CC–297
Projeto No. 2

Distribuído: 03/04/17

Entrega: 08/05/17

João L. F. Azevedo

1º Semestre/2017

O objetivo principal deste projeto é lhe proporcionar a oportunidade de praticar a implementação de geradores de malhas computacionais (estruturadas) baseados na solução de equações diferenciais. Em particular, neste caso estamos interessados em implementar um gerador elíptico para construir uma malha "O" em torno de um perfil biconvexo. Este projeto vai também lhe dar a oportunidade de implementar métodos iterativos de solução baseados no conceito de fatoração aproximada, uma vez que se deseja que as equações de diferenças finitas resultantes sejam resolvidas pelo método iterativo conhecido como ADI ou AF1. Além disso, o trabalho pode ser visto ainda como uma oportunidade de praticar a implementação de geradores parabólicos, que são uma outra forma de se obter malhas computacionais através da solução de equações diferenciais. Finalmente, o resultado deste projeto, ou seja, a malha computacional sobre o perfil biconvexo, será extremamente importante no futuro, pois esta será a malha computacional que será utilizada no Projeto No. 3.

Formulação Teórica de Geradores Elípticos

Geradores elípticos são construídos admitindo-se inicialmente que as coordenadas no espaço computacional (ξ, η) devem satisfazer, cada uma delas, uma equação de Poisson no domínio físico, ou seja, uma equação de Poisson na qual ξ e/ou η são as variáveis dependentes e x e y são as variáveis independentes. Invertendo-se o papel de variáveis dependentes e independentes, as equações podem ser reescritas no espaço computacional como

$$\begin{aligned} Ax_{\xi\xi} - 2Bx_{\xi\eta} + Cx_{\eta\eta} + D\left(Px_{\xi} + Qx_{\eta}\right) &= 0 \\ Ay_{\xi\xi} - 2By_{\xi\eta} + Cy_{\eta\eta} + D\left(Py_{\xi} + Qy_{\eta}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \qquad & B &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \\ C &= x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \qquad & D &= \left(x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}\right)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

e as funções P e Q são especificadas pelo usuário de forma a controlar uma maior, ou menor, concentração de pontos da malha em determinadas regiões. No presente projeto, vamos inicialmente admitir que $P = Q = 0$, o que corresponde a se considerar que as malhas geradas são soluções da equação de Laplace.

Método Numérico

Para se obter a solução numérica do problema é necessário estabelecer uma aproximação de diferenças finitas para as Eqs. (1). Para tanto, todas as derivadas presentes no problema são substituídas por operadores de diferenças finitas centrados e de 2ª ordem de precisão. Define-se o operador resíduo no ponto (i, j) por

$$L(\ )_{i,j} = [A_{i,j}\delta_{\xi\xi} - 2B_{i,j}\delta_{\xi\eta} + C_{i,j}\delta_{\eta\eta}]\,(\ )_{i,j} \tag{3}$$

Utilizando-se operadores centrados, os termos de derivada segunda estão sendo aproximados pelos operadores

$$\begin{aligned}
\delta_{\xi\xi}(\ )_{i,j} &= (\ )_{i+1,j} - 2(\ )_{i,j} + (\ )_{i-1,j} \\
\delta_{\xi\eta}(\ )_{i,j} &= \frac{1}{4}\left[(\ )_{i+1,j+1} - (\ )_{i+1,j-1} - (\ )_{i-1,j+1} + (\ )_{i-1,j-1}\right] \\
\delta_{\eta\eta}(\ )_{i,j} &= (\ )_{i,j+1} - 2(\ )_{i,j} + (\ )_{i,j-1}
\end{aligned} \tag{4}$$

Além disso, todas as derivadas envolvidas nos coeficientes A, B, etc..., também devem ser discretizadas por operadores centrados, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi}(\ )_{i,j} &\cong \delta_{\xi}(\ )_{i,j} = \frac{1}{2}\left[(\ )_{i+1,j} - (\ )_{i-1,j}\right] \\
\frac{\partial}{\partial\eta}(\ )_{i,j} &\cong \delta_{\eta}(\ )_{i,j} = \frac{1}{2}\left[(\ )_{i,j+1} - (\ )_{i,j-1}\right]
\end{aligned} \tag{5}$$

Como se deseja uma malha tipo "O" sobre o aerofólio, deve-se considerar que a malha seja periódica na direção ξ, e que possua condições de contorno de Dirichlet especificadas na superfície do aerofólio e na fronteira externa. Desta forma, dados valores iniciais para $x_{i,j}$ e $y_{i,j}$, as posições finais dos pontos da malha serão calculadas por métodos de relaxação. Em princípio, o esquema de relaxação a ser empregado deve ser o algoritmo ADI (ou AF1). Entretanto, independentemente do esquema específico de relaxação a ser utilizado, o processo iterativo de solução pode ser escrito na forma padrão de correção, ou forma delta, como

$$\begin{aligned}
N\,\Delta x^n_{i,j} + \omega\, Lx^n_{i,j} &= 0 \\
N\,\Delta y^n_{i,j} + \omega\, Ly^n_{i,j} &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta x^n_{i,j} &= x^{n+1}_{i,j} - x^n_{i,j} \\
\Delta y^n_{i,j} &= y^{n+1}_{i,j} - y^n_{i,j}
\end{aligned} \tag{7}$$

e ω é o parâmetro de relaxação. Uma forma conveniente de se escrever o operador N para o algoritmo AF1 neste caso é

$$N(\ )^n_{i,j} = -\frac{1}{\alpha}\left(\alpha - A^n_{i,j}\delta_{\xi\xi}\right)\left(\alpha - C^n_{i,j}\delta_{\eta\eta}\right)(\ )^n_{i,j} \tag{8}$$

A substituição do operador N dado pela Eq. (8) nas Eqs. (6) vai permitir resolver estas equações para $\Delta x_{i,j}$ e $\Delta y_{i,j}$, respectivamente, utilizando-se o procedimento usual de solução, ou inversão, dos operadores do LHS em dois passos. Além disso, o parâmetro α, que aparece na Eq. (8), é o chamado parâmetro de aceleração de convergência usual dos métodos AF.

Geração da Malha Inicial

Claramente, o processo iterativo de solução através do esquema de relaxação proposto vai exigir a existência de uma "malha inicial". Esta malha poderia ser gerada de diversas formas, incluindo por exemplo um procedimento algébrico extremamente simples no qual a malha seria dada por círculos (ou elipses) concêntricos e linhas radiais. Entretanto, por uma questão didática, vai-se desejar que a malha inicial seja construída utilizando o gerador parabólico descrito na Ref. [1]. Este gerador utiliza um processo de marcha no espaço, da fronteira interior para a fronteira exterior, e permite que se especifique as posições dos pontos da malha em ambas as fronteiras. Além disso, este gerador garante ortogonalidade da malha na superfície do aerofólio. Uma vez que se deseja uma malha tipo "O" sobre o aerofólio, como anteriormente mencionado, deve-se admitir condições de contorno periódicas na direção circunferencial.

Embora a Ref. [1] possa ser encontrada com facilidade, infelizmente esta referência pode não conter todos os detalhes necessários para a implementação do gerador parabólico solicitado. Isto ocorre, na realidade, porque os limites no tamanho do texto impostos pelo evento em questão obrigaram os autores desta referência a cortar parcelas deste texto que, de outra forma, deveriam ser incluídas para tornar o artigo completo e de maior facilidade de leitura. Por este motivo, algumas seções da versão original do texto da Ref. [1] estão sendo incluídas como um anexo à presente proposta de projeto. Acredita-se que o texto em anexo juntamente com a versão efetivamente publicada da Ref. [1] sejam suficientes para a implementação do gerador solicitado.

É importante ainda enfatizar que a malha parabólica gerada poderia provavelmente ser também utilizada para solução de escoamentos, como de fato o é nos exemplos considerados na Ref. [1]. Além disso, a malha elíptica final a ser gerada no presente projeto deveria em princípio ser independente da "solução inicial" (ou malha inicial) utilizada. Portanto, o gerador elíptico que você estará desenvolvendo é completamente independente do gerador parabólico que você vai usar para lhe fornecer a malha inicial.

Trabalho Obrigatório a Ser Realizado

Utilizando o gerador elíptico descrito, gere uma malha computacional com topologia "O" sobre um aerofólio biconvexo definido por

$$y = 2\,t\,x\,(1 - x) \tag{9}$$

onde t é a espessura máxima do perfil, e x, y e t são adimensionalizados pela corda do aerofólio. Considere que o perfil tenha uma espessura máxima de 10 % e que a fronteira externa seja uma circunferência de raio igual a 6.5 cordas. Considere ainda que a malha possua 93 pontos na direção ξ (direção "longitudinal") e 15 pontos na direção η (direção "normal"). É conveniente que se considere que o corte na malha "O" esteja situado sobre a esteira do perfil, e que para cada ponto físico sobre a esteira existam, na realidade, dois pontos computacionais. Procure fazer uma distribuição de pontos na superfície do aerofólio de forma a concentrar pontos nas regiões dos bordos de ataque e de fuga. Por exemplo, a utilização de funções de estiramento de malha ("stretching") exponenciais, exatamente como utilizado no Projeto No. 1, pode ser muito útil aqui para fazer a distribuição dos pontos computacionais sobre a superfície do perfil. Na fronteira externa, assuma que os pontos estão igualmente espaçados.

Você deve resolver este problema utilizando dois esquemas iterativos, quais sejam, o esquema AF1 (ou ADI) descrito anteriormente e o esquema SLOR, que já foi utilizado na solução do Projeto No. 1. O objetivo disto é comparar a eficiência computacional, ou seja, razão de convergência, do algoritmo AF1 com a eficiência daquele que acredito que tenha sido o melhor dentre todos os métodos de relaxação utilizados no Projeto No. 1. Do que foi descrito anteriormente, acredito que estejam relativamente claras quais as modificações que devem ser introduzidas na forma do esquema SLOR, descrito para a solução da equação de Laplace em coordenadas cartesianas, de forma que este algoritmo seja mais adequado para a solução do presente problema.

Investigue, ainda, o tipo de controle que você consegue exercer sobre a distribuição de pontos na direção normal se, em vez de assumir que a malha é periódica na direção ξ, você considerar que na direção ξ também se tem condições de contorno de Dirichlet. Desta forma, você pode especificar a distribuição dos pontos computacionais ao longo da esteira do perfil. Novamente, a idéia é que devem existir dois pontos computacionais para cada ponto físico sobre a esteira, e que, por exemplo, a utilização de um "stretching" exponencial seria também o mais conveniente para definir a posição dos pontos ao longo da esteira.

Visualize seus resultados, isto é, as malhas geradas, tanto em termos de uma visão geral da malha como um todo quanto em termos de detalhes de regiões específicas, de forma a ter certeza da boa qualidade das malhas obtidas. Como já discutido, existem programas disponíveis para este trabalho de visualização. Além disso, procure comparar criticamente as suas malhas elípticas "finais" obtidas com as malhas parabólicas "iniciais". Em particular, procure observar os efeitos da suavização proporcionada pelo gerador elíptico sobre a distribuição geral de pontos no campo e, por outro lado, os eventuais efeitos negativos disto sobre a ortogonalidade da malha na parede do perfil e sobre o estiramento na direção normal originalmente proporcionados pela malha parabólica.

Casos Adicionais

Para obter o crédito total neste projeto, realize pelo menos dois dos seguintes estudos:

1. Faça uma análise detalhada da influência dos parâmetros α e ω na razão de convergência do esquema AF1, buscando determinar valores ótimos de α e ω que maximizem a razão de convergência do algoritmo. Esta análise deve, inclusive, incluir considerações sobre a utilização de sequências de α, ou seja, valores de α que variam ao longo do processo iterativo, e cuja utilização está relacionada ao conceito de aniquilação de autovetores. Um exemplo do tipo de análise que se pretende aqui pode ser encontrada na Ref. [2], onde esta análise é realizada em um contexto de solução da equação do potencial completo propriamente dita. Para maiores detalhes sobre a utilização de sequências de α, sugere-se ver a própria Ref. [2], ou as Refs. [3] e [4].

2. Verifique o efeito de se utilizar as funções de controle P e Q não nulas na qualidade da malha resultante, e no controle que você consegue exercer sobre a distribuição de pontos nesta malha. Neste caso, você terá apenas que modificar o operador de resíduo, L, de forma a incluir os termos que envolvem P e Q. Em princípio, não há necessidade de se modificar o operador iterativo, ou seja, você pode continuar a utilizar o operador N do esquema AF1 como descrito na Eq. (8). Exemplos dos objetivos que se poderia esperar alcançar com o controle adicional proporcionado por P e Q seria se conseguir uma maior ortogonalidade da malha na superfície do perfil, ou então se conseguir uma maior concentração de pontos em regiões específicas do campo. Neste último caso, estas regiões poderiam ser a própria superfície do perfil, pensando-se em termos da direção normal, ou a região do bordo de ataque, ou do bordo de fuga, ou mesmo uma região intermediária onde poderia estar ocorrendo uma onda de choque quando esta malha for utilizada para uma solução de escoamento. Para formas específicas razoáveis para as funções P e Q, sugere-se consultar a literatura em geradores elípticos, em particular as Refs. [5] e [6]. Observe ainda que a utilização da malha parabólica inicial sugerida neste trabalho já lhe fornece como "condição inicial" para o gerador uma malha que é ortogonal na superfície

do perfil. Portanto, neste contexto, tudo que as suas funções P e Q teriam que fazer seria evitar que esta ortogonalidade fosse perdida pelo processo de suavização natural do gerador elíptico.

3. Refaça o trabalho de geração da malha elíptica usando o esquema iterativo AF2, em vez do ADI (ou AF1). Você vai precisar modificar o esquema AF2 apresentado em sala, que resolvia a equação de Laplace, de forma a poder realizar este trabalho. Entretanto, acredito que os desenvolvimentos anteriores já lhe dão uma indicação das modificações que devem ser efetuadas. Investigue ainda para o esquema AF2 a influência dos parâmetros α e ω na razão de convergência do esquema. Compare a eficiência computacional do AF2 com aquela obtida anteriormente para o esquema AF1. Lembre-se, entretanto, que é necessário comparar, neste caso, tanto a eficiência em termos de número de iterações para convergência quanto em termos de tempo de CPU para convergência, uma vez que o AF2 deve ser mais barato que o AF1 por iteração.

4. Utilize todo o procedimento que você desenvolveu neste projeto para gerar uma malha computacional com topologia "O" sobre um perfil NACA 0012, ou algum outro perfil aeronáutico clássico que lhe pareça conveniente. A idéia, neste caso, é novamente utilizar o gerador parabólico para criar a malha inicial sobre o perfil e, posteriormente, usar o gerador elíptico para suavizar esta malha. Você pode considerar o mesmo número de pontos do caso anterior em ambas as direções e, claramente, deseja-se uma malha periódica na direção circunferencial. Novamente, compare a qualidade de sua malha parabólica inicial com a malha elíptica final, e discuta seus resultados.

Referências

(1) Uller, M., e Azevedo, J.L.F., "Grid Generation Technique Effects on Transonic Full Potential Solutions of Airfoil Flows," *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – XI COBEM*, Vol. "Azul", São Paulo, SP, Dez. 1991, pp. 197-200.

(2) Morgenstern, A., Jr., e Azevedo, J.L.F., "Influence of Convergence Parameters and Mesh Refinement on Full-Potential Solutions of Airfoil Flows," *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Vol. I, Rio de Janeiro, Dez. 1989, pp. 149-152.

(3) Ballhaus, W.F., Jr., Jameson, A., and Albert, J., "Implicit Approximate Factorization Schemes for the Efficient Solution of Steady Transonic Flow Problems," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 6, June 1978, pp. 573-579.

(4) Holst, T.L., "Approximate-Factorization Schemes for Solving the Transonic Full-Potential Equation," In *Advances in Computational Transonics*, W.G. Habashi, editor, Pineridge Press, Swansea, UK, 1985, pp. 59-82.

(5) Thompson, J.F., Thames, F.C., and Mastin, C.M., "Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies," *Journal of Computational Physics*, Vol. 15, 1974, pp. 299-319.

(6) Krieger, G.C., e Braga Filho, W., "Geradores Elípticos Adaptativos," *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Edição Especial da *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, ABCM, São Paulo, SP, Dez. 1991.

ANEXO A

O texto que segue foi extraído da versão original do artigo: Uller, M., e Azevedo, J.L.F., "Grid Generation Technique Effects on Transonic Full Potential Solutions of Airfoil Flows," *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – XI COBEM*, Vol. "Azul", São Paulo, SP, Dez. 1991, pp. 197-200.

GRID GENERATION TECHNIQUE EFFECTS ON TRANSONIC FULL POTENTIAL SOLUTIONS OF AIRFOIL FLOWS

MARCELO ULLER
USP – Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Mecânica
13560 — São Carlos — SP

JOÃO L. F. AZEVEDO
Centro Técnico Aeroespacial
Instituto de Aeronáutica e Espaço
12225 — São José dos Campos — SP

INTRODUCTION

It is well known that the generation of a suitable computational mesh is of fundamental importance in order to obtain good numerical solutions for the equations governing aerodynamic flows over complex geometries[1]. The problem of grid generation can be regarded as an attempt to find the optimum collection of points in which to compute the flow solution. Although the exact definition of an optimum grid may be questionable, there is an agreement as to the fact that it is the one which minimizes the error in the solution. One fundamental requirement that arises when trying to minimize the error is that the grid must be smooth, which naturally leads to the use of Laplace's equation as a means of mesh generation.

Grid generation procedures are usually classified (see, for instance, Anderson et al.[2] and Fletcher[3]) as algebraic, analytical and differential procedures. Analytical grid generators are those based on conformal mapping, and differential generators are those which solve some partial differential equation in order to obtain the grid point distribution. The latter approach is still divided into elliptic, parabolic and hyperbolic generators. Among these, elliptic grid generators, i.e., those based on the solution of a Laplace or Poisson equation, are probably the most widely used[1] in general. Only differential generators will be considered in the present work.

The popularity of the use of Laplace's equation is a direct result of the smoothness properties of its solutions along with the existence of a principle which guarantees a one-to-one mapping between the physical and transformed domains. The generation of a grid based on the solution of Laplace's equation has, still, other desirable properties, namely the fact that the outer boundary grid points can be specified and the fact that any discontinuities that may exist in the initial data will be smoothed out. Elliptic grid generators, however, can consume a large amount of computational time. For this reason, some authors[4, 5] consider the use of hyperbolic grid generators. Despite their speed advantage, hyperbolic schemes have crucial disadvantages, such as the propagation of initial data discontinuities into the grid and the impossibility of specifying the outer boundary grid points. The search for a compromise which combines the advantages of both the elliptic and hyperbolic grid generation schemes led to the study of a parabolic generator[6, 7].

The present work is concerned with obtaining steady, lifting, transonic potential flow solutions about two dimensional airfoils, and with studying the effect of the grid generation technique on these solutions. Both elliptic and parabolic grid generation schemes were implemented in this case. The resultant grids are compared in terms of regularity, smoothness, orthogonality and their effect on the flow solutions obtained with their use. Finally, considerations and recommendations for future work are given, especially with regard to implementing solution-adaptive grid generation procedures.

ELLIPTIC GRID GENERATION

The elliptic grid generator used in the present effort is based on the work of Thompson et al.[8], and on that of Holst[9]. The specific details of the implementation adopted here, however, follow the work of Morgenstern et al.[10]. We will present next the general lines along which the elliptic grid generator scheme is implemented. The interested reader is referred to Morgenstern et al.[10] for further details.

Elliptic generators start by writing that the coordinates in the computational domain, (ξ, η), are each a solution of Laplace's equation, or a Poisson equation, in which ξ and/or η are the dependent variables, and x and y are the independent variables. Before we actually attempt to solve these equations numerically, they are transformed in order to exchange the role of dependent and independent variables. The transformed equations, written for the case without forcing functions, are given by

$$\begin{aligned} A x_{\xi\xi} - 2B x_{\xi\eta} + C x_{\eta\eta} &= 0 \\ A y_{\xi\xi} - 2B y_{\xi\eta} + C y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

where

$$A = x_\eta^2 + y_\eta^2 \ , \qquad B = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \ , \qquad C = x_\xi^2 + y_\xi^2 \tag{11}$$

The equations are discretized using standard second order finite difference expressions, and an iteration process in pseudo-time is created using the alternate direction implicit (ADI or AF1) algorithm presented by Holst[9]. The relaxation procedure can be written in delta form, for each of the x and y coordinates, as

$$\begin{aligned} N\,\Delta x_{i,j}^n + \omega\, L x_{i,j}^n &= 0 \\ N\,\Delta y_{i,j}^n + \omega\, L y_{i,j}^n &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

where the residual operator is defined by

$$L(\ )_{i,j}^n = \left[A_{i,j}^n \delta_{\xi\xi} - 2B_{i,j}^n \delta_{\xi\eta} + C_{i,j}^n \delta_{\eta\eta} \right] (\ )_{i,j}^n \tag{13}$$

The corrections in the dependent variables, i.e., in the grid point positions, at iteration level n are defined as

$$\Delta(\ )_{i,j}^n = (\ )_{i,j}^{n+1} - (\ )_{i,j}^n \tag{14}$$

The N operator for the ADI scheme is given by

$$N(\,)^n_{i,j} = -\frac{1}{\alpha}\left(\alpha - A^n_{i,j}\delta_{\xi\xi}\right)\left(\alpha - C^n_{i,j}\delta_{\eta\eta}\right)(\,)^n_{i,j} \tag{15}$$

Here, ω is a relaxation parameter and α is a convergence acceleration parameter. In the present case, it proved to be necessary to cycle over α-sequences, instead of using a constant value for this parameter, in order to obtain acceptable convergence rates of the elliptic generator. For more information on the justification for its use, and on the implementation of α-sequences, the interested reader is referred to the work of Holst[9], and of de Mattos and Azevedo[12].

The ADI algorithm was implemented in a two-step format. In step 1, two periodic tridiagonal matrix equations are solved along each η = constant line. Then, the correction to the x and y grid point coordinates are obtained, in step 2, by the solution of two standard tridiagonal matrix equations for each ξ = constant line. Details of this procedure can be found in Morgenstern et al.[10].

All elliptic grids generated in the present effort are periodic in the ξ-direction, i.e., in the chordwise direction, and have Dirichlet-type boundary conditions in the η-direction. Care was exercised in the specification of grid points along the airfoil surface in order to cluster points in the leading and trailing edge regions. Exponential stretching was applied from the half-chord forward, and from the half-chord backward, in order to obtain this clustering. The far-field boundary was typically a circumference with a specified radius in the applications considered here. In the actual implementation, we also found it necessary to ensure that the y-positions along the wake, and along the normal line going out from the leading edge, are kept as initially specified in order to obtain better grids. Moreover, it is important to emphasize that all derivatives, including those in the A, B and C coefficients, must be approximated by 2nd-order, three-point, centered finite difference formulas.

PARABOLIC GRID GENERATION

The use of parabolic generators is not so common in the literature. Nevertheless, some examples of their use can be seen in the work of Nakamura[7], and of Hodge et al.[6]. The implementation adopted in the present work follows, however, the work of Noack and Anderson[13]. The procedure starts by considering elliptic grid generation equations, which can be written as

$$\begin{aligned} A\left(x_{\xi\xi} + \varphi\, x_{\xi}\right) - 2Bx_{\xi\eta} + C\left(x_{\eta\eta} + \psi\, x_{\eta}\right) &= 0 \\ A\left(y_{\xi\xi} + \varphi\, y_{\xi}\right) - 2By_{\xi\eta} + C\left(y_{\eta\eta} + \psi\, y_{\eta}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

The A, B and C coefficients are defined as in Eq. (11). The grid control functions φ and ψ are usually specified in order to achieve some desired grid clustering. Here, however, these grid control functions were set equal to zero. In the future, they will be used in order to obtain solution-adaptive grids, but this is beyond the scope of the present work.

As we discussed in the previous section, approximation of all derivatives in Eq. (16) by second-order, centered differences would lead to an elliptic grid generation algorithm. The procedure adopted here continues, however, by approximating the second derivatives by 2nd-order, centered finite difference expressions which yields, for the case $\varphi = \psi = 0$, to the discretized equation

$$\begin{aligned} 2Ar_{i+1,j} - 4\left(A + C\right)r_{i,j} + 2Ar_{i-1,j} = B\,(r_{i+1,j+1} \\ -r_{i-1,j+1} - r_{i+1,j-1} + r_{i-1,j-1}) - 2C\left(r_{i,j+1} + r_{i,j-1}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

where $r = x$ or y, and i is the index in the ξ-direction and j is the index in the η-direction. At this point, the above difference equation is still identical to what would be obtained if we were to generate the grid by solving Laplace's equation.

Parabolic differencing of the elliptic equations is obtained by considering that points at the $j+1$ grid level are fixed, or specified[13]. Observe that this implies that the parabolic grid will be generated by marching from an inner boundary outwards. Hence, points at the $j-1$ level are given from initial data as, for instance, the definition of the airfoil surface, or they are known from the previous marching step. Moreover, at each j-th grid level, the grid point distribution the ξ-direction can be obtained from the solution of the tridiagonal matrix equation indicated in Eq. (17). In the present case, since O-type mesh topologies are being considered, this actually leads to a periodic tridiagonal system for each $j =$ constant line. Therefore, in summary, the procedure for generation of the parabolic grid consists in marching in the η-direction, from the inner boundary outwards, assuming that points at the $j+1$ level are somehow specified, and solving the periodic tridiagonal system indicated by Eq. (17) for the ξ-distribution of grid point positions along each $j =$ constant line.

The fundamental problem that remains to be solved, in order to implement the parabolic scheme, concerns the form of specifying the grid points at the $j+1$ level. The method adopted here also follows the work of Noack and Anderson[13], and it is based in the creation of what these authors call a "local reference grid" for each j-th grid level. Hence, the grid generation equations, indicated in Eq. (17), are parabolized by first generating a local reference grid at the j and $j+1$ level lines. This local reference grid is regenerated at each marching step based upon the line of data at the $j-1$ level and the outer boundary. The originally elliptic difference equations are, then, parabolized by setting the $r_{i-1,j+1}$, $r_{i,j+1}$ and $r_{i+1,j+1}$ grid points equal to their corresponding $j+1$ value in the local reference grid. Moreover, the nonlinear coefficients A, B and C must also be evaluated from the grid points in the local reference grid. Eq. (17) can, then, be solved for the actual, or corrected, grid point positions at the j-th level. Thus, the parabolic grid generation scheme can be marched from the $j = 2$ line, i.e., points adjacent to the inner boundary, up to the $j = NJ - 1$ line, where NJ denotes the outer boundary.

The local reference grid is generated by a mixed hyperbolic/algebraic scheme. The development of the scheme starts by specifying the inverse Jacobian of the transformation and a measure of the mesh orthogonality, which are given by

$$\begin{aligned} x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi &= J^{-1} \\ x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta &= B \end{aligned} \tag{18}$$

If we choose η as the marching direction, and impose the condition that we desire an orthogonal grid ($B = 0$), it is possible to obtain[13] the following explicit hyperbolic grid generation equations

$$x_\eta = \frac{-y_\xi S_\eta}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \; , \qquad\qquad y_\eta = \frac{x_\xi S_\eta}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \tag{19}$$

Here, S is the arc length along a $\xi =$ const. coordinate line, and the arc length derivative in the marching direction (S_η) can be written as

$$S_\eta = \Delta\overline{s}\; R \tag{20}$$

where R is the distance between the point $(i, j-1)$ and the corresponding outer boundary point (i, NJ). The parameter $\Delta\overline{s}$ is used to control the grid spacing in the η-direction, and it is given by

$$\Delta\overline{s} = \frac{\overline{s}_j - \overline{s}_{j-1}}{\overline{s}_{NJ} - \overline{s}_{j-1}} \tag{21}$$

In the present effort, the function $\overline{s}$ is analytically specified in order to give an exponential-type stretching in the normal direction.

Therefore, a grid point with coordinates $\left(x^o_{i,j}, y^o_{i,j}\right)$, which is orthogonal to the points in the $j-1$ line, can be obtained by considering that the x_η and y_η derivatives are approximated by standard, 1st-order, backward differences. This yields

$$\begin{aligned} x^o_{i,j} &= x_{i,j-1} + x_\eta \\ y^o_{i,j} &= y_{i,j-1} + y_\eta \end{aligned} \tag{22}$$

where we observe that, in computational space, $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. The ξ-derivatives that appear in Eq. (19) should be evaluated as

$$\begin{aligned} x_\xi &= \frac{1}{2}\left(x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}\right) \\ y_\xi &= \frac{1}{2}\left(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

To allow for the fact that it may not always be possible to have a completely orthogonal grid with both inner and outer boundary points specified, the reference grid point positions calculated from Eq. (22) are relaxed using interpolated points obtained as

$$\begin{aligned} x^{int}_{i,j} &= x_{i,j-1} + \Delta\overline{s}\,\left(x_{i,NJ} - x_{i,j-1}\right) \\ y^{int}_{i,j} &= y_{i,j-1} + \Delta\overline{s}\,\left(y_{i,NJ} - y_{i,j-1}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

The local reference grid points are, then, given by

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \varepsilon x^{int}_{i,j} + (1-\varepsilon)\, x^o_{i,j} \\ y_{i,j} &= \varepsilon y^{int}_{i,j} + (1-\varepsilon)\, y^o_{i,j} \end{aligned} \tag{25}$$

According to Noack and Anderson[13], ε is a switching function that should vary from zero at the airfoil surface to unity at the outer boundary. This function objective is to allow a body normal grid to meet exactly a specified outer boundary. Various forms for this function were attempted in the present work, and all of them produced comparable results. The form used in the applications that will be presented here was

$$\varepsilon = \frac{j-1}{NJ-1} \tag{26}$$

It is important to emphasize that the local reference grid is clustered and nearly orthogonal. Actually, it is certainly orthogonal at the airfoil surface. Therefore, the final grid generated by the parabolic scheme will be also clustered and nearly orthogonal, since the method can be seen as the application of a Laplacian smoothing to the points at each j-th grid level, while maintaining the points at levels $j-1$ and $j+1$ fixed. Moreover, we have found that, for the computation of the A, B and C coefficients (see Eq. (17)) in the parabolic generator, the ξ-derivatives must be computed as

$$\begin{aligned} x_\xi &= \frac{1}{2}\left(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1}\right) \\ y_\xi &= \frac{1}{2}\left(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

The η-derivatives in these coefficients should be computed as

$$\begin{aligned} x_\eta &= x_{i,j+1} - x_{i,j} \\ y_\eta &= y_{i,j+1} - y_{i,j} \end{aligned} \tag{28}$$

Hence, these nonlinear coefficients are always evaluated from data in the local reference grid.

References

[1] Thompson, J.F., "Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics," *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 11, Nov. 1984, pp. 1505-1523.

[2] Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1984.

[3] Fletcher, C.A.J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2 — Specific Techniques for Different Flow Categories*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[4] Steger, J.L., and Chaussee, D.S., "Generation of Body Fitted Coordinates Using Hyperbolic Partial Differential Equations," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 1, No. 4, Dec. 1980.

[5] Sorenson, R.L., and Steger, J.L., "Use of Hyperbolic Partial Differential Equations to Generate Body Fitted Coordinates," *Numerical Grid Generation Techniques*, NASA CP-2166, 1980, pp. 436-478.

[6] Hodge, J.K., Leone, S.A., and McCarty, R.L., "Noniterative Parabolic Grid Generation for Parabolized Equations," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 4, April 1987, pp. 542-549.

[7] Nakamura, S., "Marching Grid Generation Using Parabolic Partial Differential Equations," in *Numerical Grid Generation*, J.F. Thompson, editor, Elsevier Science Publishing, 1982, pp. 775-786.

[8] Thompson, J.F., Thames, F.C., and Mastin, C.M., "Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies," *Journal of Computational Physics*, Vol. 15, 1974, pp. 299-319.

[9] Holst, T.L., "Implicit Algorithm for the Conservative Transonic Full-Potential Equation Using an Arbitrary Mesh," *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 10, Oct. 1979, pp. 1038-1045.

[10] Morgenstern, A., Jr., Azevedo, J.L.F., and de Mattos, B.S., "Two Dimensional Full Potential Solutions of Lifting Airfoil Flows," *Proceedings of the 3rd Brazilian Thermal Sciences Meeting*, Vol. I, Itapema, SC, Dec. 1990, pp. 183-188.

[11] Holst, T.L., "Approximate-Factorization Schemes for Solving the Transonic Full-Potential Equation," in *Advances in Computational Transonics*, W.G. Habashi, editor, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1985, pp. 59-82.

[12] de Mattos, B.S., and Azevedo, J.L.F., "Full Potential Flow Simulation About Wing Configurations," *Proceedings of the 3rd Brazilian Thermal Sciences Meeting*, Vol. I, Itapema, SC, Dec. 1990, pp. 177-182.

[13] Noack, R.W., and Anderson, D.A., "Solution-Adaptive Grid Generation Using Parabolic Partial Differential Equations," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 6, June 1990, pp. 1016-1023.

[14] de Mattos, B.S., "Calculation of Three-Dimensional Transonic Potential Flow Using an Implicit Approximate Factorization Algorithm," Master Thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil, Mar. 1990 (in Portuguese, original title is "Cálculo do Escoamento Potencial Transônico Através de um Algoritmo Implícito de Fatorização Aproximada").

[15] Holst, T.L., and Ballhaus, W.F., "Fast Conservative Schemes for the Full Potential Equation Applied to Transonic Flows," *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 2, Feb. 1979, pp. 145-152.