



# 抽象代数学习笔记

Notes for Personal Reference

————— ≈ —————

整理人： 郭利文

时间： 2026 上半年

# 前言

该讲义为自用笔记，  
主题框架是围绕 Galois 理论做准备  
仅供学习与交流使用.

# 目录

<b>1 域</b>	<b>2</b>
<b>2 环</b>	<b>5</b>
2.1 分式域与中国剩余 . . . . .	5
2.2 整环上的讨论 . . . . .	9
2.3 唯一分解多项式环 . . . . .	12
<b>3 群</b>	<b>14</b>
3.1 群行列式 . . . . .	14
3.2 交错单群 $A_n (n \geq 5)$ . . . . .	17
3.3 有限群的合成序列 . . . . .	22
3.4 群作用与 Sylow 定理 . . . . .	24
3.5 二面体群 . . . . .	29
3.6 有限生成 Abel 群分类 . . . . .	31
3.7 $pq$ 阶群 . . . . .	31
3.8 可解群 . . . . .	32
<b>4 Galois 理论</b>	<b>33</b>
4.1 分裂域 . . . . .	33
4.2 Galois 扩张 . . . . .	40
<b>索引</b>	<b>41</b>

# 1 域

**命题 1.1.** 设  $F$  是域, 若  $\alpha, \beta$  是  $F$  代数元, 则  $\alpha + \beta, \alpha\beta$  也是  $F$  代数元.

**证明.** 这里介绍一种不太常见的方法. 设  $f, g \in F[x]$ , 使得  $f(\alpha) = 0, g(\beta) = 0$ . 记  $R(A, B)$  表示  $A, B$  的结式. 令  $h(y) = R(f(x), g(y - x)) \in F[y]$ , 且  $h(\alpha + \beta) = 0$ . 再令

$$k(y) = R\left(f(x), x^{\deg g} \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)\right) \in F[y]$$

且  $k(\alpha\beta) = 0$  ■

**命题 1.2 (维数公式).** 设  $F \subset K \subset E$ , 且  $E/F$  是有限扩张, 则  $K/F, E/K$  也是有限扩张, 且

$$[E : F] = [E : K] \cdot [K : F].$$

**证明.** 将  $K, E$  分别视为  $F$  上线性空间, 则  $K$  是  $E$  的子空间, 自然  $[K : F] \leq [E : F] < \infty$ . 若我们记  $[E : F] = s$ , 我们断言  $[E : K] \leq s$ , 否则存在  $\alpha_1, \dots, \alpha_{s+1} \in E$ , 使得它们在  $K$  上线性无关, 注意  $F \subset K$ , 则  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  在  $F$  上也线性无关, 这导出矛盾.

下面不妨假定  $[E : K] = m, [K : F] = n$ , 且

$$E = \text{span}_K \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad K = \text{span}_F \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$$

则

$$E = \text{span}_F \{\alpha_i \beta_j \mid i \in [1, m]; j \in [1, n]\}$$

下面只需说明  $\{\alpha_i \beta_j\}$  在  $F$  线性无关即可. 设  $c_{ij} \in F$  满足

$$0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n c_{ij} \beta_j \right) \alpha_i$$

对每个固定  $i \in [1, m]$ , 由于  $\sum_{j=1}^n c_{ij} \beta_j \in K$ , 于是  $\sum_{j=1}^n c_{ij} \beta_j = 0$ , 最终得到  $c_{ij} = 0$ . ■

对每个域  $F, \text{char } F$  是 0 或者某个素数, 即  $F$  有子域  $\mathbb{Q}$  或者子域  $\mathbb{Z}_p$  (是在同构意义下, 往后不做强调)

**例 1.1.** 设  $F$  是域,  $\text{char } F = p > 0$ , 则  $f : F \rightarrow F, \alpha \mapsto \alpha^p$  是域同态, 特别地, 当  $F$  是有限域时,  $f$  是域同构.

**命题 1.3.** 设有扩张  $E/F$ , 其中  $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i$  是  $F$  代数元, 则  $E/F$  是有限扩张, 自然也是代数扩张.

**证明.**  $E/F$  可以看成若干单代数扩张, 由有限扩张的传递性 [命题, 1.2], 我们只要证明  $F(\alpha)/F$  是代数扩张即可, 其中  $\alpha$  是  $F$  代数元. 设  $f$  是  $\alpha$  的极小多项式, 记  $\deg f = n$ , 则

$$F(\alpha) = \left\{ a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in F \right\} = \text{span}_F \left\{ 1_F, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1} \right\}$$

即  $[F(\alpha), F] = n < \infty$ . ■

**命题 1.4.** 代数扩张具有传递性, 即若  $F \subset K \subset E$ , 满足  $E/K, K/F$  是代数扩张, 则  $E/F$  也是代数扩张.

**证明.** 任意取定  $\alpha \in E$ , 则存在  $f \in K[x]$ , 使得  $f(\alpha) = 0$ . 不妨设  $f = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ , 记  $K' = F(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ , 则由 [命题, 1.3],  $K'/F$  是有限扩张, 且  $K'(\alpha)/K'$  也是有限扩张, 于是  $K'(\alpha)/F$  也是有限扩张, 自然也是代数扩张. 特别地,  $\alpha$  是  $F$  代数元. ■

**定义 1.1.** 设有域扩张  $E/F$ , 记  $\text{Aut}(E)$  是  $E$  的自同构群, 即  $E$  到自身的域同构全体, 定义

$$\text{Gal}(E/F) = \{\sigma \in \text{Aut}(E) \mid \sigma|_F = \text{id}_F\}$$

则  $\text{Gal}(E/F)$  是群, 称为是  $E/F$  的 Galois 群.

**命题 1.5.** 若  $E/F$  是有限扩张, 则  $\text{Gal}(E/F)$  是有限群.

**证明.** 不妨设  $[E : F] = n$ , 且

$$E = \text{span}_F \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

则对任意  $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ ,  $\sigma$  完全是由  $(\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_n))$  决定的. 记  $f_i \in F[x]$  是  $\alpha_i$  的极小多项式, 则有

$$0 = \sigma(f_i(\alpha_i)) = \sigma((\alpha_i)^m + a_1(\alpha_i)^{m-1} + \cdots + a_m) = f_i(\sigma(\alpha_i))$$

即  $\sigma$  是  $X_i = \{\alpha \in E \mid f_i(\alpha) = 0\}$  上的一个置换. 注意  $\bigcup_{i=1}^n X_i$  是有限集, 其上的置换有限, 故而  $|\text{Gal}(E/F)| < \infty$ . ■

**定义 1.2.** 反之, 给定域  $E$ ,  $G$  是  $\text{Aut}(E)$  的有限子群, 定义

$$\text{Inv}(G) = \{\alpha \in E \mid \sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in G\}$$

则  $\text{Inv}(G)$  是  $E$  的子域, 称为是  $G$  在  $E$  上不动域.

**定理 1.6.** 按 [定义, 1.2] 得到的域扩张  $E/\text{Inv}(G)$  是有限扩张, 且  $[E : \text{Inv}(G)] \leq |G|$

**证明.** 设  $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ , 我们只需证明对任意取定  $m > n$  个  $E$  中元  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , 其在  $\text{Inv}(G)$  中线性相关即可. 考虑线性方程组

$$\sum_{i=1}^m \sigma_j(\alpha_i)x_i = 0, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.1)$$

(1.1)中方程个数小于未知元个数, 且方程系数是  $E$  中元素, 于是方程在  $E$  中有非零解  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in E^m$ . 注意  $\sigma_j$  是同构, 则对方程(1.1)的每个属于  $\text{Inv}(G)^m$  的非零解  $\mathbf{x}$ , 都有  $\sum_{i=1}^m x_i \alpha_i = 0$ .

下面我们只需在解空间中找到一个  $\text{Inv}(G)$  上的非零解. 取解  $\mathbf{x}$  满足是方程(1.1)的非零解中含有非零元  $x_i$  最少的一个一个解, 由于  $\mathbf{x}$  非零, 故不妨设  $x_1 \neq 0$ , 因此进一步可不妨设  $x_1 = 1$ . 我们断言  $\mathbf{x}$  是  $\text{Inv}(G)$  上的解, 否则的话, 存在  $\sigma \in G$ , 使得存在某个  $x_i$ , 满足  $\sigma(x_i) \neq x_i$ , 不妨设  $\sigma(x_2) \neq x_2$ . 注意  $\sigma(\mathbf{x}) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m))$  是方程组

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma\sigma_j \left( \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^m \sigma\sigma_j(\alpha_i)\sigma(x_i), \quad 1 \leq j \leq n \\ &= \sum_{i=1}^m \sigma_k(\alpha_i)\sigma(x_i), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

的解, 且方程 (1.1) 和方程 (1.2) 是同一个方程, 于是  $\sigma(\mathbf{x})$  也是方程(1.1)的解, 且由  $\mathbf{x}$  取法可知  $\sigma(\mathbf{x})$  与  $\mathbf{x}$  的零元位置相同. 但是注意  $\sigma(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$  也是方程(1.1)的非零解, 且其第一个元素也是零, 这与  $\mathbf{x}$  取法矛盾. ■

引出两个问题:

### 问题 1

给定域扩张  $E/F$ , 则有  $F \subset \text{Inv}(\text{Gal}(E/F))$ , 进一步是否有  $F = \text{Inv}(\text{Gal}(E/F))$ .

### 问题 2

设  $E$  是域, 给定  $\text{Aut}(E)$  的有限群  $G$ , 则  $G \subset \text{Gal}(E/\text{Inv}(G))$ , 进一步是否有  $G = \text{Gal}(E/\text{Inv}(G))$ .

第一个一般不正确, 比如考虑域扩张  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ , 第二个我们先做存疑.

**例 1.2.** 设

$$E = \mathbb{Q} \left( \frac{1}{2^{\frac{1}{2^k}}} \mid k = 1, 2, \dots \right)$$

则  $E/\mathbb{Q}$  不是有限生成扩张, 但是是代数扩张.

**例 1.3.**  $\mathbb{Q}(\pi)$  是有限生成扩张, 但不是代数扩张.

## 2 环

### 2.1 分式域与中国剩余

设  $R$  是环,  $I$  是  $R$  的子环, 则  $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$  关于加法是一个 Abel 群, 如果我们想在  $R/I$  上定义乘法, 一种自然考虑是

$$(x + I) \cdot (y + I) := xy + I \quad (2.1)$$

如果(2.1)的定义是良定的, 则容易验证  $R/I$  构成一个环. 要使得(2.1)的定义良定, 即要保证: 若  $x_1 - x_2 \in I, y_1 - y_2 \in I$ , 要能推出  $x_1y_1 - x_2y_2 \in I$ , 即

$$x_1y_1 - x_2y_2 = (x_1 - x_2)y_1 + x_2(y_1 - y_2) \in I$$

自然引出一个概念: 设  $I$  是  $R$  的子环, 如果对任意  $a \in I, r \in R$ , 有  $ar, ra \in I$ , 则称  $I$  为  $R$  的 (双边) 理想.

**定理 2.1 (同态基本定理).** 设  $f: R \rightarrow S$  是满的环同态, 则  $R/\ker f \cong S$ , 且  $S$  中的理想与  $R$  中包含  $\ker f$  的理想有一一对应关系.

证明. 自然定义

$$\begin{aligned} \tilde{f}: R/\ker f &\longrightarrow S \\ r + \ker f &\longmapsto f(r) \end{aligned} \quad (2.2)$$

如果(2.2)的定义是良定的, 则  $\tilde{f}$  是环同态且是双射的验证是平凡的. 若  $x_1 - x_2 \in \ker f$ , 则

$$\tilde{f}(x_1 + \ker f) - \tilde{f}(x_2 + \ker f) = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0$$

所以  $\tilde{f}$  的定义是良定的, 即不依赖于代表元的选取.

下设  $R', S'$  分别是  $R$  和  $S$  的理想, 则  $f(R'), f^{-1}(S') := \{r \in R \mid f(r) \in S\}$  分别是  $S$  和  $R$  中理想, 其中  $f(R')$  是  $S$  中理想的验证需用到  $f$  是满的这一条件. 下面我们主要说明对应的唯一性, 即若  $R'$  是  $R$  中包含  $\ker f$  的理想, 则有事实

$$R' = f^{-1}(f(R'))$$

换句话说即证明: 若  $R_1, R_2$  是  $R$  中包含  $\ker f$  的理想, 且  $f(R_1) = f(R_2)$ , 则  $R_1 = R_2$ :

对任意  $r_1 \in R_1$ , 存在  $r_2 \in R_2$ , 使得  $f(r_1) = f(r_2)$ , 即  $r_1 - r_2 \in \ker f \subset R_2$ , 于是有  $r_1 = (r_1 - r_2) + r_2 \in R_2$ , 也就是说  $R_1 \subset R_2$ , 同理也有  $R_2 \subset R_1$ , 这就得到  $R_1 = R_2$ . ■

设  $I_1, \dots, I_r$  是  $R$  的理想, 则  $I_1 + \dots + I_r := \{x_1 + \dots + x_r \mid x_i \in I_i\}$  和  $\bigcap_{i=1}^r I_i$  都是  $R$  的理想.

若  $S \subset R$ , 记  $\langle S \rangle =$  是包含  $S$  的  $R$  中最小理想, 若  $R$  是交换么环, 则

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i y_i \mid x_i \in S, y_i \in R, m \in N^+ \right\}$$

设  $R_1, R_2$  是环, 在  $R_1 \times R_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}$  中定义如下加法和乘法:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2, y_1 y_2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

则  $R_1 \times R_2$  在运算(2.3)下构成环, 称为  $R_1$  与  $R_2$  的直积. 一个简单的事实是:  $R_1 \cong R_1 \times \{O_{R_2}\}$ ,  $R_2 \cong \{O_{R_1}\} \times R_2$ , 即  $R_1, R_2$  均可视为  $R_1 \times R_2$  的理想.

**命题 2.2.** 设  $I \subset J$  是  $R$  中的两个理想, 则  $I/(I \cap J) \cong (I + J)/J$ .

**证明.** 自然考虑  $f : I \longrightarrow (I + J)/J, x \longmapsto x + J$ , 则  $f$  是满的环同态, 且  $\ker f = I \cap J$ , 由同态基本定理即得. ■

设  $R$  为交换环,  $I_1, I_2$  是  $R$  中两个理想, 定义

$$I_1 I_2 := \left\{ \sum_{i=1}^m x_i y_i \mid x_i \in I_1, y_i \in I_2 \right\} \tag{2.4}$$

则  $I_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2$  也是  $R$  的理想. 利用定义(2.4), 我们可以归纳定义: 若  $I_1, \dots, I_k$  是  $R$  中理想, 则

$$\prod_{i=1}^k I_i := I_1(I_2 \cdots I_k) = \left\{ \sum_{i=1}^m x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik} \mid x_{ij} \in I_j \right\}$$

设  $I, J$  是  $R$  中理想, 若  $R = I + J$ , 则称  $I, J$  是互素的.

**引理 2.3.** 设  $R$  为环,  $I, J$  是  $R$  中互素理想, 则  $R/(I \cap J) \cong (R/I) \times (R/J)$

**证明.** 自然考虑

$$f : R \longrightarrow (R/I) \times (R/J)$$

$$r \longmapsto (r + I, r + J)$$

$f$  是同态, 以及  $\ker f = I \cap J$  都是平凡的, 下面我们主要说明  $f$  是满的. 任取  $r_1, r_2 \in R$ , 且

$$r_1 = x_1 + y_1$$

$$r_2 = x_2 + y_2$$

其中  $x_i \in I, y_i \in J$ , 则有

$$\begin{aligned} (r_1 + I, r_2 + J) &= (x_1 + y_1 + I, x_2 + y_2 + J) = (y_1 + I, x_2 + J) \\ &= (x_2 + y_1 + I, x_2 + y_1 + J) = f(x_2 + y_1) \end{aligned}$$

这就证明了  $f$  是满射. ■

**引理 2.4.** 设  $R$  为交换幺环,  $I_1, \dots, I_n$  是  $R$  中两两互素的理想, 则  $I_1 \cdots I_{n-1}$  与  $I_n$  互素.

证明. 只需注意

$$R \xrightarrow{R \text{中有幺元}} \underbrace{R \cdots R}_n = \prod_{k=1}^{n-1} (I_n + I_k) = I_n + I_1 \cdots I_{n-1}$$

■

**定理 2.5 (中国剩余).** 设  $R$  是交换幺环, 且  $I_1, \dots, I_n$  是  $R$  中两两互素的理想, 则

$$R / \left( \prod_{i=1}^n I_i \right) \cong (R/I_1) \times \cdots \times (R/I_n) \quad (2.5)$$

证明. 我们先证明  $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$ , 从而由 [引理, 2.4] 可以归纳得到

$$I_1 \cdots I_n = (I_1 \cdots I_{n-1}) I_n = (I_1 \cdots I_{n-1}) \cap I_n = \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} I_k \right) \cap I_n = \bigcap_{k=1}^n I_k.$$

注意  $I_1 \cap I_2$  中元素  $x$  可以写为

$$x = x \cdot 1_R = x(y+z) = yx + xz \in I_1 I_2, \quad y \in I_1, z \in I_2$$

从而即得  $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$ . 下面我们归纳证明(2.5). 当  $n = 2$  时, 由 [引理, 2.3] 已经做好. 对一般情形, 由归纳假设则有

$$\begin{aligned} R / \left( \prod_{i=1}^n I_i \right) &= R / \left( \bigcap_{i=1}^n I_i \right) \cong \left( R / \left( \bigcap_{i=1}^{n-1} I_i \right) \right) \times (R/I_n) \\ &\cong (R/I_1) \times \cdots \times (R/I_n). \end{aligned}$$

■

称环  $R$  为整环, 如果  $R$  是没有零因子的交换幺环. 令  $R^* = R \setminus \{0\}$ , 在  $R \times R^*$  中定义关系为:  $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ , 如果  $r_1 s_2 = r_2 s_1$ . 我们说明此关系是一种等价关系, 其中自反性和对称性是显然的, 下面主要说明传递性. 设  $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2), (r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$ , 则我们要证明  $r_1 s_3 = r_3 s_1$ , 由  $s_2 \neq 0$ , 我们只要说明  $r_1 s_2 s_3 = r_3 s_1 s_2$ :

$$r_1 s_2 s_3 = (r_1 s_2) s_3 = (r_2 s_1) s_3 = (r_2 s_3) s_1 = (r_3 s_2) s_1 = r_3 s_1 s_2.$$

这就证明了上面关系是等价关系, 则我们可以记  $F = (R \times R^*) / \sim$  表示上面等价关系得到的等价类的集合, 其中元素记为  $\frac{r}{s}$ , 表示以  $(r, s)$  为代表元的等价类. 在  $F$  中定义如下加法和乘法

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} &:= \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} \\ \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} &:= \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

我们说明(2.6)的定义是良定的, 即若  $(r_1, s_1) \sim (r'_1, s'_1), (r_2, s_2) \sim (r'_2, s'_2)$ , 能有

$$(r_1s_2 + r_2s_1, s_1s_2) \sim (r'_1s'_2 + r'_2s'_1, s'_1s'_2)$$

$$(r_1r_2, s_1s_2) \sim (r'_1r'_2, s'_1s'_2)$$

验证有

$$(r_1s_2 + r_2s_1)s'_1s'_2 = (r_1s'_1)s_2s'_2 + (r_2s'_2)s_1s'_1 = (r'_1s_1)s_2s'_2 + (r'_2s_2)s_1s'_1 = (r'_1s'_2 + r'_2s'_1)s_1s_2$$

$$r_1r_2s'_1s'_2 = (r_1s'_1)(r_2s'_2) = (r'_1s_1)(r'_2s_2) = r'_1r_2s_1s_2.$$

这样我们就完成了定义良定性的验证, 则  $F$  在(2.6)的加法和乘法下构成一个整环, 且

$$O_F = \frac{O_R}{s}, \quad \forall s \in R^*$$

$$1_F = \frac{1_R}{1_R} = \frac{s}{s}, \quad \forall s \in R^*$$

那么对任意  $F$  中非零元  $\frac{r}{s}(r \neq 0)$ ,  $\frac{s}{r}$  是有意义的, 且  $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{r} = 1_F$ , 于是  $F$  是域, 称为  $R$  的分式域.

**命题 2.6.** 设  $R$  是整环,  $F$  是  $R$  的分式域. 若  $\varphi$  是  $R \rightarrow F'$  的单同态, 其中  $F'$  是域, 则存在唯一的同态  $\psi : F \rightarrow F'$  使得如下交换图成立, 即分式域唯一.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & F' \\ \downarrow f & \nearrow \psi & \\ F & & \end{array}$$

其中  $f : r \mapsto \frac{r}{1}$  为自然嵌入.

**证明.** 存在性: 定义  $\psi : \frac{r}{s} \mapsto \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ , 容易验证  $\psi$  是环同态, 且  $\varphi = \psi \circ f$ . 下面主要证明唯一性.

若  $F \rightarrow F'$  的域同态  $\psi_1, \psi_2$  满足  $\varphi = \psi_1 \circ f = \psi_2 \circ f$ , 即  $\psi_1\left(\frac{r}{1}\right) = \psi_2\left(\frac{r}{1}\right), \forall r \in R$ , 我们证明  $\psi_1 = \psi_2$ . 设  $r \neq 0$ , 则由域之间同态的性质有

$$\psi_1\left(\frac{1}{r}\right) = \psi\left(\left(\frac{r}{1}\right)^{-1}\right) = \psi_1\left(\frac{r}{1}\right)^{-1} = \psi_2\left(\frac{r}{1}\right)^{-1} = \psi_2\left(\frac{1}{r}\right)$$

于是对于  $F$  中非零元  $\frac{r}{s}(r \neq 0)$ , 我们有

$$\psi_1\left(\frac{r}{s}\right) = \psi_1\left(\frac{r}{1} \cdot \frac{1}{s}\right) = \psi_1\left(\frac{r}{1}\right) \cdot \psi_1\left(\frac{1}{s}\right) = \psi_2\left(\frac{r}{1}\right) \cdot \psi_2\left(\frac{1}{s}\right) = \psi_2\left(\frac{r}{s}\right)$$

且环同态, 都自然的将零元映为零元, 于是  $\psi_1 = \psi_2$ . ■

设  $R$  是交换幺环,  $I$  是  $R$  的理想, 则  $R/I$  是交换幺环, 若要求  $R/I$  是整环, 则要求, 若

$$(a + I) \cdot (b + I) = a \cdot b + I = I$$

能够推出  $a + I = I$  或者  $b + I = I$ , 换句话说  $ab \in I$ , 能够推出  $a \in I$  或者  $b \in I$ . 于是引出

**定义 2.1.** 设  $R$  是环,  $I \neq R$  是  $R$  中理想, 称  $I$  是素理想, 如果对于  $ab \in I$ , 能推出  $a \in I$  或者  $b \in I$ .

设  $R$  是交换幺环,  $I$  是  $R$  中理想, 如果要求  $R/I$  是域, 首先要保证  $R/I$  只有平凡的理想, 这意味着包含  $I$  的  $R$  中理想只能是  $I$  或者是  $R$ . 自然引出

**定义 2.2.** 设  $R$  是环,  $I \neq R$  是  $R$  中理想, 称  $I$  是  $R$  中极大理想, 如果包含  $I$  的理想只有  $I$  和  $R$ .

**命题 2.7.** 在交换幺环  $R$  中,  $I$  是  $R$  中理想, 则  $R/I$  是域当且仅当  $I$  是极大理想.

**证明.** 当  $R/I$  是域时, 则对任意  $a \notin I$ , 存在  $b \in R$ , 使得  $ab - 1_R \in I$ . 于是若  $R$  中理想  $J$  满足  $J \supseteq I$ , 则存在  $a \in J \setminus I$ , 以及相应的  $b \in R$ , 使得  $ab - 1_R \in I \subset J$ , 注意  $ab \in J$ , 这意味着  $1_R = ab - (ab - 1_R) \in J$ , 于是  $J = R$ .

反之, 当  $I$  是极大理想时, 由  $R/I$  中理想与  $R$  中包含  $I$  的理想有一一对应关系, 这意味着  $R/I$  只有平凡理想, 则对任意  $a \notin I$ , 有

$$R/I = \langle a + I \rangle = \{(a + I)(b + I) \mid b \in R\} = \{ab + I \mid b \in R\}$$

特别地, 存在某个  $b \in R$ , 使得  $1_R + I = (a + I)(b + I)$ , 这意味着  $a + I$  有乘法逆元, 于是  $R/I$  是域. ■

## 2.2 整环上的讨论

设  $R$  是整环,  $a, b \in R$ , 若存在  $c \in R$ , 使得  $a = bc$ , 则称  $b|a$ ,  $b$  视为  $a$  的因子. 记  $U$  是  $R$  中乘法可逆元全体, 其中元素称为单位. 若存在  $c \in U$ , 使得  $a = bc$ , 则称  $a$  与  $b$  相伴, 记为  $a \sim b$ . 注意相伴关系是一种等价关系.

设  $R$  是整环, 且  $a \in R$ , 称与  $a$  相伴的元素以及单位是  $a$  的平凡因子. 如果  $a \in R^* \setminus U$ (即不考虑单位) 没有非平凡因子, 则称  $a$  是  $R$  中的不可约元素.

设  $R$  是整环, 如果  $p \in R^* \setminus U$ , 满足  $p|ab$ , 能够推出  $p|a$  或者  $p|b$ , 则称  $p$  是  $R$  中素元素.

设  $R$  是整环, 从理想的角度来看,  $a \in R$  是不可约元当且仅当  $\langle a \rangle$  是极大主理想(这里我们指包含  $\langle a \rangle$  的主理想只有  $\langle a \rangle$  和  $R$ ).  $p \in R$  是素元, 当且仅当  $\langle p \rangle$  是素理想.

简单事实有: 素元都是不可约元.

称整环  $R$  满足素性条件, 如果  $R$  中不可约元都是素元, 即不可约元与素元等价.

设  $R$  是整环,  $a, b \in R$ , 如果存在  $a, b$  的公因子  $d$ , 满足对任意  $a, b$  的共因子  $d_1$ , 都有  $d_1 | d$ , 则称  $d$  是  $a, b$  的最大公因子, 简单事实是: 最大公因子在相伴意义下唯一, 所以如果  $d$  是  $a, b$  的一个最大公因子, 我们就简记为  $d \sim (a, b)$ .

**定义 2.3.** 设  $R$  是整环, 如果  $R$  中任何两个元素都有最大公因子, 则称  $R$  是满足最大公因子条件的整环, 简称为  $GCD$  整环.

在  $GCD$  整环中, 有如下简单性质:  $c(a, b) \sim (ca, cb); ((a, b), c) \sim (a, (b, c))$ ; 于是当  $(a, b) \sim 1, (a, c) \sim 1$  时,

$$(a, bc) \sim ((a, ac), bc) \sim (a, (ac, bc)) \sim (a, c) \sim 1.$$

**引理 2.8.** 设  $R$  是  $GCD$  整环, 则  $R$  满足素性条件.

**证明.** 设  $p$  是  $R$  中不可约元, 若  $p | ab$ , 且  $p \nmid a, p \nmid b$ , 这意味着  $(p, a) \sim 1, (p, b) \sim 1$ , 于是  $(p, ab) \sim 1$ , 这与  $p | ab$  矛盾, 于是  $p$  是素元. ■

**定义 2.4.** 设  $R$  是整环, 若对任意  $a, b \in R$ , 存在  $d \in R$ , 使得  $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle d \rangle$ , 即主理想加主理想仍是主理想, 则称  $R$  是 Bezout 整环.

**引理 2.9.** Bezout 整环都是  $GCD$  整环.

**证明.** 对任意  $a, b \in R$ , 设  $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle d \rangle$ . 由  $\langle a \rangle \subset \langle d \rangle, \langle b \rangle \subset \langle d \rangle$ , 得  $d$  是  $a, b$  的公因子. 且存在  $u, v \in R$ , 使得  $au + bcv = d$ , 这意味着  $a, b$  的任何公因子都要整除  $d$ , 于是  $d$  就是  $a, b$  的一个最大公因子. ■

**定义 2.5.** 设  $R$  是整环, 如果  $R$  中理想都是主理想, 则称  $R$  是主理想整环, 简称为  $PID$  整环.

由定义, 主理想整环是比 Bezout 整环性质更好的环.

**定义 2.6.** 设  $R$  是整环, 称  $R$  是唯一分解整环 (简称为  $UFD$  整环), 如果对任意  $a \in R^* \setminus U$ ,  $a$  可分解为有限不可约元素的积, 且在相伴意义下, 分解唯一, 即若

$$a = p_1 \cdots p_s = q_1 \cdots q_m$$

其中  $p_i, q_j$  都是不可约元, 则  $s = m$ , 且存在  $\sigma \in S_m$ , 使得  $q_i \sim p_{\sigma(i)}$ .

**定义 2.7.** 设  $R$  是整环, 如果  $R$  中不存在真因子序列  $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ , 其中  $a_{i+1}$  是  $a_i$  的真因子, 则称  $R$  满足因子链条件.

设整环  $R$  满足因子链条件, 意味着若  $a \in R^* \setminus U$ , 则  $a$  从任意方式都可分解为有限不可约元素的乘积. 从理想的角度看, 若有主理想升链

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle a_n \rangle \subset \cdots$$

则存在  $j$ , 使得当  $k \geq j$  时,  $\langle a_k \rangle = \langle a_j \rangle$ .

**定理 2.10.** 设  $R$  是整环, 则  $R$  是唯一分解整环当且仅当  $R$  满足素性条件和因子链条件.

证明. 设  $R$  是唯一分解整环, 则对任意  $a, b \in R$ , 由唯一有限分解性,  $R$  满足因子链条件, 且可以将  $a, b$  表示为如下形式

$$\begin{aligned} a &= p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}, \quad r_i \geq 0 \\ b &= p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}, \quad k_i \geq 0 \end{aligned}$$

其中  $p_i$  是不可约元, 且  $p_i^0$  应视为  $R$  中幺元或者某个单位. 那么  $d = \prod_{i=1}^s p_i^{\min\{r_i, k_i\}}$  就是  $a, b$  的一个最大公因子, 由 [引理, 2.8],  $R$  满足素性条件.

反之, 因子链条件保证对任意  $a \in R^* \setminus U$ ,  $a$  至少存在一种有限分解. 若

$$a = p_1 \cdots p_s = q_1 \cdots q_m$$

是  $a$  的两种不可约分解, 则由素性条件, 对每个  $p_i$ , 存在  $q_j$ , 使得  $p_i \sim q_j$ , 这也意味着  $s \leq m$ , 否则  $p_s$  只能是单位, 矛盾. 同理, 应该也要有  $m \leq s$ , 于是唯一性即证. ■

**命题 2.11.** 主理想整环是唯一分解整环.

证明. 设  $R$  是主理想整环, 由 [引理, 2.8, 2.9],  $R$  满足素性条件. 若

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle a_n \rangle \subset \cdots$$

是  $R$  中主理想升链, 则  $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle$  是  $R$ , 其中验证最关键的是  $I$  是否构成子环, 即若  $x, y \in I$ , 设  $x \in \langle a_k \rangle, y \in \langle a_j \rangle$ , 不妨设  $j \geq k$ , 则  $x - y \in \langle a_j \rangle \subset I$ .

由  $I$  是主理想, 则存在  $d \in I$ , 使得  $I = \langle d \rangle$ , 特别地, 由  $d \in I$ , 得到存在  $j$ , 使得  $d \in \langle a_j \rangle$ , 于是  $\langle d \rangle \subset \langle a_j \rangle$ , 那么就有  $\langle d \rangle = \langle a_j \rangle$ . 于是当  $k \geq j$  时,  $\langle a_k \rangle = \langle a_j \rangle$ . ■

**定义 2.8.** 设  $R$  是整环, 若存在映射  $\delta : R^* \rightarrow N$ , 满足对任意  $a \in R, b \in R^*$ , 存在  $q, r \in R$ , 使得  $a = bq + r$ , 其中  $r = 0$ , 或者有  $\delta(b) < \delta(r)$ , 则称  $R$  是欧几里得整环,  $\delta$  为  $R$  的一个欧几里得赋值.

**命题 2.12.** 欧几里得整环是主理想整环, 从而是唯一分解整环.

证明. 设  $R$  是欧几里得整环,  $\delta$  为  $R$  的一个欧氏赋值,  $I$  是  $R$  中一个理想, 则  $\delta(I)$  是  $N$  的一个子集, 从而存在最小元素, 取  $a \in I$ , 满足  $\delta(a) = \min \{\delta(I)\}$ . 则由  $a$  的取法, 对任意  $b \in I$ , 一定有  $a | b$ , 于是  $I = \langle a \rangle$ , 即  $R$  是主理想整环. ■

**例 2.1.** 整环  $R = \mathbb{Z} \left[ \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$  是主理想整环但不是欧几里得环.

证明. 见: An Elementary Proof by Robert A. Wilson (QMUL) ■

### 2.3 唯一分解多项式环

设  $R$  是环, 一个  $R$  上的多项式是指如下形式

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_i \in R, \quad n \geq 0.$$

$a_i$  称为多项式系数. 我们记  $R[x]$  为系数在  $R$  上的所有多项式全体, 即

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in R, 0 \leq i \leq n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

两个多项式相等如果它们的系数完全相同. 如果  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  且  $a_n \neq 0$ , 则我们称  $n$  是多项式  $p(x)$  的次数, 记为  $\deg p$ . 系数  $a_n$  称为多项式  $p(x)$  的首项系数. 我们定义零多项式的次数为  $-\infty$ .

对于一个多项式  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , 当  $k > \deg p$  时, 我们假定  $a_k = 0$ . 那么给定两个多项式  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  和  $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ , 我们就可以定义它们的和  $p(x) + q(x)$  为

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i.$$

定义乘积  $p(x)q(x)$  为

$$(pq)(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i,$$

其中

$$c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}.$$

则在这两种运算下,  $R[x]$  构成一个环. 且若  $1_R$  是  $R$  中幺元, 则  $1_R$  也是  $R[x]$  中幺元.

当  $R$  为整环时, 对任意  $f, g \in R[x]$ , 有  $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ , 这意味着  $R[x]$  也是整环, 同时  $R[x]$  中的单位一定也是  $R$  中单位, 因为若  $\deg f > 0$ , 不会存在  $g \in R[x]$ , 使得

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g = \deg(1_R) = 0.$$

**引理 2.13.** 若  $R$  是域, 则  $R[x]$  是欧几里得环.

**证明.** 我们只要说明对任意  $f \in R[x], 0 \neq g \in R[x]$ , 使得存在  $q, r \in R[x]$ , 满足  $f = qg + r$ , 其中  $r = 0$  或者  $\deg r < \deg g$ , 这样  $\deg$  就是  $R[x]$  中的一个欧氏赋值, 从而  $R[x]$  是欧几里得环.

除去平凡的情况, 设  $\deg f = n, \deg g = m$ , 假定结论对次数小于  $n$  多项式成立, 不妨设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, \quad n > m$$

则

$$\tilde{f} = f - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot g$$

的次数小于  $n$ , 由归纳假设即得. ■

设  $R$  是唯一分解整环, 对于  $f \in R[x]$ , 下面我们记  $\gcd(f)$  表示  $f$  的各项系数的最大公因子, 如果  $\gcd(f) \sim 1$ , 则称  $f$  是本原多项式. 对任意  $f \in R[x]$ ,  $f$  都可以写成  $f = cf_1$ , 其中  $f_1$  是本原多项式, 且容易看出在相伴意义下, 这种分解唯一, 即若  $f = c_1f_1 = c_2f_2$ , 其中  $f_1, f_2$  是本原的, 则  $c_1, c_2$  相差一个  $R$  中单位.

设  $R$  是唯一分解整环, 若  $f \in R[x]$  是本原的, 如果  $f$  有非平凡因子  $g$ , 则  $\deg g > 0$ . 那么对任意次数大于零的  $f \in R[x]$ , 由次数的有限性,  $f$  可有限分解为

$$f = u \cdot f_1 \cdots f_s, \quad \deg f_i > 0, \quad u \in R$$

其中  $f_i$  是  $R[x]$  中不可约元 (自然也是本原的), 再由  $u \in R$  可以唯一有限分解, 故  $f$  在  $R[x]$  中存在有限不可约分解.

**引理 2.14 (Gauss 引理).** 设  $R$  是唯一分解整环,  $f_1, f_2 \in R[x]$  是本原的, 则  $f_1f_2$  也是本原的.

**证明.** 假如  $\gcd(f_1f_2)$  不是单位, 则由  $R$  是唯一分解整环, 可以取  $\gcd(f_1f_2)$  的一个不可约因子  $p$ , 其也是  $R$  中的素元, 于是  $\tilde{R} = R/\langle p \rangle$  是整环, 则  $\tilde{R}[x]$  也是整环. 考虑

$$\begin{aligned} \varphi : R[x] &\longrightarrow \tilde{R}[x] \\ \sum_{i=0}^m a_i x^i &\longmapsto \sum_{i=0}^m (a_i + \langle p \rangle)x^i \end{aligned}$$

则  $\varphi$  是环同态, 且  $O_{\tilde{R}} = \langle p \rangle = \varphi(f_1f_2) = \varphi(f_1)\varphi(f_2)$ , 这意味着  $\varphi(f_1) = O_{\tilde{R}}$  或者  $\varphi(f_2) = O_{\tilde{R}}$ , 即  $p \mid \gcd(f_1)$  或者  $p \mid \gcd(f_2)$ , 但是这与  $f_1, f_2$  本原相矛盾. ■

**引理 2.15.** 设  $R$  是唯一分解整环,  $F$  是  $R$  的分式域, 则对任意  $0 \neq f \in F[x]$ , 存在  $r \in F$ , 和  $f_1 \in R[x]$  是本原的, 使得  $f = rf_1$ , 且此分解在  $R$  中相伴关系下唯一

**证明.** 存在性就是通分, 即存在  $b \in R^*$ , 使得  $f = \frac{f'}{b}$ , 其中  $f' \in R[x]$ , 于是存在  $c \in R$ , 使得  $f = \frac{c}{b}f_1$ , 其中  $f_1(x) \in R[x]$  是本原的, 令  $r = \frac{c}{b}$  即得. 若  $f$  存在两种分解, 记为

$$f = \frac{c_1}{b_1}f_1 = \frac{c_2}{b_2}f_2,$$

其中  $f_1, f_2 \in R[x]$  是本原的. 则有  $b_2c_1f_1 = c_2b_1f_2$ , 于是存在  $R$  中单位  $u$ , 使得  $b_2c_1 = ub_1c_2$ , 即  $\frac{c_1}{b_1} = u\frac{c_2}{b_2}$ . ■

设  $R$  是唯一分解整环,  $F$  是  $R$  的分式域,  $f_1, f_2 \in R[x]$  是本原的, 且存在  $u \in F$ , 使得  $f_1 = uf_2$ , 则由 [引理, 2.15] 分解的唯一性, 一定有  $u \in R$ .

**引理 2.16.** 设  $R$  是唯一分解整环,  $F$  是  $R$  分式域, 若  $f(\deg f > 0)$  是  $R[x]$  中的不可约元, 则  $f$  也是  $F[x]$  中的不可约元.

**证明.** 若  $f$  在  $F[x]$  中存在真因子, 即存在  $f_1, f_2 \in F[x]$ , 满足  $f = f_1 f_2$ , 其中  $\deg f_1 > 0, \deg f_2 > 0$ . 则由 [引理, 2.15], 存在  $r_1, r_2 \in F$ , 使得  $f = r_1 r_2 f'_1 f'_2$ , 其中  $f'_1, f'_2$  是  $R[x]$  中次数大于零的本原多项式. 由 [引理, 2.14],  $f'_1 f'_2$  也是本原的, 那么就有  $r_1 r_2 \in R$ , 这意味着  $f$  在  $R[x]$  中可分解, 矛盾. ■

**定理 2.17.** 设  $R$  是唯一分解整环, 则  $R[x]$  也是唯一分解整环.

**证明.** 对于非平凡的情形, 考虑  $f \in R[x]$ , 满足  $\deg f > 0$ , 我们已经说明了  $f$  存在有限分解, 若  $f$  存在两种有限分解

$$f = (u_1 \cdots u_k) p_1 \cdots p_s = (v_1 \cdots v_l) q_1 \cdots q_t, \quad u_m, v_n \in R, \quad \deg p_i > 0, \quad \deg q_j > 0$$

其中  $u_m, v_n$  是  $R$  中不可约元;  $p_i, q_j$  是  $R[x]$  中的不可约元, 由 [引理, 2.14],  $p_1 \cdots p_s$  与  $q_1 \cdots q_t$  也是  $R[x]$  中本元多项式, 则  $u_1 \cdots u_k$  与  $v_1 \cdots v_l$  相差一个  $R$  中单位, 从而由  $R$  是唯一分解整环, 得  $k = j$ , 且存在置换  $\sigma \in S_k$ , 使得  $u_i \sim v_{\sigma(i)}$ .

再由 [引理, 2.13],  $f$  在  $F[x]$  中是唯一分解的, 且由 [引理, 2.16],  $p_i, q_j$  也是  $F[x]$  中的不可约元, 故  $s = t$ , 且对每个  $p_i$ , 存在  $q_j$ , 和  $c_i \in F$ , 使得  $p_i = c_i q_j$ , 那么由 [引理, 2.15] 分解的唯一性, 一定有  $c_i \in R$ , 且  $c_1 \cdots c_s$  是  $R$  中单位, 于是每个  $c_i$  都是  $R$  中单位, 这就证明了唯一性. ■

### 3 群

#### 3.1 群行列式

**定义 3.1.** 设  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  是  $n$  阶群, 将  $g_i$  对应变量  $x_i$ , 称  $n$  阶矩阵  $X_G = (x_i x_j^{-1})$  为  $G$  的一个群矩阵, 其中  $x_i x_j^{-1}$  表示  $g_i g_j^{-1}$  所对应的变量, 称  $X_G$  的行列式  $D_G$  的群行列式.

设  $G = \{g_1, \dots, g_n\} = \{a_1, \dots, a_n\}$  是群  $G$  的两种排序方式, 设  $\sigma \in S_n$ , 满足  $a_i = g_{\sigma(i)}$ , 记  $P = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})^T$ , 其中  $e_i$  是标准单位列向量, 则有

$$P X_G P^{-1} = P X_G P^T = (x_{\sigma(i)} x_j^{-1}) P^T = (x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)}^{-1})$$

于是群矩阵依赖于群元素的排列顺序, 但是不同的群矩阵是相似的, 因此群行列式与群元素的排列无关, 一般将  $g_1$  写为幺元.

**例 3.1.** 设  $G = \{g_1, \dots, g_4\}$  为 Klein 群, 其中  $g_2^2 = g_3^2 = g_4^2 = g_2g_3g_4 = g_1$ , 则其群行列式为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

**例 3.2.** 设  $G = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  为循环群, 其中  $s_i = s_2^{i-1}$ , 则容易得到  $G$  的群矩阵为循环矩阵

$$X_G = \begin{pmatrix} x_1 & x_n & x_{n-1} & \cdots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_n & \cdots & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \cdots & x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 \end{pmatrix}$$

这个矩阵的行列式为

$$D_G = \prod_{i=0}^{n-1} (x_1 + x_2\omega^i + \cdots + x_n\omega^{(n-1)i}),$$

其中  $\omega$  是  $n$  次本原单位根.

**例 3.3.** 注意  $n$  阶群  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  的群矩阵  $X_G$  的每行每列都是  $\{x_1, \dots, x_n\}$  的全排列, 因此  $G$  可以写为

$$X_G = \sum_{i=1}^n x_i B_i$$

其中  $B_i$  是置换矩阵, 我们称 (自称)  $B_i$  是  $x_i$  在  $X_G$  中的位置.

由定义  $B_1$  的第  $i$  行中, 唯一某个第  $j$  列元素为 1, 当且仅当  $x_1 = x_i x_j^{-1}$ , 即  $x_j = x_1^{-1} x_i$ , 即当且仅当  $x_1 x_j = x_i$ . 若我们定义

$$\delta(x_k, x_i x_j) = \begin{cases} 1, & x_i x_j = x_k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则  $B_1$  可以表示为  $B_1 = (\delta(x_i, x_1 x_j))$ . 考虑  $B_1 B_2$  的第  $(i, j)$  元即为

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta(x_i, x_1 x_k) \cdot \delta(x_k, x_2 x_j)$$

则  $d_{ij} = 1 \iff x_1 x_k = x_i$  且  $x_2 x_j = x_k$ , 即当且仅当  $x_1^{-1} x_i = x_2 x_j$ , 即当且仅当  $x_i = (x_1 x_2) x_j$ . 于是  $B_1 B_2$  就是  $x_1 x_2$  在  $X_G$  中的位置.

置换矩阵全体构成一个同构于  $S_n$  的群, 不妨就记为  $S_n$ , 这样就有一个自然的同态

$$\pi : G \longrightarrow S_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$g_i \longmapsto B_i$$

这个是表示论的起源.

**定义 3.2.** 设  $G$  是一个群, 称  $G$  到  $\mathbb{C}^*$  的函数  $\chi$  为  $G$  的一个特征, 如果对任意  $a, b \in G$ , 都有  $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ . 换句话说,  $G$  的特征就是  $G$  到  $\mathbb{C}^*$  的群同态.

**引理 3.1.** 记 Abel 群  $G$  的所有特征的全体为  $\widehat{G}$ . 对任意  $\chi, \psi \in \widehat{G}$ , 定义  $\phi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$  为

$$\phi(x) = \chi(x)\psi(x).$$

则  $\phi \in \widehat{G}$ , 记为  $\phi = \chi \cdot \psi$ . 进一步,  $(\widehat{G}, \cdot)$  为 Abel 群, 称  $\widehat{G}$  为  $G$  的特征群.

**证明.** 容易验证  $\phi \in \widehat{G}$ , 即运算  $\cdot$  是合理的. 这个运算实际上就是函数值的逐点相乘, 自然满足交换律和结合律. 于是  $\widehat{G}$  是一个半群. 记  $\chi_1$  为  $G$  的主特征, 对任意  $\chi \in \widehat{G}$ ,  $\chi_1 \cdot \chi(s) = \chi_1(s)\chi(s) = \chi(s)$ . 故  $\chi_1 \cdot \chi = \chi$ , 即  $\chi_1$  为幺元. 对任意  $\chi \in \widehat{G}$ , 定义  $\mu(s) = \chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$ , 容易看出  $\mu \in \widehat{G}$ , 且  $\mu \cdot \chi(s) = \chi(s)\overline{\chi(s)} = 1 = \chi_1(s)$ , 即  $\mu$  是  $\chi$  的逆元. 于是  $\widehat{G}$  为 Abel 群. ■

**例 3.4.** 设  $G = \langle a \rangle$  为  $n$  阶循环群, 若  $\chi \in \widehat{G}$ , 则  $\chi(a)^n = \chi(a^n) = 1$ , 即  $\chi(a)$  为  $n$  次单位根. 而  $\chi(a)$  的取值决定了  $\chi$ . 设  $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ , 令  $\chi_i(a) = \omega^{i-1}$ , 则  $\chi_i(a^k) = \omega^{(i-1)k}$ , 其中  $i, k = 1, 2, \dots, n$ . 容易看出  $\widehat{G} = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ , 且  $\chi_2$  为  $n$  阶元, 则  $\widehat{G}$  为  $n$  阶循环群, 从而  $G \cong \widehat{G}$ .

上述例子中的结论并不是偶然的, 实际上我们有

**命题 3.2.** 设  $G$  是一个有限 Abel 群, 则  $G \cong \widehat{G}$ .

**证明.** 有限 Abel 群是循环群的直积, 故不妨设  $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$ , 其中  $H_i$  为  $n_i$  阶循环群. 对任意  $\chi_i \in \widehat{H}_i$ , 定义

$$\chi(a_1 a_2 \cdots a_k) = \chi_1(a_1)\chi_2(a_2) \cdots \chi_k(a_k).$$

容易验证  $\chi \in \widehat{G}$ . 于是有映射

$$\phi: \widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2 \times \cdots \times \widehat{H}_k \rightarrow \widehat{G}.$$

可以验证这是一个群同态且是单射. 比较元素个数可知  $\phi$  也是满射, 从而是同构. 又由  $\widehat{H}_i \cong H_i$  知  $G \cong \widehat{G}$ . ■

引理 3.1 的结论对于非 Abel 群也成立, 即非 Abel 群的特征的全体也构成一个 Abel 群, 不过我们不用  $\widehat{G}$  表示这个特征群. 若  $\chi$  为  $G$  的特征, 由于  $\chi(G)$  为 Abel 群, 则由群的同态基本定理可知  $G/\text{Ker}\chi \cong \chi(G)$ . 故  $G^{(1)} \subseteq \text{Ker}\chi$ , 其中  $G^{(1)}$  为  $G$  的换位子群. 于是我们自然可以得到

**推论 3.3.** 设  $G$  为有限群, 则  $G$  的特征群同构于  $G/G^{(1)}$ .

Abel 群的不同特征之间有一个很好的关系——正交关系. 对于  $G$  的特征  $\chi$ , 我们考虑  $\sum_{s \in G} \chi(s)$ . 若  $\chi$  不是主特征, 则存在  $t \in G$  使得  $\chi(t) \neq 1$ . 于是

$$\sum_{s \in G} \chi(ts) = \chi(t) \sum_{s \in G} \chi(s).$$

注意到  $\sum_{s \in G} \chi(ts) = \sum_{s \in G} \chi(s)$ , 故

$$(\chi(t) - 1) \sum_{s \in G} \chi(s) = 0.$$

从而我们有

**引理 3.4.** 设  $\chi$  为有限群  $G$  的特征, 则  $\sum_{s \in G} \chi(s) = \begin{cases} 0, & \chi \neq \chi_1, \\ |G|, & \chi = \chi_1. \end{cases}$

进一步, 对于特征  $\chi, \psi$ , 由于  $\phi = \chi \cdot \psi^{-1}$  也是特征, 这里  $\psi^{-1}(s) = \psi(s^{-1})$  为  $\psi$  在  $\widehat{G}$  中的逆元. 利用上述引理可得

**命题 3.5.** 设  $\chi, \psi$  为有限群  $G$  的特征, 则

$$\sum_{s \in G} \chi(s)\psi(s^{-1}) = \begin{cases} 0, & \chi \neq \psi, \\ |G|, & \chi = \psi. \end{cases}$$

设  $G = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  为 Abel 群, 于是  $G$  的特征群  $\widehat{G}$  也有  $n$  个元, 设为  $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ . 令

$$A = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \begin{pmatrix} \chi_1(s_1) & \cdots & \chi_1(s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_n(s_1) & \cdots & \chi_n(s_n) \end{pmatrix}.$$

注意到对于任意特征  $\psi$  有  $\psi(s^{-1}) = \overline{\psi(s)}$ , 上述命题表明  $A$  的行向量在  $\mathbb{C}^n$  的标准内积下是两两正交的, 即  $A$  为酉矩阵. 因此上述命题也称为特征的正交关系.

利用群的特征, Dedekind 得到了如下结论.

**定理 3.6.** 设  $G = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  为 Abel 群, 则群行列式  $D_G$  可以分解为不同的  $n$  个一次齐次多项式的乘积:

$$D_G = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \left( \sum_{i=1}^n \chi(s_i) x_i \right).$$

**证明.** 对任意  $\chi \in \widehat{G}$ , 将第  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) 行分别乘以  $\chi(s_i)$  加到第一行得  $\sum_{i=1}^n \chi(s_i)x_i$  是  $D_G$  的因子. 这些因子对于不同的  $\chi$  是两两互素的. 因此,  $\prod_{\chi \in \widehat{G}} (\sum_{i=1}^n \chi(s_i)x_i)$  是  $D_G$  的因子. 比较两者的次数和  $x_1^n$  的系数即得. ■

## 3.2 交错单群 $A_n$ ( $n \geq 5$ )

对任意  $\sigma \in S_n$ ,  $\sigma$  都可以写为不相交轮换的乘积:

$$\sigma = (i_1 \cdots i_k) \cdots (j_1 \cdots j_t) \quad (3.1)$$

且在不记顺序情形之下, (3.1) 表法唯一, 称为是  $\sigma$  的循环分解.

令  $m_k$  表示  $\sigma$  分解式 (3.1) 中长度为  $k$  的轮换个数, 则我们可以记

$$\alpha_\sigma = (m_1, m_2, \dots, m_n), \quad \sum_{k=1}^n km_k = n.$$

我们用向量  $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  表示一种轮换型.

**引理 3.7.** 设  $\sigma, \tau \in S_n$ , 且  $\tau = (i_1 \cdots i_k)$ , 则

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_k)) \quad (3.2)$$

证明. 对于任意  $j \in \{1, \dots, n\}$ , 当  $\sigma^{-1}(j) \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ , 即  $j \notin \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$  时,

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(j) = j = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_k))(j)$$

当  $\sigma^{-1}(j) \in \{i_1, \dots, i_k\}$ , 即  $j \in \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$  时, 不妨设  $j = \sigma(i_s)$ , 则

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(j) = \sigma(i_{s+1}) = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_k))(j)$$

这样即得. ■

由 [引理, 3.7], 我们不难得到

**命题 3.8.** 设  $\sigma, \tau \in S_n$ , 则  $\sigma, \tau$  相互共轭当且仅当  $\alpha_\sigma = \alpha_\tau$ , 即  $\sigma, \tau$  要有相同的轮换型.

群  $S_n$  是其所有互不相交的共轭类的并集. 因此, 群的阶等于所有共轭类大小之和:

$$|S_n| = \sum_{C \in \text{Conj}(S_n)} |C| \quad (3.3)$$

其中  $\text{Conj}(S_n)$  表示  $S_n$  共轭类的集合.

对于给定的轮换型  $\vec{m}$ , 其对应的共轭类  $C_{\vec{m}}$  中包含的元素个数 (即具有该轮换型的置换个数) 由以下公式给出:

$$|C_{\vec{m}}| = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n k^{m_k} \cdot m_k!} \quad (3.4)$$

式(3.4)的组合意义如下:

- 分子  $n!$  是  $n$  个元素的全排列;
- 分母  $k^{m_k}$  消除了每个长度为  $k$  的轮换内部循环移位带来的重复;
- 分母  $m_k!$  消除了  $m_k$  个相同长度轮换之间顺序交换带来的重复;

**例 3.5.** 对任意  $n \in N^+$ , 有如下组合恒等式成立

$$1 = \sum_{\substack{0 \leq m_k \leq n; \\ \sum_{k=1}^n km_k = n}} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(m_k)! \cdot k^{m_k}}$$

证明. 将共轭类大小公式(3.4)代入式 (3.3) , 就有

$$n! = \sum_{\substack{0 \leq m_k \leq n \\ \sum_{k=1}^n k m_k = n}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n k^{m_k} \cdot m_k!}$$

两边同时除以  $n!$  即得. ■

**引理 3.9.** 对于  $n \geq 3$ , 交错群  $A_n$  由所有的 3-轮换生成.

证明.  $A_n$  中的元素是偶置换, 即偶数个对换的乘积. 因此只需证明任意两个对换的乘积可以写成 3-轮换的乘积即可. 设  $i, j, k, l$  互不相同, 则

$$\begin{aligned} (ij)(jk) &= (ijk) \\ (ij)(kl) &= (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl) \end{aligned} \tag{3.5}$$

式(3.5)已经包含了所有可能轮换乘积的情形, 这样我们就完成了证明. ■

**引理 3.10.** 对于  $n \geq 5$ ,  $A_n$  中所有的 3-轮换在  $A_n$  中共轭.

证明. 由 [命题, 3.8], 在  $S_n$  中, 所有的 3-轮换属于同一个共轭类. 设  $\tau \in S_n$  使得  $\tau \sigma_1 \tau^{-1} = \sigma_2$ , 其中  $\sigma_1, \sigma_2$  为任意两个 3-轮换.

- 若  $\tau \in A_n$ , 则结论显然成立.
- 若  $\tau \notin A_n$  (即  $\tau$  为奇置换), 由于  $n \geq 5$ , 我们总可以找到两个元素  $d, e$  不在  $\sigma_1$  的变动元中. 令  $\tau' = \tau(de)$ . 此时  $\tau'$  为偶置换, 即  $\tau' \in A_n$ . 且由于  $(de)$  与  $\sigma_1$  不相交,  $(de)$  与  $\sigma_1$  可交换, 故:

$$\tau' \sigma_1 (\tau')^{-1} = \tau(de) \sigma_1 (de)^{-1} \tau^{-1} = \tau \sigma_1 \tau^{-1} = \sigma_2$$

综上, 在  $n \geq 5$  时, 任意两个 3-轮换在  $A_n$  中也是共轭的. ■

**定理 3.11.** 当  $n \geq 5$  时, 交错群  $A_n$  是单群.

证明. 设  $N \neq \{e\}$  是  $A_n$  的正规子群, 我们要证明  $N = A_n$ . 由 [引理, 3.9], 我们只要证明  $N$  包含  $A_n$  中所有 3-轮换. 再由 [引理, 3.10], 我们只要证明  $N$  中有一个 3-轮换.

任取  $\sigma \in N, \sigma \neq (1)$ . 我们对  $\sigma$  的循环分解进行分类讨论:

### 情形 1: $\sigma$ 的分解中包含一个长度 $r \geq 4$ 的轮换

不妨设  $\sigma = (1\ 2\ 3\ \dots\ r)\tau$ , 其中  $\tau$  是与其他元素不相交的置换. 令  $\delta = (1\ 2\ 3) \in A_n$ . 考虑换位子  $\rho = \sigma\delta\sigma^{-1}\delta^{-1}$ . 由于  $N \trianglelefteq A_n$ , 故  $\rho \in N$ .

$$\begin{aligned}\rho &= \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1}(1\ 3\ 2) \\ &= (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3))(1\ 3\ 2) \\ &= (2\ 3\ 4)(1\ 3\ 2) \\ &= (1\ 2\ 4)\end{aligned}$$

计算结果  $(1\ 2\ 4)$  是一个 3-轮换. 故  $N$  包含 3-轮换.

### 情形 2: $\sigma$ 的分解中包含至少两个不相交的 3-轮换

不妨设  $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)\tau$ . 令  $\delta = (1\ 2\ 4) \in A_n$ . 同样考虑换位子  $\rho = \sigma\delta\sigma^{-1}\delta^{-1} \in N$ .

$$\begin{aligned}\rho &= \sigma(1\ 2\ 4)\sigma^{-1}(1\ 4\ 2) \\ &= (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(4))(1\ 4\ 2) \\ &= (2\ 3\ 5)(1\ 4\ 2) \\ &= (1\ 4\ 2\ 3\ 5)\end{aligned}$$

此时  $\rho$  是一个 5-轮换. 这将我们带回了情形 1 (循环长度  $\geq 4$ ). 对  $\rho$  再次应用情形 1 的方法, 即可得到  $N$  包含 3-轮换.

### 情形 3: $\sigma$ 是若干不相交的对换 (2-轮换) 之积

由于  $\sigma$  是偶置换, 它至少包含两个对换. 不妨设  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)\tau$ , 其中  $\tau$  固定 1, 2, 3, 4. 由于  $n \geq 5$ , 必然存在元素 5. 令  $\delta = (1\ 2\ 5) \in A_n$ . 构造元素  $\sigma' = \delta\sigma\delta^{-1} \in N$ , 则

$$\sigma' = (1\ 2\ 5)[(1\ 2)(3\ 4)\tau](1\ 5\ 2) = (2\ 5)(3\ 4)\tau$$

注意  $\delta$  仅影响 1, 2, 5, 而  $\tau$  与这些无关, 故  $\tau$  保持不变. 现在考虑  $\sigma'\sigma^{-1} \in N$ :

$$\begin{aligned}\sigma'\sigma^{-1} &= [(2\ 5)(3\ 4)\tau] \cdot [\tau^{-1}(3\ 4)(1\ 2)] \\ &= (2\ 5)(3\ 4)(3\ 4)(1\ 2) \\ &= (2\ 5)(1\ 2) \\ &= (1\ 2\ 5)\end{aligned}$$

结果  $(1\ 2\ 5)$  是一个 3-轮换. 故  $N$  包含 3-轮换.

综上所述, 无论  $\sigma$  属于何种循环类型,  $N$  中必然包含一个 3-轮换. 因此  $N = A_n$ , 即  $A_n$  是单群. ■

**例 3.6.** 当  $n \geq 5$  时,  $S_n$  的非平凡正规子群只有  $A_n$ .

**证明.** 设  $\{e\} \neq N$  是  $S_n$  的正规子群, 则  $A_n \cap N$  也是  $S_n$  的正规子群, 由  $A_n$  是单群, 只可能是  $A_n \cap N = A_n$  或者  $A_n \cap N = \{e\}$ . 但是另一方面, 由第二同构有

$$|NA_n/A_n| = |A_n/(A_n \cap N)| \leq 2$$

这意味着不可能有  $A \cap N = \{e\}$ , 于是  $A_n \subset N$ . 若  $N \neq A_n$ , 则  $N$  中有一个奇置换  $\sigma$ , 那么  $\sigma A_n \subset N$  就是  $S_n$  的所有奇置换, 此时  $N = S_n$ . ■

**例 3.7.** 当  $n \geq 3$  时,  $C(S_n) = \{(1)\}$  是平凡的.

**证明.** 对任意  $(1) \neq \sigma \in S_n$ , 则存在  $i \in \{1, \dots, n\}$ , 使得  $\sigma(i) \neq i$ , 记  $j = \sigma(i)$ . 由于  $n \geq 3$ , 可取  $k$ , 使得  $i, j, k$  互不相同. 考虑  $\tau = (jk)$ , 则  $j = \sigma\tau(i) \neq \tau\sigma(i) = k$ , 这意味着  $\sigma \notin C(S_n)$ , 于是  $C(S_n) = \{(1)\}$ . ■

**例 3.8.** 设  $G$  是置换群, 若  $G$  中有奇置换, 则  $G$  中存在指数为 2 的子群  $H$ .

**证明.** 令  $H$  是  $G$  中所有偶置换的集合, 则  $H \triangleleft G$ . 设  $\sigma$  是  $G$  的一个奇置换, 则  $\sigma H$  是  $G$  的所有奇置换 (对于任意  $G$  的奇置换  $\tau$ , 有  $\tau = \sigma(\sigma^{-1}\tau) \in \sigma H$ ). 于是  $G = H \cup \sigma H$ , 即  $[G : H] = 2$ . ■

**例 3.9.** 设  $G$  是阶数为  $2n$  的群, 其中  $n$  是奇数, 则  $G$  中存在  $n$  阶子群  $H$ , 即  $H$  是指数为 2 的正规子群. 特别地, 当  $|G| \geq 6$ , 且  $|G| \equiv 2 \pmod{4}$ , 则  $G$  不是单群.

**证明.** 考虑  $G$  在  $G$  上的左平移作用, 其诱导了  $G \rightarrow S_G$  的同态  $\varphi$ , 且  $\varphi$  是单射. 因此可以将  $G$  等同 (群同构) 于  $S_G$  的子群  $\text{im } \varphi$ . 设  $g$  是  $G$  的一个二阶元, 则  $\varphi(g)^2 = \varphi(g^2) = \text{id}$ , 且  $\varphi(g)$  没有不动点, 因此  $\varphi(g)$  可以表示为  $n$  个不相交的 2-轮换之积, 即  $\varphi(g)$  是一个奇置换, 由 [例, 3.8], 结论得证. ■

**例 3.10.** 设  $G$  是有限群,  $p$  是  $G$  的最小素因子. 若  $[G : H] = p$ , 则  $H \triangleleft G$ .

**证明.** 考虑  $G$  在左陪集集合  $X = G/H$  上的左平移作用.  $|X| = [G : H] = p$ . 设此作用诱导的同态为  $\varphi : G \rightarrow S_X \cong S_p$ . 设  $K = \ker \varphi$ . 根据同态基本定理,  $G/K \cong \text{Im}(\varphi) \leq S_p$ . 由此可知  $|G/K|$  能够整除  $|S_p| = p!$ . 同时

$$K = \ker \varphi = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} < H$$

这意味着  $|G/K|$  是  $p$  的倍数, 且  $|G/K|$  是  $|G|$  的因子. 设  $|G/K| = mp$ , 则  $m \mid (p-1)!$  且  $m \mid |G|$ , 但是注意  $(p-1)!$  的素因子都小于  $p$ , 以及  $p$  是  $|G|$  的最小素因子, 综合只能是  $m = 1$ , 即  $K = H$ . ■

**例 3.11.** 在  $A_4$  中, 不存在指数为 2 的子群.

**证明.** 设  $H < A_4$ , 且  $[A_4 : H] = 2$ , 这意味着对任意  $g \notin H$ , 有  $A_4 = H \cup gH$ , 也就是有  $g^2 \in H$ . 注意三轮换的阶为 3, 即有

$$(abc) = (abc)^4 = ((abc)^2)^2 \in H$$

但是  $A_4$  中有  $C_4^3 \times 2 = 8$  个三轮换, 如果将其写出来即是

$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$$

即  $|H| \geq 8$ , 这与  $|H| = 6$  矛盾. ■

**例 3.12.** 6 阶群只有  $\mathbb{Z}_6$  和  $S_3$ .

**证明.** 设  $G$  是 6 阶非循环群, 由 sylow 定理  $G$  有 2 阶和 3 阶群  $\langle a \rangle$  与  $\langle b \rangle$ , 则  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ . 考虑  $G$  在  $G/\langle a \rangle$  上的左诱导作用, 其诱导了一个同态  $\rho: G \rightarrow S_{G/\langle a \rangle} \cong S_3$ , 我们如果能说明  $\rho$  是单的, 则比较两边阶数就有  $G \cong \text{im } \rho = S_{G/H} \cong S_3$ .

若  $g \in \ker \rho$ , 则  $g\langle a \rangle = \langle a \rangle$ , 即  $g \in \langle a \rangle$ , 因此若  $\ker \rho$  非平凡, 则一定有  $g = a$ , 那么就有  $a(b\langle a \rangle) = b\langle a \rangle$ , 这意味着一定有  $ab = ba$ , 那么  $ab$  的阶即是 6, 但是我们已经假定了  $G$  不是循环群, 矛盾. ■

### 3.3 有限群的合成序列

设  $G$  是群,  $H, K$  是  $G$  的子群, 令

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

若我们要求  $HK$  是  $G$  的子群, 则首先要有  $HK$  中元素逆的全体  $KH \subset HK$ , 即要有  $HK = KH$ . 且当  $HK = KH$  时,

$$(h_1k_1)(k_2^{-1}h_2^{-1}) = h_1(k_1h_2)'k_2' = h_1h_3k_3k_2' \in HK$$

即  $HK$  是  $G$  子群, 且

$$h_1K = h_2K \iff h_2^{-1}h_1 \in K \iff h_2^{-1}h_1 \in H \cap K \iff h_1(H \cap K) = h_2(H \cap K)$$

这样就得到

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

特别地, 当  $H$  或  $K$  是  $G$  正规子群, 则  $HK$  是  $G$  的子群.

设  $G$  是群,  $H_1, H_2, H_3$  是  $G$  的子群, 则有

$$H_1 \cap (H_2H_3) \supset (H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3).$$

特别地, 当  $H_2 \subset H_1$  或者  $H_3 \subset H_1$  时, 有

$$H_1 \cap (H_2H_3) = (H_1 \cap H_2)(H_1 \cap H_3). \quad (3.6)$$

**定义 3.3.** 设  $G$  为群，设有  $G$  的子群列

$$G = G_1 \supsetneq G_2 \supsetneq \cdots \supsetneq G_{t+1} = \{e\} \quad (3.7)$$

若  $G_{i+1} \triangleleft G_i$ ，则称(3.7)是  $G$  的次正规序列. 若还有  $G_i/G_{i+1}$  是单群，则称(3.7)是  $G$  的合成序列， $G_i/G_{i+1}$  称为  $G$  的合成因子.

设  $G$  是有限群，若  $G$  不是单群，则取  $H_1$  是  $G$  的非平凡正规子群，考虑  $G/H_1$ ，记  $\pi_1$  是  $G \rightarrow G/H_1$  的自然同态. 若  $G/H_1$  不是单群，取  $H'_2$  是  $G/H_1$  的非平凡正规子群，则  $H_2 = \pi_1^{-1}(H'_2)$  是  $G$  中真包含  $H_1$  的正规子群，再考虑  $G/H_2$ . 由于群阶的有限性，总能找到  $G_2$ ，使得  $G/G_2$  是单群，再对  $G_2$  做相同操作，有限步之后，会得到

$$G_1 = G \supsetneq G_2 \supsetneq \cdots \supsetneq G_{k+1} = \{e\}$$

是  $G$  的一个合成序列.

我们上面的想法就是先找出  $G$  的一个极大正规子群  $G_2$ ，即包含  $G_2$  的正规子群只有  $G_2$  和  $G$ ，但是过程有点啰嗦. 我们也可以这样来看：假定  $G \neq \{e\}$ ，令  $\mathcal{S}$  为  $G$  的所有真正规子群构成的集合，即

$$\mathcal{S} = \{N \mid N \triangleleft G, N \neq G\}$$

平凡子群  $\{e\}$  显然是  $G$  的真正规子群，故  $\{e\} \in \mathcal{S}$ ，这意味着  $\mathcal{S}$  非空且有限. 考虑

$$\mathcal{O} = \{|N| \mid N \in \mathcal{S}\}$$

由于  $G$  是有限群， $\mathcal{O}$  是自然数集的一个有限非空子集. 则  $\mathcal{O}$  中存在最大元素. 设  $m = \max(\mathcal{O})$ . 我们在  $\mathcal{S}$  中选取一个阶数为  $m$  的子群  $M$ ，即  $|M| = m$ ，则  $M$  满足条件.

**定理 3.12 (Jordan-Hölder).** 设  $G$  是群，若

$$G = G_1 \supsetneq G_2 \supsetneq \cdots \supsetneq G_{t+1} = \{e\}$$

$$G = H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_{s+1} = \{e\}$$

是  $G$  的两个合成序列，则  $t = s$ ，且对每个  $i$ ，存在对应  $i'$ ，使得  $H_i/H_{i+1} \cong G_{i'}/G_{i'+1}$ .

证明. 对每个  $H_i$ ，有

$$H_i = (H_i \cap H_1) \supset (H_i \cap H_2) \supset \cdots \supset (H_i \cap H_{s+1}) = \{e\} \quad (3.8)$$

除去其中相同的项，(3.8)就是  $H_i$  的一个次正规列. 由于  $H_i/H_{i+1}$  是单群，那么包含  $H_{i+1}$  的  $H_i$  中正规子群只有  $H_i$  和  $H_{i+1}$ ，则在

$$H_i = (H_i \cap H_1)H_{i+1} \supset (H_i \cap H_2)H_{i+1} \supset \cdots \supset (H_i \cap H_{s+1})H_{i+1} = H_{i+1}$$

中, 对每个  $G_k$ , 要么有  $(G_k \cap H_i)H_{i+1} = H_i$ , 要么就有  $(G_k \cap H_i)H_{i+1} = H_{i+1}$ , 于是存在唯一  $i'$ , 使得

$$(G_{i'} \cap H_i)H_{i+1} = H_i \\ (G_{i'+1} \cap H_i)H_{i+1} = H_{i+1}$$

这样由第二同构定理就有

$$H_i/H_{i+1} = (G_{i'} \cap H_i)H_{i+1}/(G_{i'+1} \cap H_i)H_{i+1} \\ \cong (G'_{i'} \cap H_i)/((G'_{i'} \cap H_i)) \cap (G_{i'+1} \cap H_i)H_{i+1} \\ \stackrel{(3.6)}{=} (G_{i'} \cap H_{i+1})(G_{i'+1} \cap H_i)$$

对  $G_{i'} \supset G_{i'+1}$ , 进行类似的操作, 得到, 存在唯一  $j$ , 使得使得

$$(G_{i'} \cap H_j)G_{i'+1} = G_{i'} \quad \text{且} \quad (G_{i'} \cap H_{j+1})G_{i'+1} = G_{i'+1}$$

则

$$G_{i'}/G_{i'+1} \cong (G_{i'} \cap H_j)/(G_{i'} \cap H_{j+1})(G_{i'+1} \cap H_j)$$

我们断言  $j = i$ , 这样就有  $H_i/H_{i+1} \cong G_{i'}/G_{i'+1}$ .

若  $j \neq i$ , 不妨设  $i < j$ , 这意味着  $(G_{i'} \cap H_{i+1})G_{i'+1} = G_{i'}$ , 于是就有

$$H_i = (H_i \cap G_{i'}) \cdot H_{i+1} \\ = (H_i \cap (G_{i'} \cap H_{i+1})G_{i'+1}) H_{i+1} \\ = (G_{i'} \cap H_{i+1})(G_{i'+1} \cap H_i) \cdot H_{i+1} \\ = (G_{i'} \cap H_{i+1}) \cdot H_{i+1} \subset H_{i+1}$$

导出矛盾. 综上我们说明了指标集  $\{i\}$  与  $\{i'\}$  之间有一一对应关系, 这就完成了我们的证明. ■

### 3.4 群作用与 Sylow 定理

设  $G$  是群,  $\Omega$  是一个集合, 如果  $f : G \times \Omega \rightarrow \Omega, (g, x) \mapsto g \cdot x$  满足

$$e_G \cdot x = x, \quad \forall x \in \Omega \\ (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x), \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

则称  $f$  是  $G$  在  $\Omega$  上的一个作用, 以后简记  $g \cdot x = gx$ . 从同态角度来看,  $G$  在  $\Omega$  上作用全体与  $\text{Hom}(G, S_\Omega)$  有一一对应关系.

设  $G$  在  $\Omega$  上有个作用, 则对任意  $x \in \Omega$ , 称

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

是  $x$  的轨道. 称

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} < G$$

是  $x$  的稳定子群. 在  $Gx$  中, 有

$$g_1x = g_2x \iff g_2^{-1}g_1 \in G_x \iff g_1G_x = g_2G_x$$

于是  $|G_x| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}$  (当  $G$  是有限群时). 如果  $|Gx| = 1$ , 即  $G_x = G$ , 则称  $x$  为  $G$  的不动点.

对任意  $x, y \in \Omega$ , 有简单的事实:  $Gx = Gy$  或者  $Gx \cap Gy = \emptyset$ , 于是有

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} Gx = \bigcup_{x \in R} Gx$$

其中  $R$  表示一个代表系, 即对任意  $x, y \in R$ , 有  $Gx \cap Gy = \emptyset$ , 最终我们得到

$$|\Omega| = \sum_{x \in R} |Gx| = \sum_{x \in R} \frac{|G|}{|G_x|} = |X_0| + \sum_{x \in R \setminus X_0} \frac{|G|}{|G_x|} \quad (3.9)$$

其中  $X_0$  是  $G$  的不动点集.

设  $y \in Gx$ , 不妨设  $y = gx$ , 则若  $h \in G_y$ , 即有  $hy = h(gx) = (hg)x = y = gx$ , 这意味着  $g^{-1}hg \in G_x$ , 即  $h \in gG_xg^{-1}$ , 即  $G_y \subset gG_xg^{-1}$ , 比较两边元素个数, 即得  $G_y = gG_xg^{-1}$ , 即稳定子群相互共轭.

我们称  $G$  在  $\Omega$  上的作用是可迁的, 如果  $\Omega$  只有一个轨道, 即存在  $x \in \Omega$ , 满足对任意  $y \in \Omega$ , 存在  $g \in G$ , 使得  $y = gx$ , 或等价刻画为, 对任意  $x \in \Omega$ , 都有  $\Omega = Gx$ , 此时  $|\Omega|$  是  $|G|$  的因子.

我们称  $G$  在  $\Omega$  上的作用是忠实的, 如果

$$\{g \in G \mid gx = x, \forall x \in \Omega\} = \{e_G\}$$

换句话讲, 即该作用诱导的同态  $\rho: G \rightarrow S_\Omega$ ,  $\rho(g)(x) := g \cdot x$  是单同态, 也就是  $G$  可以视为  $S_\Omega$  的一个子群.

**例 3.13 (Burnside 引理).** 设有限群  $G$  作用在集合  $X$  上, 且该作用下轨道个数为  $t$ , 对任意  $g \in G$ , 令

$$F(g) = \#\{x \in X \mid gx = x\}$$

则有

$$\sum_{g \in G} F(g) = t|G|$$

**证明.** 令  $\Omega = \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$ , 下面我们用两种方法计算  $|\Omega|$ . 先固定  $g$ , 则  $|\Omega| = \sum_{g \in G} F(g)$ . 另外若先固定  $x$ , 记  $X$  的  $t$  个不同轨道为  $Gx_1, \dots, Gx_t$ , 则

$$\Omega = \bigcup_{x \in X} G_x \times \{x\} = \bigcup_{i=1}^t \bigcup_{y \in Gx_i} G_y \times \{y\}$$

且当  $y \in Gx_i$  时,  $|G_y| = |G_{x_i}|$ , 于是得到

$$|\Omega| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{i=1}^t \sum_{y \in Gx_i} |G_y| = \sum_{i=1}^t |Gx_i| \cdot |G_{x_i}| = t|G|.$$

■

**引理 3.13 (Cauchy 定理).** 设  $G$  是有限群,  $p$  是  $|G|$  的一个素因子, 则  $G$  中有  $p$  阶元.

**证明.** 考虑集合

$$X = \{(a_1, \dots, a_p) \mid a_i \in G, a_1 \cdots a_p = e\}$$

则  $|X| = |G|^{p-1}$ . 设  $\sigma = (12 \cdots p)$ , 则  $|\langle \sigma \rangle| = p$ , 考虑  $\langle \sigma \rangle$  在  $X$  中的作用为

$$\psi(a_1, \dots, a_p) := (a_{\psi(1)}, \dots, a_{\psi(p)}) \in X, \quad \forall \psi \in \langle \sigma \rangle$$

则该作用下每个轨道元素个数只能是  $p$  或 1, 若记  $X_0$  是  $\langle \sigma \rangle$  的不动点集, 则由(3.9)有,  $p$  整除  $|G|^{p-1} - |X_0|$ , 于是  $p \mid |X_0|$ , 且  $|X_0| \neq 0$  (因为  $(e, \dots, e) \in X_0$ ), 所以存在  $a \neq e$ , 使得  $a^p = e$ , 这意味着  $a$  的阶为  $p$ . ■

**例 3.14.** 设  $F$  是有限域, 则  $|F| = p^k$ , 其中  $p = \text{char } F$ .

**证明.** 将  $F$  视为加法运算下的交换群, 则  $|\langle 1 \rangle| = p$ , 且由于  $F$  中任意非零元的阶都是  $p$  (因为每个非零元都可逆), [引理, 3.13], 告诉我们  $|F|$  只能有素因子  $p$ , 于是  $|F| = p^k$ . ■

**定理 3.14 (sylow1).** 设  $G$  是有限群,  $p^k \mid |G|$ , 则  $G$  中有  $p^k$  阶群.

**证明.** 对群  $G$  的阶进行归纳, 假设结论对阶数小于  $|G|$  的群成立. 考虑  $G$  到自身的共轭作用, 则该作用下  $G$  的不动点集为  $C(G)$ , 由 (3.9)就有

$$|G| = |C(G)| + \sum_{g \in R, g \notin C(G)} [G : C(g)]$$

若  $p \mid |C(G)|$ , 由 [引理, 3.13],  $|C(G)|$  中有  $p$  阶元  $a$ , 且  $\langle a \rangle \triangleleft G$ , 于是可以考虑商群  $G/\langle a \rangle$ , 那么由归纳假设  $G/\langle a \rangle$  中有  $p^{k-1}$  阶群  $H/\langle a \rangle$ , 则  $|H| = |H : \langle a \rangle| \cdot |\langle a \rangle| = p^k$ , 即  $H$  是  $G$  的  $p^k$  阶群.

若  $p \nmid |C(G)|$ , 则存在  $g \notin C(G)$ , 使得  $p \nmid [G : C(g)]$ , 于是  $p^k \mid C(g)$ . 由于  $|C(g)| < |G|$ , 则由归纳假设  $C(g)$  中有  $p^k$  阶子群  $H$ , 其自然也是  $G$  的  $p^k$  阶子群. ■

设  $|G| = p^k m$ , 其中  $(p, m) = 1$ , 则 [定理, 3.14] 说明了  $G$  中  $p^k$  阶群的存在性, 我们称  $G$  中的  $p^k$  阶群为  $G$  的 sylow-p 群.

**定理 3.15 (sylow2).** 设  $G$  是有限群, 且  $|G| = p^k m, (p, m) = 1$ , 则  $G$  的 sylow-p 群相互共轭.

**证明.** 设  $H$  是  $G$  的一个 sylow-p 群. 对任意  $G$  的 sylow-p 群  $K$ , 考虑  $K$  在  $G/H$  上的左诱导作用:

$$k(gH) := (kg)H.$$

记  $X_0$  为  $K$  的不动点集, 则  $(|K|, |G/H|) = 1$ , 且由(3.9)有

$$|G/H| \equiv |X_0| \pmod{p},$$

于是  $|X_0| \neq 0$ , 即  $K$  有不动点  $gH$ : 满足对任意  $k \in K$ , 有  $kgH = gH$ , 即  $g^{-1}kg \in H$ , 即  $k \in gHg^{-1}$ , 从而  $K \subset gHg^{-1}$ , 比较两边元素个数就有  $K = gHg^{-1}$ . ■

由 [定理, 3.15],  $S = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$  即是  $G$  所有 sylow-p 群, 且

$$g_1Hg_1^{-1} = g_2Hg_2^{-1} \iff g_2^{-1}g_1 \in N_G(H) \iff g_1N_G(H) = g_2N_G(H)$$

即  $|S| = [G : N_G(H)] \mid m$ , 是  $G$  所有不同的 sylow-p 群个数.

**定理 3.16 (sylow3).** 设  $G$  是有限群,  $|G| = p^k m, (p, m) = 1$ , 记  $n_p$  是  $G$  的 sylow-p 群个数, 则  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ .

**证明.** 设  $H$  是  $G$  的一个 sylow-p 群, 考虑  $H$  在  $S = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$  上的共轭作用:

$$h(gHg^{-1}) := hgH(hg)^{-1}.$$

设  $gHg^{-1}$  是  $H$  一个不动点, 则对任意  $h \in H$ , 有  $(hg)H(hg)^{-1} = gHg^{-1}$ , 即  $g^{-1}Hg \subset N_G(H)$ , 也就是说  $g^{-1}Hg$  也是  $N_G(H)$  的 Sylow-p 群, 但注意  $N_G(H)$  的 sylow-p 群的个数为  $[N_G(H) : N_G(H)] = 1$ , 且  $H$  就是  $N_G(H)$  的一个 sylow-p 群, 于是就有  $g^{-1}Hg = H$ , 那么

$$gHg^{-1} = g(g^{-1}Hg)g^{-1} = H.$$

则  $H$  的不动点只有一个, 由(3.9)就有  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ . ■

有了 sylow 相关定理, 就引出常见的一类问题, 即判断一个群是否是单群, 说明一个群不是单群要相对简单的多, 下面列举一些常见的说明非单群手段.

**例 3.15.** 设  $G$  是交换群, 则  $G$  是单群当且仅当  $G$  是素数阶的循环群.

**例 3.16.** 设  $G$  是一个有限群, 其阶为  $|G| = p^n$ , 其中  $p$  为素数, 且  $n > 1$ , 则  $G$  不是单群. 特别地, 当  $n = 2$  时,  $G$  还是交换群.

证明. 考虑  $G$  到自身的共轭作用, 得到类方程

$$|G| = |C(G)| + \sum_{g \in G \setminus C(G)} [G : C(g)]$$

于是  $p \mid |C(G)|$ . 若  $G = C(G)$ , 此时由 [例, 3.15],  $G$  不是单群. 若  $C(G) \neq G$ , 则  $C(G)$  就是  $G$  的非平凡的正规群.

当  $n = 2$  时, 若  $C(G) \neq G$ , 则只能是  $|C(G)| = p$ . 取  $g \in G \setminus C(G)$ , 则  $|C(g)| > |C(G)| = p$ , 于是一定有  $|C(g)| = p^2$ , 这意味着  $g \in C(G)$ , 矛盾. ■

**例 3.17.** 设  $|G| = pq$ , 其中  $p$  和  $q$  是素数, 且  $p < q$ , 则  $G$  不是单群.

证明. 由 sylow 第三定理有  $n_q \mid p$ , 且  $n_q \equiv 1 \pmod{q}$ , 那么只能是  $n_q = 1$ , 即  $G$  的 sylow-q 群是  $G$  的非平凡正规子, 所以  $G$  不是单群. ■

**例 3.18.** 设  $|G| = p^2q(p \neq q)$ , 其中  $p, q$  为素数, 则  $G$  不是单群.

证明. 当  $p > q$  时, 由  $n_p \mid q$ , 且  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ , 这意味着只能是  $n_p = 1$ , 故  $G$  是单群.

当  $p < q$  时, 由  $n_q \mid p^2$ , 且  $n_q \equiv 1 \pmod{q}$ , 则可能的情形为  $n_q = 1$  或者  $n_q = p^2$ . 若  $n_q = p^2$ , 由于  $q$  是素数, 则任何两个不同  $G$  的 sylow-q 群的交只能是单位元, 于是  $G$  中有  $p^2(q-1)$  个  $q$  阶元, 这些元素都不能是  $G$  的 sylow-p 群中的元素, 所以唯一可能的情形是  $G$  剩下的  $p^2$  个元素刚好构成  $G$  的一个 sylow-p 群, 即  $n_p = 1$ , 于是  $G$  不是单群. ■

**例 3.19.** 设  $H$  是  $G$  的子群, 且  $[G : H] = n$ , 则存在  $G$  的正规子群  $K \subset H$ , 使得  $[G : K] \mid n!$ . 特别地, 当  $H$  是  $G$  的真子群, 且  $|G| \nmid n!$  时,  $K$  是  $G$  的非平凡正规子群, 即  $G$  不是单群.

证明. 考虑  $G$  在集合  $G/H$  上的左诱导作用, 其诱导了一个同态:  $\rho : G \rightarrow S(G/H)$ , 记  $K = \ker \rho$ , 则由同态基本定理,  $G/K \cong \text{im } \rho$ , 取阶数就有  $[G : K] \mid n!$ . 另外注意

$$K = \ker \rho = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \subset H$$

这样就完成了证明. ■

**例 3.20.** 设  $|G| = p^k m$ ,  $(m, p) = 1$ , 若  $n_p$  表示  $G$  的 sylow-p 群的个数, 则当  $|G| > n_p!$  时,  $G$  不是单群.

证明. 下面考虑  $n_p > 1$  情形. 令  $X = \{P_1, \dots, P_{n_p}\}$  是  $G$  的 sylow-p 群的集合, 考虑  $G$  在  $X$  上的共轭作用, 其诱导了一个同态:  $\rho : G \rightarrow S(X)$ , 则有

$$1 \leq [G : \ker \rho] = |\text{im } \rho| \leq n_p! < |G|$$

我们下面说明  $[G : \ker \rho] > 1$ , 从而  $\ker \rho$  即是  $G$  的非平凡正规子群, 于是  $G$  不是单群.

若  $[G : \ker \rho] = 1$ , 这意味着对任意  $g \in G$ , 有  $gP_1g^{-1} = P_1$ , 即  $g \in N_G(P_1)$ , 也就是  $G = N_G(P_1)$ , 则  $n_p = 1$ , 矛盾. ■

### 3.5 二面体群

对于  $n \geq 3$ , 二面体群  $D_n$  定义为将正  $n$  边形变换回自身的刚体运动 (rigid motions)<sup>1</sup> 组成的群, 群运算为变换的复合.

**命题 3.17.**  $D_n$  的阶为  $2n$ , 即  $D_n$  中元素是  $n$  个旋转和  $n$  个翻转 (反射).

**证明.** 对于正  $n$  边形, 取定一个顶点, 编号为 1, 然后按照顺时针给正  $n$  边形的  $n$  个顶点依次编号为  $1, \dots, n$ , 记  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , 则  $D_n$  在  $X$  上有个自然的作用, 且对任意  $x \in X$ , 如果考虑  $D_n$  的  $n$  个旋转, 那么这  $n$  个旋转作用在  $x$  上, 就会带  $x$  跑遍整个  $X$ , 也就是说该作用是可迁的. 记  $\text{stab}(1)$  是  $x = 1$  的稳定子群, 则

$$n = |X| = \frac{|D_n|}{|\text{stab}(1)|}$$

首先恒等变换和沿着过  $x = 1$  的对称轴的翻转是落在  $\text{stab}(1)$ , 即  $|\text{stab}(1)| \geq 2$ . 另一方面, 任取  $\sigma \in \text{stab}(1)$ , 则由于  $\sigma$  保持变换前后相邻顶点之间的距离, 即可能情形为  $\sigma(2) = 2$  或者  $\sigma(2) = n$ , 这两种情况刚好分别对应恒等变换和翻转, 于是  $|\text{stab}(1)| = 2$ , 则  $|D_n| = 2n$ . ■

不难看出  $D_n$  可描述为

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = e, s^2 = e, srs = r^{-1} \rangle$$

**例 3.21.** 当  $n \geq 3$  为奇数时,  $D_n$  的中心是平凡的. 当  $n \geq 3$  为偶数时,  $D_n$  的中心是  $\{1, r^{n/2}\}$ .

**证明.** 首先, 没有任何反射在  $D_n$  的中心里, 因为反射不与  $r$  交换:

$$(r^i s)r = r^i(sr) = r^i r^{-1}s = r^{i-1}s, \quad r(r^i s) = r^{i+1}s$$

所以如果  $r^i s$  与  $r$  交换, 则  $r^{i-1} = r^{i+1}$ , 这意味着  $r^2 = 1$ , 但  $r$  的阶  $n \geq 3$ .

假设旋转  $r^j \in Z(D_n)$  ( $0 \leq j < n$ ), 则首先要有  $r^j s = sr^j$ , 这等价于  $r^j s = r^{-j} s$ , 所以  $r^j = r^{-j}$ . 即  $r^{2j} = 1$ . 由于  $r$  的阶为  $n$ , 于是  $n \mid 2j$ , 且  $0 \leq 2j < 2n$ . 在  $\{0, 1, \dots, 2n-1\}$  中  $n$  的倍数只有 0 和  $n$ , 所以可能的情形是  $2j = 0$  或  $2j = n$ .

当  $n$  是奇数, 则唯一的选择是  $j = 0$ , 所以  $r^j = 1$ . 显然  $1 \in Z(D_n)$ , 所以  $Z(D_n) = \{1\}$ .

当  $n$  是偶数, 则  $r^j$  是 1 或  $r^{n/2}$ . 同样, 显然  $1 \in Z(D_n)$ , 下面我们验证  $r^{n/2} \in Z(D_n)$ . 显然  $r^{n/2}$  与每个  $r^i$  交换, 故我们只需验证  $r^{n/2}$  是否与每个反射  $r^i s$  交换, 计算就有

$$r^{n/2}(r^i s) = r^{n/2+i}s, \quad (r^i s)r^{n/2} = r^i r^{-n/2}s = r^i r^{n/2}s = r^{i+n/2}s = r^{n/2+i}s,$$

这样我们就完成了证明. ■

<sup>1</sup>刚体运动是一种保持距离的变换, 如旋转、反射和平移, 也被称为等距变换 (isometry).

**例 3.22.**  $D_n$  中的共轭类如下.

(1) 如果  $n$  是奇数,

- 单位元:  $\{1\}$ ,
- $(n-1)/2$  个大小为 2 的共轭类:  $\{r^{\pm 1}\}, \{r^{\pm 2}\}, \dots, \{r^{\pm(n-1)/2}\}$ ,
- 所有反射构成一个共轭类:  $\{r^i s : 0 \leq i \leq n-1\}$ .

(2) 如果  $n$  是偶数,

- 两个大小为 1 的共轭类:  $\{1\}, \{r^{n/2}\}$ ,
- $n/2 - 1$  个大小为 2 的共轭类:  $\{r^{\pm 1}\}, \{r^{\pm 2}\}, \dots, \{r^{\pm(n/2-1)}\}$ ,
- 反射分为两个共轭类:  $\{r^{2i}s : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\}$  和  $\{r^{2i+1}s : 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\}$ .

**证明.**  $D_n$  的每个元素都是  $r^i$  或  $r^i s$  的形式, 其中  $i$  为某个整数. 因此, 为了找到元素  $g$  的共轭类, 我们将计算  $r^i g r^{-i}$  和  $(r^i s)g(r^i s)^{-1}$ .

利用公式

$$r^i r^j r^{-i} = r^j, \quad (r^i s) r^j (r^i s)^{-1} = r^{-j}$$

随着  $i$  的变化, 可以看出  $r^j$  在  $D_n$  中的共轭元仅有  $r^j$  和  $r^{-j}$ .

为了找到  $s$  的共轭类, 我们计算

$$r^i s r^{-i} = r^{2i} s, \quad (r^i s) s (r^i s)^{-1} = r^{2i} s.$$

随着  $i$  的变化,  $r^{2i}s$  跑遍了那些  $r$  的指数可被 2 整除的反射. 如果  $n$  是奇数, 那么在模  $n$  的运算下, 每个整数都是 2 的倍数 (这是因为 2 在模  $n$  下是可逆的, 对于给定的  $k$ , 我们可以通过解  $k \equiv 2i \pmod{n}$ , 来求出  $i$ ). 因此当  $n$  是奇数时

$$\{r^{2i}s : i \in \mathbb{Z}\} = \{r^k s : k \in \mathbb{Z}\},$$

所以  $D_n$  中的所有反射都与  $s$  共轭.

当  $n$  是偶数时, 我们只能得到一半的反射作为  $s$  的共轭元. 另一半与  $rs$  共轭:

$$r^i (rs) r^{-i} = r^{2i+1} s, \quad (r^i s)(rs)(r^i s)^{-1} = r^{2i-1} s.$$

随着  $i$  的变化, 这给出了  $\{rs, r^3s, \dots, r^{n-1}s\}$ . ■

**推论 3.18.** 设  $D_n$  是二面体群, 则

(1) 当  $n$  为奇数时,  $D_n$  的所有正规子群为  $D_n$  和旋转子群  $\langle r^d \rangle$ , 其中  $|d|n$ .

(2) 当  $n$  为偶数时,  $D_n$  的所有正规子群为  $D_n, \langle r^2, s \rangle, \langle r^2, rs \rangle$  以及旋转子群  $\langle r^d \rangle$ .

### 3.6 有限生成 Abel 群分类

**例 3.23.** 设  $G$  是有限 Abel 群, 且  $|G| = mn, (m, n) = 1$ , 则有直积  $G = G_1G_2$ , 其中  $|G_1| = m, |G_2| = n$ .

证明. 由  $G$  是 Abel 群, 则

$$G_1 = \{g \in G \mid g^m = e\} \quad G_2 = \{g \in G \mid g^n = e\}$$

是  $G$  的子群. 且由  $(m, n) = 1$ , 存在  $u, v$ , 使得  $mu + nv = 1$ , 即对任意  $g \in G$ , 有

$$g = g^{mu+nv} = (g^{nv}) \cdot (g^{mu}) \in G_1G_2$$

则  $G = G_1G_2$ , 且若  $g \in G_1 \cap G_2$ , 则  $o(g) \mid n$ , 且  $o(g) \mid m$ , 那只能是  $o(g) = 1$ , 即  $g = e$ . 这样我们就证明了直积. 下面我们只要说明  $(|G_1|, n) = 1, (|G_2|, m) = 1$ , 即可说明  $|G_1| = m, |G_2| = n$ . 若  $(|G_1|, n) > 1$ , 则取其一个公共素因子  $p$ , 由 Cauchy 定理,  $G_1$  中有  $p$  阶元  $g$ , 但是由定义要有  $g^m = 1$ , 这意味着  $o(g) = p$  要整除  $m$ , 矛盾. ■

**推论 3.19.** 设  $G$  是有限 Abel 群, 且  $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ , 则存在直积分解  $G = G_1 \cdots G_s$ , 使得  $|G_i| = p_i^{r_i}$ .

**定理 3.20 (分类定理).** 设  $G$  是有限生成 Abel 群. 则  $G$  同构于以下形式的直和:

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k} \tag{3.10}$$

其中:

1.  $r \geq 0$  是整数 ( $G$  的自由秩) .
2.  $d_1, \dots, d_k$  是满足  $d_i \geq 2$  且  $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_k$  的整数.

且若

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{d_i} \cong \mathbb{Z}^s \oplus \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Z}_{c_j}$$

其中  $d_i$  和  $c_j$  均满足整除链条件. 则  $r = s, k = m$ , 且对于所有  $i$ , 有  $d_i = c_i$ .

证明. 见 David McKinnon 的讲义: Classification of Finitely Generated Abelian Groups. ■

### 3.7 $pq$ 阶群

**例 3.24 (第一类  $pq$  阶群).** 设有限群  $G$  的阶为  $|G| = pq$  ( $p < q$ ), 且  $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ , 则  $G$  是循环群.

**证明.** 记  $H, K$  分别是  $G$  的 sylow-p 和 sylow-q 群, 则  $n_q = 1$  且  $n_p = 1$ (因为  $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ ), 即  $H, K$  都是  $G$  的正规子群, 且  $H \cap K = \{e\}$ , 那么  $|HK| = pq = |G|$ , 即有直积  $G = HK$ . 又因为  $H, K$  都是素数阶群, 则可设  $H = \langle a \rangle$ ,  $K = \langle b \rangle$ , 那么有

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in H \cap K = \{e\}$$

这意味着  $ab = ba$ , 于是  $o(ab) = o(a)o(b) = pq$ , 即  $G$  是循环群. ■

**例 3.25 (第二类  $pq$  阶群).** 当  $q \equiv 1 \pmod{p}$  时, 可以作仿射群  $\text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$  的子群:

$$A_{p,q} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aff}(\mathbb{Z}_q) : x^p = 1 \text{ in } \mathbb{Z}_q \right\}. \quad (3.11)$$

这里 1 是  $\mathbb{Z}_q$  中的幺元. 则  $|A_{p,q}| = pq$ , 且群  $A_{p,q}$  是非阿贝尔群, 因为矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  不交换, 其中  $x$  是  $\mathbb{Z}_q$  中阶为  $p$  的元素.

**证明.** 注意  $y$  有  $q$  种选择, 由于  $x \in \mathbb{Z}_q^*$  且假设  $p|(q-1)$ , 由 Cauchy 定理, 在  $\mathbb{Z}_q^*$  中存在一个阶为  $p$  的元素, 因此它的幂次在  $\mathbb{Z}_q$  中给出至少  $p$  个  $x^p = 1$  的解. 另一方面, 作为  $\mathbb{Z}_q$  上的多项式  $x^p - 1$ , 其在  $\mathbb{Z}_q$  中的根不能超过  $p$  个, 所以  $x^p = 1$  在  $\mathbb{Z}_q$  上恰好有  $p$  个解. 于是  $|A_{p,q}| = pq$ . ■

**命题 3.21.** 设  $p$  和  $q$  为素数, 且  $p < q$  和  $q \equiv 1 \pmod{p}$ . 在同构意义下, (3.11) 中的群  $A_{p,q}$  是唯一的大小为  $pq$  的非 Abel 群.

**证明.** 见 Keith Conrad 的讲义: Applications of Cauchy's Theorem. ■

**推论 3.22.** 对于奇素数  $q$ ,  $2q$  阶群只有  $\mathbb{Z}_{2q}$  和二面体群  $D_q$ .

## 3.8 可解群

设  $G$  是群, 记  $G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]$ ,  $G^{(0)} = G$ , 若  $\varphi: G \rightarrow H$  是群同态, 则  $[\varphi(g_1), \varphi(g_2)] = \varphi([g_1, g_2])$ , 这意味着  $\varphi(G^{(k)}) \subset H^{(k)}$ , 特别地当  $\varphi$  是满的, 则  $\varphi(G^{(k)}) = H^{(k)}$ .

**定义 3.4.** 我们称群  $G$  是可解群, 如果  $G$  满足如下之一条件

(i) 存在  $k$ , 使得  $G^{(k)} = \{e\}$ , 即有

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright \cdots \triangleright G^{(k)} = \{e\}$$

(ii) 存在  $G$  的次正规列

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_t = \{e\}$$

使得  $G_i/G_{i+1}$  是 Abel 群.

**引理 3.23.** 若  $G$  是可解群, 则  $G$  的子群  $H$  是可解的, 且若  $H \triangleleft G$ , 则  $G/H$  是可解的. 反之, 若  $H \triangleleft G$ , 且  $H, G/H$  都是可解的, 则  $G$  也是可解的.

**证明.** 若  $H$  是  $G$  的子群, 那么  $H^{(k)} \subseteq G^{(k)}$ . 如果  $H$  是正规子群, 考虑自然同态  $\pi : G \rightarrow G/H$ , 则  $\pi(G^{(k)}) = (\pi(G))^{(k)} = (G/H)^{(k)}$ . 这说明若  $G$  可解, 则  $H$  和  $G/H$  都可解.

再证第二个结论. 若  $G/H$  可解, 则存在  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $(G/H)^{(k)} = \{\bar{e}\}$ . 于是

$$\pi(G^{(k)}) = (\pi(G))^{(k)} = (G/H)^{(k)} = \{\bar{e}\}.$$

因此  $G^{(k)} \subseteq \text{Ker } \pi = H$ . 而  $H$  可解, 故其子群  $G^{(k)}$  也可解, 从而存在  $l \in \mathbb{N}$  使得  $(G^{(k)})^{(l)} = \{e\}$ , 于是

$$G^{(k+l)} = (G^{(k)})^{(l)} = \{e\},$$

故  $G$  可解. ■

**定理 3.24.** 设  $G$  是有限群, 则  $G$  是可解群当且仅当  $G$  的合成因子都是素数阶循环群.

**证明.** 设  $G$  是有限阶可解群, 则其存在合成序列

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_k = \{e\}$$

其中  $G_i/G_{i+1}$  是单群. 由 [引理, 3.23],  $G_i/G_{i+1}$  也是可解群, 从而只能是  $(G_i/G_{i+1})^{(1)} = \{\bar{e}\}$ , 这意味着  $G_i/G_{i+1}$  是 Abel 群, 从而是素数阶的循环群. ■

## 4 Galois 理论

### 4.1 分裂域

设有域扩张  $E/F$ , 取定  $\alpha \in E$ , 定义  $F[\alpha] = \{\sum_{i=0}^m a_i \alpha^i \mid m \geq 0, a_i \in F\}$ . 考虑映射

$$\begin{aligned} f : F[x] &\longrightarrow F[\alpha] \\ \sum_{i=0}^n a_i x^i &\longmapsto \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \end{aligned} \tag{4.1}$$

(4.1)是一个满的环同态. 当  $\alpha$  是  $F$  代数元时, 记  $g(x) \in F[x]$  是  $\alpha$  极小多项式, 则  $F[x]/\langle g(x) \rangle \cong F[\alpha]$ , 由于  $g(x)$  是  $F[x]$  中的不可约元, 则  $\langle g(x) \rangle$  是极大主理想, 又因为  $F[x]$  是主理想整环, 从而  $\langle g(x) \rangle$  是极大理想, 则  $F[x]/\langle g(x) \rangle$  是域, 于是此时  $F[\alpha] = F(\alpha)$ .

当不存在  $F[x]$  中的非零多项式  $g(x)$ , 使得  $g(\alpha) = 0$  时, 即  $\alpha$  是  $F$  中超越元, 此时  $F[x] \cong F[\alpha]$ .

**定义 4.1.** 给定域  $F$  和  $f(x) \in F[x]$ , 称  $E$  是  $f$  在  $F$  的一个分裂域, 如果  $E$  满足

1)  $f$  可以在  $E$  中分解为一次因式的乘积

$$f(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), \quad c, \alpha_i \in E.$$

2)  $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**引理 4.1.** 设  $f \in F[x]$  是不可约的, 则存在  $F$  的有限扩张  $E$ , 使得  $f$  在  $E$  中有根.

**证明.** 令  $K = F[x]/\langle f(x) \rangle$ , 由于  $\langle f(x) \rangle$  是极大理想, 则  $F$  是域. 定义自然嵌入  $\sigma : F \rightarrow K$  为:

$$\sigma(a) = a + \langle f(x) \rangle, \quad \forall a \in F$$

记  $F' = \sigma(F) = \{a + \langle f(x) \rangle \mid a \in F\}$ , 则  $F'$  是  $K$  的一个子域, 且  $F \cong F'$ . 定义集合  $E$  为  $F$  与  $K$  中除去  $F$  像的部分的并集:

$$E = F \cup (K \setminus F')$$

令  $\varphi : E \rightarrow K$  如下:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \sigma(u) = u + \langle f(x) \rangle, & u \in F \\ u, & u \in K \setminus F' \end{cases}$$

显然  $\varphi$  是双射. 其逆映射  $\varphi^{-1} : K \rightarrow E$  为:

$$\varphi^{-1}(v) = \begin{cases} \sigma^{-1}(v), & v \in F' \\ v, & v \in K \setminus F' \end{cases}$$

利用双射  $\varphi$ , 我们将  $K$  上的加法  $+_K$  和乘法  $\cdot_K$  拉回到  $E$  上. 对任意  $x, y \in E$ , 定义:

$$\begin{aligned} x +_E y &= \varphi^{-1}(\varphi(x) +_K \varphi(y)) \\ x \cdot_E y &= \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot_K \varphi(y)) \end{aligned}$$

首先, 由于  $(K, +_K, \cdot_K)$  是域, 且  $\varphi$  是双射, 故  $(E, +_E, \cdot_E)$  必然构成一个域. 其次, 我们需要验证  $F$  确实是  $E$  的子域 (即  $E$  上的运算限制在  $F$  上与  $F$  原有运算一致). 设  $a, b \in F$ . 注意到  $\varphi(a) = \sigma(a)$  且  $\sigma$  是域同态, 则

$$\begin{aligned} a +_E b &= \varphi^{-1}(\sigma(a) +_K \sigma(b)) \\ &= \varphi^{-1}(\sigma(a + b)) \\ &= a + b \end{aligned}$$

同理可验证乘法  $a \cdot_E b = a \cdot b$ .

最后, 对于  $f(x)$  的根. 在  $K$  中, 根为  $\bar{x} = x + \langle f(x) \rangle$ . 由于  $\bar{x} \notin F'$  (因为  $f$  不可约且  $\deg(f) \geq 1$ ), 故  $\bar{x} \in K \setminus F'$ . 根据  $\varphi$  的定义, 该元素对应  $E$  中的元素即为它自身. ■

**注记 4.1.** 一般教科书都直接将  $F$  视为  $F[x]/\langle f(x) \rangle$  的子域，并未做过多解释，因为是第一次出现，我们稍稍解释，以后我们也将  $F$  直接视为  $F[x]/\langle f(x) \rangle$  的子域。

**定理 4.2.** 设  $f \in F[x]$  是首一的，且  $\deg f > 0$ ，则存在  $f$  在  $F$  上的一个分裂域。

**证明.** 对  $\deg f = n$  进行归纳，当  $n = 1$  时，取  $E = F$  即可。现在假设结论对  $F[x]$  中次数小于  $n$  的多项式成立。取  $f$  在  $F[x]$  中的一个不可约因式为  $p$ ，则  $\deg p > 1$ ，由 [引理, 4.1]，存在  $K/F$ ，使得  $p(x)$  在  $K$  中有根  $\alpha_1$ ，假定

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r)g(x), \quad \alpha_i \in K, \quad r \geq 1$$

为  $f$  在  $K$  中分解，不妨设  $K = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ，否则考虑其子域  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 。因为  $g(x) \in F[x] \subset K[x]$ ，则由归纳假设，存在  $g(x)$  在  $K$  中的分裂域  $E$ ，则  $f$  可以在  $E$  中分解为一次因式的乘积  $f(x) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)$ ，且

$$E = K(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

这意味着  $E$  是  $f$  在  $F$  中的一个分裂域。 ■

**推论 4.3.** 设  $f \in F[x]$ ，且  $\deg f = n$ ， $E$  是  $f$  的一个分裂域，则  $[E : F] \leq n!$ 。

设  $\eta : F \rightarrow \tilde{F}$  是域同构，其诱导了  $\eta$  的一个满的扩张同态：

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} : F[x] &\longrightarrow \tilde{F}[x] \\ \sum_{i=0}^n a_i x^i &\longmapsto \sum_{i=0}^n \eta(a_i) x^i \end{aligned} \tag{4.2}$$

现在考虑  $g(x)$  是  $F[x]$  中的一个不可约元，那么  $\tilde{g}(x) = \tilde{\eta}(g)$  是  $\tilde{F}[x]$  的不可约元，记  $\pi$  是  $\tilde{F}[x] \rightarrow \tilde{F}[x]/\langle \tilde{g}(x) \rangle$  的自然投影，那么  $\pi \circ \tilde{\eta} : F[x] \rightarrow \tilde{F}[x]/\langle \tilde{g}(x) \rangle$  是满的同态，且  $\ker \pi \circ \tilde{\eta} = \langle g(x) \rangle$ ，则  $F[x]/\langle g(x) \rangle \cong \tilde{F}[x]/\langle \tilde{g}(x) \rangle$ 。在这个过程中，我们始终保持  $\eta$  的作用不变。

**引理 4.4.** 设有域同构  $\eta : F \rightarrow \tilde{F}$ ，和域扩张  $E/F, \tilde{E}/\tilde{F}$ ，设  $\alpha \in E$  是  $F$  的代数元，记  $g(x) \in F[x]$  是  $\alpha$  的极小多项式，则  $\eta$  可以开拓为  $F(\alpha) \rightarrow \tilde{E}$  的同态当且仅当  $\tilde{g}$  在  $\tilde{E}$  中有根，于是这样的同态个数等于  $\tilde{g}$  在  $\tilde{E}$  中不同根的个数，即这样的同态个数小于等于  $\deg \tilde{g} = \deg g = [F(\alpha) : F]$ ，于是等号成立当且仅当  $\tilde{g}(x)$  在  $\tilde{E}$  中可以完全分解，且没有重根。

**证明.** 设  $\xi : F(\alpha) \rightarrow \tilde{E}$  是由  $\eta$  开拓得到的群同态，则  $0 = \xi(g(\alpha)) = \tilde{g}(\xi(\alpha))$ ，这意味着  $\xi(\alpha)$  是  $\tilde{g}$  在  $\tilde{E}$  中的根。反过来，设  $\tilde{\alpha} \in \tilde{E}$  是  $\tilde{g}(x)$  的一个根，则由  $\tilde{g}$  的不可约性， $\tilde{g}(x)$  即是  $\tilde{\alpha}$  的极小多项式，那么由式(4.1)和(4.2)有

$$F(\alpha) \xrightarrow{\cong} F[x]/\langle g(x) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{F}[x]/\langle \tilde{g}(x) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{F}(\tilde{\alpha}) \longrightarrow \tilde{E}$$

这个过程保持  $\eta$  的作用，合起来即得到一个从  $F(\alpha) \rightarrow \tilde{E}$  的由  $\eta$  开拓的同态。 ■

**定理 4.5.** 设  $\eta_0 : F \rightarrow \tilde{F}$  是同构，且  $E$  和  $\tilde{E}$  分别是  $f \in F[x]$  和  $\tilde{f} \in \tilde{F}[x]$  的一个分裂域，则存在  $\eta_0$  的开拓  $\eta : E \rightarrow \tilde{E}$  是同构，且这样的同构个数小于等于  $[E : F]$ ，且等号成立当且仅当  $f$  在  $F[x]$  中的任一不可约因式在  $E$  中没有重根。

证明. 不妨假定在  $E[x]$  中有  $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ . 记  $F_0 = F$ ,  $F_i = F_{i-1}(\alpha_i)$ , 由 [引理, 4.4], 存在  $\eta_i : F_i \rightarrow \tilde{F}_i$ , 使得  $\eta_i|_{F_{i-1}} = \eta_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 即有

$$\begin{array}{ccccccc} F & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E \\ \downarrow \eta_0 & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_2 & & \downarrow \eta = \eta_n \\ \tilde{F} & \longrightarrow & \tilde{F}_1 & \longrightarrow & \tilde{F}_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \tilde{E} \end{array} \quad (4.3)$$

注意

$$\tilde{f}(x) = \tilde{\eta}_0(f) = \tilde{\eta}(f) = \tilde{\eta} \left( \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right) = \prod_{i=1}^n (x - \eta(\alpha_i)) \quad (4.4)$$

由  $\tilde{E}$  是  $\tilde{f}$  的分裂域，于是  $\tilde{E} = \tilde{F}(\eta(\alpha_1), \dots, \eta(\alpha_n))$ . 这样就有

$$\begin{aligned} \eta(E) &= \eta(F_{n-1}(\alpha_n)) = \eta_{n-1}(F_{n-1})(\eta(\alpha_n)) = \cdots = \eta_0(F_0)(\eta(\alpha_1)) \cdots (\eta(\alpha_n)) \\ &= \tilde{F}(\eta(\alpha_1), \dots, \eta(\alpha_n)) = \tilde{E} \end{aligned}$$

这意味着  $\eta$  是满的，自然也是同构。下面我们主要讨论  $\eta_0$  的开拓同构  $\eta : E \rightarrow \tilde{E}$  的个数。若  $\eta$  是这样的同构，则令  $\eta|_{F_i} = \eta_i$ ，则有  $\eta_i|_{F_{i-1}} = \eta_{i-1}$ ，于是我们看  $\eta$  有多少个，就是看每一步的  $\eta_i$  有多少个。

记  $g_i(x) \in F_{i-1}[x]$  为  $\alpha_i$  的极小多项式，则由于  $f(x) \in F_{i-1}[x]$ ，且  $f(\alpha_i) = 0$ ，这意味着  $g_i(x) \mid f(x)$ ，也就是说  $g_i(x)$  其实就是  $f(x)$  在  $F_{i-1}[x]$  中的一个不可约因式，那么  $\tilde{g}_i(x)$  就是  $\tilde{f}$  在  $\tilde{F}_{i-1}[x]$  的一个不可约因式。又因为  $\eta(\alpha_i)$  是  $\tilde{g}_i(x)$  的根，则  $\{\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_n(x)\}$  包含了  $\tilde{f}$  的所有根。

现在设  $\tilde{p}(x)$  是  $\tilde{f}(x)$  在  $\tilde{F}[x]$  的任一不可约因式，则存在某个  $\tilde{g}_i(x)$  使得  $\tilde{p}(x)$  与  $\tilde{g}_i(x)$  在  $\tilde{E}$  中有公共根  $\beta$ 。于是，若  $\tilde{g}_i(x) \nmid \tilde{p}(x)$ ，则  $(\tilde{p}(x), \tilde{g}_i(x))_{\tilde{F}_{i-1}[x]} = 1$ ，即存在  $u(x), v(x) \in \tilde{F}_{i-1}[x]$ ，使得  $\tilde{p}(x)u(x) + \tilde{g}_i(x)v(x) = 1$ ，将  $x = \beta$  代入即得  $0 = 1$ ，这是矛盾的。于是有  $\tilde{g}_i(x) \mid \tilde{p}(x)$ 。

即  $\tilde{f}(x)$  在  $\tilde{F}[x]$  中的任一不可约因式都包含某个  $\tilde{g}_i(x)$  作为因式。反过来，对每个  $\tilde{g}_i(x)$ ，其必定与  $\tilde{f}(x)$  在  $\tilde{F}[x]$  中的某个不可约因式  $\tilde{p}(x)$  有公共根，即  $\tilde{g}_i(x)$  是  $\tilde{p}(x)$  的因式。

由 [引理, 4.4]，每个  $\eta_i$  的个数小于等于  $[F_i : F_{i-1}] = \deg \tilde{g}_i(x)$ ，这样就有

$$|\text{Iso}(E, \tilde{E})| \leq [F_1 : F_0] \cdot [F_2 : F_1] \cdots [F_n : F_{n-1}] = [E : F] \quad (4.5)$$

其中  $|\text{Iso}(E, \tilde{E})|$  表示满足条件的同构个数，且等号成立当且仅当  $\tilde{g}_i(x)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 在  $\tilde{E}$  中没有重根。

当  $\tilde{f}$  在  $\tilde{F}[x]$  中的任一不可约因式  $\tilde{p}(x)$  在  $\tilde{E}$  中没有重根时,  $\tilde{g}_i(x)$  作为某一个  $\tilde{p}(x)$  的因式, 自然在  $\tilde{E}$  中没有重根. 反过来, 每个  $\tilde{f}(x)$  在  $\tilde{F}[x]$  中的不可约因式  $\tilde{p}(x)$ , 都可以视为(在调整顺序后) $\tilde{g}_1(x)$ , 即作为(4.3)的第一步  $\eta_1$  中的极小多项式, 所以当(4.5)取等号时,  $\tilde{p}(x)$  在  $\tilde{E}$  中没有重根.

于是(4.5)等号成立当且仅当  $\tilde{f}$  在  $\tilde{F}[x]$  中的任一不可约因式在  $\tilde{E}$  中没有重根, 由(4.4)和  $\eta$  是双射, 这也等价于  $f(x)$  的任一不可约因式在  $E$  中没有重根. ■

**注记 4.2.** 此定理深刻地揭示了代数结构的内蕴性 (Intrinsic Nature). 它表明, 分裂域  $E$  的代数结构完全由基域  $F$  及多项式  $f(x)$  的内在代数性质所决定, 而与元素的具体记号无关. 同构  $\eta_0$  就像一座桥梁, 它保证了在  $F$  中成立的一切代数运算关系, 在映射到  $\tilde{F}$  后依然成立; 而定理 4.5 进一步断言, 这种“结构的保真性”在扩域过程中不会丢失—— $E$  与  $\tilde{E}$  作为  $f$  与  $\tilde{f}$  的分裂域, 在代数意义上是不可分辨的 (Indistinguishable). 这体现了抽象代数的核心思想: 我们在乎的不是元素是什么, 而是元素之间如何相互作用.

**推论 4.6.**  $f \in F[x], (\deg f > 0)$  的分裂域存在, 且在同构意义下唯一.

**推论 4.7.** 设  $E, E_1$  是  $f \in F[x]$  的两个分裂域, 则  $\eta: E \rightarrow E_1, \eta|_F = \text{id}$  这样的同构个数不超过  $[E : F]$ , 且等号成立当且仅当  $f$  在  $F[x]$  中的任一不可约因式在  $E$  中没有重根.

设  $f \in F[x]$ , 若  $f$  的任一不可约因式在其分裂域  $E$  中没有重根, 则我们称  $f$  是可分多项式. 若有代数扩张  $K/F$ , 对任意  $\alpha \in K$ , 记  $g(x) \in F[x]$  是  $\alpha$  的极小多项式, 若  $g(x)$  是可分多项式, 则称  $K/F$  是可分扩张,  $\alpha$  称为  $F$  的可分元. 若对任意  $f \in F[x]$  (默认次数大于零),  $f$  都是可分多项式, 则称  $F$  是完全域.

**定义 4.2.** 设  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in F[x]$ , 定义  $f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$ , 称为是  $f(x)$  的形式导数.

当  $f'(x) = 0$  时, 意味着  $a_1 = 2a_2 = \dots = na_n = 0$ . 若  $\text{char}F = 0$ , 则此时  $a_1 = \dots = a_n = 0$ , 即  $f = a_0$ . 若  $\text{char}F = p > 0$ , 则当  $p \nmid k$  时,  $a_k = 0$ , 此时有  $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^s b_k x^{kp}$ .

**命题 4.8.** 设  $f(x) \in F[x]$ , 则  $f$  在其分裂域  $E$  上没有重根当且仅当  $(f, f')_{F[x]} = 1$ .

**证明.** 以下不妨假定  $f$  是首一的. 若  $\alpha$  是  $f$  的重根, 则设在  $E[x]$  中有分解  $f = (x - \alpha)^2 g(x)$ , 则

$$f'(x) = 2(x - \alpha)g(x) + (x - \alpha)^2 g'(x)$$

于是有  $f'(\alpha) = 0$ , 此时不会有  $(f, f') = 1$ . 若  $(f, f') \neq 1$ , 取  $(f, f')$  在  $E$  中的一个根, 记为  $\beta$ , 设  $f = (x - \beta)h(x)$ , 则

$$f'(x) = h(x) + (x - \beta)h'(x)$$

由  $f'(\beta) = 0$ , 即有  $h(\beta) = 0$ , 这意味着  $\beta$  是  $f$  在  $E$  中的重根. ■

于是若  $\text{char}F = 0$ , 则  $F$  一定是完全域. 当  $\text{char}F = p > 0$  时,  $g(x) \in F[x]$  是不可约元, 则  $g(x)$  不可分当且仅当  $g'(x) = 0$ .

**引理 4.9.** 设  $\text{char}F = p > 0$ , 对任意  $a \in F$ , 则  $f(x) = x^p - a$  要么在  $F[x]$  中不可约, 要么存在  $b \in F$ , 使得  $f(x) = (x - b)^p$ .

**证明.** 若  $f$  在  $F[x]$  中可约, 设  $g(x)$  是  $f(x)$  的一个真因式, 记  $b$  为  $g$  在  $E$  中的一个根, 则有  $f(b) = 0$ , 即  $a = b^p$ . 于是  $f(x) = x^p - b^p = (x - b)^p$ . 那么  $g(x)$  在  $E[x]$  中的分解一定形如  $g(x) = (x - b)^k (k < p)$ , 则  $g(x)$  的常数项为  $(-b)^k \in F$ , 这意味着  $b^k \in F$ . 又因为  $(k, p) = 1$ , 则存在整数  $u, v$ , 使得  $1 = ub + pv$ , 于是

$$b = b^{uk+pv} = (b^k)^u \cdot (b^p)^v \in F$$

■

**命题 4.10.** 设  $\text{char}F = p > 0$ , 则  $F$  是完全域当且仅当  $F^p = F$ , 即由 [例, 1.1] 诱导的 Frobenius 同态是同构. 特别地, 有限域都是完全域.

**证明.** 当  $F^p \neq F$  时, 即存在  $a \in F$ , 满足对任意  $b \in F$ , 都有  $a \neq b^p$ , 由 [引理, 4.9],  $f(x) = x^p - a$  是不可约的, 且  $f' = 0$ , 于是  $f$  是不可分多项式, 即  $F$  不是完全域.

当  $F$  不是完全域时, 取  $F[x]$  中的不可约的不可分多项式  $f(x)$ , 由  $f'(x) = 0$ , 可以不妨设

$$f(x) = a_0 + a_1 x^p + a_2 x^{2p} + \cdots + a_n x^{np}$$

若对每个  $a_i$ , 都存在对应的  $b_i \in F$ , 使得  $a_i = b_i^p$ , 则

$$f(x) = b_0^p + b_1^p x^p + \cdots + b_n^p x^{np} = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)^p$$

这与  $f$  不可约矛盾, 于是存在某个  $a_i$ , 使得对任意  $b \in F$ , 都有  $a_i \neq b^p$ , 即  $F^p \neq F$ . ■

**定理 4.11.** 设  $p$  为素数,  $k$  为正整数, 令  $q = p^k$ , 则存在唯一的  $q$  阶域, 记为  $\mathbb{F}_q$ .

**证明.** 考虑素域  $\mathbb{Z}_p$  上的多项式  $f(x) = x^q - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ , 设  $K$  是  $f(x)$  在  $\mathbb{Z}_p$  上的分裂域. 令

$$S = \{\alpha \in K \mid \alpha^q - \alpha = 0\} = \{\alpha \in K \mid \alpha^q = \alpha\}.$$

显然  $0, 1 \in S$ , 对于任意  $\alpha, \beta \in S$ , 由于  $K$  的特征为  $p$ , 则

$$(\alpha \pm \beta)^q = \alpha^q \pm \beta^q = \alpha \pm \beta,$$

$$(\alpha\beta)^q = \alpha^q\beta^q = \alpha\beta.$$

若  $\beta \neq 0$ , 则  $(\beta^{-1})^q = (\beta^q)^{-1} = \beta^{-1}$ . 这说明集合  $S$  对域的四则运算封闭, 故  $S$  是  $K$  的一个子域. 对任意  $a \in \mathbb{Z}_p$ , 由费马小定理有  $a^p = a$ , 这样就有  $a^q = a$ , 这意味着  $\mathbb{Z}_p \subseteq S$ . 即  $S$  是

$\mathbb{Z}_p$  的一个扩域. 又因为  $f'(x) = qx^{q-1} - 1 = p^k x^{q-1} - 1 = -1$ , 于是  $(f, f') = 1$ . 因此,  $f(x)$  在分裂域  $K$  中没有重根, 即  $|S| = q$ . 又因为  $S$  是  $\mathbb{Z}_q$  的扩域且包含  $f(x)$  的所有根, 则只能是  $S = K$ .

现在设  $F$  是任意一个阶为  $q = p^k$  的有限域, 其特征为  $p$ , 即  $F$  包含了一个  $p$  阶子域  $\mathbb{F}'_p$ . 考虑  $F$  的乘法群  $F^* = F \setminus \{0\}$ , 这是一个阶为  $q-1$  的群. 由 Lagrange 定理, 对任意  $\alpha \in F^*$ , 有  $\alpha^{q-1} = 1$ . 两边同乘  $\alpha$ , 得  $\alpha^q = \alpha$ . 对于零元 0, 显然也有  $0^q = 0$ . 因此,  $F$  中的全部  $q$  个元素都是多项式  $x^q - x$  的根, 这意味着  $F$  是  $f(x) \in \mathbb{F}'_p[x]$  的一个分裂域. 因为  $\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}'_p$ , 由 [定理, 4.5],  $K$  与  $F$  同构. ■

**注记 4.3.** 通过 [例, 3.14] 和 [定理, 4.11], 我们实际上找出了所有的有限域.

**定义 4.3.** 设有代数扩张  $E/F$ , 若对任意  $F[x]$  中的不可约多项式, 要么  $g(x)$  在  $E$  中没有根, 要么  $g(x)$  在  $E[x]$  中可以完全分解, 则称  $E/F$  为正规扩张.

**定理 4.12.** 设  $E/F$  是有限扩张, 则  $E/F$  是正规扩张当且仅当  $E$  是某个  $f \in F[x]$  的分裂域.

**证明.** 假设  $E$  是  $f \in F[x]$  的分裂域. 设  $g \in F[x]$  不可约, 若  $g$  在  $E$  中有根  $\alpha$ , 我们证明  $g$  在  $E$  中可以完全分解. 设  $K$  是  $g \in E[x]$  的分裂域, 任意取定  $g$  在  $K$  中的根  $\beta$ , 我们只要证明  $E = E(\beta)$ . 在 [定理, 4.5] 中, 取  $\eta_0 : F \rightarrow F$  为恒等映射, 此时  $g = \tilde{g}$ , 则  $\eta_0$  可以开拓为同构  $\eta_1 : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ , 注意  $E$  和  $E(\beta)$  分别是  $f \in F(\alpha)[x]$  和  $\tilde{f} = f \in F(\beta)[x]$  的分裂域, 则  $\eta_1$  又可开拓为同构  $\eta : E \rightarrow E(\beta)$ . 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0, \quad x_i \in F, e_i \in E \\ \iff & \eta \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \eta(e_i) = 0 \end{aligned}$$

这意味着  $[E : F] = [E(\beta) : F]$ , 从而一定有  $E = E(\beta)$ .

反过来, 设  $E/F$  是正规扩张, 且  $[E : F] = n$ , 以及  $E = \text{span}_F \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , 记  $g_i \in F[x]$  是  $\alpha_i$  的极小多项式, 则  $g_i$  在  $E$  中可以完全分解, 令  $f = \prod_{i=1}^n g_i$ , 则  $E$  是  $f \in F[x]$  的分裂域. ■

**定义 4.4.** 设  $E/F$  是有限扩张, 类似上面证明与记号, 我们令  $K$  是  $f = \prod_{i=1}^n g_i(x) \in F[x]$  的分裂域, 则  $E/F$  包含于正规扩张  $K/F$ , 因此我们可以定义包含  $E/F$  的最小正规扩张, 称为是  $E/F$  的正规闭包.

**定理 4.13.** 设  $E/F$  是有限的正规扩张,  $K$  是  $E/F$  的中间域, 则如下条件等价:

- (1)  $K/F$  是正规扩张.
- (2) 对任意  $\eta \in \text{Gal}(E/F)$ , 有  $\eta(K) \subset K$ .
- (3) 对任意  $\eta \in \text{Gal}(E/F)$ , 有  $\eta(K) = K$ .

**证明.** 假定  $K/F$  是正规扩张, 任取  $\alpha \in K$ , 记  $g(x) \in F[x]$  为  $\alpha$  的极小多项式, 则  $g$  在  $K$  中可以完全分解, 对任意  $\eta \in \text{Gal}(E/F)$ , 则有  $0 = \eta(g(\alpha)) = g(\eta(\alpha))$ , 这意味着  $\eta(\alpha) \in K$ , 从而  $\eta(K) \subset K$ . 另外作为  $F$ -线性空间, 又有  $[\eta(K) : F] = [K : F]$ , 这样就有  $\eta(K) = K$ .

反过来, 假定对任意  $\eta \in \text{Gal}(E/F)$ , 都有  $\eta(K) = K$ . 对任意  $\alpha \in K$ , 设  $g(x) \in F[x]$  是  $\alpha$  的极小多项式, 我们证明  $g$  在  $K$  中可以完全分解. 由于  $E/F$  是正规扩张, 则  $g$  在  $E$  中可以完全分解. 设  $\beta$  是  $g$  在  $E$  中的任意一根, 在 [定理, 4.5] 中, 取  $\eta_0 : F \rightarrow F$  为恒等映射, 其可以开拓为  $\eta_1 : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ , 由于  $E$  分别可以视为  $f \in F(\alpha)[x]$  和  $f \in F(\beta)[x]$  上的分裂域, 则  $\eta_1$  可以开拓为  $\eta \in \text{Gal}(E/F)$ , 这意味着  $\beta = \eta_1(\alpha) = \eta(\alpha) \in K$ , 于是  $g(x)$  在  $F$  中可以完全分解. ■

**定理 4.14.** 设  $f \in F[x]$  是可分多项式,  $E$  是  $f \in F[x]$  的分裂域, 则  $E/F$  是可分扩张.

**证明.** 对任意  $\alpha \in E$ , 设  $g(x) \in F[x]$  是  $\alpha$  的最小多项式, 由 [定理, 4.12],  $E/F$  是正规扩张, 则  $g$  在  $E$  中可以完全分解, 记  $g$  在  $E$  中有  $k$  个互异根, 由 [引理, 4.4], 其诱导了从  $F(\alpha) \rightarrow E$  的  $k$  个不同嵌入, 记为  $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k)}$ , 注意  $E$  可以视为可分多项式  $f \in F(\alpha)[x]$  的分列域, 由 [定理, 4.5], 对每个  $\eta^{(i)}$ , 有  $[E : F(\alpha)]$  个由  $\eta^{(i)}$  开拓的同构:  $\eta : E \rightarrow E$ , 于是

$$|\text{Gal}(E/F)| = [E : F] = k \cdot [E : F(\alpha)]$$

又因为  $[E : F] = [E : F(\alpha)] \cdot [F(\alpha) : F] = [E : F(\alpha)] \cdot \deg(g)$ , 于是就有  $\deg(g) = k$ , 即  $g(x)$  是可分多项式, 于是  $E/F$  是可分扩张. ■

## 4.2 Galois 扩张

# 索引

$\mathbb{Z} \left[ \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$ , 11  
Jordan-Hölder, 23  
 $pq$  阶群, 31  
Cauchy 定理, 26  
UFD, 11

中国剩余, 7  
二面体群, 29  
分式域, 8  
单群  $A_n (n \geq 5)$ , 19