $a_{11} \neq 0$. 则对任意 $1 \leq i, j \leq n$, 有

$$a_{11}E_{ij} = E_{i1}AE_{1j} = (E_{i1})(AE_{1j}) \in W,$$

于是

$$\mathbb{F}^{n\times n} = \mathrm{Span}\,\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \subset W.$$

故有 $W = \mathbb{F}^{n\times n}$. ∎

对于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 若有理想 $\mathfrak{a}$, 则有**短正合序列**

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \longrightarrow \{0\}$$

称 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 过 $\mathfrak{a}$ 的扩张. 如果存在 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$ 使得 $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$，则有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{h}$(子空间的直和)，称为 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{h}$ 的**半直和**. 若 $\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则称 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{h}$ 的**直和**.

导子代数

定义 1.5. 称

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \{\mathcal{D} \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid \mathcal{D}[x, y] = [\mathcal{D}x, y] + [x, \mathcal{D}y], \forall x, y \in \mathfrak{g}\}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的导子代数.

易验证对任意 $x \in \mathfrak{g}$，有 $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内导子**.

命题 1.3. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数，则 $\mathrm{ad}\mathfrak{g} = \{\mathrm{ad}_x \mid x \in \mathfrak{g}\}$ 是 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ 的理想，称为内导子代数.

证明. 对任意 $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{ad}\mathfrak{g}, \mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, 则

$$[\mathrm{ad}_x, \mathcal{D}](y) = [y, Dx] = \mathrm{ad}_{-\mathcal{D}x}(y), \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

于是 $[\mathrm{ad}_x, \mathcal{D}] = \mathrm{ad}_{-\mathcal{D}x} \in \mathrm{ad}\mathfrak{g}$. ■

合成序列

命题 1.4. 设 $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是自然同态，对任意理想 $\bar{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, 令 $\mathfrak{b} = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$, 则 $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$, 且 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

证明. 任意 $\pi^{-1}(\bar{b}) \in \mathfrak{b}, g \in \mathfrak{g}$, 有

$$\pi[\pi^{-1}(\bar{b}), g] = [\bar{b}, \bar{g}] \in \bar{\mathfrak{g}},$$

即 $[\pi^{-1}(\bar{b}), g] \in \mathfrak{b}$. ■

这就启发我们找 $\mathfrak{g}$ 的极大理想 $\mathfrak{g}_1$ 使得 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ 没有非平凡的理想. 因此我们有真理想序列

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \rhd \mathfrak{g}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{g}_k = \{0\} \tag{1.6}$$

使得 $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ 没有非平凡的理想, 称(1.6)为 $\mathfrak{g}$ 的**合成序列**.

1.2 可解 Lie 代数

定义 1.6. 设 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 满足

$$[x, y] = [y, x], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

则 $[x, y] = 0$, 此时称 $\mathfrak{g}$ 是可换的或者 Abel 的.

交换 Lie 代数的任何子空间都是理想，从而没有非平凡理想的交换 Lie 代数是一维的. 而一维的 Lie 代数自然都是同构的. 于是:

命题 1.5. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数，则下列说法等价:

- 存在 $\mathfrak{g}$ 的合成序列
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_0 \rhd \mathfrak{f}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{f}_m = \{0\},$$
使得 $\mathfrak{f}_i/\mathfrak{f}_{i+1}$ 都是一维 Lie 代数.

- 存在 $\mathfrak{g}$ 的合成列

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \rhd \mathfrak{g}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{g}_k = \{0\}\,, \tag{1.7}$$

 使得 $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1}$ 都是交换 Lie 代数.

称满足(1.7)的 $\mathfrak{g}$ 为**可解 Lie 代数**. 明显地，可换 Lie 代数是可解的.
称 $\mathfrak{g}$ 中所有**换位子** $[x,y]$ 线性张成的子空间

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] := \mathrm{Span}\,\{[x,y] \mid x,y \in \mathfrak{g}\}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的**导代数**. 明显 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

命题 1.6. 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 可交换当且仅当 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

证明. 设 $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是自然投影.

- 若 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 可换，则 $\pi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = [\pi(\mathfrak{g}),\pi(\mathfrak{g})] = 0$. 即 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.
- 若 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$, 则 $[\pi(\mathfrak{g}),\pi(\mathfrak{g})] = \pi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$. 即 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 可换.

■

令

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}], \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{1.8}$$

对任意 $x \in \mathfrak{g}, y,z \in \mathfrak{g}^{(1)}$, 由 Jacobi 恒等式有

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0,$$

即 $[[y,z],x] = [z,[x,y]] + [y,[z,x]] \in \mathfrak{g}^{(2)} + \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}^{(2)}$. 则

$$[\mathfrak{g}^{(2)},\mathfrak{g}] = [[\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(1)}],\mathfrak{g}] = \mathrm{Span}\left\{[[y,z],x] \mid x \in \mathfrak{g}, y,z \in \mathfrak{g}^{(1)}\right\} \subset \mathfrak{g}^{(2)},$$

即 $\mathfrak{g}^{(2)}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，进而由归纳假设有 $\mathfrak{g}^{(k)}$ 均是 $\mathfrak{g}$ 的理想，称为 $\mathfrak{g}$ 的**导出列**.

命题 1.7. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数，则 $\mathfrak{g}^{(k)}/\mathfrak{g}^{(k+1)}$ 是可换的.

证明. 注意 $[g^{(k)},g^{(k)}] = g^{(k+1)}$, 由命题1.6，$\mathfrak{g}^{(k)}/\mathfrak{g}^{(k+1)}$ 是可换的. ■

定理 1.8. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数，$\mathfrak{g}$ 可解当且仅当存在 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $g^{(m)} = \{0\}$.

证明. 若 $\mathfrak{g}$ 是可解的，则存在 $\mathfrak{g}$ 的合成序列

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0 \rhd \mathfrak{g}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{g}_k=\{0\},$$

使得 $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1}$ 都是交换 Lie 代数. 于是 $\mathfrak{g}^{(j)}\subset\mathfrak{g}_j$, 即 $\mathfrak{g}^{(k)}=\{0\}$.

若 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $\mathfrak{g}^{(m)}=\{0\}$. 不妨设 m 是最小的满足 $\mathfrak{g}^{(m)}=\{0\}$ 的整数. 即 $\mathfrak{g}^{(i+1)}\subsetneq\mathfrak{g}^{(i)},0\leq i\leq m-1.\mathfrak{g}$ 有交换导出序列

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{(0)} \rhd \mathfrak{g}^{(1)} \rhd \cdots \rhd \mathfrak{g}^{(m)}=\{0\} \tag{1.9}$$

若(1.9)即是 $\mathfrak{g}$ 的合成序列，则结论已证. 否则存在 $i(1\leq i\leq m)$ 是第一个使得 $\mathfrak{g}^{(i)}$ 不是 $\mathfrak{g}^{(i-1)}$ 的极大理想. 不妨设 $\mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{g}^{(i-1)}$ 的极大理想，则由命题1.6，$\mathfrak{g}^{(i-1)}/\mathfrak{h}_i$ 是交换的. 然后再考虑 $\mathfrak{h}_i$ 的导代数 $h_i^{(1)}=[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{h}_i]$,

♠ 若 $\mathfrak{h}_i^{(1)}$ 不是 $\mathfrak{h}_i$ 的极大理想，则取 $\mathfrak{h}_i$ 的极大理想记为 $\mathfrak{h}_{i+1}$, 否则记 $\mathfrak{h}_i^{(1)}$ 为 $\mathfrak{h}_{i+1}$.

重复上述取法过程，由于 $[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{h}_i]\subset[\mathfrak{g}^{(i-1)},\mathfrak{g}^{(i-1)}]$, 所以一定有 $[h_{m+1},h_{m+1}]=0$. 即按上述取法过程一定可以得到 $\mathfrak{g}$ 的合成序列

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}&=\mathfrak{g}^{(0)} \rhd \cdots \rhd \mathfrak{g}^{(i-1)} \rhd \mathfrak{h}_i \rhd \cdots \rhd \mathfrak{h}_k=\{0\}\\ &:=\mathfrak{g}_0 \rhd \mathfrak{g}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{g}_k=\{0\}\end{aligned}$$

使得 $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ 都是交换的. ■

推论 1.9. 设 $\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数，则 $\mathfrak{g}$ 的子代数和商代数都是可解的.

证明. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 任意子代数，则 $[\mathfrak{a}^{(k)},\mathfrak{a}^{(k)}]\subset[\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}]$, 进而由定理1.8，$\mathfrak{a}$ 是可解的. 对任意 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{a}$, 令 $\pi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{g}}$ 为自然 Lie 代数同态，记 $\mathfrak{g}^{(m)}=\{0\}$. 注意 $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}=[\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}]=\pi[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\pi(\mathfrak{g}^{(1)})$, 归纳有 $\bar{\mathfrak{g}}^{(m)}=\pi(\mathfrak{g}^{(m)})=\{\bar{o}\}$. ■

推论 1.10. 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则 $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $\mathfrak{a},\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 都是可解的.

证明. 必要性即是推论1.2. 下假设 $\mathfrak{a},\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 都是可解的,$\pi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是自然 Lie 代数同态，记 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(m)}=\{\bar{0}\}$. 则 $\pi(\mathfrak{g}^{(m)})=(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(m)}=\{\bar{0}\}$, 即 $\mathfrak{g}^{(m)}\subset\ker\pi=\mathfrak{a}$. 进而由 $\mathfrak{a}$ 可解，则 $\mathfrak{g}^{(m)}$ 可解，于是 $\mathfrak{g}$ 也可解. ■

(1.2)所定义的 $\mathfrak{g}$ 的中心 $C(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，且 $C(\mathfrak{g})$ 是可换的，自然是可解的. 于是

推论 1.11. $\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数当且仅当 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是可解的.

证明. 见推论1.2. ■

从而 Lie 代数的可解性判别归结为线性 Lie 代数情形. 我们只考虑复数域上的 Lie 代数. 我们需要处理所有的变换 $\mathrm{ad}_x, x \in \mathfrak{g}$. 我们想找到 $\mathfrak{g}$ 的一组基，使得 ad_x 在这组基下的表示阵为准对角或准上三角阵，这就要求去找 ad_x 公共不变子空间.

命题 1.12 (Lie 定理)**.** *设 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ 是可解子代数，则存在 $v_0 \in V$, 使得 v_0 是 $\mathfrak{g}$ 中所有元素的特征向量.*

证明. 对 $\mathfrak{g}$ 维数归纳.

- 若 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 明显 $\mathfrak{g}$ 中所有元有公共特征向量.
- 若 $\dim \mathfrak{g} = n$, 假设结论对维数小于 n 的可解子代数成立. 由 $\mathfrak{g}$ 可解，存在 $\mathfrak{g}$ 的极大理想 $\mathfrak{h}$, 使得 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是一维的可换代数. 即 $\dim \mathfrak{h} = n-1$. 任取 $z \notin \mathfrak{h}$, 则有半直和 $\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{z\} \dotplus \mathfrak{h}$. 由归纳假设，存在非零 $v \in V$ 使得 $x(v) = \lambda_x(v), \forall x \in \mathfrak{h}$. 即有

$$\begin{aligned} \lambda : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda_x \end{aligned}$$

  令 $W := \{v \in V \mid x(v) = \lambda(x)(v), \forall x \in \mathfrak{h}\}$, 则 $W \neq \{0\}$. 若能证明 W 是 $\mathfrak{g}-$ 不变的, 则 W 中存在 z 的特征向量 v_0, 进而是 $\mathfrak{g}$ 中所有元素的公共特征向量.

下面最重要的是证明 W 是 $\mathfrak{g}-$ 不变的. 对任意 $x \in \mathfrak{g}, v \in W$, 计算有

$$\begin{aligned} x(z(v)) &= (xz)(v) = (zx)(v) + [x,z](v) \\ &= \lambda(x)(z(v)) + \lambda([x,z])(v). \end{aligned}$$

于是只需证明 $\lambda([x,z]) = 0$. 考虑子空间序列 $\{W_i\}$

$$W_i := \mathrm{Span}\left\{v, z(v), \cdots, z^{i-1}(v)\right\},$$

则 W_i 是 $z-$ 不变的，且存在唯一 k 使得 $W_{k-1} \subsetneq W_k = W_{k+1}$. 断言 $x(z^{i-1}(v)) \in W_i$. 对 i 进行归纳，当 $i=1$ 时，$x(v) = \lambda(x)(v) \in W_1$. 假设结论对小于 i 情形成立. 即有 $x(z^{i-2})(v) \in W_{i-1}$, 则

$$\begin{aligned} x(z^{i-1}(v)) &= z^{i-1}(x(v)) + [x, z^{i-1}](v) \\ &= \lambda(x)(z^{i-1}(v)) + \lambda([x, z^{i-1}])(v) \in W_i + W_1 = W_i. \end{aligned}$$

于是假设对一般情形成立. 即 W_i 是 $x-$ 不变的. 同样归纳易证 $x(z^i(v)) \in \lambda(x)(z^i(v)) + W_i$, 即 $x|_{W_k}$ 在基 $\left\{v, z(v), \cdots, z^{k-1}(v)\right\}$ 下的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} \lambda(x) & & & \\ & \lambda(x) & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda(x) \end{pmatrix},$$

为对角元全为 $\lambda(x)$ 的上三角阵. 于是

$$0 = \mathrm{tr}([x,z]|_{W_k}) = \dim W_k \cdot \lambda([x,z]) = k \cdot \lambda([x,z])$$

即有 $\lambda([x,z]) = 0$. ■

定理 1.13. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个可解子代数，则存在子空间列

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots \subset V_n = V \tag{1.10}$$

使得 $\dim V_i = i$, 且 V_i 都是 $\mathfrak{g}-$ 不变的. 称 (1.10) 为 V 的一个旗.

证明. 对 V 的维数进行归纳. 当 $\dim V = 1$ 时，显然成立. 假设结论对维数小于 n 的可解 Lie 代数成立. 由命题1.9，存在 $\mathfrak{g}$ 的一维不变子空间 V_1. 考虑 V/V_1, 记 $\bar{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 对应的诱导变换全体, 则 $\bar{\mathfrak{g}}$ 是可解的，由归纳假设存在 V/V_1 的旗

$$\{\bar{0}\} = V_0' \subset V_1' \subset \cdots \subset V_{n-1}' = V/V_1$$

使得 $\dim V_i' = i$, 且 V_i' 是 $\bar{\mathfrak{g}}-$ 不变的. 考虑自然映射 $\pi : V \longrightarrow V/V_1$, 记 $V_{i+1} = \pi^{-1}(V_i')$ 是 V_i' 的原像. 易验证 $\{V_i\}$ 满足(1.10). ■

推论 1.14. 设 V 是有限维复线性空间，$\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个可解子代数，则存在 V 的一组基使得 $\mathfrak{g}$ 中所有元在这组基下的表示阵为上三角阵.

证明. 见定理1.10. ■

1.3 幂零 Lie 代数

例 1.2. 我们记 $\mathfrak{b}$ 为上三角矩阵全体构成的 Lie 代数. 不难验证 $\mathfrak{b}$ 是可解的,$[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$ 是严格上三角阵全体. 记 $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}, \mathfrak{n}^k = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{k-1}]$, 归纳易证 $\mathfrak{n}^k \subset \mathfrak{n}^{k-1}$, 即 $\mathfrak{n}^k$ 是 $\mathfrak{n}$ 的理想, 且 $\mathfrak{n}^n = \{0\}$.

称 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 的 **Borel 子代数**. 将上述概念推广一下: 对任意 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 称理想序列

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}], \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的**降中心列**. 若存在 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, 使得 $\mathfrak{g}^r = \{0\}$, 则称 $\mathfrak{g}$ 是**幂零的**. 满足 $\mathfrak{g}^r = \{0\}$ 的最小正整数称为 $\mathfrak{g}$ 的**幂零指数**.

命题 1.15. 设幂零 Lie 代数的幂零指数为 r, 则 $\mathfrak{g}^{r-1} \subset C(\mathfrak{g})$, 从而 $\mathfrak{g}$ 有非平凡的中心.

证明. 对任意 $x \in \mathfrak{g}^{r-1}$, 注意 $[\mathfrak{g}, x] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{r-1}] = \mathfrak{g}^r = \{0\}$, 于是 $x \in C(\mathfrak{g})$, 即 $\mathfrak{g}^{r-1} \subset C(\mathfrak{g})$. ■

易验证幂零 Lie 代数的子代数和商代数都是幂零的. 所以 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 也有非平凡的中心.

设 $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是自然同态，Z 是 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 的中心, 记 $C_2(\mathfrak{g}) = \pi^{-1}(Z)$, 则 $\pi[C_2(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] = [Z, \pi(\mathfrak{g})] = [Z, \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})] = \{\bar{0}\}$, 即 $[C_2(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] \subset C(\mathfrak{g}) \subset C_2(\mathfrak{g})$, 于是 $C_2(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 重复此过程:

令 $\pi_k : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/C_k(\mathfrak{g})$ 的自然同态, 记 Z_k 是 $\mathfrak{g}/C_k(\mathfrak{g})$ 的中心, 令 $C_{k+1}(\mathfrak{g}) = \pi_k^{-1}(Z_k)$, 则有理想序列:

$$\{0\} = C_0(\mathfrak{g}) \subset C_1(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset C_m(\mathfrak{g}) \subset \cdots$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的**升中心列**.

如果 $\mathfrak{g}$ 是有限维的, 这个序列有限步之后会停止, 即存在 m 使得 $C_{m+1}(\mathfrak{g}) = C_m(\mathfrak{g})$. 于是

命题 1.16. *$\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数当且仅当存在 m 使得 $C_m(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.*

证明. 若 $\mathfrak{g}$ 幂零，设 m 是满足 $C_m(\mathfrak{g}) = C_{m+1}(\mathfrak{g})$ 的最小整数, 即 $\mathfrak{g}/C_m(\mathfrak{g})$ 的中心 $Z_m = \{\bar{0}\}$. 由命题1.11, 只能是 $\mathfrak{g}/C_m(\mathfrak{g}) = \{\bar{0}\}$, 即 $C_m(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

反之, 若有 $C_m(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. 注意 $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, C_m(\mathfrak{g})]$, 而 $\pi_{m-1}[\mathfrak{g}, C_m(\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}/C_{m-1}(\mathfrak{g}), Z_{m-1}] = \{\bar{0}\}$, 于是 $\mathfrak{g}^2 \subset \ker \pi_{m-1} = C_{m-1}(\mathfrak{g})$. 进一步归纳有 $\mathfrak{g}^{k+1} \subseteq C_{m-k}(\mathfrak{g})$. 于是 $\mathfrak{g}^{m+1} \subseteq C_0(\mathfrak{g}) = \{0\}$, 即 $\mathfrak{g}$ 幂零. ∎

由于 $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{k+1}$, 于是幂零代数都是可解代数. 但是幂零代数的扩张不一定是幂零代数，这一点和可解代数不同. 但是可以加强下条件:

命题 1.17. *$\mathfrak{g}$ 是幂零代数当且仅当 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是幂零的, 即幂零代数的中心扩张是幂零的.*

证明. 若 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是幂零的，设 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 的幂零指数为 r. 让 $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是自然同态，归纳易证 $\bar{\mathfrak{g}}^k = \pi(\mathfrak{g}^k)$, 于是 $\mathfrak{g}^m \subseteq \ker \pi = C(\mathfrak{g})$. 进而 $\mathfrak{g}^{m+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^m] \subseteq [\mathfrak{g}, C(\mathfrak{g})] = 0$, 即 $\mathfrak{g}$ 幂零. ∎

无论是可解 Lie 代数还是幂零 Lie 代数，由于 $\mathrm{ad}\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$, 最终我们都转向研究 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的性质.

引理 1.18. *设 $\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数，则对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 则 ad_x 是幂零线性变换，即 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是由幂零元组成的.*

证明. 设 $\mathfrak{g}^{k+1} = \{0\}$. 则对任意 $x_1, \cdots, x_k \in \mathfrak{g}$, 有 $\mathrm{ad}_{x_1} \cdots \mathrm{ad}_{x_k} = 0$. 特别地，对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 有 $(\mathrm{ad}_x)^k = 0$, 即 ad_x 幂零. ∎

反之，设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，如果 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数 $\mathfrak{g}$ 是由幂零元构成的，则这样的 Lie 代数也是幂零的，这就是 Engel 定理.

引理 1.19. 如果 $\mathfrak{g}$ 的真子代数 $\mathfrak{h}$ 称为是 $\mathfrak{g}$ 的极大子代数，如果包含 $\mathfrak{h}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的子代数只有 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}$. 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大真子代数，且 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则必有 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$.

证明. 若 $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$, 则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 存在一维真子代数 $\bar{\mathfrak{l}}$. 让 $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是自然同态，则 $\mathfrak{l} = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{l}})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数满足 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{l} \subsetneq \mathfrak{g}$, 这与 $\mathfrak{h}$ 的取法矛盾. ■

引理 1.20. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个子代数，满足 $\mathfrak{g}$ 中元都是幂零元，则存在 $\mathfrak{g}$ 中所有元的非零公共特征向量.

证明. 对 $\mathfrak{g}$ 的维数进行归纳. 当 $\dim \mathfrak{g} = 0, 1$ 时，结论明显成立. 现假设结论对于维数小于 $n \geq 2$ 的情形成立. 设 $\dim \mathfrak{g} = n$. 取 $\mathfrak{g}$ 的非零真子代数 $\mathfrak{a}$, 则对任意 $x \in \mathfrak{a}, \mathrm{ad}_x$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的幂零变换, 故将 ad_x 限制在 $\mathfrak{g}$ 上也是幂零变换. 又因为 ad_x 是 $\mathfrak{a}-$ 不变的，所以 ad_x 可以在商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 上诱导一个线性变换 $\overline{\mathrm{ad}_x}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{ad}_x} : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \\ y + \mathfrak{a} &\longmapsto \mathrm{ad}_x(y) + \mathfrak{a} \end{aligned}$$

也是幂零变换. 因此有

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{a} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \\ x &\longmapsto \overline{\mathrm{ad}_x} \end{aligned}$$

易验证 φ 是 Lie 代数同态, 则 $\varphi(\mathfrak{a}) = \left\{\overline{\mathrm{ad}_x} \mid x \in \mathfrak{a}\right\}$ 构成 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ 的子代数, 且由维数公式 $\dim \varphi(\mathfrak{a}) \leq \dim \mathfrak{a} < \dim \mathfrak{g}$. 所以由归纳假设存在 $x+\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}(x \notin \mathfrak{a})$, 满足对任意 $y \in \mathfrak{a}$ 有 $\overline{\mathrm{ad}_y}(x + \mathfrak{a}) = \{\bar{0}\}$, 即 $\mathrm{ad}_y(x) = [y, x] \in \mathfrak{a}$. 这说明 $\mathfrak{a} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}\}$. 现在取 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大真子代数，由于 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，则一定有 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, 即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 由引理1.15，$\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$, 即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 $n-1$ 维理想.(找出 $n-1$ 维理想).

任取 $z \notin \mathfrak{h}$, 有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathrm{Span}\{z\}$. 由归纳假设 $\mathfrak{h}$ 中所有元有公共特征向量，即 V 子空间

$$W = \{v \in V \mid x(v) = 0, \forall x \in \mathfrak{h}\}$$

中包含非零元. 现在我们要说明 W 是 $z-$ 不变的. 任取 $v \in W, x \in \mathfrak{h}$, 由于 $[x, z] \in \mathfrak{h}$, 则

$$x(z(v)) = [x, z](v) + z(x(v)) = [x, z](v) = 0.$$

即 $z(v) \in W$, 于是 W 是 $z-$ 不变的. 进一步 W 中存在 z 的非零特征量 v_0，进而 v_0 是 $\mathfrak{h}$ 中所有元的公共特征向量. ■

推论 1.21. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数，满足其中元素都是幂零的, 则存在子空间列

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots \subset V_n = V \tag{1.11}$$

使得 $\dim V_i = i$, 且 V_i 都是 $\mathfrak{g}-$ 不变的.

证明. 同定理1.10. ■

推论 1.22. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数，满足其中元素都是幂零的, 则存在 V 的一组基使得 $\mathfrak{g}$ 中元同时严格上三角化, 进而 $\mathfrak{g}$ 是幂零的.

证明. 由推论1.3,$\mathfrak{g}$ 中元可同时上三角化，又因为 $\mathfrak{g}$ 中元素特征值全为零，故可同时严格上三角化. ■

于是我们得到

定理 1.23 (Engel 定理). $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 幂零当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是 ad-幂零的, 即 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 中元都是幂零的.

若 $\mathfrak{g}$ 是可解的,Lie 定理告诉我们 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 同构于 $\mathfrak{b}$ 的子代数，而 $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]=\mathfrak{n}$ 是严格上三角阵全体，自然是幂零的，于是 $[\mathrm{ad}\mathfrak{g},\mathrm{ad}\mathfrak{g}]$ 同构于 $\mathfrak{n}$ 的子代数也是幂零的, 即 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 也是幂零的. 由此不难得到

命题 1.24. 设 $\mathfrak{g}$ 是代数闭域上的 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 是可解的当且仅当 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是幂零的.

一个简单的事实是，若 x,y,z 都是上三角阵，则 $[x,y],[x,y]z$ 都是严格上三角阵. 于是:

例 1.3. 若 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的可解子代数，则对任意 $x,y,z\in\mathfrak{g}$, 有 $[x,y],[x,y]z$ 都是幂零元，从而

$$\mathrm{tr}([x,y]z)=0,\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

或者

$$\mathrm{tr}(xy)=0,\quad \forall x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],y\in\mathfrak{g}.$$

这是 $\mathfrak{g}$ 可解的必要条件，神奇的是这个条件也是充分的，这就是 **Cartan 准则**.

引理 1.25. 设 $\mathbb{F}$ 为特征为零的代数闭域，V 为 $\mathbb{F}$ 上线性空间，$M_1\subseteq M_2$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$ 的两个线性子空间，定义 $W=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid [x,M_2]\subseteq M_1\}$. 又设 $x\in W$ 满足条件 $\mathrm{tr}(xy)=0,\forall y\in W$. 则 x 是幂零线性变换.

证明. 我们将证明分为几步:

- 因为 $\mathbb{F}$ 是特征为零的代数闭域，从而可以看成 $\mathbb{Q}$ 上的扩域，因此 $\mathbb{F}$ 可以看成 $\mathbb{Q}$-线性空间. 所以 x 是幂零变换当且仅当 x 的特征值全为零. 不妨设 x 的特征值为 $a_1,\cdots,a_n,E$ 为 $\mathbb{F}$ 的由 $a_1,\cdots,a_n$ 线性张成的 $\mathbb{Q}$-线性子空间. 下面我们要证明 $E=0$, 为此只需证明 $\mathrm{Hom}(E,\mathbb{Q})=0$.

- 由 Jordan 标准型理论, 存在 V 的一组基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 使得 x 在这组基下的表示阵为上三角阵，且对角元为 $a_1,\cdots,a_n$. 对任意 $f\in\mathrm{Hom}(E,\mathbb{Q})$，定义 V 上的线性变

换 y 使得 y 在这组基下的表示阵为 $A = \operatorname{diag}\{f(a_1), \cdots, f(a_n)\}$ 取定 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一组基 e_{ij} 使得 e_{ij} 在 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的表示阵为 E_{ij} 是基础矩阵. 则 ad_y 在 $\mathfrak{gl}(V)$ 的基 e_{ij} 下的表示阵为 $A \otimes I_n - I_n \otimes A$ 为对角阵且对角元为 $f(a_i) - f(a_j), 1 \leq i, j \leq n$.

- 由 Lagrange 插值公式，存在常数项为零的 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $g(x)$ 使得 $g(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$.

- 设 $x = x_s + x_n$ 为 x 的 Jordan-Chevalley 分解，则我们有 $g(\mathrm{ad}_{x_s}) = \mathrm{ad}_y$，$\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$，且 ad_{x_s} 可以写成 ad_x 的多项式，所以 ad_y 也可以写成 ad_x 的多项式. 所以一定有 $[y, M_2] = \mathrm{ad}_y(M_2) \subseteq M_1$，即 $y \in W$.

- 计算此时 $\mathrm{tr}(xy) = \sum_{i=1}^n f(a_i)a_i = 0$. 两边作用 f 得 $\sum_{i=1}^n f^2(a_i) = 0$. 因此由 $f(a_i)$ 为有理数得 $f(a_i) = 0$. 所以 $f = 0$.

■

定理 1.26 (Cartan 准则)**.** 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数，满足

$$\mathrm{tr}(xy) = 0, \quad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}. \tag{1.12}$$

则 $\mathfrak{g}$ 是可解的.

证明. 在引理1.19中，令 $M_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq M_2 = \mathfrak{g}, W = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, M_2] \subseteq M_1\}$，明显地 $M_2 \subseteq W$. 对任意 $x, y \in \mathfrak{g}, z \in W$ 有 $[y, z] \in M_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. 由(1.12)，

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}([x, y]z) &= \mathrm{tr}(xyz - yxz) = \mathrm{tr}(xyz - xzy) \\ &= \mathrm{tr}(x[y, z]) = 0 \end{aligned}$$

所以 $[x, y]$ 是幂零变换，由 Engel 定理，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是幂零的，即 $\mathfrak{g}$ 是可解的. ■

这样我们就得到:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}\text{可解} \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{ad}\mathfrak{g}\text{可解} \arrow[r, Leftrightarrow, "Lie\text{定理}"] \arrow[d, Leftrightarrow] & {[\mathrm{ad}\mathfrak{g}, \mathrm{ad}\mathfrak{g}]}\text{幂零} \arrow[d, Leftrightarrow, "Engel\text{定理}"] \\
 & \mathrm{tr}([\mathrm{ad}\mathfrak{g}, \mathrm{ad}\mathfrak{g}]\mathrm{ad}\mathfrak{g}) = 0 \arrow[r, Leftrightarrow, "Cartan\text{准则}"] & {[\mathrm{ad}\mathfrak{g}, \mathrm{ad}\mathfrak{g}]}\text{是由幂零变换构成}
\end{tikzcd}$$

1.4 半单与单 Lie 代数

我们知道 tr 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上最重要的线性函数，它与矩阵乘法结合就定义了对称双线性函数 $\mathrm{tr}(XY)$, 这个简单的二元函数具有很强的能量.

例 1.4. 设 $B(X,Y)$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的对称双线性函数，满足结合性：

$$B(XY,Z)=B(X,YZ),\quad \forall X,Y,Z\in\mathbb{F}^{n\times n}.$$

则存在 $c\in\mathbb{F}$, 使得 $B(X,Y)=c\mathrm{tr}(X,Y)$.

证明. 由 tr 的非退化性，映射

$$\begin{aligned}\sigma:\mathbb{C}^{n\times n} &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n\times n},\mathbb{C})\\ X &\longmapsto \mathrm{Tr}_x\end{aligned}\tag{1.13}$$

是线性同构，这里 Tr_x 定义为 $\mathrm{Tr}_x(A):=\mathrm{tr}(XA),\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 注意对任意固定 $X\in\mathbb{F}^{n\times n}$,$B(X,\cdot)$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性函数. 利用(1.13)定义的线性同构 σ, 存在 $D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $\sigma(D)=B(X,\cdot)$, 即 $B(X,Y)=\mathrm{tr}(DY)$. 则有线性映射

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{F}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{F}^{n\times n}\\ X &\longmapsto D\end{aligned}$$

于是有

$$B(X,Y)=B(I,XY)=\mathrm{tr}(\varphi(X)Y)=\mathrm{tr}(\varphi(XY))=\mathrm{tr}(X\varphi(Y)).\tag{1.14}$$

任意取定 $X,Y\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 对任意 $Z\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 由 (1.14) 有

$$B(XY,Z)=\mathrm{tr}(\varphi(XY)Z)=B(X,YZ)=\mathrm{tr}(\varphi(X)YZ).$$

即 $\mathrm{tr}[(\varphi(XY)-\varphi(X)Y)Z]=0$, 从而只能是 $\varphi(XY)=\varphi(X)Y$. 特别令 $X=I_n$, 有 $\varphi(Y)=\varphi(I)Y$. 于是对任意 $Y\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 有

$$Y\varphi(I)=\varphi(Y\cdot I)=\varphi(Y)=\varphi(I)Y,$$

即 $\varphi(I)$ 与 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中所有元都可换，即 $\varphi(I)=cI$ 为数乘矩阵. 从而 φ 是数乘变换，于是

$$B(X,Y)=\mathrm{tr}(\varphi(X)Y)=\mathrm{tr}(cXY)=c\mathrm{tr}(XY).$$

即 $B(X,Y)=c\mathrm{tr}(X,Y)$. ■

对于一般有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 前面经验告诉我们应该考虑映射：

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}:\mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}\mathfrak{g}\\ x &\longmapsto \mathrm{ad}_x\end{aligned}$$

这样有对称双线性函数

$$K(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)$$

这就是 **Killing 型**，是研究 Lie 代数的利器，其中原因之一是如下的性质：

例 1.5. 设 $x, y, z \in \mathfrak{g}$, 则
$$K([x, y], z) = K(x, [y, z]).$$

Engel 定理告诉我们

例 1.6. 若 $\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数，则
$$K(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

不过上述逆命题不一定成立.Cartan 准则告诉我们

例 1.7. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数，若
$$K(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g},$$
则 $\mathfrak{g}$ 是可解的.

这样就有

$$\text{幂零 Lie 代数全体} \twoheadrightarrow \text{Killing 型为0} \twoheadrightarrow \text{可解 Lie 代数全体}$$

设 $\mathfrak{g}$ 是可解 Lie 代数，$\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 则
$$\mathfrak{n} \subseteq \mathrm{Rad}K = \{x \in \mathfrak{g} \mid K(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Rad$K$ 有良好的性质:

命题 1.27. Rad$K$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

证明. 对任意 $x \in \mathrm{Rad}K, y, z \in \mathfrak{g}$ 有 $K([x, y], z) = K(x, [y, z]) = 0$, 即 $[x, y] \in \mathrm{Rad}K$, 于是 Rad$K$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. ■

我们知道 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型限制在 Rad$K$ 上为零, 但关键是 Rad$K$ 的 Killing 型是什么:

命题 1.28. 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，$\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ 的 Killing 型分别是 $K, K_{\mathfrak{a}}$, 记 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{a}$ 上的限制为 $K|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$, 则
$$K|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a}}.$$

证明. 取 $\mathfrak{a}$ 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_k\}$, 并将其扩张为 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$. 则对任意 $x \in \mathfrak{a}$, 由于 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则 ad_x 矩阵形如
$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 A_1 就是 ad_x 在 $\mathfrak{a}$ 的基 $\{e_1,\cdots,e_k\}$ 下的矩阵. 于是

$$\begin{aligned} K|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}(x,y) &= \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & O \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}\right] = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{tr}(A_1B_1) = K_{\mathfrak{a}}(x,y) \end{aligned}$$

这就证明了 $K|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a}}$. ■

由此我们得到

命题 1.29. $\mathrm{Rad}K$ 的 Killing 型恒等于零, 故 $\mathrm{Rad}K$ 是可解的.

于是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}K$ 上有一个自然的诱导 $\overline{K}:\overline{K}(\overline{x},\overline{y}) = K(x,y)$, 它是非退化的. 但是 $\overline{K}$ 一般不是 $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}K$ 的 Killing 型.

当 $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}K$ 的 Killing 型是退化的，则其根基理想 $\overline{\mathfrak{r}}$ 非零. 考虑自然同态 $\pi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}K$, 令 $\mathfrak{r}_1 = \pi^{-1}(\overline{\mathfrak{r}})$ 为 $\overline{\mathfrak{r}}$ 的原像，则由 $\pi[\mathfrak{g},\mathfrak{r}_1] = [\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}K,\overline{\mathfrak{r}}]\subseteq\overline{\mathfrak{r}}$, 于是 $[\mathfrak{g},\mathfrak{r}_1]\subseteq\mathfrak{r}_1$, 即 $\mathfrak{r}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 且 $\mathfrak{r}_1$ 是 $\overline{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_1/\mathrm{Rad}K$ 过 $\mathrm{Rad}K$ 的扩张，即 $\mathfrak{r}_1$ 是可解的. 这样做下去就有 $\mathfrak{g}$ 的理想升链

$$\mathrm{Rad}K = \mathfrak{r}_0\subseteq\mathfrak{r}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{r}_k$$

其中 $\mathfrak{r}_i$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想. 这样我们就能找到 $\mathfrak{g}$ 的一个可解理想 $\mathfrak{r}_k$, 使得 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}_k$ 的根基理想为 $\{\overline{0}\}$, 换句话说 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}_k$ 的 Killing 型非退化.

命题 1.30. 设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个可解理想, 则 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想.

证明. 明显 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 是理想. 由于 $\mathfrak{a}$ 是可解理想，只需证明 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ 是可解的. 由同构定理 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}\simeq\mathfrak{b}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$, 而 $\mathfrak{b}$ 可解，其商代数自然也可解. ■

这样我们就能找到 $\mathfrak{g}$ 的一个唯一最大可解理想 $\mathfrak{r}$, 即 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 没有非零的可解理想，于是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的 Killing 型是非退化的. 称 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**根基**.

设 $\mathfrak{g}$ 的根基 $\mathfrak{r}$ 非零. 若 $\mathfrak{r}$ 是幂零的，则 $\mathfrak{r}\subseteq\mathrm{Rad}K$. 若 $\mathfrak{r}$ 是可解非幂零的，则 $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]$ 非零且是幂零的，即 $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]\subseteq\mathrm{Rad}K$. 于是我们有

命题 1.31. 若 $\mathfrak{g}$ 有非零根基，则 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是退化的.

命题 1.32. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数，则下列命题等价:

(1) $\mathfrak{g}$ 的根基为零.

(2) $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化，即 $\mathrm{Rad}K = \{0\}$.

(3) $\mathfrak{g}$ 没有非零幂零理想.

(4) $\mathfrak{g}$ 没有非零交换理想.

证明. (4)$\Longrightarrow$(1). 反证. 若 $\mathfrak{g}$ 的根基非零，则 $\mathfrak{h}=\mathrm{Rad}K$ 非零. 由 Jacobi 恒等式易得 $\mathfrak{h}^{(1)}=[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，进而归纳可证 $\mathfrak{h}^{(k)}$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 由 $\mathfrak{h}$ 可解，于是存在 i 满足 $\mathfrak{h}^{(i-1)}\neq\{0\}, h^{(i)}=\{0\}$, 则 $\mathfrak{h}^{(i-1)}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非零交换理想，矛盾. ■

称满足上述条件的 Lie 代数称为**半单 Lie 代数**.

命题 1.33. 任何非可解 Lie 代数都是一个可解 Lie 代数和一个半单 Lie 代数的扩张.

证明. 考虑 $\mathfrak{g}$ 的最大可解理想 $\mathfrak{r}$, 则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的. ■

由此一般 Lie 代数研究转化为了对可解 Lie 代数和半单 Lie 代数的研究.

命题 1.34. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数，$\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 则

$$\mathfrak{a}^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}\mid K(x,y)=0,\forall y\in\mathfrak{a}\}$$

也是 $\mathfrak{g}$ 的理想，从而 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

证明. 对任意 $g\in\mathfrak{g},x\in\mathfrak{a}^{\perp},y\in\mathfrak{a}$, 由 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想有

$$K([x,g],y)=K(x,[g,y])=0,$$

即 $[x,g]\in\mathfrak{a}^{\perp}$, 于是 $\mathfrak{a}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. ■

由命题1.22，$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}$ 的 Killing 型等于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型限制在 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}$ 上，从而 $K_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}}\equiv 0$，即 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想，于是若 $\mathfrak{g}$ 是半单的，则 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}=\{0\}$. 因此有

命题 1.35. 设 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数，$\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则 $\mathfrak{a}$ 也是半单 Lie 代数.

证明. 注意 $\mathrm{Rad}K_{\mathfrak{a}}=\mathrm{Rad}K|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}=\{0\}$, 则 $\mathfrak{a}$ 也是半单的. ■

进一步，对任意 $x\in\mathfrak{g}$, 定义 $\mathfrak{a}$ 上的线性函数 $f_x: f_x(y)=K(x,y),\forall y\in\mathfrak{a}$. 则有线性映射

$$\begin{aligned}\varphi:\mathfrak{g}&\longrightarrow\mathfrak{a}^*\\ x&\longmapsto f_x\end{aligned}$$

则由 $K_{\mathfrak{a}}$ 非退化，$\varphi|_{\mathfrak{a}}$ 上是单射, 从而是线性同构. 于是对任意 $f\in\mathfrak{a}^*$, 存在 $x\in\mathfrak{a}$, 使得 $f=\varphi(x)$, 即 φ 是满射. 由维数公式

$$\dim\mathfrak{g}=\dim\ker\varphi+\dim\mathrm{im}\varphi=\dim\mathfrak{a}^{\perp}+\dim\mathfrak{a}^*=\dim\mathfrak{a}^{\perp}+\dim\mathfrak{a}.$$

即有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^{\perp}$. 这样做下去，则有

定理 1.36. 任意半单 Lie 代数都可以分解为单理想直和，且若不计次序，分解是唯一的. 这里单理想指的是没有非平凡理想.

证明. 下面说明分解的唯一性. 设 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^{k}\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个单理想直和分解. 现在设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个最小的非零理想（不能分解为更小的理想直和，即按前面 $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^{\perp}$ 不断分解得到的），则 $\mathfrak{h}$ 是半单的，且没有非平凡理想, 从而是单理想. 注意 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{h}$ 的理想，且 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]\neq\{0\}$(否则 $\mathfrak{h}\subseteq C(\mathfrak{g})=\{0\}$), 于是有 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]=\mathfrak{h}$. 而 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]=\sum_{i=1}^{k}[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_i]$,$[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_i]$ 也是 $\mathfrak{h}$ 的理想，因此一定存在 j 使得 $\mathfrak{h}=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_j]$, 且 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_l]=0(l\neq j)$. 但 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_j]\subseteq\mathfrak{g}_j$, 从而 $\mathfrak{h}=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_j]=\mathfrak{g}_j$. ■

定义 1.7. 我们称 $\mathfrak{g}$ 是单 **Lie** 代数，如果 $\mathfrak{g}$ 没有非平凡理想，且 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\neq\{0\}$.

命题 1.37. 单 Lie 代数一定是半单 Lie 代数

证明. 若 $\mathrm{Rad}K\neq\{0\}$, 则 $\mathrm{Rad}K=\mathfrak{g}$, 即 $\mathfrak{g}$ 可解. 从而 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个真理想，矛盾. ■

$$\text{一般有限维 Lie 代数}\mathfrak{g}\ \xlongequal[\simeq\text{子代数半直积}]{\textit{Levi}\text{分解}}\ \mathfrak{s}\ltimes\mathfrak{r}(\mathfrak{s}\text{半单},\mathfrak{r}\text{可解})\ \xrightarrow{\text{单理想直和}}\ \left(\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{s}_i\right)\ltimes\mathfrak{r}(\mathfrak{s}_i\text{单})$$

这样对一般 Lie 代数的研究最终划为对单 Lie 代数和可解 Lie 代数的研究.

现在我们考虑半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的导子，由于 $C(\mathfrak{g})=\{0\}$, 所以 $\mathfrak{g}$ 的诱导变换 ad 是同构, 即 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 也是半单的，因此其 Killing 型也是非退化的. 由于 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想，所以 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 K_1 就是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 K_2 在 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}\times\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 上的限制 (命题1.22). 现在考虑 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的正交补

$$\mathfrak{t}:=\{\delta\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}\mid B_2(\delta,\mathrm{ad}_x)=0,\forall x\in\mathfrak{g}\},$$

自然 $\mathfrak{t}$ 也是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想 (命题1.28). 于是 $[\mathfrak{t},\mathrm{ad}\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{t}\cap\mathrm{ad}\mathfrak{g}=\{0\}$. 特别的，对任意 $\delta\in\mathfrak{t},x\in\mathfrak{g}$, 有 $[\delta,x]=\mathrm{ad}(\delta(x))=0$, 即 $\delta(x)\in C(\mathfrak{g})$, 从而 $\delta(x)=0$, 即 $\delta=0$. 于是有

定理 1.38. 半单 Lie 代数的导子等于内导子.

我们将导子等于内导子且中心平凡的 Lie 代数称为**完备 Lie 代数**.

命题 1.39. 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的完备理想，则有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

证明. 对任意 $x\in\mathfrak{h}\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, 有 $x\in C(\mathfrak{h})=\{0\}$, 即 $\mathfrak{h}\oplus C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. 现在任取 $g\in\mathfrak{g}$, 由于 $\mathrm{ad}_g(\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{h}$, 所以 ad_g 也是 $\mathfrak{h}$ 上的导子, 于是由 $\mathfrak{h}$ 完备，存在 $k\in\mathfrak{h}$ 使得对任意 $h\in\mathfrak{h}$ 有 $[g,h]=[k,h]$. 这意味着 $g-k\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, 即 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. ■

由于 $[\mathfrak{h},C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})]=0$, 这样对于 $\mathfrak{h},C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ 的 Lie 代数同构，就可以自然诱导出 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 代数同构.

1.5 三维 Lie 代数进行分类

一维 Lie 代数是交换的. 二维 Lie 代数若非交换，由开始时的讨论，存在一组基 x, y 使得 $[x, y] = y$, 从而是可解的，即二维非交换 Lie 代数在同构意义下是唯一的.

命题 1.40. 二维非交换 Lie 代数是完备的.

证明. 设 $\mathfrak{g}$ 是二维非交换 Lie 代数，则存在 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{x, y\}$ 使得 $[x, y] = x$, 即 $\mathfrak{g}^{(1)} = \operatorname{Span}\{x\}$. 简单验证有 $C(\mathfrak{g}) = \{0\}$. 任取 $\mathcal{D} \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$, 由导子的定义有 $\mathcal{D}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 即有 $\mathcal{D}(x) = \lambda x$. 则 $(\mathcal{D} - \operatorname{ad}_{\lambda y})(x) = 0$. 记 $E = D - \operatorname{ad}_{\lambda y}$, 为此只需证明 E 是内导子即可. 注意

$$[x, E(y)] = E([x, y]) - [E(x), y] = E(x) - [0, y] = 0.$$

这意味着 $E(y) = \mu x$. 注意 $\operatorname{ad}_{\mu x}(y) = [\mu x, y] = \mu x$, 且 $\operatorname{ad}_{\mu x}(x) = 0$, 于是 $E = \operatorname{ad}_{\mu x}$ 为内导子. ■

若 X 为 $\mathfrak{g}$ 的非空子集，定义

$$C_{\mathfrak{g}}(X) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in X\},$$

为 X 在 $\mathfrak{g}$ 的**中心化子**. 易验证 $C_{\mathfrak{g}}(X)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 特别地，若 X 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则 $C_{\mathfrak{g}}(X)$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

例 1.8. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}), (n \geq 2)$ 是单 Lie 代数.

证明. 由问题??，$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = [\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})]$, 则有直和分解

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) \oplus \operatorname{Span}\{I_n\}.$$

这里 $\operatorname{Span}\{I_n\}$ 是 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 的中心. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ 的一个非零理想, 则 $\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 的理想. 设 $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ 为基础矩阵组.

- 若 $\mathfrak{h}$ 中包含某个 $e_{ij} (i \neq j)$. 注意

  $$[e_{ij}, e_{kl}] = e_{ij}e_{kl} - e_{kl}e_{ij} = e_{il} \in \mathfrak{h},$$

  这里 $i \neq l, k = j$. 重复作用可以得到 $\mathfrak{h}$ 中包含所有 $e_{ij} (i \neq j)$. 另外

  $$[e_{ij}, e_{ji}] = e_{ii} - e_{jj} \in \mathfrak{h}, \quad i \neq j.$$

  从而只能是 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$.

- 若 $\mathfrak{h}$ 中包含非零对角阵 $x = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}e_{ii}$, 则存在 $a_{ii} \neq a_{jj} \neq 0, i \neq j$.

  $$[x, e_{ij}] = a_{ii}e_{ij} - a_{jj}e_{ij} = (a_{ii} - a_{jj})e_{ij} \in \mathfrak{h},$$

  即 $e_{ij} \in \mathfrak{h}$.

- 对一般情形，设 $x=\sum_{i,j}a_{ij}e_{ij}\in\mathfrak{h}$ 非零，不妨设存在 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$, 否则 x 是对角阵. 则

$$[x,e_{ii}]=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_{ki}-\sum_{l=1}^{n}a_{il}e_{il}\in\mathfrak{h},$$
$$[[x,e_{ii}],e_{jj}]=-a_{ij}e_{ij}-a_{ji}e_{ji}\in\mathfrak{h},$$
$$[xe_{ii}+e_{ii}x,e_{jj}]=a_{ij}e_{ij}-a_{ji}e_{ji}\in\mathfrak{h}$$

于是 $2a_{ij}e_{ij}\in\mathfrak{h}$.

■

命题 1.41. 三维 Lie 代数是可解的或者单的.

证明. 设 $\mathfrak{g}$ 是任一 3 维 Lie 代数. 设 $\{x,y,z\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基.

- 若 $\dim\mathfrak{g}^{(1)}<3$, 则由前面讨论 $\mathfrak{g}^{(1)}$ 可解，自然 $\mathfrak{g}$ 也是可解的.

- 若 $\dim\mathfrak{g}^{(1)}=3$, 则 $\{[x,y],[x,z],[y,z]\}$ 线性无关也构成 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 因此 $\mathfrak{g}$ 中任何非零元 g,我们都可以将其扩张为 $\mathfrak{g}$ 的一组基,从而 $\ker\mathrm{ad}_g=\mathrm{Span}\{g\}$, $\dim\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_g=2$. 而由 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, 有

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_g)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{[a,b]})=\mathrm{tr}([\mathrm{ad}_a,\mathrm{ad}_b])=0.$$

(i) 当 $\ker\mathrm{ad}_g\subseteq\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_g$ 时，ad_g 的特征值只能都是零，即 ad_g 是幂零变换. 于是 ad_g 的 Jordan 型为 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 即存在 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{g,h,l\}$ 使得 $[g,h]=g,[g,l]=h$. 则 $\mathrm{ad}_h(g)=-g$. 于是 ad_h 的特征值为 $-1,0,1$. 令 $H=2h$, 取 ad_H 的特征向量 X,Y 使得 $[H,X]=2X,[H,Y]=-2Y$. 此时

$$[H,[X,Y]]=[[Y,H],X]+[[H,X],Y]=[2Y,X]+[2X,Y]=0,$$

这意味着 $[X,Y]=\lambda H,(\lambda\neq 0)$. 因此我们可以适当调整 X,Y 的系数使得

$$[H,X]=2X,\quad [H,Y]=-2Y,\quad [X,Y]=H.$$

取 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ 的一组基

$$H^*=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad X^*=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad Y^*=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

简单计算有 $[H^*,X^*]=2X^*,[H^*,Y^*]=-2Y^*,[X^*,Y^*]=H^*$. 这样就实现了 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ 的 Lie 代数同构:

$$\sigma:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$$
$$H\longmapsto H^*$$

(ii) 若 ad_g 都不是幂零变换,即 $\mathfrak{g}=\ker\mathrm{ad}_g\oplus\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_g$. 设 ad_g 的特征值为 $\lambda,0,-\lambda(\lambda\neq 0)$. 适当调整 $k\mathfrak{g}$, 就能使得 ad_{kg} 的特征值为 $1,0,-1$.

于是我们得到了，对于 $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=3$ 的三维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，本质上只有 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ 一种，是单 Lie 代数.

■

下面我们具体讨论下三维可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$.

- 当 $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$ 时，$\mathfrak{g}$ 是交换 Lie 代数.
- 当 $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=1$ 时，记 z 为 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的一组基，将其扩充为 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{x,y,z\}$.
  (i) 若 $z\in C(\mathfrak{g})$, 即 $[x,z]=[y,z]=0$, 从而一定有 $[x,y]=\lambda z,(\lambda\neq 0)$. 适当调整 z 系数，可以选取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{x,y,z\}$ 使得 $[x,y]=z$. 这个 Lie 代数被称为 **Heisenberg Lie 代数**.
  (ii) 若 $z\notin C(\mathfrak{g})$, 则存在 $[x,z]=\lambda z$. 若 $[x,y]=\mu[x,z](\mu\neq 0)$, 则用 $y-\mu z$ 替换 z. 同理对 $[y,z]$ 如此处理，于是一定可以找到 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{x,y,z\}$ 使得 $[x,z]=z,[x,y]=[y,z]=0$, 即 $y\in C(\mathfrak{g})$. 则 $\mathrm{Span}\,\{x,z\}$ 是唯一非交换二维 Lie 代数，记为 $\mathfrak{h}$. 由命题1.33和1.34，$\mathfrak{g}$ 可以写成 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. 是一个一维交换 Lie 代数和二维非交换 Lie 代数的直和.
- 当 $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=2$ 时，若 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 非交换，则 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{(1)}\oplus C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{(1)})$, 但由前面讨论这种情形的 Lie 代数的导代数一定是一维的. 所以 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 交换. 记 $\{x,y\}$ 是 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的一组基，将其扩张为 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{x,y,z\}$. 于是

$$[X,Z]=ax+bY,\quad [Y,Z]=cX+dY$$

也是 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的一组基，即矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ 是非退化的. 考虑到总可以适当调整 $\{x,y,z\}$ 使得 A 有特征值 1，此时 AJordan 型为

$$J_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&a\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

这样不同取值的 a 就可以给出不同构的 Lie 代数.