傅里叶分析

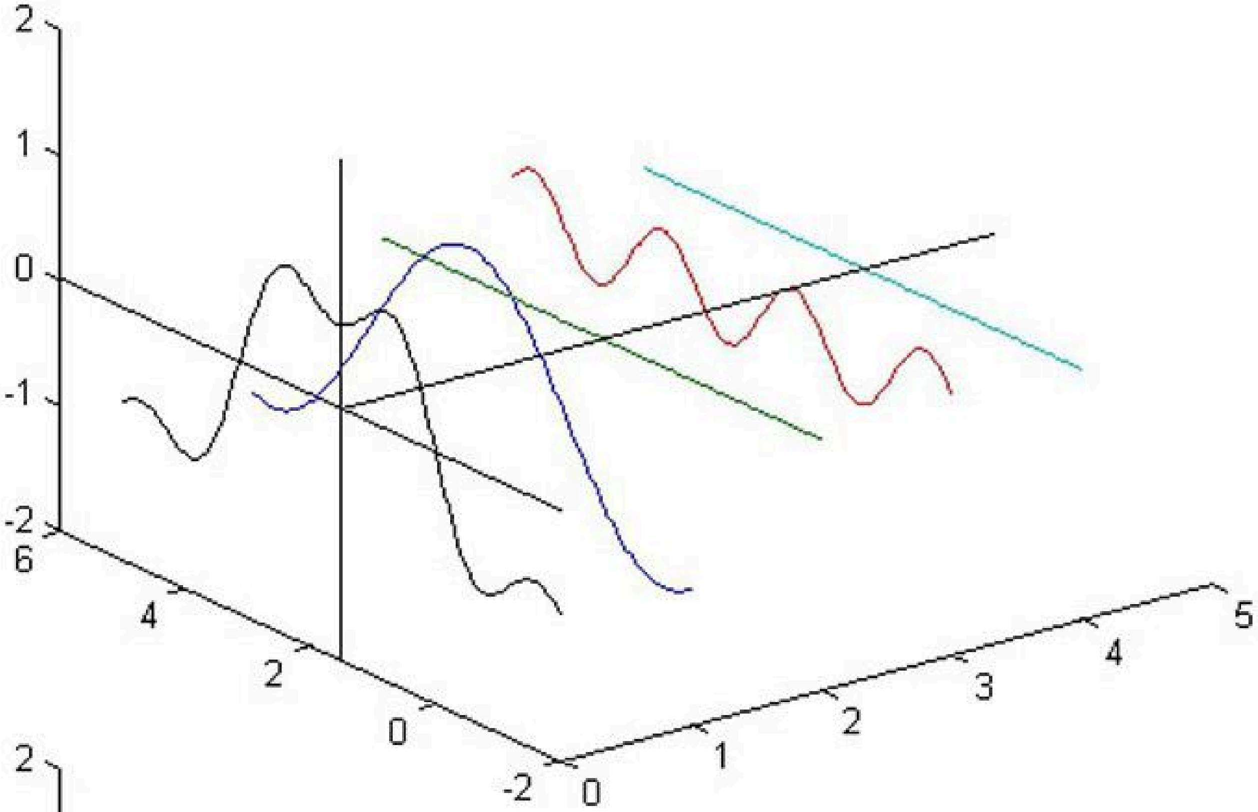
> 提要：包括傅里叶级数和傅里叶变换

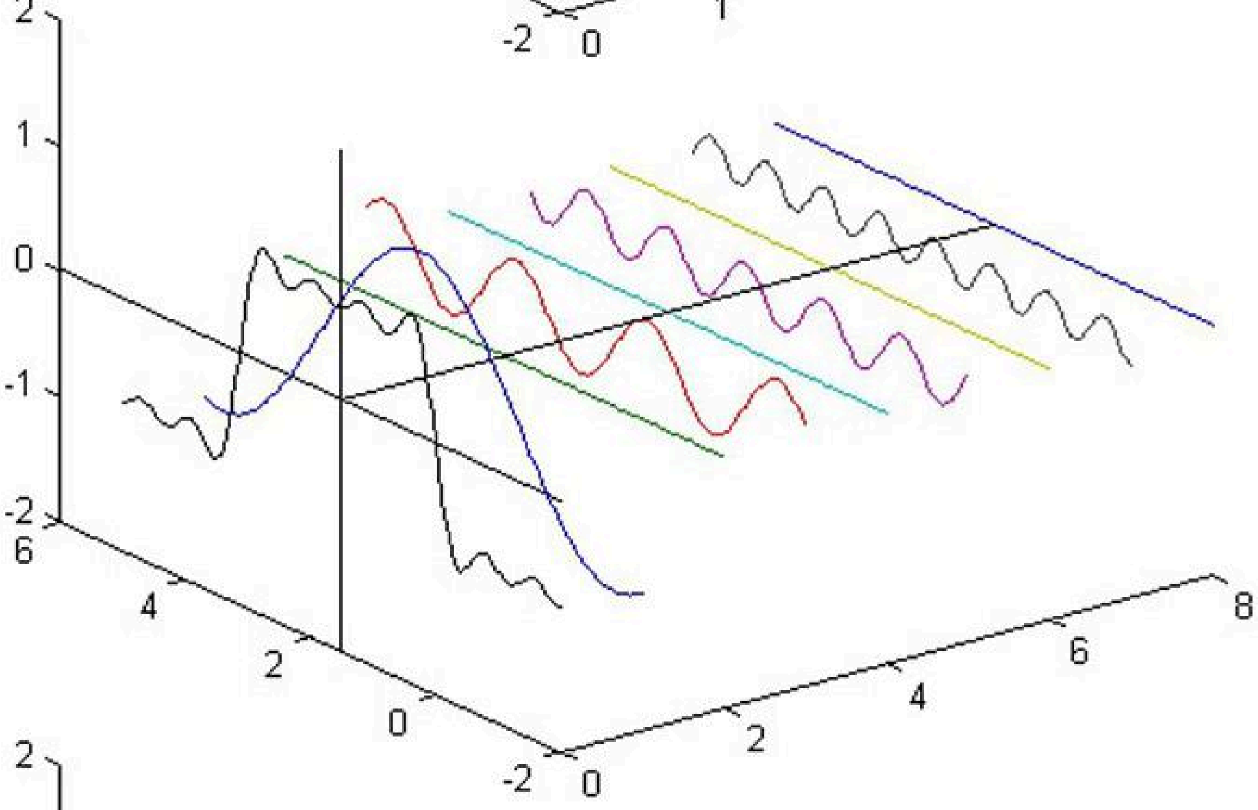
傅里叶级数和傅里叶变换形象理解

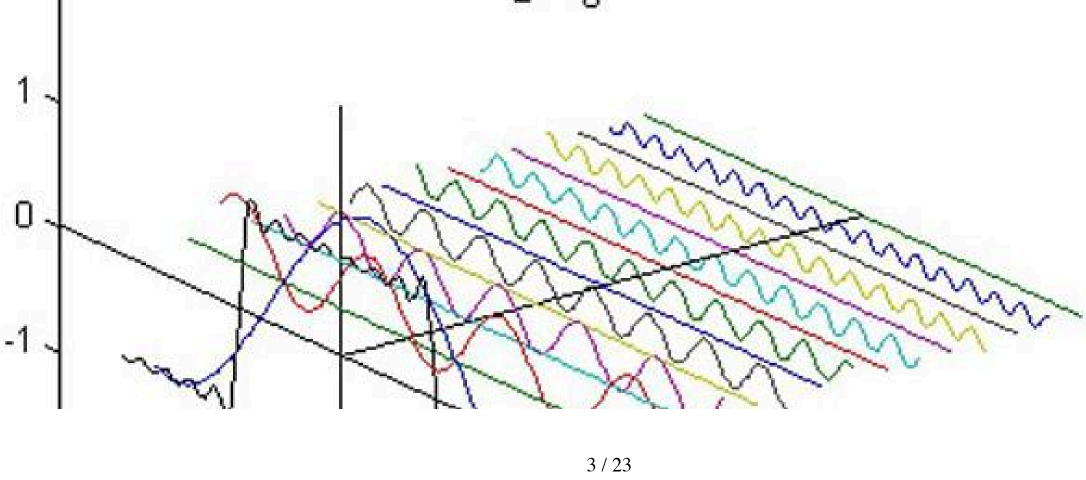
> 该小节参考文章：https://zhuanlan.zhihu.com/p/19763358

一段音乐的声波可以看作是**时域**，而音乐的乐谱就是**频域**。傅里叶分析就是研究时域和频域的变换。

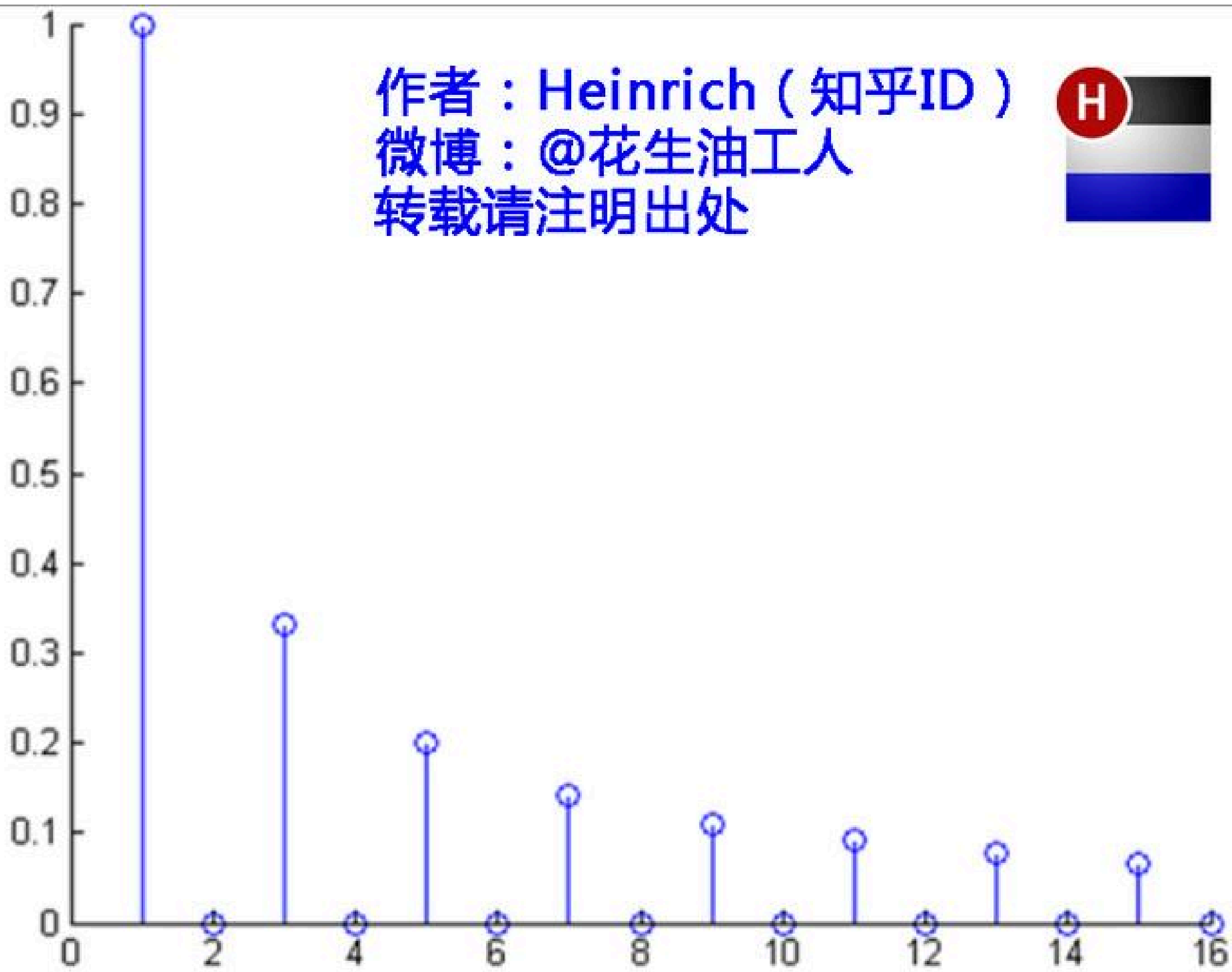
设定上，任何波形都是用正弦波叠加起来的。例如下图，最前面黑色的线就是所有正弦波叠加而成的总和，也就是越来越接近矩形波的那个图形。而后面依不同颜色排列而成的正弦波就是组合为矩形波的各个分量。这些正弦波按照频率从低到高从前向后排列开来，而每一个波的振幅都是不同的。

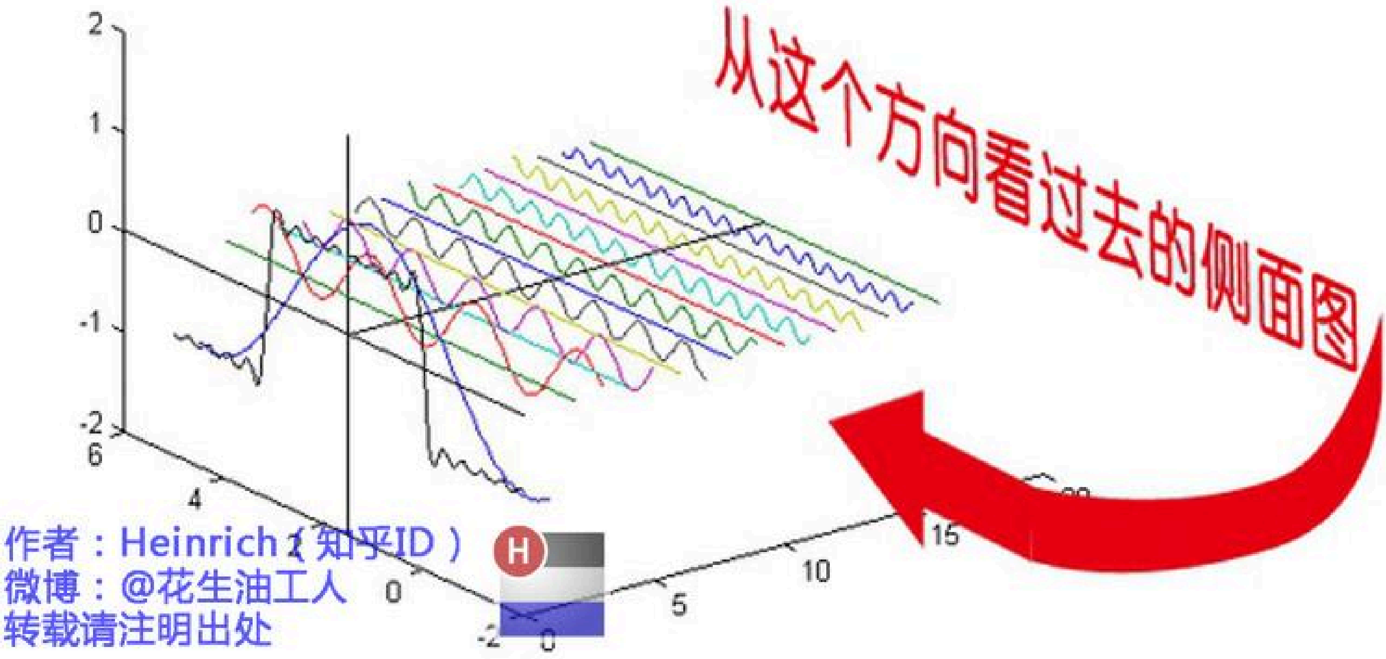

2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
1
2
3
4
5


2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8

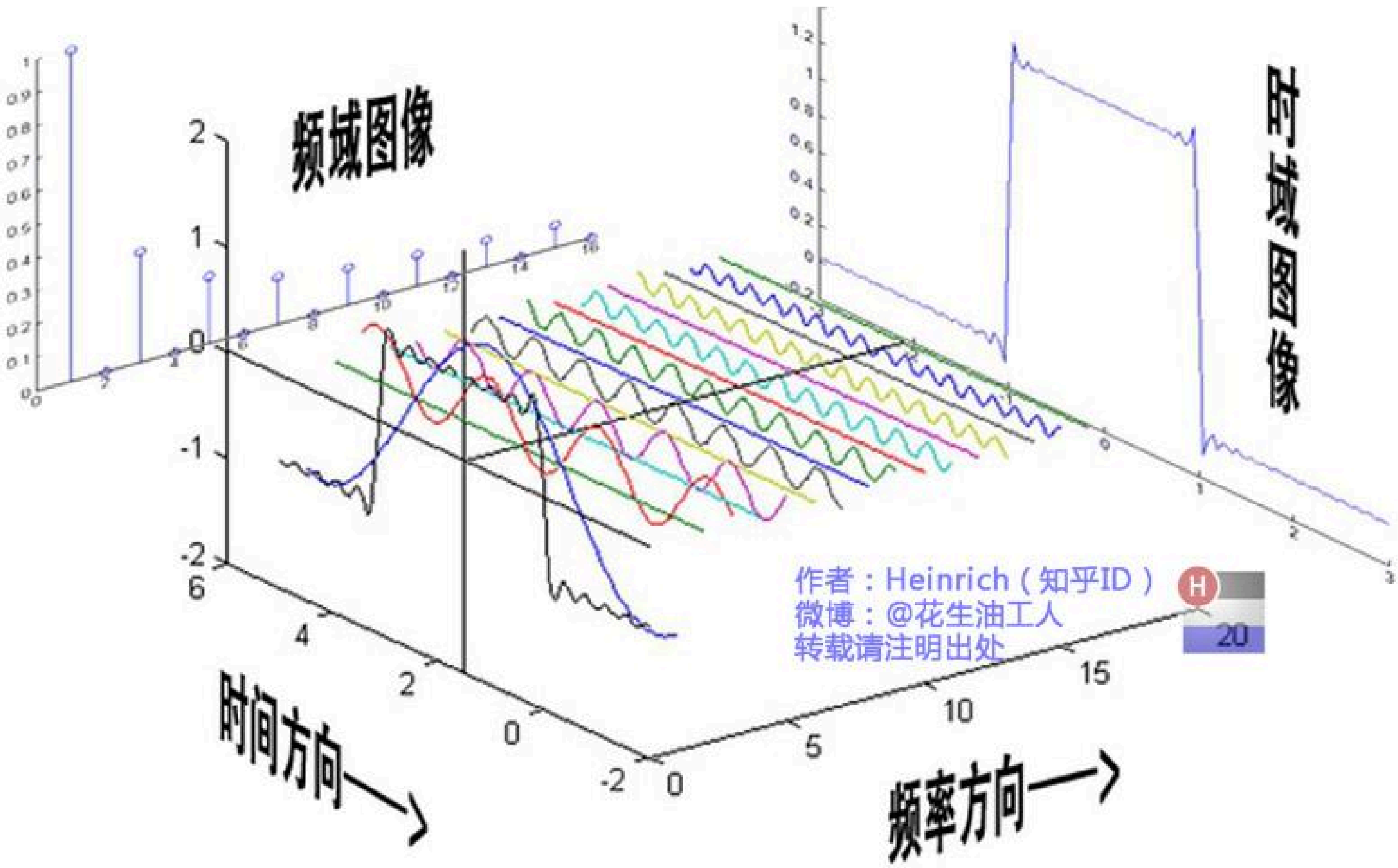

2
1
0
-1

频域图像（频谱）就是另一个方向看过去的侧面图。





更清晰一点：



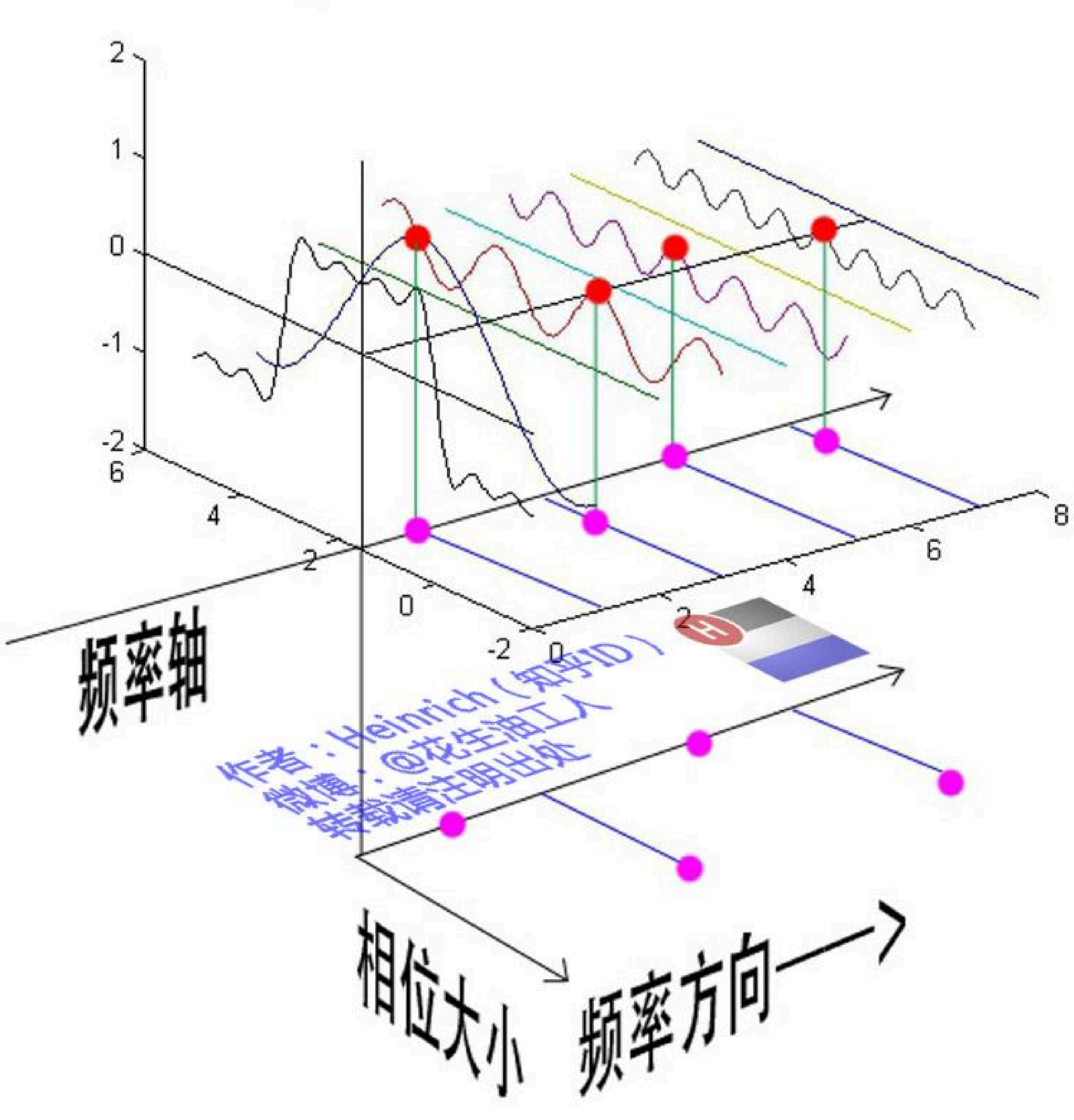
这里我们就可以总结一下傅里叶分析的作用：

1. 很多在时域看似不可能做到的数学操作，在频域相反很容易。这就是需要傅里叶变换的地方。尤其是从某条曲线中去除一些特定的频率成分，这在工程上称为**滤波**，是信号处理最重要的概念之一，只有在频域才能轻松的做到。

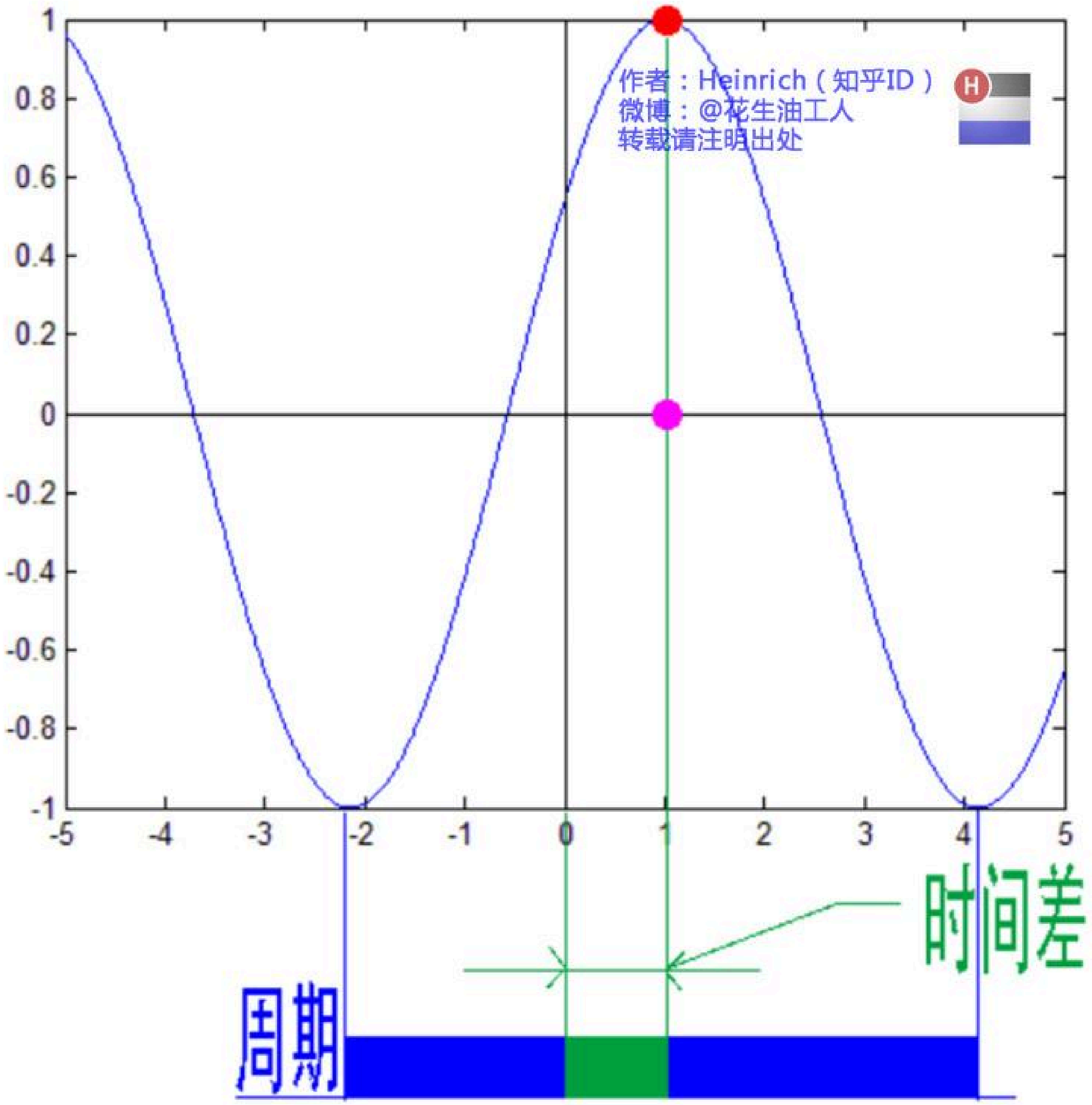
2. 求解微分方程是一件相当麻烦的事情。因为除了要计算加减乘除，还要计算微分积分。而傅里叶变换则可以让微分和积分在频域中变为乘法和除法。

下面继续说**相位谱。**

通过时域到频域的变换，我们得到了一个从侧面看的频谱，但是这个频谱并没有包含时域中全部的信息。因为频谱只代表每一个对应的正弦波的振幅是多少，而没有提到相位。基础的正弦波Asin(wt+θ)中，振幅，频率，相位缺一不可，不同相位决定了波的位置，所以对于频域分析，仅仅有频谱（振幅谱）是不够的，我们还需要一个相位谱。

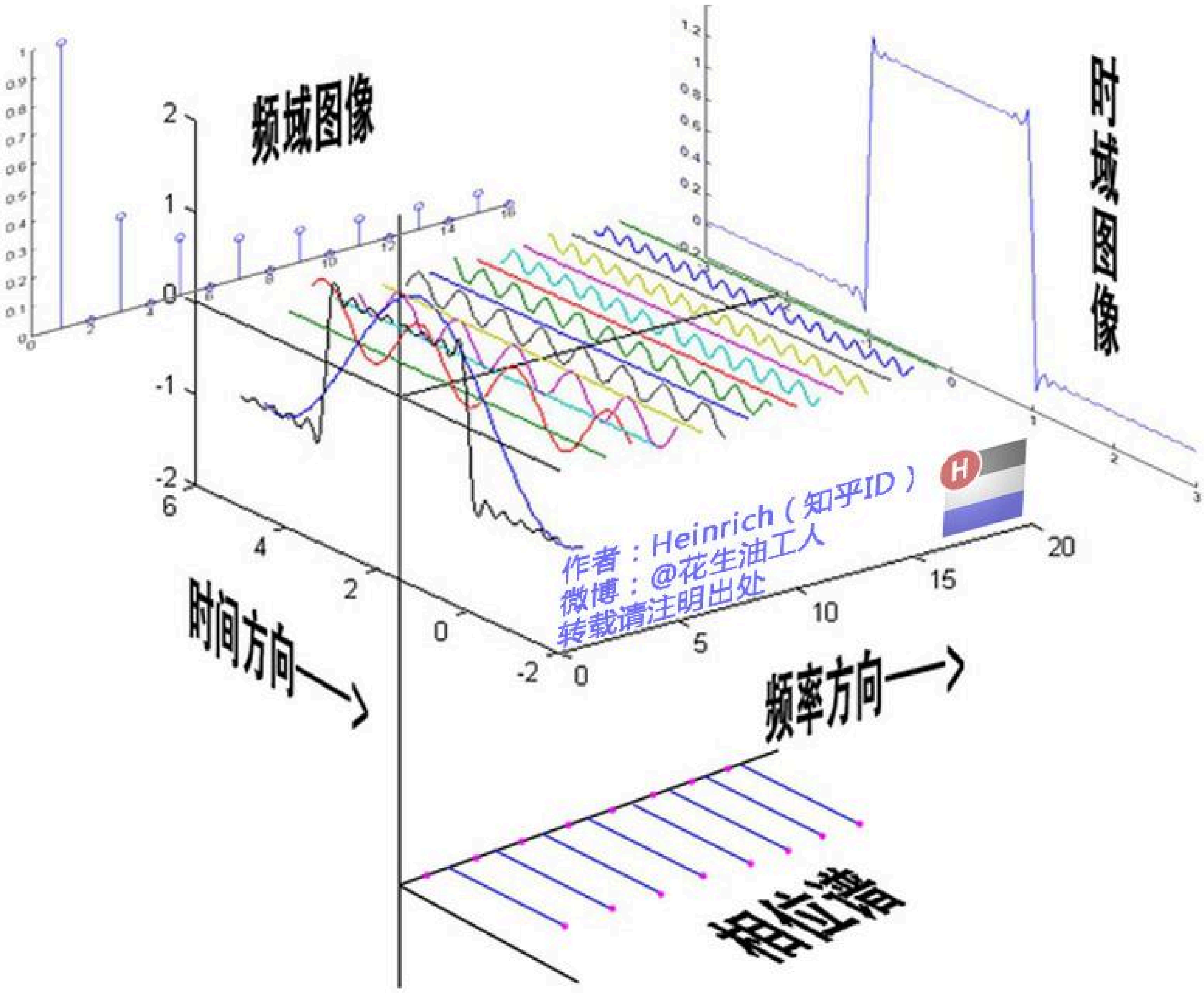


在图中就是那些小红点。小红点是**距离频率轴**最近的波峰，而这个波峰所处的位置离频率轴有多远呢？为了看的更清楚，我们将红色的点投影到下平面，投影点我们用粉色点来表示。当然，这些粉色的点只标注了波峰距离频率轴的距离，并不是相位。



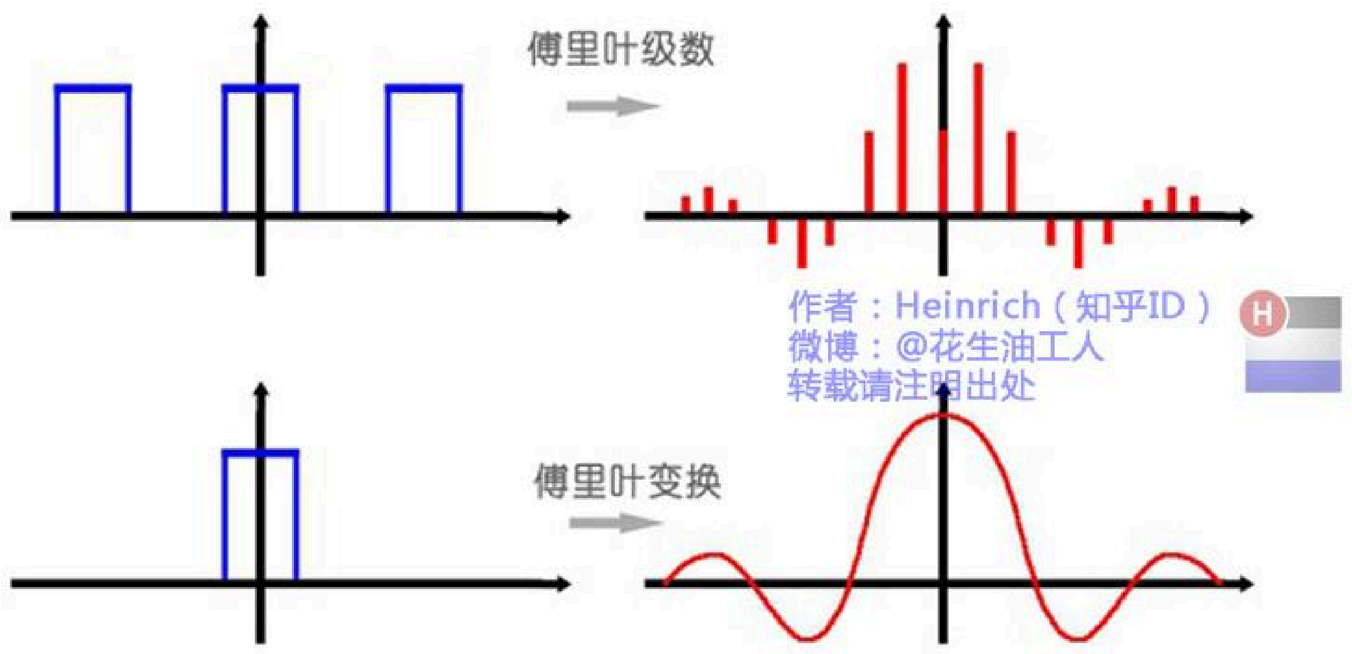
这里需要纠正一个概念：时间差并不是相位差。如果将全部周期看作2Pi或者360度的话，相位差则是时间差在一个周期中所占的比例。我们**将时间差除周期再乘2Pi，就得到了相位差**。

相位差是有周期的，所以人为定义相位谱的值域为(-pi，pi]。最后一张完整的图：



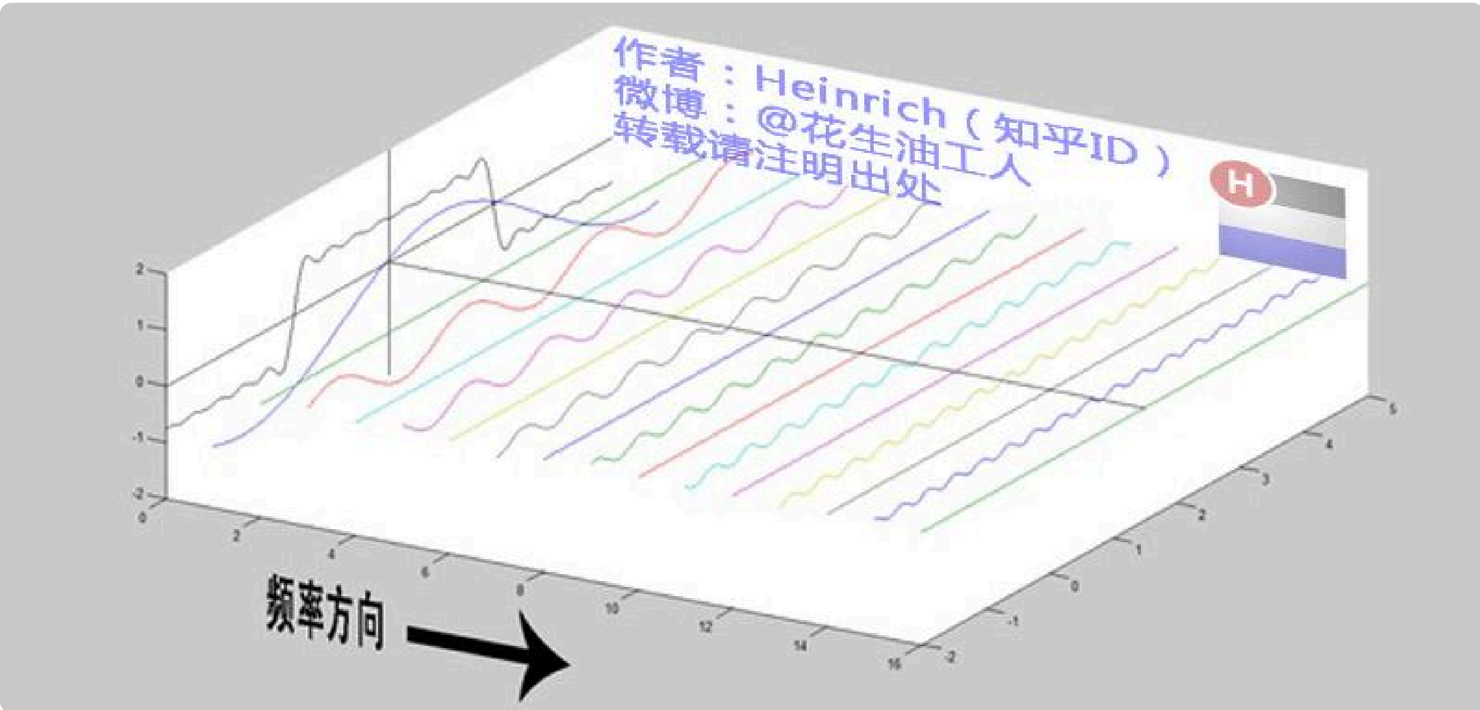
傅里叶级数的本质是将一个**周期**的信号分解成无限多分开的（离散的）正弦波，但是宇宙并不是周期的。

傅里叶变换，则是将一个时域**非周期**的连续信号，转换为一个在频域非周期的连续信号。

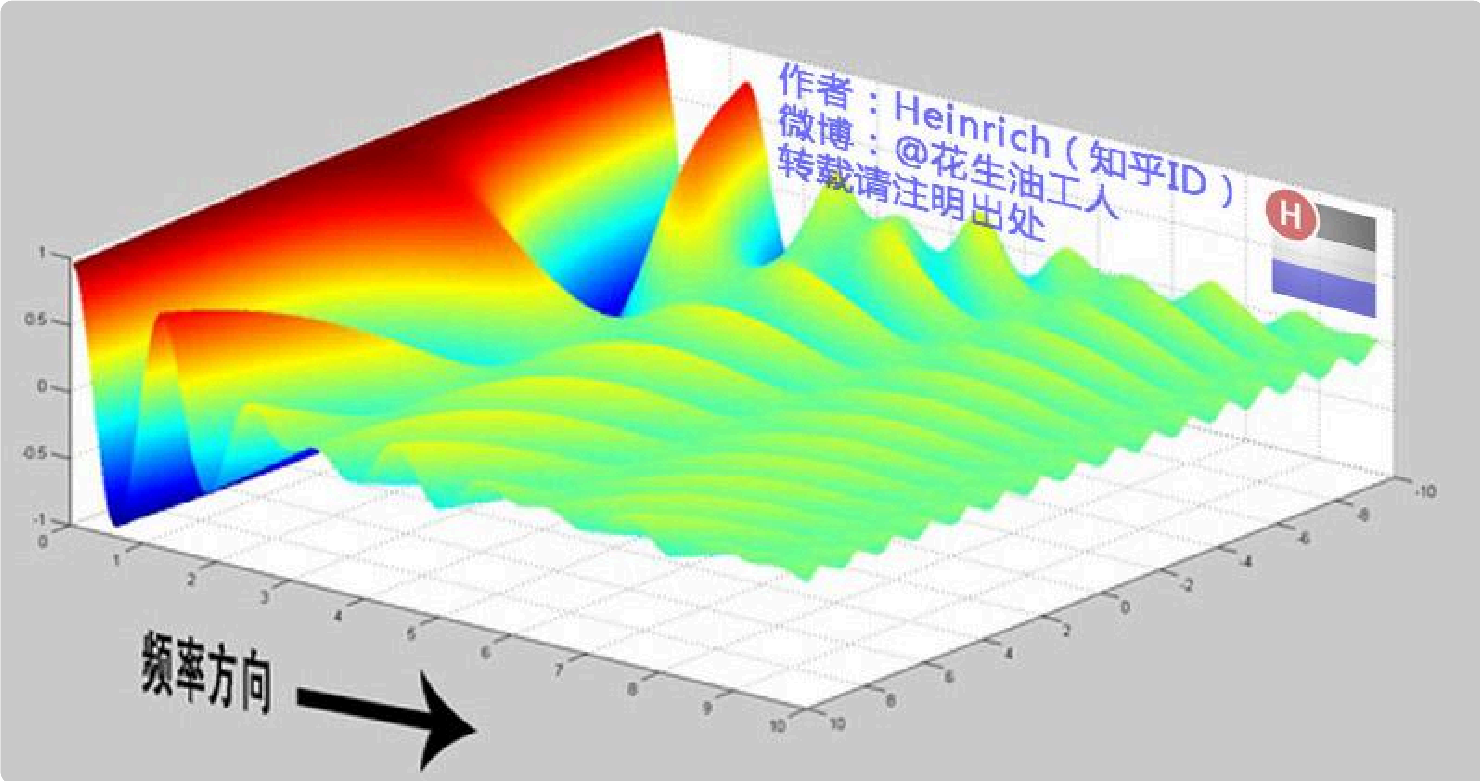


傅里叶变换实际上是对一个周期无限大的函数进行傅里叶变换。

傅里叶变换在频域上就从**离散谱变成了连续谱。**



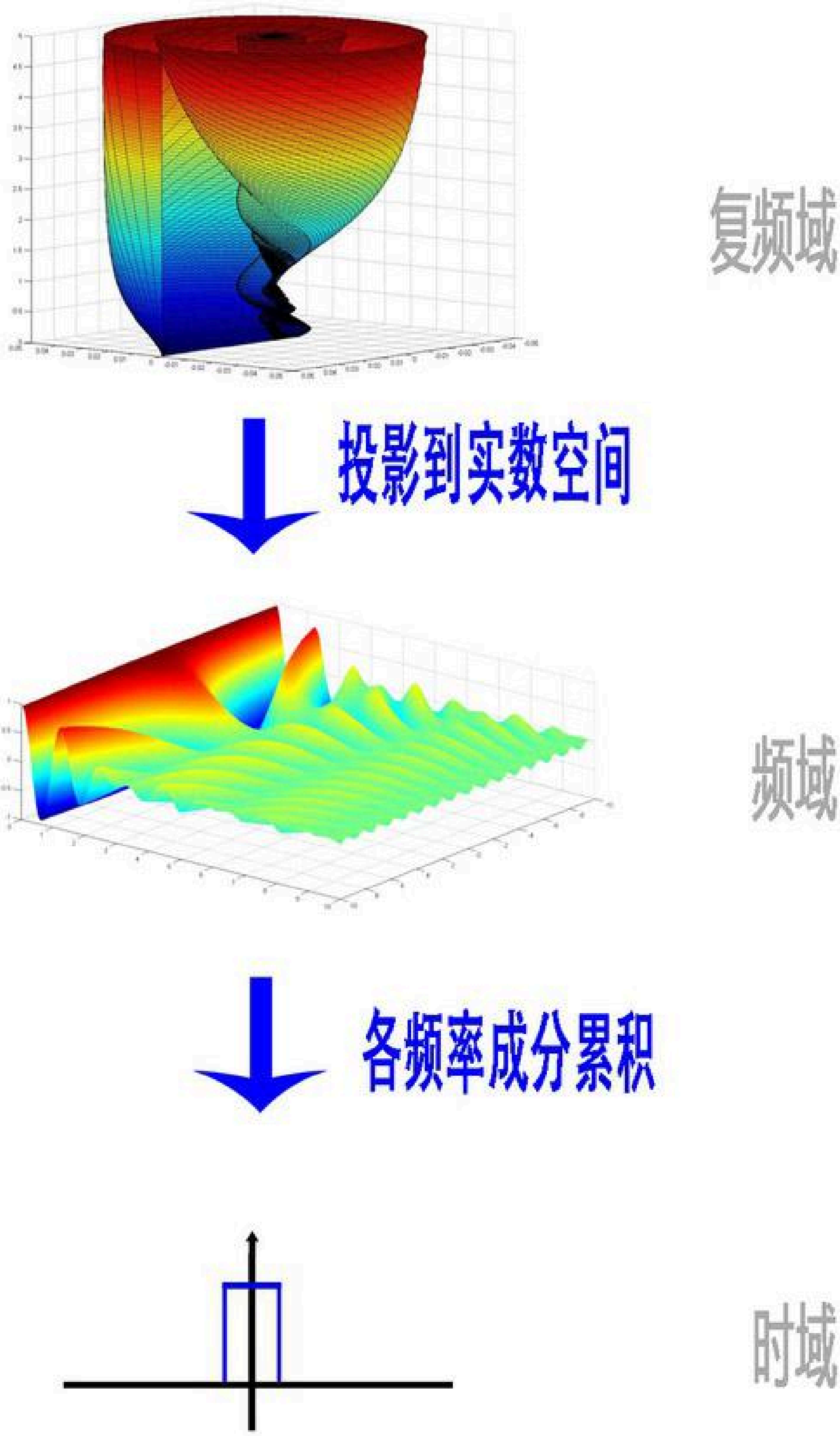
离散谱



连续谱

离散谱的叠加，变成了连续谱的累积。所以从傅里叶级数到傅里叶变换在计算上也从求和符号变成了积分符号。

复数的含义是一种**旋转**。利用欧拉公式，我们可以把傅里叶变换的复指数形式。我们将其可视化出来：



作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处

傅里叶变换的数学推导

三角函数正交性

下列三角函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是两两正交的：

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \quad (\text{任意 } m, n)$$

> 可以利用积化和差来证明，例如
>
> $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\,dx$$
>
> 若 $m \neq n$，则 $m \pm n \neq 0$，那么两个余弦函数在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都是 0（因为它们是周期函数，正负对称）。

> **从向量正交到函数正交**
>
> 当我们说两个向量$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$和$\mathbf{b} = (b_1, b_2)$正交，实际上是在说，
>
> $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Longleftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

> 当我们说两个函数正交，实际上是将函数看作是无穷维的向量，他们每个维度（相同自变量下的函数值）相乘再相加的结果为0。
>
> $$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

周期为2π的函数展开成傅里叶级数

对于周期$T = 2\pi$的周期函数$f(x) = f(x + 2\pi)$，我们可以将其展开为：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx \tag{1}$$

我们将式(1)变形，得到，

$$f(x) = a_0 \cos 0x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_0 \sin 0x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{2}$$

而教科书上的形式一般为，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3}$$

a_0相差一个1/2的系数。我们先对式(2)积分再解释。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx dx \tag{4}$$

根据三角函数的正交性，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{+}$$

所以(4)等号右边第二项为0， 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nxdx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=0 \tag{5}$$

同理(4)等号右边第三项也为0，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nxdx=0$$

所以，(4)变为

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}a_0dx=2\pi a_0$$

从而得到

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

令

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

我们就得到了教科书上的形式，**这是为了保持a_0与a_n、b_n形式的统一。**

继续计算a_n。

对(3)等式两边同乘以$\cos mx$，再积分得到，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos mxdx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\cos mxdx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\cos mxdx \tag{6}$$

其中，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mxdx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos mxdx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mxdx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx \right) \\
&= \sum_{n=1, n\neq m}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx \right) + a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mxdx \\
&= 0 + a_m \cdot \pi = a_n \pi
\end{aligned}$$

所以，(6)变形为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx$$

> 注：这里当且仅当$m = n$时等式两边不为0，所以m直接改写为n

对(3)等式两边同乘以$\sin mx$，再积分得到，

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

最后我们得到了傅里叶级数。

> 对$f(x) = f(x+T)$，$T = 2\pi$的周期函数。有以下展开，
>
> $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中，

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx
\end{aligned}
$$

周期为$2L$的函数展开成傅里叶级数

周期为$2L$的周期函数，即$f(t) = f(t+2L)$。

我们可以利用**换元法**推导它的傅里叶展开。

令

$$
x = \frac{\pi}{L}t \tag{7}
$$

则

$$
t = \frac{L}{\pi}x \tag{8}
$$

$$
f(t) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) \triangleq g(x)
$$

$g(x)$以2π为周期。上一节我们知道了$g(x)$的傅里叶展开。

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx
\end{aligned} \tag{9}
$$

由(7)得，

$$
\cos nx = \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right), \quad \sin nx = \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \tag{10}
$$

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} d\left(\frac{\pi}{L}t\right) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dt \tag{11}
$$

将(7)、(8)、(10)、(11)代入(9)得到，

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin\frac{n\pi}{L}t\right) \\
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\,dt \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi}{L}t\,dt
\end{aligned} \tag{12}
$$

工程中，t从0始，于是令

$$
\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{T} \quad (T = 2L)
$$

并调整积分区间

$$\int_{-L}^{L} dt \to \int_{0}^{2L} dt \to \int_{0}^{T} dt$$

得到，

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \end{aligned} \tag{13}$$

傅里叶级数的复数形式

根据Euler's Formula，

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}),\ \sin\theta = -\frac{1}{2}i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \tag{14}$$

代入(13)得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{1}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) - \frac{1}{2} i b_n (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - i b_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-in\omega t} \right] \end{aligned} \tag{15}$$

对于(15)中的最后一项

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-in\omega t}$$

令$n\to -n$，这一项就变为了

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}e^{in\omega t}$$

而

$$\frac{a_0}{2}=\sum_{n=0}^{0}\frac{a_0}{2}e^{in\omega t}$$

(15)的所有项就都全部统一了起来，

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{n=0}^{0}\frac{a_0}{2}e^{in\omega t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega t}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}e^{in\omega t}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\omega t}\end{aligned}$$

其中系数为

$$C_n=\begin{cases}\frac{a_0}{2}, & n=0\\ \frac{a_n-ib_n}{2}, & n=1,2,3,\cdots\\ \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}, & n=-1,-2,-3,\cdots\end{cases}$$

继续展开

$$C_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^0dt$$

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt - i\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt\right) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\cos n\omega t - i\sin n\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt, \text{ n=1,2,3...}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(-n\omega t)dt + i\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(-n\omega t)dt\right) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\cos n\omega t - i\sin n\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \quad \text{n=-1,-2,-3...}
\end{aligned}
$$

我们发现n无论取正整数负整数和0，其形式是统一的。于是我们就得到了复指数形式的傅里叶级数。

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}, \quad C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{16}
$$

> 总结，傅里叶级数的复指数形式格式统一，方便后续计算。

傅里叶变换

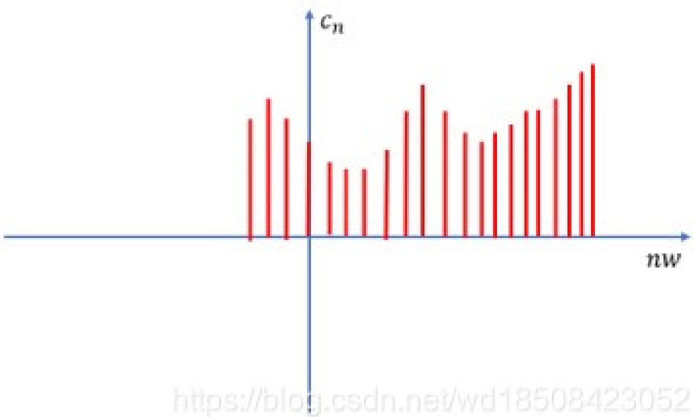
以上我们处理的都是周期函数。那么如何处理非周期函数呢?

我们可以把非周期函数视为**周期无穷大**的周期函数，haha。

我们把(16)的C_n代入$f(t)$，并作一点形式上的修改。

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-in\omega_0 t} dt \cdot e^{in\omega_0 t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-in\omega_0 t} dt \cdot e^{in\omega_0 t}
\end{aligned} \tag{17}
$$

- (17)式变换了积分区间：$(0,T) \to (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$；（周期函数）
- $\omega \to \omega_0$： 傅里叶级数下的 ω 是离散的。这里改成 ω_0，表示离散条件下的一个基频率（类似于 1 是整数集合的"基频"）；
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$；
- $f(t) \to f_T(t)$：区分周期函数 $f_T(t)$ 和非周期函数 $f(t)$。



w_0->0，nw_0变为连续变量w

对(17)取极限，$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t)$时，

$$
\begin{cases}
\omega_0 \text{ 变为微元 } d\omega \\
n\omega_0 \to \omega, \quad \text{离散的 } n\omega_0 \text{ 变为连续变量 } \omega \\
\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \to \int_{-\infty}^{\infty}
\end{cases}
$$

得到，

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right\}e^{i\omega t}d\omega$$

大括号内，就是大名鼎鼎的傅里叶变换公式：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{18}$$

(19)则是傅里叶逆变换公式。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad \text{(逆变换)} \tag{19}$$