偏导数、方向导数，梯度

马国轩

2022 年 8 月 13 日

摘要

这里简单解释一下在多维空间下，偏导数、方向导数以及梯度之间的相互联系。这里主要以 2 元函数为例。

1　向量的相关知识

1. 向量：指具有大小（magnitude）和方向的量。我们可以用加粗的小写字母（印刷体）或小写字母上加右箭头来表示, 如 $\mathbf{v}, \overrightarrow{a}$。一个向量也可以用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示。

   在直角坐标系中，我们一般取 x, y 轴方向相同的两个单位向量 i, j 作为一组基地来表示平面中以原点 O 为起点，P 为终点的任意向量（平面向量基本定理）$a = xi + yj$。而实数对 (x, y) 即为向量 $\mathbf{a}$ 的坐标。

2. 向量的模：向量的大小，也就是向量的长度，向量坐标到原点的距离—$|\mathbf{a}|$

3. 单位向量：长度为 1 的单位的向量就是单位向量

4. 向量的运算-假设向量 $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1)$，$\overrightarrow{b} = (x_2, y_2)$，并且 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 之间夹角为 θ。

   (a) 数量积：两个向量的数量积（内积、点积）是一个数/实数，记作 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$

   $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\theta$$

(b) 向量积：两个向量的向量积（外积、叉积）是一个向量，记作 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$。$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 同时垂直于 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$[1]。向量积的模为

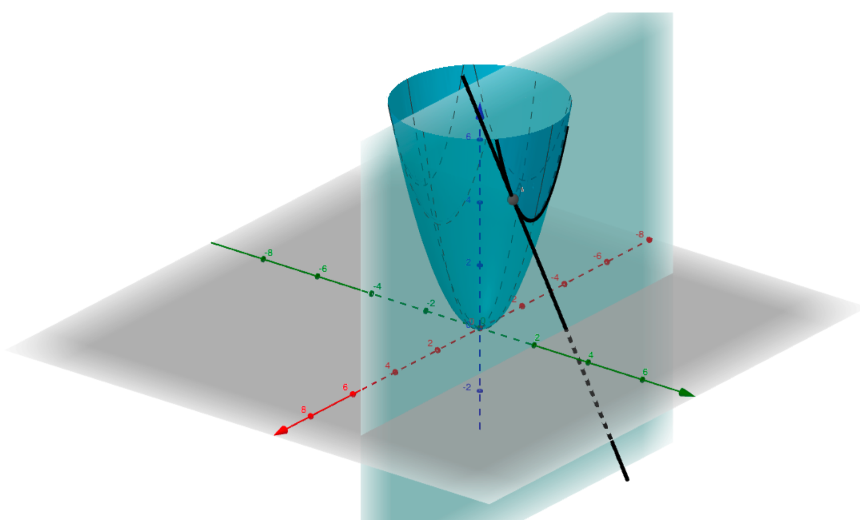
$$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| = \overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin\theta$$

2 偏导数

定义：假设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的某个领域内有定义，如果 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点对 x 的偏导数。

通俗的来讲，偏导就是固定其他分量，单独对某一个分量求导数。以 $z=x^2+y^2$ 为例，在点 $A(1,2)$ 上对 x 求偏导，那么就可以先用 $y=2$ 这个平面与 $z=x^2+y^2$ 截出一条曲线 $z=x^2+4$。

然后我们就可以对截出的曲线函数求导，如此一来就得到了 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x=1,y=2)}=6$。这个 6 就是所截曲线的切线的斜率（也就是说切线上一点每往 x 轴方向变化一个单位，其 z 值就会相应变化 6），同时也是函数 $z=x^2+y^2$ 在 A 点的沿 x 轴方向上的变化率。



[1]例子，$a=(x_1,y_1)$,$b=(x_2,y_2)$，则 $a\times b=(0,0,x_1y_2-x_2y_1)$ 。即叉乘出来的向量在 z 轴上，垂直于 x,y 轴。

3 方向导数

顾名思义，方向导数就是函数值在某个“方向”上的变化率。假设 e 为单位向量（i.e. $e = (\sin t, \cos t)$），设函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的领域内有定义如果

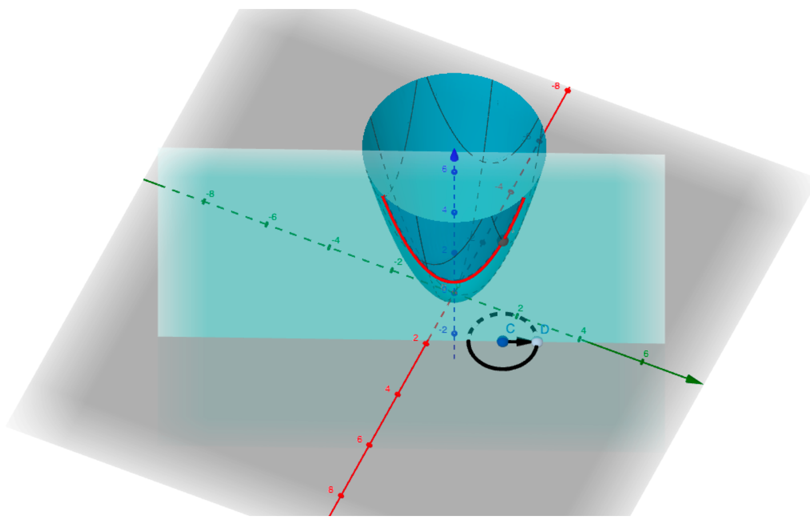
$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot \sin(t),\ y_0 + h\cos(t))\ -\ f(x_0, y_0)}{\Delta h}$$

存在，则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点对 $e = (\cos t, \sin t)$ 方向上的导数。

方向导数有如下定理

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (\cos t, \sin t)$$

从几何上来分析，就是 e 单位向量的方向跟函数 $f(x, y)$ 截面所截出的新的曲线上的斜率



4 梯度

很明显，函数曲面上的一点可以有任意方向的切线，同时对应着不同方向的切线的斜率。如同水滴沿着杯壁流下一样，由于重力作用，水滴一定会沿着杯壁最陡峭的方向流到杯底。为了表示出函数在某点上最大的方向导数，从而就引出了梯度这个概念。

梯度：是一个矢量，其方向上的方向导数最大，其大小正好是此最大方向导数

设函数 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内有一阶连续偏导数，则对每一个点 $P(x_0, y_0) \in D$ 都可以定出一个向量 $f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j$ 称为 $f(x, y)$ 在 P 点处的梯度，记作 $\nabla f(x_0, y_0)$。联系方向导数，给定 $P = (x_0, y_0)$, 单位向量 e 方向不同会产生不同的方向导数，但有一个方向上产生的导数会最大。那么，根据方向导数的定义，我们可以发现

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (\cos t, \sin t)$$

联系向量内积的定义，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0) &= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (\cos t, \sin t) \\ &= |\,(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))\,| \cdot 1 \cdot \cos t \\ &= \sqrt{(f_x)^2 + (f_x)^2} \cdot 1 \cdot \cos t\end{aligned}$$

当 $t = 0, \cos t = 1$ 取得最大值,从而看到此时的方向就是 $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ 也就是梯度