罗素悖论

马国轩*

2022 年 8 月 13 日

摘要

这里简单总结和介绍一下罗素悖论问题

1 什么是罗素悖论（Russell's Paradox）

设性质 $P(x)$ 表示 x$\notin x$, 现在假设由性质 P 确定了一个集合 A—$A = \{x|x \notin x\}$ 。那么请问 $A \in A$ 是否成立?

首先若 $A \in A$, 则 A 是 A 的元素，那么 A 具有性质 P，由性质 P 知道 $A \in A$；其次若 $A \notin A$，也就是说 A 具有性质 P，而 A 是所有具有性质 P 的类组成的，所以 $A \in A$。

有个村子中有个理发师，他声称:"我只给不给自己理发的理发。"有个人就问他:"那你该不该给你自己理发?"

如果他不给自己理发，他就属于"不给自己理发的人"，他就要给自己理发，而如果他给自己理发呢? 他又属于"给自己理发的人"，他就不该给自己理发了。

这个"悖论"的问题就出在这里了:"不给自己刮脸的人"的界定标准是什么?

1. 界定标准是：如果村里的任一村民 x，从出生到死亡都从来没有自己给自己刮过脸，即一生中都没有"自己给自己刮脸"的"劣迹"，那么，x 是"不给自己刮脸的人"。

2. 界定标准是：如果村里的任一村民 x，在接受该理发师刮脸服务之前从无自己给自己刮过脸，即在接受该理发师刮脸服务之前没有"自己给自己刮脸"的"劣迹"，那么，x 是"不给自己刮脸的人"。

*资料来源于网络

1908 年，策梅罗（Ernst Zermelo）在自己这一原则基础上提出第一个公理化集合论体系，后来这一公理化集合系统很大程度上弥补了康托尔朴素集合论的缺陷。这一公理系统在通过弗兰克尔（Abraham Fraenkel）的改进后被称为 ZF 公理系统。在该公理系统中，由于分类公理（Axiom schema of specification）：P(x) 是 x 的一个性质，对任意已知集合 A，存在一个集合 B 使得对所有元素 x B 当且仅当 x A 且 P(x)；因此 {x x 是一个集合} 并不能在该系统中写成一个集合，由于它并不是任何已知集合的子集；并且通过该公理，存在集合 A={x x 是一个集合} 在 ZF 系统中能被证明是矛盾的，因此罗素悖论在该系统中被避免了。

除 ZF 系统外，集合论的公理系统还有多种，如冯 · 诺伊曼（von Neumann)等人提出的 NBG 系统等。在该公理系统中，所有包含集合的"collection"都能被称为类 (class)，凡是集合也能被称为类，但是某些 collection 太大了（比如一个 collection 包含所有集合）以至于不能是一个集合，因此只能是个类。这同样也避免了罗素悖论