系统工程理论与实践
Systems Engineering-Theory & Practice
ISSN 1000-6788,CN 11-2267/N

《系统工程理论与实践》网络首发论文

题目：　　　　第一价格密封共同价值拍卖中的身份披露问题
作者：　　　　向往，马国轩
收稿日期：　　2024-04-28
网络首发日期：2024-08-15
引用格式：　　向往，马国轩．第一价格密封共同价值拍卖中的身份披露问题[J/OL]．系统工程理论与实践. https://link.cnki.net/urlid/11.2267.n.20240815.1011.002

系统工程理论与实践

Systems Engineering — Theory & Practice

doi: 10.12011/SETP2024-0941　　中图法分类号：F224　　　文献标志码：A

第一价格密封共同价值拍卖中的身份披露问题

向往[1]，马国轩[2]

(1. 中国人民大学 财政金融学院，北京 100872; 2. 对外经济贸易大学 全球价值链研究院，北京 100105)

摘要：本文研究拍卖中竞标者身份维度的信息不对称问题.我们构建了包含两个竞标者的第一价格密封共同价值拍卖模型,其中一个竞标者有可能是比对手拥有更多信息的专家.我们描述了该博弈的贝叶斯纳什均衡.进一步的,我们在该模型的基础上增加了一个信号传递机制,用来描述竞标者可能进行的有关身份信息的交流.我们发现,在诚实披露的假设下,外行竞标者可以通过披露自身身份来获得更高回报,最终形成分离的完美贝叶斯均衡.反之在廉价交流的假设下,专家竞标者总是希望让他人误认为自己是外行,而外行竞标者也有可能希望让他人误认为自己是专家,导致身份的信息不对称无法消除.

关键词：信息不对称；信息披露；第一价格密封拍卖；共同价值拍卖

收稿日期：2024-04-28
作者简介：通信作者：向往(1989-)，男，汉族，助理教授，博士，研究方向：应用微观经济学、社会网络，E-mail：xiangw@ruc.edu.cn；马国轩(1990-)，男，汉族，助理研究员，博士，研究方向：拍卖理论、产业经济学、企业动态变化，E-mail：guoxuan@uibe.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(72192804).
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (72192804).
中文引用格式：向往，马国轩. 第一价格密封共同价值拍卖中的身份披露问题[J]. 系统工程理论与实践，doi：10.12011/SETP2024-0941.
英文引用格式：XIANG Wang, MA Guoxuan. Identity disclosure in first-price sealed-bid common-value auctions[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, doi: 10.12011/SETP2024-0941.

Identity disclosure in first-price sealed-bid common-value auctions

XIANG Wang[1], MA Guoxuan[2]

(1. School of Finance, Renmin University of China, Beijing 100872; 2. Research Institute for Global Value Chains, University of International Business and Economics, Beijing 100105)

Abstract: This study delves into the issue of asymmetric information regarding bidders' identities in auctions. We construct a first-price sealed-bid auction model involving two bidders, where one bidder may be an expert, possessing more information than his opponent. We delineate the Bayesian Nash equilibrium of this game. Additionally, we incorporate a signaling mechanism to depict potential communication regarding identity among bidders. We find that under the assumption of truth-telling, the non-expert bidder can attain higher returns by revealing his identity, leading to a separating perfect Bayesian equilibrium. Conversely, under the assumption of cheap talk, the expert bidder consistently aims to deceive others into perceiving him as a non-expert, while the non-expert bidder may also attempt to deceive others into perceiving him as an expert. This perpetuates the existence of asymmetric information regarding identity.
Keywords: asymmetric information; information disclosure; first-price sealed-bid auction; common-value auction

1. 问题提出

信息不对称在拍卖中是一个常见且备受关注的问题. 在拍卖过程中, 不同身份的竞标者往往拥有不同的信息水平和对拍卖品价值的认知, 这种差异化的信息结构会影响他们的出价策略以及最终的拍卖结果. 随着互联网的普及和全球数字化水平的提高, 在线拍卖市场的规模不断扩大, 使得越来越多的人选择在网上进行拍卖交易. 与传统的线下拍卖相比, 在线拍卖使得参与拍卖的地理限制被打破, 进而大幅增加了拍卖的匿名性. 另一方面, 互联网上丰富的信息交流又提供给参与拍卖的竞标者更多的可以用来推测其他竞争对手身份的机会. 因此竞标者在相互博弈的过程中不但要面对传统的关于拍卖品价值的信息不对称, 同时也要面对来自身份维度的更复杂的信息不对称问题. 例如, 我国的司法拍卖房产由法院委托包括淘宝、京东在内的七家网络平台进行, 因此竞标者一般无法知道其他竞标者的身份. 但是, 如果面对一个地理位置坐落于北京的法拍房, 一个网络 ip 地址在上海的竞标者就大概率对房屋的各种非市场公开信息不甚了解, 而一个网络 ip 地址就在北京的竞标者则有可能了解这些信息. 这种多维度的不对称信息，使得对拍卖问题的理论研究在数字经济时代再次成为重要的研究前沿方向之一[1][2]. 然而, 尽管学术界对于拍卖中关于拍卖品本身价值的信息不对称问题有着深入的研究, 但是对于竞标者身份维度的信息不对称问题的研究则相对较少[3][4].

本研究聚焦于一个包含两个竞标者的第一价格密封共同价值拍卖, 其中不对称的信息源于竞标者身份的差异. 具体而言, 尽管其中一个竞标者可以确知是一个外行, 但另一个竞标者的身份则保持私密: 他可能是拥有更多关于拍卖品价值信息的专家, 也可能是另一个外行. 我们的研究发现, 如果这一拍卖的均衡存在, 那么它既是唯一的, 也是不对称的. 我们进一步研究了允许竞标者在拍卖开始前通过信号传递主动披露自己身份的情况, 并讨论了在何种机制下这种信息披露能够消除身份上的信息不对称. 我们发现, 在诚实披露(Truth-telling)的设定下, 尽管一个专家竞标者总是希望隐藏身份, 但一个外行的竞标者可以通过披露身份来获得更高的回报, 于是竞标者是否披露身份信息成为判断其身份的依据. 相反在廉价交流(Cheap Talk)的设定下, 专家竞标者总是希望让他人误认为自己是外行, 而外行的竞标者也有可能希望让他人误认为自己是专家, 最终导致关于身份的信息不对称无法消除.

在经典的研究中, Milgrom 和 Weber[5][6]最早探讨了专家竞标者在拍卖中的影响, 并提出了联系原则(Linkage Principle), 即认为拍卖中的卖家总是应该公开披露有关商品价值的信息以提高自身的收益. 随后的研究广泛探讨了拍卖中的信息不对称以及信息披露对卖家利润的影响(包括但不限于[7], [8], [9], [10]以及[11]). 然而, 这些研究主要集中在竞标者身份信息为已知的情况. 据我们所知, 目前已

有文献中讨论竞标者身份的信息不对称的仅有两篇. Piccione 和 Tan[12]研究了一个多人第一价格拍卖模型, 其中每个竞标者既可能是无知的外行, 也可能是拥有一定关于拍卖品价值信息的内行. 他们确定了一种对称均衡的竞标策略, 并强调在共同价值的假设下, 存在内行的概率增加会降低无知竞标者的出价, 从而导致卖家收入下降. McClellan[13]考虑了一个多人第二价格共同价值拍卖, 其中竞标者可能是拥有一定关于拍卖品价值的噪音信息的外行, 也可能是完全确定拍卖品价值的专家. 他同样专注于对称均衡, 并表明披露竞标者身份会损害卖家的收入. 我们的模型主要在两个关键方面与这些研究不同. 首先, 我们考虑了具有先验不对称身份信息的竞标者, 他们对竞争对手的身份有不同的了解. 这允许我们探索不对称均衡, 并研究这种关于身份的信息优势怎样影响一个竞标者的出价决策与最终收益. 其次, 我们更加关注的是在允许竞标者进行先验的交流沟通的情况下, 具有身份信息优势的竞标者是否愿意主动披露自己的身份信息, 以及最终的均衡结果中这一身份信息的不对称是否会被自动消除.

另一方面, 部分文献也在研究其它类型的不对称竞标者, 以及在此之上的身份信息不对称问题. 例如 Bikhchandani[14]以及 Fong 和 Garrett[15]均讨论了一个包含两个竞标者的第二价格拍卖场景, 其中只有一个竞标者了解拍卖品究竟是具有共同价值还是私人价值. de Frutos 和 Pechlivanos[16]以及 Larson[17]则研究了类似的包含两个竞标者的第二价格拍卖模型, 但假设拍卖品价值同时具有共同和私人成分, 并且竞标者各自在这些成分上的权重是私人信息. Weber[18]以及后续的一些研究, 例如[19], [20]以及[21]等, 讨论了序贯拍卖的情况, 其中前一个拍卖的结果会使得后一个拍卖的竞标者产生异质性. Che 和 Gale[22]以及后续的一些研究, 例如[23], [24]以及[25]等, 则考虑了预算约束维度的竞标者异质性问题. 我们的研究与这些论文有相似之处, 因为它同样研究了包含多个维度的竞标者(即身份信息与关于拍卖品价值的信息), 并且同样发现其中均衡的存在性对于信息结构的假设敏感. 然而与这些论文不同的是, 我们的研究焦点在于分析专家与外行这种身份差异的信息不对称, 而这种身份维度的异质性会直接影响拍卖品价值维度的信息结构.

至于拍卖中的信息披露问题, 除了前述站在卖家视角的文献外, 也有部分研究聚焦于竞标者策略性的信息传递. 例如 Benoit 和 Dubra[26]指出在第一价格关联价值拍卖中, 竞标者可能有意愿主动披露自己的关于拍卖品共同价值部分的信息. Kovenock 等[27]则研究了全额支付拍卖的情况, 并认为无论拍卖品具有私人价值还是共同价值, 竞标者均不可能独立做出主动披露自己的私人信息的决策, 但是在私人价值的假设下, 存在竞标者之间通过勾结达成披露私人信息协议的可能性. Tan[28]则进一步拓展了 Benoit 和 Dubra[26]的结论, 并发现披露关于共同价值部分的信息在第二价格拍卖或者全额支付拍卖中也可能发生. 另外, Avery[29]及后续的一些研究, 例如[30]和[31]等, 则考虑了英式拍卖中竞标者通过跳跃式报

价策略性的披露或者隐藏信息的问题. 但是上述这些研究都集中于关于拍卖品价值的信息披露, 而非我们关注的关于竞标者身份的信息披露.

本文的剩余部分结构如下. 第 2 节介绍了模型设定. 第 3 节分析了模型的均衡结果, 特别关注在何种情况下, 竞标者有激励自愿的披露自己的身份从而形成分离均衡(Separating Equilibrium). 第 4 节针对我们模型的一些设定拓展进行了分析. 最后我们在第 5 节进行总结并对可能的后续研究进行了简单说明.

2. 模型设定

我们考虑一个两阶段模型, 其中有两个风险中性的竞标者, 分别记为$i = 1, 2$. 在该模型的第一阶段中, 竞标者可以通过传递信号来向竞争对手披露自己的身份信息. 而在第二阶段中, 竞标者进行一个第一价格密封共同价值拍卖. 拍卖品的价值$v \in \{0, 1\}$, 且先验概率相等.

我们假设竞标者 1 的身份是公开信息: 他是一个外行, 将在第二阶段的拍卖中观察到一个关于竞拍品真实价值的信号s_1. 相反, 竞标者 2 的身份信息是私密的, 他有同等可能是一个外行(记作o)或者一个专家(记作e). 如果竞标者 2 是一个外行, 那么他将在拍卖阶段观察到一个关于竞拍品真实价值的信号s_2. 而如果他是一个专家, 那么他会同时观察到s_1和s_2. 进一步的, 我们假设信号$s_i \in \{0,1\}$是在给定v的条件下独立同分布的. 具体的, 当$v = 0$时, $s_i = 0$的条件概率为$Pr(s_i = 0|v = 0) = \alpha_0 > \frac{1}{2}$, 而当$v = 1$时, $s_i = 1$的条件概率为$Pr(s_i = 1|v = 1) = \alpha_1 > \frac{1}{2}$. 换言之, 在我们的模型中外行与专家的身份区别来源于他们获得的关于竞拍品真实价值的信息不同, 专家获得的关于竞拍品真实价值的信息是严格优于外行的. 此处所谓的信息严格占优, 按照 Einy 等[9]的定义方式, 指的是专家对于竞拍品真实价值的条件期望, 不会因为额外增加外行的信息而发生改变. 在本模型中即$E(v|s_1, s_2) = E(v|s_1, s_2, s_1)$. 另一方面, 我们的模型设定描述了现实中一个普通的拍卖参与者与一个潜在的专业拍卖参与者之间的互动, 即竞标者 2 知道竞标者 1 是个外行, 而竞标者 1 却不确定竞标者 2 是否是一个专家.

在博弈的第一阶段, 竞标者 2 可以选择主动披露一些关于自己身份的信息, 我们将其描述为信号$t \in T$. 我们考虑两种不同的信号可选集T. 第一种情况是文献中通常假设的诚实披露, 即$T(o) = \{n, o\}$且$T(e) = \{n, e\}$. 也就是说, 竞标者总可以选择不披露任何身份信息(表示为$t = n$), 但是如果他选择披露自己的身份信息,

则必须披露真实的身份信息．这种设定在互联网拍卖的背景下实际上隐含着一个完全信息验证的假设，即一个竞标者的身份信息可以进行完整的官方验证，而他可以选择是公开这种官方验证过的身份还是保持匿名．虽然这是一个很强的假设，但是对这种情况下信号传递的分析可以帮助我们获得一个基准结果．与诚实披露相对的第二种情况是廉价交谈，不失一般性的，我们可以将其描述为$T(o) = T(e) = \{o, e\}$．注意此处我们无需将其写为$T(o) = T(e) = \{n, o, e\}$，因为选择不披露信息的选项$t = n$可以等价为披露一个完全的随机信息即$Pr(t = o) = Pr(t = e) = \frac{1}{2}$．显然，这对应的就是在互联网上完全没有官方验证机制的情况，于是竞标者可以随意发表任何言论，宣称自己是任何的身份．这是与诚实披露相反的另一种基准场景．

在博弈的第二阶段，两个竞标者进行一个标准的第一价格密封拍卖．具体来说，两个竞标者同时独立选择报价$b_i \in R_+, i = 1,2$．报价高的一方获得拍卖品并支付其报价的金额，因此获得收益$v - b_i$，而报价较低的一方获得零收益．假设打破平局规则为，如果两个竞标者报价相同，则其中随机一方获胜．

在第一阶段中竞标者 2 的身份信息披露会影响竞标者 1 在第二阶段中对于其竞争对手身份的信念，进而影响竞标者 1 的报价策略．我们令$\beta_o \equiv Pr(t = o|o)$表示外行竞标者 2 在第一阶段披露信号$t = o$的概率，也即他的一阶段策略，并令$\beta_e \equiv Pr(t = e|e)$表示专家竞标者 2 在第一阶段披露信号$t = e$的概率．我们将竞标者 1 在第二阶段中对于竞标者 2 身份的信念记为$q \equiv Pr(o|t)$，即q描述了竞标者 1 认为竞标者 2 是个外行的条件概率．进一步的，我们将要分析的是该模型的完美贝叶斯均衡(Perfect Bayesian Equilibrium)：即对于任意的q竞标者 1 在第二阶段的策略$b_1(s_1|q)$以及两种不同身份的竞标者 2 在第二阶段的策略$b_2(s_2|o)$和$b_2(s_1, s_2|e)$共同构成一个贝叶斯纳什均衡，竞标者 1 的信念q依据两种不同身份的竞标者 2 在第一阶段的信号传递策略β_o和β_e进行更新，而β_o和β_e的选择满足序贯理性．我们将重点分析，该模型在何种情况下会出现分离均衡，即不同身份类型的竞标者 2 会在第一阶段选择不同的信号传递策略，以便竞标者 1 能够区分他的身份，使得$q = 0$或$q = 1$．又会在何时出现汇合均衡(Pooling Equilibrium)，即竞标者 1 无法通过第一阶段的信号区分竞标者 2 的身份，使得$q \in (0,1)$．

3. 均衡求解

在分析该模型之前，我们首先定义如下符号来简化我们的叙述．我们令$v(s_1, s_2)$表示在给定(s_1, s_2)情况下，拍卖品真实价值的条件期望，并令$v(s_i)$表示在给定s_i情况下，拍卖品真实价值的条件期望．因此我们容易得到如下结果：$v(0,0) =$

$\frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2+(1-\alpha_1)^2}$，$v(0,1)=v(1,0)=\frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{\alpha_0(1-\alpha_0)+\alpha_1(1-\alpha_1)}$，$v(1,1)=\frac{\alpha_1^2}{(1-\alpha_0)^2+\alpha_1^2}$，$v(0)=\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0+(1-\alpha_1)}$以及$v(1)=\frac{\alpha_1}{(1-\alpha_0)+\alpha_1}$．接下来我们令$p_{jk}=Pr(s_1=j|s_2=k)$表示在给定$s_2=k$情况下，$s_1=j$的条件概率．由于对称性，对于任意的$j,k$均有$Pr(s_1=j|s_2=k)=Pr(s_2=j|s_1=k)$，我们可以得到如下结果：$p_{01}=\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)+\alpha_1(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_0)+\alpha_1}$，$p_{11}=\frac{(1-\alpha_0)^2+\alpha_1^2}{(1-\alpha_0)+\alpha_1}$，$p_{10}=\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)+\alpha_1(1-\alpha_1)}{\alpha_0+(1-\alpha_1)}$以及$p_{00}=\frac{\alpha_0^2+(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0+(1-\alpha_1)}$.

我们采取逆向归纳求解该模型，首先考虑对于任意给定的q，两个竞标者在第二阶段的子博弈中的贝叶斯纳什均衡．注意到当$q=1$时，竞标者 1 确信竞标者 2 的身份为外行；反之当$q=0$时，竞标者 1 确信竞标者 2 的身份为专家．因此这两种情况下，子博弈中不存在关于竞标者身份的信息不对称性．我们将此时两个竞标者的出价策略总结为如下引理:

引理 1: (a)如果$q=1$，那么唯一的子博弈贝叶斯纳什均衡包含如下的策略组合: $b_1(0)=b_2(0|o)=v(0,0)$；$b_1(1)$与$b_2(1|o)$为服从累积分布函数$G(b)=\frac{p_{01}[b-v(0,0)]}{p_{11}[v(1,1)-b]}$的混合策略，其取值范围为$\left[v(0,0),v(1)-p_{01}\left(v(0,1)-v(0,0)\right)\right]$.
(b)如果$q=0$，那么唯一的子博弈贝叶斯纳什均衡包含如下的策略组合：$b_1(0)$为服从累积分布函数$H_{1,0}(b)=\frac{v(0,1)-v(0)}{v(0,1)-b}$的混合策略，其取值范围为

$[v(0,0),v(0)]$；$b_1(1)$为服从累积分布函数$H_{1,1}(b)=\frac{v(1,1)-v(1)}{v(1,1)-b}$的混合策略，其取值范围为$[v(0,1),v(1)]$；$b_2(0,0|e)=v(0,0)$;$b_2(0,1|e)$为服从累积分布函数$H_{2,01}(b)=\frac{p_{00}[b-v(0,0)]}{p_{10}[v(0,1)-b]}$的混合策略，其取值范围为$[v(0,0),v(0)]$;$b_2(1,0|e)=v(0,1)$;$b_2(1,1|e)$为服从累积分布函数$H_{2,11}(b)=\frac{p_{01}[b-v(0,1)]}{p_{11}[v(1,1)-b]}$的混合策略，其取值范围为$[v(0,1),v(1)]$.

反之，当$q\in(0,1)$时，竞标者 1 在子博弈中依旧不能确定竞标者 2 的身份，即存在关于竞标者身份的信息不对称性．此时我们将子博弈中的贝叶斯纳什均衡需要满足的条件归纳为如下引理:

引理 2: 对于任意的$q\in(0,1)$，该子博弈存在至多一个贝叶斯纳什均衡，其对应的策略组合满足如下必要条件:
(a)竞标者 1 的策略$b_1(0)$为混合策略，其取值范围为$[v(0,0),v_1]$；$b_1(1)$为混合策略，其取值范围为$[v_1,v_4]$;

(b)专家竞标者 2 的策略$b_2(0,0|e)=v(0,0)$；$b_2(0,1|e)$为混合策略，其取值范围为$[v(0,0),v_1]$；$b_2(1,0|e)$为混合策略，其取值范围为$[v_2,v_3']$；$b_2(1,1|e)$为混合策略，其取值范围为$[v_3,v_4]$；
(c)外行竞标者 2 的策略$b_2(0|o)=v(0,0)$；$b_2(1|o)$为混合策略，其取值范围为$[v(0,0),v_3]\backslash[v_2,v_3']$.
其中参数$v_1<v_2<v_3'\leq v_3<v_4$以及对应的累积分布函数可由均衡下的期望收益相同条件内生计算得到.

引理 2 的数学推导比较复杂,并且可以看作是引理 1 的一般化证明.另一方面,其包含的经济学含义大多将在下文的分析中体现,因此我们将引理 2 的证明放在文末的附录中.引理 2 指出,在第二阶段的拍卖中,均衡如果存在,那么是唯一的.均衡的唯一性结果与多数第一价格拍卖的研究相同,因此并不很令人意外.需要特别说明的是,在$q\in(0,1)$的情况下,由于本模型中的竞标者特征由身份与关于拍卖品价值的信息两个维度共同刻画,因此会出现非单调性问题,这可能会使得博弈过程中的均衡点不存在.具体来说,注意到在获得信号$s_2=1$的外行竞标者 2 看来,拍卖品的价值$v\in[v(0,1),v(1,1)]$,然而对于获得信号$(s_1,s_2)=(1,0)$的专家竞标者 2 来说,拍卖品的价值$v=v(0,1)$,换言之,从拍卖品价值维度的信息来说,获得信号$s_2=1$的外行竞标者 2 相比获得信号$(s_1,s_2)=(1,0)$的专家竞标者 2 更愿意报出高价.但另一方面,由于身份维度的信息不对称性,使得获得信号$(s_1,s_2)=(1,0)$的专家竞标者 2 知道他的竞争对手拿到了比较好的信号,因此为了获胜他又不得不报出相对高价.而只有参数组合(q,α_0,α_1)的取值可以使竞标者 1 选择恰当的$b_1(1)$,从而让不同身份类型的竞标者 2 在$b_1(1)$的支持集上都可以找到合适的无差异出价区间时,该子博弈才存在均衡.因为本文的重点并不是探讨多维竞拍者模型的均衡存在性问题,我们将均衡存在性的充分必要条件的严格数学表达也留在引理 2 的证明中,在后续的讨论中我们则仅考虑均衡存在的情况进行进一步的分析.对于这一问题有兴趣的读者可以参考包括 Fang 和 Morris[32]以及 Jackson[33]在内的一些文献中的相关分析.

3.1 诚实披露设定下的信号传递

接下来我们分析在诚实披露设定下，第一阶段模型中，不同身份竞标者 2 的信号传递决策. 由于存在完全的信息验证，不同身份类型的竞标者 2 只要选择传递其对应的身份信号$t=o$或$t=e$，那么竞标者 1 就会相信并对应的更新其关于竞标者 2 身份的信念q. 因此，竞标者 2 的信号传递问题简化为分析竞标者 2 在子博弈拍卖中的期望收益与q的关系问题.

具体的，根据引理 2 的证明中用到的期望收益相同条件，我们可以得到获得不同信号s_2的外行竞标者 2 在给定q情况下的条件期望收益$\pi_2(s_2|o,q)$为:

$$\pi_2(0|o,q)=0. \tag{1}$$

以及

$$\pi_2(1|o,q)=p_{01}[v(0,1)-v_1]. \tag{2}$$

加权平均即可以得到外行竞标者 2 在子博弈中的先验条件期望收益:

$$\pi_2(o,q)=\frac{1+\alpha_0-\alpha_1}{2}\pi_2(0|o,q)+\frac{1-\alpha_0+\alpha_1}{2}\pi_2(1|o,q). \tag{3}$$

其中$Pr(s_2=0)=\frac{1+\alpha_0-\alpha_1}{2}$是$s_2=0$的无条件概率, $Pr(s_2=1)=\frac{1-\alpha_0+\alpha_1}{2}$是$s_2=1$的无条件概率. 我们进一步的将该收益与引理 1 中$q=1$情况下外行竞标者 2 在子博弈中的先验条件期望收益$\pi_2(o,1)$做对比:

$$\pi_2(o,1)=\frac{1-\alpha_0+\alpha_1}{2}\pi_2(1|o,1)=\frac{1-\alpha_0+\alpha_1}{2}p_{01}[v(0,1)-v(0,0)]. \tag{4}$$

计算可得如下结论:

引理 3: 在第二阶段的子博弈拍卖中, $\pi_2(o,1)>\pi_2(o,q)$对任意$q\in(0,1)$均成立.

换言之, 一个外行竞标者 2 总是愿意竞标者 1 知道自己的身份. 不严谨的说, 这一现象的原因是如果竞标者 1 认为竞标者 2 有可能是一个专家, 那么他的出价策略会更加``激进", 因此导致竞标者 2 的期望收益下降. 之所以说这一表述不严谨, 是因为这里我们所说的``激进"的投标策略仅仅是针对其最终均衡结果的收益比较而言的, 并不是指竞标者 1 在$q=1$情况下的投标策略一阶随机占优于他在$q<1$情况下的投标策略. 值得注意的是, 这一结果与 Piccione 和 Tan[12]中专家竞标者出现概率增加导致外行竞标者出价降低的结论相反, 这是由如下均衡效应导致的: 在 Piccione 和 Tan[12]中, 专家竞标者也不知道其竞争对手的身份, 因此当出现专家的概率上升时, 专家竞标者为了取胜需要提高出价, 这导致外行竞标者由于担心赢家诅咒而不敢出价过高; 相反的, 在我们的设定中专家竞标者知道他面对的必定是一个外行, 因此会相应降低报价以获取更高的期望收益, 但这反而给了外行竞标者机会, 导致他面对一个专家类型的对手时报价反而更加激进, 以期赢得拍卖品.

按照同样的思路, 我们可以分析一个专家竞标者 2 在获得不同信号(s_1,s_2)情况下的条件期望收益$\pi_2(0,0|e,q)$:

$$\pi_2(0,0|e,q) = 0. \tag{5}$$

$$\pi_2(0,1|e,q) = v(0,1) - v_1. \tag{6}$$

$$\pi_2(1,0|e,q) = F_{1,1}(v_2)[v(0,1) - v_2]. \tag{7}$$

以及

$$\pi_2(1,1|e,q) = v(1,1) - v_4. \tag{8}$$

其中$F_{1,1}(\cdot)$是根据引理 2 计算得到的，$b_1(1)$对应的累积分布函数．加权平均即可以得到专家竞标者 2 在子博弈中的先验条件期望收益:

$$\begin{aligned}\pi_2(e,q) = {} & \frac{\alpha_0^2 + (1-\alpha_1)^2}{2}\pi_2(0,0|e,q) + \\ & \frac{\alpha_0(1-\alpha_0) + \alpha_1(1-\alpha_1)}{2}\pi_2(0,1|e,q) + \\ & \frac{\alpha_0(1-\alpha_0) + \alpha_1(1-\alpha_1)}{2}\pi_2(1,0|e,q) + \\ & \frac{(1-\alpha_0)^2 + \alpha_1^2}{2}\pi_2(1,1|e,q).\end{aligned} \tag{9}$$

其中的权重分别为信号(s_1, s_2)的实现值为(0,0)，(0,1)，(1,0)以及(1,1)的无条件概率．我们同样的可以将其与引理 1 中$q = 0$情况下专家竞标者 2 在子博弈中的期望收益做对比，即:

$$\pi_2(0,0|e,0) = 0. \tag{10}$$

$$\pi_2(0,1|e,0) = v(0,1) - v(0). \tag{11}$$

$$\pi_2(1,0|e,0) = 0. \tag{12}$$

以及

$$\pi_2(1,1|e,0) = v(1,1) - v(1). \tag{13}$$

进而

$$\pi_2(e,0)=\frac{\alpha_0^2+(1-\alpha_1)^2}{2}\pi_2(0,0|e,0)+\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)+\alpha_1(1-\alpha_1)}{2}\pi_2(0,1|e,0)+\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)+\alpha_1(1-\alpha_1)}{2}\pi_2(1,0|e,0)+\frac{(1-\alpha_0)^2+\alpha_1^2}{2}\pi_2(1,1|e,0). \tag{14}$$

计算可以得到如下结论:

引理 4: 在第二阶段的子博弈拍卖中，$\pi_2(e,0)<\pi_2(e,q)$对任意$q\in(0,1)$均成立.

不意外的，引理 4 的结论与引理 3 相对应，说明一个专家竞标者 2 总是不愿意自己的身份被竞标者 1 知道. 因为只要竞标者 1 认为竞标者 2 可能也是一个外行，那么竞标者 1 就会出价相对``温和"，以期在遇到外行竞标者 2 时候获得更高的收益. 而这种相对``温和"的出价也就有利于专家竞标者 2 以更低的价格获得拍卖品.

然而注意到，尽管专家竞标者 2 不愿意披露自己的身份信息，但是只要外行竞标者 2 总是选择披露自己的身份，那么竞标者 1 就可以通过信号$t=o$来区分出专家竞标者 2: 只要没有披露自己是外行的，即$t\neq o$，就一定是专家竞标者. 于是专家竞标者 2 在第一阶段的选择不会影响竞标者 1 的信念更新. 综合引理 3 和 4，我们可以得到如下结论:

命题 1: 在诚实披露设定下，该博弈的完美贝叶斯均衡都是分离均衡，具体可以描述为:

(a)在第一阶段，外行竞标者 2 选择$t=o$，专家竞标者 2 对于选择$t=n$和$t=e$无差异;

(b)竞标者 1 的信念为$q(t=o)=1$且$q(t\neq o)=0$;

(c)两个竞标者在第二阶段的拍卖中根据引理 1 中的策略进行出价.

3.2 廉价交谈设定下的信号传递

与诚实披露的设定不同，在廉价交谈的假设下，不同身份类型的竞标者 2 拥有相同的信号可选集T，因此他们可以通过模仿其他身份的竞标者的行为来混淆竞标者 1 的信念. 为了理解信号传递决策过程中的激励，我们首先假设竞标者 2 可以通过信号传递让竞标者 1 确信他是某种身份的竞标者 2(这种身份不一定是其真实身份)，并考察在此假设下不同身份的竞标者 2 会做出怎样的选择.

考虑一个专家竞标者 2，此时如果专家竞标者 2 让竞标者 1 确信自己是专家，那么两个竞标者将按照引理 1(b)进行出价，因此专家竞标者 2 的先验期望收益与前述公式(14)一致. 反之，如果专家竞标者 2 让竞标者 1 确信自己是外行，那么竞标者 1 将按照引理 1(a)进行出价，而实际上是专家的竞标者 2 则可以选择对应的最佳出价策略. 此时对于$(s_1, s_2) = (0,0)$的情况，我们可以得到:

$$\pi_2(b_2|e, q = 1, s_1 = 0, s_2 = 0) = [v(0,0) - b_2]I[b_2 > v(0,0)]. \qquad (15)$$

其中$I(\cdot)$是指示函数. 显然，此时竞标者 2 的最优出价为$b_2 = v(0,0)$，此时其条件期望收益为:

$$\pi_2(0,0|e, 1) \equiv \max_{b_2} \pi_2(b_2|e, q = 1, s_1 = 0, s_2 = 0) = 0. \qquad (16)$$

同理，我们可以分别计算得到各种(s_1, s_2)组合下，竞标者 2 选择最优出价后的的条件期望收益:

$$\pi_2(1,0|e, 1) \equiv \max_{b_2} G(b_2)[v(0,1) - b_2] > 0. \qquad (17)$$

$$\pi_2(0,1|e, 1) = v(0,1) - v(0,0). \qquad (18)$$

以及

$$\pi_2(1,1|e, 1) \equiv \max_{b_2} G(b_2)[v(1,1) - b_2] = v(1,1) - v(1) + p_{01}[v(0,1) - v(0,0)]. \qquad (19)$$

按照前述相同的方法加权平均计算先验条件期望收益，我们可以总结如下:

引理 5: 在第二阶段的子博弈拍卖中，$\pi_2(e, 1) > \pi_2(e, 0)$恒成立.

换言之，引理 5 表明专家竞标者 2 总是希望竞标者 1 误以为自己是个外行，而不是确信自己是个专家. 得到这一结果并不意外，与前述直觉相同的，如果竞标者 1 认为其竞争对手是个外行，那么他的出价会相对``温和"，因此更加有利于专家竞标者 2. 进一步的，引理 4 和 5 共同说明，相比被竞争对手确信是个专家，专家竞标者 2 更希望自己的身份被误认，或者至少不被确定(即$q \in (0,1)$).

尽管对于专家竞标者 2 来说，目前得到的结论与诚实披露设定下的结果一致，我们发现对于外行竞标者 2 来说，结果可能有所不同. 这一差异的主要来源是引理

1(b)中的最优出价策略与引理 2 中的策略并不是连续变化的，以及竞标者 1 在 $q=1$情况下的出价策略并不是一阶随机占优于他在$q=0$情况下的投标策略. 具体来说，我们来考虑一个外行竞标者 2，此时如果外行竞标者 2 让竞标者 1 确信自己是外行，那么两个竞标者将按照引理 1(a)进行出价，因此外行竞标者 2 的先验期望收益与前述公式(4)一致. 反之，如果外行竞标者 2 让竞标者 1 确信自己是专家，那么竞标者 1 将按照引理 1(b)进行出价，而实际上是外行的竞标者 2 则可以选择对应的最佳出价策略. 此时对于$s_2=0$的情况，我们可以得到:

$$\pi_2(b_2|o,q=0,s_2=0)=p_{00}H_{1,0}(b_2)[v(0,0)-b_2]+p_{10}H_{1,1}(b_2)[v(0,1)-b_2]. \tag{20}$$

求解可得竞标者 2 的最优出价为$b_2=v(0,0)$，此时其条件期望收益为:

$$\pi_2(0|o,0)\equiv\max_{b_2}\pi_2(b_2|o,q=0,s_2=0)=0. \tag{21}$$

以及对于$s_2=1$的情况，有:

$$\pi_2(b_2|o,q=0,s_2=1)=p_{01}H_{1,0}(b_2)[v(0,1)-b_2]+p_{11}H_{1,1}(b_2)[v(1,1)-b_2]. \tag{22}$$

此时任意的$b_2\in[v(0,0),v(0)]$会使竞标者 2 获得相同的条件期望收益 $p_{01}[v(0,1)-v(0)]$. 而如果竞标者 2 选择出价$b_2\in[v(0,1),v(1)]$，那么可以计算出最优出价为$b_2=v(0,1)$，此时其条件期望收益为$p_{11}[v(1,1)-v(1)]$. 综合以上两种情况，我们有:

$$\pi_2(1|o,0)=\max\{p_{01}[v(0,1)-v(0)],p_{11}[v(1,1)-v(1)]\}. \tag{23}$$

注意到:

$$p_{01}[v(0,1)-v(0)]<p_{01}[v(0,1)-v(0,0)]=\pi_2(1|o,1). \tag{24}$$

因此我们可以推论出$\pi_2(1|o,1)\geq\pi_2(1|o,0)$当且仅当:

$$p_{01}[v(0,1)-v(0,0)]-p_{11}[v(1,1)-v(1)]\geq 0. \tag{25}$$

按照前述相同的方法加权平均计算先验条件期望收益，我们可以进一步总结如下:

引理 6: 在第二阶段的子博弈拍卖中，$\pi_2(o,1)\geq\pi_2(o,0)$当且仅当不等式(25)成立.

换言之，引理 6 说明当不等式条件(25)成立时，一个外行的竞标者 2 确实希望自己可以传递信息让竞标者 1 相信自己是一个外行. 但反之如果条件(25)不成立，那么外行竞标者 2 则希望自己可以传递信息让竞标者 1 以为自己是一个专家，并通过预判竞标者 1 的出价策略然后反制来获得更高的收益.

结合引理 5 和 6，我们首先可以确定当不等式条件(25)成立时，我们的两阶段博弈不存在分离均衡. 这是因为无论外行竞标者 2 希望可以通过传递何种信号传递让竞标者 1 知道自己的身份，专家竞标者 2 总是会模仿并假装自己也是一个外行. 因此第一阶段的信号传递完全无法给竞标者 1 提供任何有效信息，导致汇合均衡的结果.

另一方面，当不等式(25)不成立时，我们的两阶段博弈依旧不存在分离均衡，这可以用反证法来说明. 假设存在一个分离均衡，其中专家竞标者 2 与外行竞标者 2 在第一阶段传递的信号$t(e) = t_e \neq t(o) = t_o$，简单起见我们不妨考虑纯策略信号的情况. 因为$t(e) \neq t(o)$，序贯理性的竞标者 1 会更新他的信念$q(t_e) = e$且$q(t_o) = o$. 但是给定这一信念更新规则，外行竞标者 2 应该选择$t(o) = t_e$，反之专家竞标者 2 则应该选择$t(e) = t_o$，这又会进而使得竞标者 1 的信念更新规则变为$q(t_e) = o$且$q(t_o) = e$. 注意如果同时考虑混合策略$\beta_o, \beta_e \in (0,1)$的信号情况，前述的信念更新规则会随之调整，但是反证法的逻辑保持不变. 综上，不存在一组$t(e) \neq t(o)$和对应的信念更新规则满足完美贝叶斯均衡的条件. 因此，我们总结得到如下结果:

命题 2: 在廉价交谈设定下，该博弈的完美贝叶斯均衡都是汇合均衡，具体可以描述为:

(a)在第一阶段，外行竞标者 2 和专家竞标者 2 选择相同的信号传递；

(b)竞标者 1 的信念为$q(t) = \frac{1}{2}, \forall t$;

(c)两个竞标者在第二阶段的拍卖中根据引理 2 中的策略进行出价.

命题 1 和 2 分别描述了在诚实披露与廉价交谈两种信息交流环境下，完美贝叶斯均衡的形式. 一个自然的推论则是，外行竞标者 2 在诚实披露的环境中的期望收益更高，而专家竞标者 2 则更希望处于一个廉价交谈的环境中. 另一方面，容易证明对于竞标者 1 来说，诚实披露的环境也会带来更高的期望收益. 这是因为无论在何种环境下，竞标者 1 的正收益完全来源于他有严格正的概率遇上一个外行竞标者 2. 而在诚实披露导致的分离均衡中，竞标者 1 遇到外行竞标者 2 时候出价相比汇合均衡来说更温和，也因此会同时提高两个竞标者的期望收益.

4. 模型拓展

4.1 身份公开的专家竞标者

在本节中，我们探讨在对模型中的一些设定进行拓展后，主要结论会发生怎样的变化．我们首先分析这样一种情况，即身份信息公开的竞标者 1 是一个专家竞标者的情形．此时竞标者 1 在第二阶段的拍卖中获得的关于拍卖品价值的信息是(s_1, s_2)，容易看出，如果竞标者 2 是一个外行竞标者且$q = 1$，那么两个竞标者在第二阶段的出价策略与引理 1(b)中的结果完全对称．另一方面，如果竞标者 2 是一个专家竞标者且$q = 0$，那么第二阶段的拍卖将演化成伯特兰德竞争(Bertrand Competition)．具体的，两个竞标者的出价策略为:

$$b_1(0,0) = b_2(0,0|e) = v(0,0). \tag{26}$$

$$b_1(0,1) = b_2(0,1|e) = b_1(1,0) = b_2(1,0|e) = v(0,1). \tag{27}$$

以及

$$b_1(1,1) = b_2(1,1|e) = v(1,1). \tag{28}$$

此时根据与前述类似的方法可以看出，一个外行竞标者 2 无论让竞标者 1 认为自己是何种身份，外行竞标者 2 的期望收益均为零．也即外行竞标者 2 在信号传递阶段变为对任何信号无差异．反之，一个专家竞标者 2 依旧希望自己可以被认为是外行．因此我们可以推论，在竞标者 1 是一个专家竞标者的设定下，如果信号传递是廉价交谈，那么该博弈的完美贝叶斯均衡依然都是汇合均衡．反之，如果信号传递是诚实披露，那么该博弈的完美贝叶斯均衡可能是汇合均衡，其中外行竞标者 2 与专家竞标者 2 均选择$t = n$；也可能是分离均衡，即外行竞标者 2 选择披露自己的身份$t = o$.

4.2 期中(Interim)的信号传递决策

在我们的模型中，假设身份信息的披露即信号传递是先于拍卖品价值的信息获得的，即竞标者 2 首先在第一阶段选择自己传递的信号t，而在第二阶段拍卖开始时才获知s_2或者(s_1, s_2)．这一设定可以理解为描述了现实中人们首先在互联网上认证身份、进行交流或者留下其他可供查询的历史记录，也就是人们常说的``互联网是有记忆的"．人们在这一参与网上互动的过程中，知道自己的言行等信息会影响其他人对自己的身份认知，而之后在拍卖开始时，参与者也不再需要进行额外的信号传递，而是直接通过之前的互动更新对竞争对手身份的信念.

反之，我们也可以考虑这样一种情况，即在拍卖开始时候，潜在的竞标者才根据自己获得的对拍卖品价值的信息进行决策，判断自己是否愿意参与拍卖．此时愿意参与拍卖的潜在竞标者通过注册新的账号加入拍卖，并且可以通过一些网上的信息交流渠道传递自己希望传递的身份信息．在这一背景下，与我们的基准模型不同的，竞标者在第一阶段就获得了信息s_i，也因此他们的信号传递可以取决于这些信息，即对于竞标者 2 来说他的信号选择策略可以记为$t(o,s_2)$与$t(e,s_1,s_2)$，并且竞标者 1 在获得信号后不但可以更新对于竞标者 2 身份的信念，也会潜在的更新对于拍卖品价值的信念.

然而我们认为，至少在目前的模型框架下，假设后验的信号传递决策与我们的基准模型结论无差异．具体来说，注意到在 3. 1 与 3. 2 节的分析中，计算竞标者的期望收益时候可以看出先验期望收益的大小关系都与所有对应的期中期望收益的大小关系相吻合．换言之，我们可以推论出如果一个特定身份的竞标者 2 在我们的模型中希望传递某种信号，那么他无论获得何种价值信息，都会选择相同的信号传递策略，即:

$$t(o,s_2)=t(o),\forall s_2. \tag{29}$$

且

$$t(e,s_1,s_2)=t(e),\forall s_1,s_2. \tag{30}$$

因此我们的定理 1 与 2 的结果均不会受到期中信号传递决策假设的影响.

4.3 不完全的身份验证

我们在前述讨论中分析了诚实披露与廉价交谈两种基准假设下，竞标者的信号传递决策．然而在实践中，互联网上的身份验证往往是不完全的．具体来说，尽管存在官方验证可以检验披露的信息是否为真，但是却不能禁止人们只进行部分披露．例如，同样考虑一个法拍房的场景，一个具有房屋估价资质的竞标者可以选择披露他的这种认证资质，并且可以通过官方验证为真．但是他也可以选择不披露拥有的资质，官方就无法主动去验证他是否具有这种资质．反之，一个本就不具有这种资质的竞标者则不能披露自己拥有这种资质，否则会被官方验证为假.

这种``向下兼容"的身份验证在我们的模型中可以被描述为$T(o)=\{n,o\}$且$T(e)=\{n,o,e\}$，换言之，一个专家总是可以选择宣称自己是一个外行，但是一

个外行无法假装自己是一个专家. 然而, 注意到在前述分析中, 导致模型的均衡结果无法达成分离均衡的核心原因恰恰就是专家竞标者 2 总是希望可以将自己伪装成外行竞标者. 因此我们可以很自然的得到推论, 只要信号传递过程不是完全的诚实披露, 那么定理 2 的结果成立, 即该博弈的完美贝叶斯均衡均是汇合均衡.

5. 结论

竞标者对对手身份的认知塑造了他们的最佳竞标策略, 从而影响了拍卖结果. 我们的分析揭示了在第一价格密封共同价值拍卖中, 有关竞标者身份的不对称信息对均衡的影响. 我们聚焦于如下场景, 即拥有私人身份信息的竞标者可以通过主动传递信号来披露自己的身份. 我们发现, 在诚实披露的设定下, 尽管一个专家竞标者总是希望隐藏身份, 但一个外行的竞标者可以通过披露身份来获得更高的回报. 进一步的, 竞标者是否披露身份信息成为判断其身份的依据, 我们得到了一个分离的完美贝叶斯均衡. 相反在廉价交流的设定下, 专家竞标者总是希望让他人误认为自己是外行, 而根据模型参数的不同, 外行的竞标者也有可能希望让他人误认为自己是专家, 这最终导致了不存在分离的完美贝叶斯均衡.

由于关注重点集中在身份披露, 我们的研究对于一些潜在的问题并没有进一步的深入分析, 这里我们进行一些简单的说明. 首先, 我们的研究中发现, 当同时存在身份的信息不对称性与关于拍卖品价值的信息不对称性时, 即使是标准的第一价格密封共同价值拍卖, 其贝叶斯纳什均衡也不一定存在. 如果将模型一般化而非目前的二元信号模型, 这种均衡的存在性由什么因素决定, 是一个亟待回答的问题. 更进一步的, 如果拍卖的贝叶斯纳什均衡不存在, 如何预测竞标者的出价, 以及如何对其前置的信号传递问题进行分析, 这是值得进一步探讨的研究话题.

第二, 本文主要分析了由于身份信息的不对称性带来的竞标者出价策略的改变, 以及进一步的对竞标者期望收益的影响. 另一方面, 本文中的专家竞标者与外行竞标者的主要差异在于已经被广泛研究的关于拍卖品价值的信息差异. 但是这两种信息不对称性以及由于信息差异带来的期望收益差异是否会有更复杂的相互影响, 例如不同的关于拍卖品价值的信息结构如何影响身份的信息差带来的收益差异, 或者关于身份的信息结构是否会影响关于拍卖品价值的信息差导致的信息租金(Informational Rent)? 这些都有待未来更多的研究分析.

第三, 本文在廉价交流的设定下发现了一个特别的现象, 即外行竞标者有可能愿意伪装成一个专家. 这种通过``诈唬"让竞争对手误以为自己是专家从而获益的行为, 据我们所知, 还没有在任何关于拍卖的文献中进行过研究. 即使不限于拍

卖理论，在更一般的信息传递相关的文献中，研究的比较多的话题也是拥有更多信息的决策者如何伪装自己. 我们在这一数值模型中发现的现象在多大程度上可以拓展到一般化的拍卖模型中，是一个值得进一步研究的问题.

参考文献

[1] 李三希, 曹志刚, 崔志伟, 等. 数字经济的博弈论基础性科学问题[J]. 中国科学基金, 2021, 35(5): 782--800.
Li S X, Cao Z G, Cui Z W, et al. Fundamental scientific problems of game theory for the digital economy[J]. Bulletin of National Natural Science Foundation of China, 2021, 35(5): 782--800.

[2] 杨晓光, 李三希, 曹志刚, 等. 数字经济的博弈论基础[J]. 管理科学, 2022, 35(1): 50--54.
Yang X G, Li S X, Cao Z G, et al. Game theory foundation of the digital economy[J]. Journal of Management Science, 2022, 35(1): 50--54.

[3] 李三希, 王泰茗. 拍卖理论研究述评[J]. 中国科学基金, 2021, 35(01): 2--3.
Li S X, Wang T M. A review of auction theory[J]. Bulletin of National Natural Science Foundation of China, 2021, 35(01): 2--3.

[4] 曹志刚, 俞宁. 运筹学视角下的市场机制设计[J]. 中国科学基金, 2023, 37(06): 919--925.
Cao Z G, Yu N. Market mechanism design from the perspective of operations research[J]. Bulletin of National Natural Science Foundation of China, 2023, 37(06): 919--925.

[5] Milgrom P R, Weber R J. A theory of auctions and competitive bidding[J]. Econometrica, 1982, 50(5): 1089--1089.

[6] Milgrom P R, Weber R J. The value of information in a sealed bid auction[J]. Journal of Mathematical Economics, 1982, 11: 161--169.

[7] Engelbrecht-wiggans R, Milgrom P R, Weber R J. Competitive bidding and proprietary information[J]. Journal of Mathematical Economics, 1983, 11: 161--169.

[8] Campbell C M, Levin D. Can the seller benefit from an insider in common-value auctions[J]? Journal of Economic Theory, 2000, 91(1): 106--120.

[9] Einy E, Haimanko O, Orzach R, Sela A. Dominance solvability of second-price auctions with differential information[J]. Journal of Mathematical Economics, 2002, 37(3): 247--258.

[10] Kim J. The value of an informed bidder in common value auctions[J]. Journal of Economic Theory, 2008, 143(1): 585--595.

[11] Abraham I, Athey S, Babaioff M, Grubb M D. Peaches, lemons, and cookies: Designing auction markets with dispersed information[J]. Games and Economic Behavior, 2020, 124: 454--477.

[12] Piccione M, Tan G. A simple model of expert and non-expert bidding in first-price auctions[J]. Journal of Economic Theory, 1996, 70(2): 501--515.

[13] McClellan A. Knowing your opponents: Information disclosure and auction design[J]. Games and Economic Behavior, 2023, 140: 173--180.

[14] Bikhchandani S. Reputation in repeated second-price auctions[J]. Journal of Economic Theory, 1988, 46(1): 97--119.

[15] Fong Y F, Garrett D F. Bidding in a possibly common-value auction[J]. Games and Economic Behavior, 2010, 70(2): 494--501.

[16] de Frutos M Á, Pechlivanos L. Second-price common-value auctions under multidimen sional uncertainty[J]. Games and Economic Behavior, 2006, 55(1): 43--71.

[17] Larson N. Private value perturbations and informational advantage in common value auctions[J]. Games and Economic Behavior, 2009, 65(2): 430--460.

[18] Weber R J. Multiple-object auctions[M]. Engelbrecht-Wiggans R, Shubik M, Stark R M. Auctions, bidding and contracting: uses and theory. New York: New York University Press, 1983: 165--191.

[19] 王先甲，杨森，张柳波. 随机等价互补品序贯组合拍卖数量折扣研究[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(05): 1196--1201.
Wang X J, Yang S, Zhang L B. Research on quantity discount in sequential combinatorial auctions with stochastically equivalent complementary objects[J]. Systems Engineering --- Theory \& Practice, 2014, 34(05): 1196--1201.

[20] 李三希，喻俊，尹训东. 是否捆绑拍卖？公私合营下最优招标的机制设计[J]. 经济学(季刊), 2016, 15(01): 321--340.

Li S X, Yu J, Yin X D. Bundling or not: The optimal auction design in public-private partnership[J]. China Economic Quarterly, 2016, 15(01): 321--340.

[21] Kong Y. Sequential auctions with synergy and affiliation across auctions[J]. Journal of Political Economy, 2021, 129(1): 148--181.

[22] Che Y K, Gale I. Standard auctions with financially constrained bidders[J]. The Review of Economic Studies, 1998, 65(1): 1--21.

[23] 荣健欣，孙宁．汽车牌照配置的混合机制设计------对我国车牌配置机制改进的探讨[J]．财经研究, 2015, 41(12): 62--71.
Rong J X, Sun N. Hybrid mechanism design of vehicle license allocation: On improvement of China's vehicle license allocation mechanism[J]. Journal of Finance and Economics, 2015, 41(12): 62--71.

[24] Bobkova N. Asymmetric budget constraints in a first-price auction[J]. Journal of Economic Theory, 2020, 186, 104975.

[25] Balseiro S, Kroer C, Kumar R. Contextual standard auctions with budgets: Revenue equivalence and efficiency guarantees[J]. Management Science, 2023, 69(11): 6837--6854.

[26] Benoit J, Dubra J. Information revelation in auctions[J]. Games and Economic Behavior, 2006, 57(2): 181--205.

[27] Kovenock D, Morath F, Münster J. Information sharing in contests[J]. Journal of Economics \ Management Strategy, 2015, 24(3): 570--596.

[28] Tan X. Information revelation in auctions with common and private values[J]. Games and Economic Behavior, 2016, 97: 147--165.

[29] Avery C. Strategic jump bidding in English auctions[J]. The Review of Economic Studies, 1998, 65(2): 185--210.

[30] Hörner J, Sahuguet N. Costly signalling in auctions[J]. The Review of Economic Studies, 2007, 74(1): 173--206.

[31] 李治文, 王绍波, Texier T L,等. 拍卖方策略与投标者跳跃式报价------基于在线收藏品拍卖的实证研究[J]. 管理评论, 2022, 34(11): 133--141.
Li Z W, Wang S B, Texier T L, et al. Auctioneers' strategy and bidders' jump bidding: Empirical analysis based on the online collections bidding[J]. Management Review, 2022, 34(11): 133--141.

[32] Fang H, Morris S. Multidimensional private value auctions[J]. Journal of Economic Theory, 2006, 126(1): 1--30.

[33] Jackson M O Non-existence of equilibrium in vickrey, second-price, and English auctions[J]. Review of Economic Design, 2009, 13(1-2): 137--145.

附录

引理 2 的证明

我们的证明将分为两个部分，首先我们需要证明引理 2 中描述的竞标者策略组合是该子博弈中贝叶斯纳什均衡的必要条件，然后我们给出具体的计算方式确认该均衡存在．为简化描述，我们将用$F_{1,s_1}(b)$，$F_{2,s_2}(b)$和$F_{2,s_1s_2}(b)$分别表示$b_1(s_1)$，$b_2(s_2|o)$与$b_2(s_1,s_2|e)$的累积分布函数，并用M_{1,s_1}，M_{2,s_2}和M_{2,s_1s_2}分别表示其对应的支持集.

我们用以下步骤来证明引理 2 中陈述的必要条件．以下证明过程中我们总是考虑某个已经外生确定的$q \in (0,1)$.

第一步，应用拍卖文献中标准的ϵ偏差论证法(ϵ-Deviation)，可以得到$b_2(0,0|e) = v(0,0)$，$M_{2,01} \subseteq M_{1,0}$，$M_{2,10} \cup M_{2,11} \subseteq M_{1,1}$，$M_{2,0} \cup M_{2,1} \subseteq M_{1,0} \cup M_{1,1}$以及$M_{2,0} \cup M_{2,1} \cup M_{2,01} \cup M_{2,10} \cup M_{2,11} = M_{1,0} \cup M_{1,1}$．进一步的，因为竞标者 2 有正的概率是专家，意味着$b_1(0)$与$b_1(1)$均为混合策略.

第二步，我们论证$M_{2,0}$和$M_{2,1}$不重叠.

假设$M_{2,0}$和$M_{2,1}$在某个区间(m,m')中重叠．为了与混合策略保持一致，必须满足任意出价$b \in (m,m')$的预期收益对于获得信号$s_2 = 1$和$s_2 = 0$的外行竞标者 2 是恒定的．此外，对于获得信号$s_2 = 0$的外行竞标者 2，其信息租金为零，而对于获得信号$s_2 = 1$的外行竞标者 2，其信息租金是正的．因此，期望收益相同条件可以写为:

$$p_{00}F_{1,0}(b)[v(0,0)-b]+p_{10}F_{1,1}(b)[v(0,1)-b]=0. \tag{31}$$

以及

$$p_{01}F_{1,0}(b)[v(0,1)-b]+p_{11}F_{1,1}(b)[v(1,1)-b]=\kappa_{2,1}. \tag{32}$$

对于任意出价$b \in (m, m')$以及某个常数$\kappa_{2,1} > 0$均成立. 我们将前一个方程的两边分别乘以$a_1(1 + a_0 - a_1)$, 将后一个方程的两边分别乘以$(1 - a_1)(1 - a_0 + a_1)$, 然后取两个方程的差. 整理结果得到:

$$(1 - a_1)(1 - a_0 + a_1)\kappa_{2,1} = [a_0^2 a_1 - a_0(1 - a_0)(1 - a_1)]F_{1,0}(b)b + [a_0(1 - a_0)a_1 - (1 - a_0)^2(1 - a_1)]F_{1,1}(b)b. \tag{33}$$

注意$(1 - a_1)(1 - a_0 + a_1)\kappa_{2,1} > 0$是一个常数, 但右边是关于$b$的非递减函数. 此外, 只要$F_{1,0}(b)$和$F_{1,1}(b)$不同时为零, 右边对于$b$是严格递增的, 而这由$M_{2,0} \cup M_{2,1} \subseteq M_{1,0} \cup M_{1,1}$保证. 因此, 右侧不可能在整个区间$b \in (m, m')$恒等于左侧, 即推出矛盾.

第三步, 我们论证$M_{2,0}$必须低于$M_{2,1}$.

为了证明这一点, 假设$(m_1, m_2) \subseteq M_{2,1}$, $(m_3, m_4) \subseteq M_{2,0}$, 但是$m_2 \le m_3$. 再次根据期望收益相同条件, 我们可以得到:

$$p_{00}F_{1,0}(b)[v(0,0) - b] + p_{10}F_{1,1}(b)[v(0,1) - b] = 0, \forall b \in (m_3, m_4). \tag{34}$$

以及

$$p_{01}F_{1,0}(b)[v(0,1) - b] + p_{11}F_{1,1}(b)[v(1,1) - b] = \kappa_{2,1}, \forall b \in (m_1, m_2). \tag{35}$$

然而, 通过类似于第二步中的计算, 可以得到$m_4 > m_3 \ge m_2$意味着:

$$\begin{gathered} p_{01}F_{1,0}(m_4)[v(0,1) - m_4] + p_{11}F_{1,1}(m_4)[v(1,1) - m_4] > \\ p_{01}F_{1,0}(m_3)[v(0,1) - m_3] + p_{11}F_{1,1}(m_3)[v(1,1) - m_3] \ge \\ p_{01}F_{1,0}(m_2)[v(0,1) - m_2] + p_{11}F_{1,1}(m_2)[v(1,1) - m_2]. \end{gathered} \tag{36}$$

这表明获得信号$s_2 = 1$的外行竞标者 2 在出价m_4时将获得比出价m_2更高的期望收益, 与假设$(m_1, m_2) \subseteq M_{2,1}$矛盾.

第四步，我们证明$M_{1,0}$和$M_{1,1}$不重叠，并且$M_{1,0}$必须低于$M_{1,1}$.

以获得信号$s_1=1$的竞标者 1 为例，他通过出价b获得的预期收益为:

$$\pi_1(b|s_1=1)=q\left[p_{01}F_{2,0}(b)(v(0,1)-b)+p_{11}F_{2,1}(b)(v(1,1)-b)\right]+(1-q)\left[p_{01}F_{2,10}(b)(v(0,1)-b)+p_{11}F_{2,11}(b)(v(1,1)-b)\right]. \tag{37}$$

然而因为当遇到专家竞标者 2 时，竞标者 1 没有信息租金. 这意味着:

$$p_{01}F_{2,10}(b)[v(0,1)-b]+p_{11}F_{2,11}(b)[v(1,1)-b]=0. \tag{38}$$

因此，我们可以得到:

$$p_{01}F_{2,0}(b)[v(0,1)-b]+p_{11}F_{2,1}(b)[v(1,1)-b]=\kappa_{1,1}. \tag{39}$$

对于所有$b\in M_{1,1}$以及某常数$\kappa_{1,1}>0$均成立. 类似的对于获得信号$s_1=0$的竞标者 1，我们可以得到:

$$p_{00}F_{2,0}(b)[v(0,0)-b]+p_{10}F_{2,1}(b)[v(0,1)-b]=0. \tag{40}$$

现在我们可以应用与第二步和第三步相同的计算来确认$M_{1,0}$和$M_{1,1}$不重叠，并且$M_{1,0}$必须低于$M_{1,1}$.

第五步，我们证明$M_{1,0}$和$M_{1,1}$是连续区间.

要理解这一点，注意到当竞标者 2 是外行时，获得信号$s_1=1$的竞标者 1 的信息租金是严格正的. 因此可以得到，通过出价$b=\inf\left(M_{1,1}\right)$，竞标者 1 的获胜概率和相应的获胜收益都是严格正的. 现在考虑到$M_{1,0}\cup M_{1,1}=M_{2,0}\cup M_{2,1}\cup M_{2,01}\cup M_{2,10}\cup M_{2,11}$这一事实，可以再次应用$\epsilon$偏差来证明$\inf\left(M_{1,1}\right)\leq\sup\left(M_{1,0}\right)$，这意味着$M_{1,0}$和$M_{1,1}$是连续的. 类似的论证也可以用来证明这两个支持集都是区间.

因此，不失一般性，我们可以假设$M_{1,0} = [v(0,0), v_1]$，而$M_{1,1} = [v_1, v_4]$，并且很容易验证$v_1 < v(0,1)$.

第六步，我们证明$b_2(0|o) = v(0,0)$.

因为$b_2(0|o) < v(0,0)$的情况可以很容易地通过ϵ偏差论证来排除，我们将集中讨论$b_2(0|o) > v(0,0)$的情况．考虑到$M_{1,0}$和$M_{1,1}$的结构，显然出价$b_2(0|o) \in (v(0,0), v_1]$会使外行竞标者 2 的期望收益为负．因此唯一剩下的可能性是$b_2(0|o) > v_1$，这又意味着$b_2(1|o) > v_1$．但是此时再次通过ϵ偏差论证我们可以得出结论，获得信号$s_1 = 1$的竞标者 1 不应该在$b \in [v_1 v_1')$上出价，其中$v_1' = \inf\left(M_{2,0} \backslash \{v(0,0)\}\right)$．然而这样的结果违反了$v_1 = \inf\left(M_{1,1}\right)$的假设.

第七步，我们证明$b_2(1,0|e)$和$b_2(1,1|e)$都是混合策略.

假设其中一个策略是纯策略，不失一般性假设$b_2(1,0|e) = b^\star$是一个纯策略．由于$v_1 < v(0,1)$，很容易验证$v_1 < b^\star \in M_{1,1}$．然而，此时竞标者 2 选择$b^\star$的概率严格大于零，这会使我们可以采用ϵ偏差论证来证明获得信号$s_1 = 1$的竞标者 1 不可能在$b^\star$和$b^\star + \epsilon$之间保持期望收益不变，这违反了$b_1(1)$是具有支持$M_{1,1}$的混合策略的假设．类似的论证也适用于$b_2(1,1|e)$.

第八步，我们证明$M_{2,10}$和$M_{2,11}$不重叠，并且$M_{2,10}$必须低于$M_{2,11}$.

要理解这一点，注意到期望收益相同条件给出:

$$F_{1,1}(b)[v(0,1) - b] = \kappa_{2,10}, \forall b \in M_{2,10}. \tag{41}$$

以及

$$F_{1,1}(b)[v(1,1) - b] = \kappa_{2,11}, \forall b \in M_{2,11}. \tag{42}$$

其中$\kappa_{2,11} > \kappa_{2,10} > 0$是两个常数．值得注意的是，$\kappa_{2,11} > \kappa_{2,10}$来自于这样一个事实：获得信号$(s_1, s_2) = (1,1)$的专家竞标者 2 总是能够获得比观察到$(s_1, s_2) =$

(1,0)的专家竞标者 2 取得更高的预期收益，因为前者只需简单地采用后者的相同策略即可．而$\kappa_{2,10} > 0$则是来自于$v_1 < v(0,1)$．重新排列方程，我们可以得到：

$$F_{1,1}(b) = \frac{\kappa_{2,10}}{v(0,1) - b}, \forall b \in M_{2,10}. \tag{43}$$

以及

$$F_{1,1}(b) = \frac{\kappa_{2,11}}{v(1,1) - b}, \forall b \in M_{2,11}. \tag{44}$$

现在，由于$\frac{\kappa_{2,10}}{v(0,1)-b}$和$\frac{\kappa_{2,11}}{v(1,1)-b}$在$[v_1, v_4]$上具有单交点属性，$\kappa_{2,11} > \kappa_{2,10}$直接导致了所需证明的结果.

第九步，我们论证$M_{2,1} \cap M_{1,0} = M_{2,01} = M_{1,0}$.

要理解这一点，我们首先注意到$M_{2,1} \cap M_{1,0} = \emptyset$或者$M_{2,1} \cap M_{1,0} = M_{2,01}$．这是因为因为$M_{2,01}$必须满足：

$$M_{2,01} = \arg\max_{b \in M_{1,0}} F_{1,0}(b)[v(0,1) - b]. \tag{45}$$

另一方面，对于获得$s_2 = 1$的外行竞标者 2，在他选择一个出价$b \in M_{1,0}$的条件下，他的预期收益就是$p_{01}F_{1,0}(b)[v(0,1) - b]$，其最大化必须与获得$(s_1, s_2) = (0,1)$的专家竞标者 2 的相同．另一方面$M_{2,1} \cap M_{1,0} \neq \emptyset$这个结果直接来自于第 6 步中使用的$\epsilon$偏差论证．结合之前的论证，我们可以得出$M_{2,1} \cap M_{1,0} = M_{2,01}$．最后，考虑到$M_{1,0} \cup M_{1,1} = M_{2,0} \cup M_{2,1} \cup M_{2,01} \cup M_{2,10} \cup M_{2,11}$，$M_{2,10} \cup M_{2,11} \subseteq M_{1,1}$，以及$b_2(0|o) = v(0,0)$，我们可以得出结论$M_{2,1} \cap M_{1,0} = M_{2,01} = M_{1,0}$.

第十步，我们论证$M_{2,1} \cap M_{1,1} \neq \emptyset$.

假设该结论不成立，即假设$M_{2,1} \cap M_{1,1} = \emptyset$．由于$M_{1,0} \cup M_{1,1} = M_{2,0} \cup M_{2,1} \cup M_{2,01} \cup M_{2,10} \cup M_{2,11}$，$b_2(0|o) = v(0,0)$，以及$M_{2,01} \subseteq M_{1,0}$，我们可以得出结论$M_{2,10} \cup M_{2,11} = M_{1,1}$．现在根据第 7 步和第 8 步的结果，很容易得到$M_{2,10} = [v_1, v']$，其中$v' \in (v_1, v_4)$．然而根据期望收益相同条件我们会得到$F_{1,1}(v_1) = \frac{\kappa_{2,10}}{v(0,1)-v_1} > 0$，或者说获得$s_1 = 1$的竞标者选择出价$v_1$的概率严格为正．因此我们可以采用$\epsilon$偏差论证得出结论：获得$s_2 = 1$的外行竞标者 2 不会出价在$(v_1 - \epsilon, v_1]$范围内．结合$M_{2,1} \cap M_{1,0} = M_{2,01}$，我们可以得出$M_{2,01} \cap (v_1 - \epsilon, v_1] = \emptyset$．然而，现在我们有$\left(M_{2,0} \cup M_{2,1} \cup M_{2,01} \cup M_{2,10} \cup M_{2,11}\right) \cap (v_1 - \epsilon, v_1] = \emptyset$，这违反了假设$(v_1 - \epsilon, v_1] \subseteq M_{1,0} \cup M_{1,1}$．

第十一步，我们证明$M_{2,1} \cap M_{1,1}$和$M_{2,11}$不重叠，且$M_{2,1} \cap M_{1,1}$必须低于$M_{2,11}$．

要理解这一点，注意获得$s_2 = 1$外行竞标者 2 的期望收益相同条件可以推导出：

$$p_{01}[v(0,1) - b] + p_{11}F_{1,1}(b)[v(1,1) - b] = \kappa_{2,1}, \forall b \in M_{2,1} \cap M_{1,1}. \tag{46}$$

其中可以验证$\kappa_{2,10} \leq \kappa_{2,1} < \kappa_{2,11}$．重新排列方程得到：

$$F_{1,1}(b) = \frac{\kappa_{2,1} - p_{01}[v(0,1) - b]}{p_{11}[v(1,1) - b]}, \forall b \in M_{2,1} \cap M_{1,1}. \tag{47}$$

与获得$(s_1, s_2) = (1,1)$的专家竞标者 2 的期望收益相同条件相比较，可以验证这两个函数具有单交点属性，这直接证明了所需的结果．

因此，结合第 8 步的结果，我们可以认为$M_{2,11} = [v_3, v_4]$，其中$v_3 \in (v_1, v_4)$．

第十二步，我们证明$M_{2,1} \cap M_{1,1}$和$M_{2,10}$不重叠，且$M_{2,10}$是一个区间，其下确界$\inf\left(M_{2,10}\right) > v_1$．

要理解这一点，我们比较获得$(s_1,s_2)=(1,1)$的专家竞标者 2 与获得$(s_1,s_2)=(1,0)$的专家竞标者 2 的期望收益相同条件．注意到这两个函数的交点可以通过如下方程找到:

$$\frac{\kappa_{2,1}-p_{01}[v(0,1)-b]}{p_{11}[v(1,1)-b]}=\frac{\kappa_{2,10}}{v(0,1)-b}. \tag{48}$$

因为对于任何给定的$\kappa_{2,1}$和$\kappa_{2,10}$，该条件可以重写为关于b的二次方程，也即最多可以有两个根．因此我们可以得出结论$M_{2,1}\cap M_{1,1}$和$M_{2,10}$不重叠．

此外，第 7 步和第 10 步的结果表明，如果存在均衡，那么该均衡必须满足上述二次方程有两个相异且严格大于v_1的根．将这两个根表示为v_2和v_3'，我们因此可以得出:

$$\frac{\kappa_{2,1}-p_{01}[v(0,1)-b]}{p_{11}[v(1,1)-b]}>\frac{\kappa_{2,10}}{v(0,1)-b},\forall b\in(v_2,v_3'). \tag{49}$$

因为$\frac{\kappa_{2,1}-p_{01}[v(0,1)-v_1]}{p_{11}[v(1,1)-v_1]}=0<\frac{\kappa_{2,10}}{v(0,1)-v_1}$．于是，一个显然的推论是$M_{2,10}$是一个区间，其下确界$\inf(M_{2,10})=v_2>v_1$．

这样我们就证明了引理 2 中均衡出价策略的必要性，下面我们来说明如何计算其中的参数以及均衡存在条件．

为了找到子博弈拍卖的均衡点，我们首先解以下方程组，这些方程来自于在$v_3'=v_3$的情况下的期望收益相同条件:

$$p_{00}[v(0,0)-v_1]+p_{10}\big(qF_{2,1}(v_1)+1-q\big)[v(0,1)-v_1]=0. \tag{50}$$

$$\begin{gathered}p_{01}q[v(0,1)-v_1]+p_{11}qF_{2,1}(v_1)[v(1,1)-v_1]=\\ p_{01}q[v(0,1)-v_2]+p_{11}q[v(1,1)-v_2]=\\ p_{01}[v(0,1)-v_3]+p_{11}q[v(1,1)-v_3]=v(1)-v_4.\end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered}p_{01}F_{1,0}\big(v(0,0)\big)[v(0,1)-v(0,0)]=p_{01}[v(0,1)-v_1]=\\ p_{01}[v(0,1)-v_2]+p_{11}F_{1,1}(v_2)[v(1,1)-v_2].\end{gathered} \tag{52}$$

$$F_{1,0}\big(v(0,0)\big)[v(0,1)-v(0,0)]=v(0,1)-v_1. \tag{53}$$

$$F_{1,1}(v_2)[v(0,1)-v_2]=F_{1,1}(v_3)[v(0,1)-v_3]. \tag{54}$$

$$F_{1,1}(v_3)[v(1,1)-v_3]=v(1,1)-v_4. \tag{55}$$

重新排列方程组，我们可以得到关于v_3的四次方程．其他未知数v_1，v_2，v_4，$F_{2,1}(v_1)$，$F_{1,0}\big(v(0,0)\big)$，$F_{1,1}(v_2)$和$F_{1,1}(v_3)$可以作为v_3的函数来进行求解．在所有的解中，至多存在一个解同时满足以下所有不等式条件:

$$v(0,0)<v_1<v_2<v_3<v_4. \tag{56}$$

$$v_3<v(0,1). \tag{57}$$

$$0<F_{2,1}(v_1)<1. \tag{58}$$

$$0<F_{1,0}\big(v(0,0)\big)<1. \tag{59}$$

$$0<F_{1,1}(v_2)<F_{1,1}(v_3)<1. \tag{60}$$

当没有解满足以上不等式时，我们可以得出结论，参数组合(q,α_0,α_1)最终会导致获得$s_2=1$的外行竞标者 2 与获得$(s_1,s_2)=(1,0)$的专家竞标者 2 的期望收益相同条件没有交点，这反过来表明该子博弈没有均衡.

当我们确实找到一组解时，我们需要进一步验证以下不等式条件:

$$p_{01}[v(0,1)-v_1]\geq p_{01}[v(0,1)-v_3]+p_{11}F_{1,1}(v_3)[v(1,1)-v_3]. \tag{61}$$

当该不等式成立时，我们得出引理 2 中描述的满足$v_3'=v_3$的均衡．我们只需将所得的解重新带入期望收益相同条件，就可以计算得到对应的累积分布函数．否则我们处于一种情况，即在获得$s_2=1$的外行竞标者 2 与获得$(s_1,s_2)=(1,1)$的专家竞标者 2 的期望收益相同条件的交点之下，存在两个获得$s_2=1$的外行竞标者 2 与获得$(s_1,s_2)=(1,0)$的专家竞标者 2 的期望收益相同条件的交点．换言之，我们的均衡应满足$v_3'<v_3$．所以我们使用以下期望收益相同条件重新计算内生参数:

$$p_{00}[v(0,0)-v_1]+p_{10}\big(qF_{2,1}(v_1)+1-q\big)[v(0,1)-v_1]=0. \tag{62}$$

$$\begin{gathered} p_{01}q[v(0,1)-v_1]+p_{11}qF_{2,1}(v_1)[v(1,1)-v_1]= \\ p_{01}q[v(0,1)-v_2]+p_{11}qF_{2,1}(v_2)[v(1,1)-v_2]= \\ p_{01}[v(0,1)-v_3']+p_{11}qF_{2,1}(v_2)[v(1,1)-v_3']= \\ p_{01}[v(0,1)-v_3]+p_{11}q[v(1,1)-v_3]=v(1)-v_4. \end{gathered} \tag{63}$$

$$\begin{gathered} p_{01}F_{1,0}\big(v(0,0)\big)[v(0,1)-v(0,0)]=p_{01}[v(0,1)-v_1]= \\ p_{01}[v(0,1)-v_2]+p_{11}F_{1,1}(v_2)[v(1,1)-v_2]= \\ p_{01}[v(0,1)-v_3']+p_{11}F_{1,1}(v_3')[v(1,1)-v_3']= \\ p_{01}[v(0,1)-v_3]+p_{11}F_{1,1}(v_3)[v(1,1)-v_3]. \end{gathered} \tag{64}$$

$$F_{1,0}\big(v(0,0)\big)[v(0,1)-v(0,0)]=v(0,1)-v_1. \tag{65}$$

$$F_{1,1}(v_2)[v(0,1)-v_2]=F_{1,1}(v_3')[v(0,1)-v_3']. \tag{66}$$

$$F_{1,1}(v_3)[v(1,1)-v_3]=v(1,1)-v_4. \tag{67}$$

这组方程有且仅有一组解，同时满足以下这组不等式条件:

$$v(0,0)<v_1<v_2<v_3'<v_3<v_4. \tag{68}$$

$$v_3'<v(0,1). \tag{69}$$

$$0<F_{2,1}(v_1)<F_{2,1}(v_2)<1. \tag{70}$$

$$0<F_{1,0}\big(v(0,0)\big)<1. \tag{71}$$

$$0<F_{1,1}(v_2)<F_{1,1}(v_3')<F_{1,1}(v_3)<1. \tag{72}$$

而这组解就是引理 2 中描述的满足$v_3'<v_3$的均衡. 最后，我们只需将所得的解重新带入期望收益相同条件，就可以计算得到对应的累积分布函数.