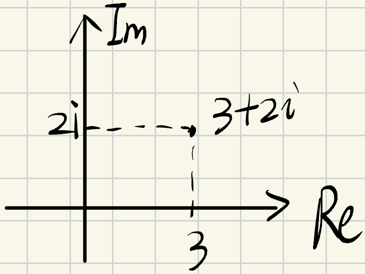
From:


欧姆社学习漫画
漫画虚数和复数
〔日〕相知 政司/著
〔日〕石野 人衣/漫画绘制
〔日〕トレンド·プロ/漫画制作
高丕娟/译
i
-i
θ
$i^2=-1$
科学出版社

Review

△ 复数 $a+bi$，$i^2=-1$

△ 复平面



实轴：Re

虚轴：Im

△ 复数表示 z

复数大小 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ = 到原点距离

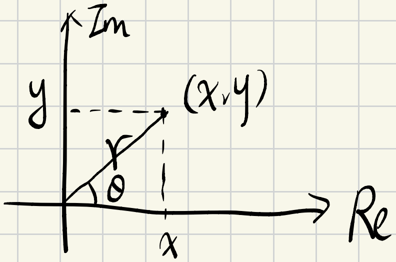
幅角：$\angle z=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ = 与实轴夹角大小

共轭复数 $\bar{z}=a-bi$

欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

当 $\theta=\pi$ 时，$e^{i\pi}-1=0$

极坐标表示



$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\arctan\frac{y}{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=r\cdot\cos\theta \\ y=r\cdot\sin\theta\end{cases}$$

$$x+iy=r\cos\theta+i\sin\theta$$

e的定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ or $e=\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$$\frac{d(e^x)}{dx}=e^x$$

欧拉公式证明: $e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}$

$(i^2=-1)$

$$=\underbrace{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}}_{\cos x}\cdots+i\underbrace{\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\right)}_{\sin x}$$

$$=\cos x+i\sin x$$

复数乘法运算

$$\dot{z}_1 \cdot \dot{z}_2 = r_1 e^{i\alpha} \cdot r_2 e^{i\beta} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\underline{i(\alpha+\beta)}}$$

乘完后，幅角相加，因此复数乘法表示旋转

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$$

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

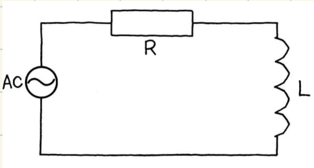
$$= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

So, $$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

正文



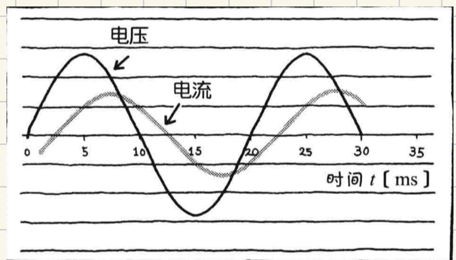
电阻和线圈的串联电路

在这个电路中有个电阻 R，有电流经过时，两端电压

$$R\cdot I(t)$$

有一个线圈 L，其有电流经过时，两端电压：$L\cdot\frac{dI(t)}{dt}$

有一交流电源 AC ~ 后面计算会先忽虑这个√2



其电压 $V(t)=\sqrt{2}U_m\sin(\omega t)$

U_m是有效值（等效于同电压直流电）

$\sqrt{2}U_m$ 最大值.

由于线圈的存在，其电流与电压有一个相位差 φ

$\therefore\ I(t)=\sqrt{2}I_m\sin(\omega t+\varphi)$

分析这个电路，得到：$R\cdot I(t)+L\cdot\frac{dI(t)}{dt}=\sqrt{2}U_m\sin(\omega t)$ (*)

求 $I(t)$

(*) 右边

$$U_m\cos(\omega t)+iU_m\sin(\omega t)=U_m e^{i\omega t}$$
$$\parallel$$
$$\dot{U}$$

思路：直接解该微分方程难，于是在 (*) 右边追加实部，将其转换为复数后进行解答，解答后舍弃实部即可

我自己

(*) 左边 同样设为复数

$$\dot{I}=I_m e^{i(\omega t+\varphi)}=I_m\cos(\omega t+\varphi)+iI_m\sin(\omega t+\varphi)$$

于是 (*) $\Rightarrow$ $R\cdot\dot{I}+L\cdot\frac{d\dot{I}}{dt}=\dot{U}$ (1)

其中 $L\cdot\frac{d\dot{I}}{dt}=L\cdot\frac{d}{dt}\left(I_m e^{i(\omega t+\varphi)}\right)=L\cdot I_m\cdot i\omega\cdot e^{i(\omega t+\varphi)}$

$$=i\omega\cdot L\cdot\dot{I}$$

所以 (1) $\rightarrow$ $R\cdot\dot{I}+i\omega L\cdot\dot{I}=\dot{U}$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R+i\omega L}=\frac{R-i\omega L}{(R+i\omega L)(R-i\omega L)}\cdot\dot{U}$$

$$=\frac{R-i\omega L}{R^2-(i\omega L)^2}\dot{U}=\left(\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}-\frac{i\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)\dot{U} \quad (2)$$

现在我们要分离出 (2) 中的虚部

(两复数乘积的大小 = 大小的乘积，$|\dot{z}_1 \cdot \dot{z}_2| = |\dot{z}_1| \cdot |\dot{z}_2|$

所以 $$|\dot{I}| = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{i\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)^2} \cdot |\dot{U}|$$

$$= \sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{[R^2+(\omega L)^2]^2}}\ |U_m e^{i\omega t}|$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

幅角 $$\angle \dot{I} = \arctan\left[\frac{\frac{-\dot{U}\omega L}{R^2+(\omega L)^2}}{\frac{\dot{U}R}{R^2+(\omega L)^2}}\right] = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$I = I_m \cdot e^{i(\omega t+\varphi)} = |\dot{I}| \cdot e^{i(\omega t+\angle \dot{I})}$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} e^{i(\omega t-\arctan\frac{\omega L}{R})}$$

虚部即是所求

$$= \frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \cos\left(\omega t-\arctan\frac{\omega L}{R}\right) + i \boxed{\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t-\arctan\frac{\omega L}{R}\right)}$$

总结： 电压波形：$V(t)=\sqrt{2}U_m\sin(\omega t)$

对应电流波形：$I(t)=\sqrt{2}\dfrac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t-\arctan\dfrac{\omega L}{R}\right)$