H. # 3

CC–298
Projeto No. 1

Distribuído: 30/07/18

João L. F. Azevedo

Entrega: 03/09/18

2º Semestre/2018

O objetivo inicial deste trabalho é criar a infraestrutura, em termos de códigos de simulação, para se poder realizar as diversas implementações e comparações que se deseja fazer ao longo da presente disciplina. Assim, como objetivo específico do presente projeto, vai-se simular o escoamento em um bocal transônico convergente-divergente, simétrico e bidimensional, como indicado na Fig. 1. Deseja-se que o cálculo seja realizado utilizando-se, inicialmente, uma formulação de Euler e, posteriormente, uma formulação de Navier-Stokes, como será descrito em maiores detalhes a seguir. Deseja-se ainda que o algoritmo implícito de fatoração aproximada de Beam-Warming seja utilizado para solução das equações de diferenças finitas resultantes. Use o método de Euler implícito para a marcha no tempo, e empregue sempre diferenças centradas na discretização espacial.

Para maiores detalhes sobre o algoritmo de Beam-Warming, de uma maneira geral, sugere-se consultar as Refs. [1]–[4]. Os detalhes da formulação específica para o problema em questão, implementação de condições de contorno, geração de malha, e dados geométricos e de operação do bocal podem ser encontrados nas Refs. [5]–[7]. Vale salientar que um aspecto muito importante de algoritmos centrados, como aquele a ser utilizado neste trabalho, refere-se à implementação de termos de dissipação artificial. No caso presente, deseja-se que diversos modelos de dissipação artificial sejam implementados, de forma a se poder comparar o desempenho destes modelos diferentes. A Ref. [8] pode ser útil para auxiliar a implementação de alguns destes modelos de dissipação artificial. Outros aspectos neste contexto serão também discutidos em sala.

No caso proposto neste trabalho, as condições de contorno de entrada e saída do bocal foram selecionadas de forma a se ter um bocal praticamente "ajustado", onde o escoamento entra subsônico e sai supersônico. Além disso, deseja-se que estas condições de entrada e saída sejam impostas através da utilização do conceito de relações características unidimensionais para as equações de Euler em 2-D. É importante ainda lembrar que a utilização de um método implícito em princípio requer também a implementação implícita de condições de contorno. Infelizmente, entretanto, usualmente a literatura não traz muitos detalhes sobre a implementação implícita de condições de contorno e, provavelmente, você terá que desenvolver estas expressões.

Condições de Contorno

1. Sobre a linha de centro, considere condições de contorno de simetria do escoamento, uma vez que estamos assumindo que o bocal é simétrico.

2. Sobre a parede, para uma formulação de Euler, a velocidade deve ser tangente à parede. Para uma formulação de Navier-Stokes, o escoamento deve ser "colado", ou seja, a velocidade do fluido na parede é igual à velocidade da parede (que obviamente será nula neste caso). Além disso, considere em ambos os casos, *i.e.*, tanto Euler quanto Navier-Stokes, que a parede seja adiabática e que o gradiente de pressão normal seja nulo. Na realidade, no caso de uma formulação de Euler, tudo que se precisa especificar na parede é a pressão, e não faz muito sentido em se falar de uma condição de contorno para temperatura. Entretanto, uma condição do tipo gradiente de temperatura nulo na direção normal à parede é consistente com uma formulação de Euler.

3. Na seção de entrada (escoamento subsônico) considere dados:
    - temperatura total (T_t);
    - pressão total (P_t);
    - ângulo de entrada do escoamento (θ).
4. Na seção de saída, enquanto o escoamento permanecer subônico, a pressão estática de saída deve ser fixada como: $p_{exit} = P_t/3$. A partir do momento que o escoamento na saída se tornar supersônico, as condições nesta fronteira são completamente determinadas pelo escoamento no interior do bocal.

Condições Iniciais

Considere como condições iniciais que:

$$\begin{aligned} u &= v = 0 \\ T &= T_t \\ p &= P_t \end{aligned}$$

Estas condições iniciais são válidas em todo o campo, exceto obviamente na seção de saída onde se deve utilizar a condição de contorno descrita anteriormente.

Malha de Diferenças Finitas

Considere, inicialmente, 21 pontos na direção do escoamento e 12 pontos ao longo da seção tranversal do bocal, onde isto inclui todos os pontos de contorno. Na garganta, você deve considerar $\Delta x = L/36$ e $(\Delta y)_{parede} = t_h/16$. A malha deve sofrer um estiramento (ou seja, deve possuir "stretching") a partir da parede em direção à linha de centro, e a partir da garganta para as seções de entrada e saída. O fator de estiramento, ou razão de estiramento, deve ser uma constante em cada caso, e deve ser calculado de tal forma que as dimensões totais do bocal sejam satisfeitas com o número de pontos dados. Sugere-se que um "stretching" do tipo exponencial seja utilizado em ambas as direções, ou seja,

$$(\Delta x)_{seguinte} = (1 + \epsilon)\,(\Delta x)_{anterior}$$

onde ϵ deve ser calculado de forma a satisfazer a condição acima. Obviamente, uma expressão similar pode ser usada para a direção y.

O primeiro ponto j, *i.e.*, $j = 1$, deve estar localizado sobre a parede. O ponto $j = j_{max} - 1$ deve estar sobre a linha de centro do bocal para facilitar a imposição das condições de contorno de simetria. Devido exatamente a estas condições de simetria, o ponto $j = j_{max}$ deve ser exatamente o simétrico do ponto $j = j_{max} - 2$ em relação à linha de centro. Isto está ilustrado na Fig. 2.

Uma vez que você tenha conseguido eliminar todas as "bugs" do seu programa e, portanto, tenha conseguido convergência com esta malha razoavelmente grossa, procure refinar a malha de forma a obter uma melhor resolução espacial da solução. Uma sugestão para realização deste refinamento seria de se dobrar o número de pontos em ambas as direções, e manter o mesmo fator de "stretching" (ϵ) utilizado para a malha grossa. Além disso, você vai observar que, claramente, a malha anteriormente sugerida é adequada para o caso não viscoso. No caso viscoso, você naturalmente vai sentir a necessidade de malhas com um maior refinamento na proximidade da parede do bocal.

Geometria e Valores Numéricos para Condições Iniciais e de Contorno

A geometria do bocal está mostrada na Fig. 3, e as dimensões assinaladas naquela figura têm os seguintes valores numéricos:

$$
\begin{aligned}
L &= 0.380 \text{ ft} & \qquad R &= 0.090 \text{ ft} \\
\ell &= 0.190 \text{ ft} & \qquad \psi_1 &= 22.33^\circ \\
t_h &= 0.045 \text{ ft} & \qquad \psi_2 &= 1.21^\circ
\end{aligned}
$$

Condições iniciais:

Temperatura total $\longrightarrow T_t = 531.2^\circ\text{R}$

Pressão total $\longrightarrow P_t = 2117.0 \text{ lb/ft}^2$

Componentes cartesianas de velocidade $\longrightarrow u = v = 0$

Condições de contorno:

- Entrada:

  T_t e P_t fixados

  Ângulo de entrada do escoamento: $\theta = 0^\circ$

- Saída: $p = P_t/3$, enquanto $M < 1$

Talvez seja útil observar que:

$$v = u \tan\theta$$

e, portanto,

$$q^2 = u^2 + v^2 = \left(1 + \tan^2\theta\right) u^2$$

onde q é a magnitude do vetor velocidade local. Portanto, para um escoamento isentrópico podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
T &= T_t \left[1 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(1+\tan^2\theta\right)\frac{u^2}{a_\star^2}\right] = T(u) \\
p &= P_t \left[1 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(1+\tan^2\theta\right)\frac{u^2}{a_\star^2}\right]^{\gamma/\gamma-1} = p(u)
\end{aligned}
$$

onde a velocidade do som crítica, $a_\star$, pode ser obtida como

$$a_\star^2 = 2\gamma\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) C_v T_t$$

Estas equações fornecem as relações adicionais que permitem obter as condições na entrada do bocal a partir dos dados fornecidos. Obviamente, estas relações são válidas apenas até a seção de entrada, ou seja, "a montante" da seção de entrada do bocal. Observe que a analogia que se está fazendo aqui é de que haveria um "reservatório hipotético" (a montante do bocal, obviamente) cujas condições de estagnação são conhecidas. A partir disto, e assumindo-se que o escoamento do "reservatório" até a entrada do bocal é isentrópico, podemos obter as relações adicionais, descritas acima, que vão permitir a determinação das condições de contorno na seção de entrada do bocal.

Relatório e Prazos

Deseja-se que o seu relatório de projeto apresente uma descrição resumida da formulação utilizada, incluindo condições de contorno físicas e numéricas. O relatório deve conter também uma discussão detalhada dos resultados obtidos, incluindo comparação com resultados disponíveis na literatura. Um estudo da influência do refinamento da malha na qualidade da solução seria muito interessante, e detalhes sobre isto já foram discutidos anteriormente.

Para evitar que, eventualmente, você se encontre perdido no meio de um programa razoavelmente complexo, sem saber onde está o erro, a sugestão é de que programe inicialmente apenas uma formulação de Euler. Após haver conseguido resultados com a formulação de Euler, então adicione os termos viscosos de forma a obter uma formulação de Navier-Stokes. Da mesma forma, inicie o seu trabalho utilizando o modelo de dissipação artificial mais simples possível, ou seja, o modelo de coeficientes constantes (ver Ref. [8] para detalhes). Posteriormente, seu código deve evoluir para incluir os outros modelos solicitados. Ainda no mesmo contexto, você deve iniciar seu trabalho admitindo uma implementação explícita das condições de contorno e, eventualmente, aceitando passos no tempo menores. Com a evolução do trabalho, entretanto, deseja-se que as condições de contorno passem a ser implementadas implicitamente, e que você consiga com isto utilizar passos de tempo maiores.

Finalmente, não é demais enfatizar que o trabalho proposto neste projeto vai exigir um certo grau de dedicação e, principalmente, de organização para ser realizado a contento no prazo estabelecido. Procure se organizar e dividir suas tarefas de forma a que o seu programa vá crescendo em complexidade apenas após fases anteriores do desenvolvimento estarem efetivamente verificadas e validadas. Além disso, perceba que um trabalho mais cuidadoso juntamente com uma implementação mais geral neste projeto vai permitir que você construa um código que irá receber as outras implementações que serão requeridas ao longo da disciplina sem ter que fazer um "programa novo" a cada projeto. Boa sorte !!

Referências

1. Beam, R.M., and Warming, R.F., "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation-Law Form," *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, Sept. 1976, pp. 87-110.

2. Beam, R.M., and Warming, R.F., "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, April 1978, pp. 393-402.

3. Pulliam, T.H., and Steger, J.L., "Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow," *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 2, Feb. 1980, pp. 159-167.

4. Azevedo, J.L.F., "Aerodynamic Flow Simulation Using a Finite Difference Method," Anais do II Encontro Nacional de Ciências Térmicas — ENCIT-88, Águas de Lindóia, SP, Dez. 1988, pp. 3-6.

5. Azevedo, J.L.F., "Euler Solutions of Transonic Nozzle Flows," *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, Vol. I, Itapema, SC, Dez. 1990, pp. 243-248.

6. Ortega, M.A., e Azevedo, J.L.F., "Checking the Influence of Longitudinal Wall Curvature in the Implementation of Boundary Conditions at the Wall of a Convergent-Divergent Nozzle," *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – XI COBEM*, Vol. "Azul", São Paulo, SP, Dez. 1991, pp. 193-196.

7. Azevedo, J.L.F., Fico, N.G.C.R., Jr., e Ortega, M.A., "Two-Dimensional and Axisymmetric Nozzle Flow Computations Using the Euler Equations," *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, Vol. 17, No. 2, Out. 1995, pp. 147-170.

8. Pulliam, T.H., "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 12, Dec. 1986, pp. 1931-1940.

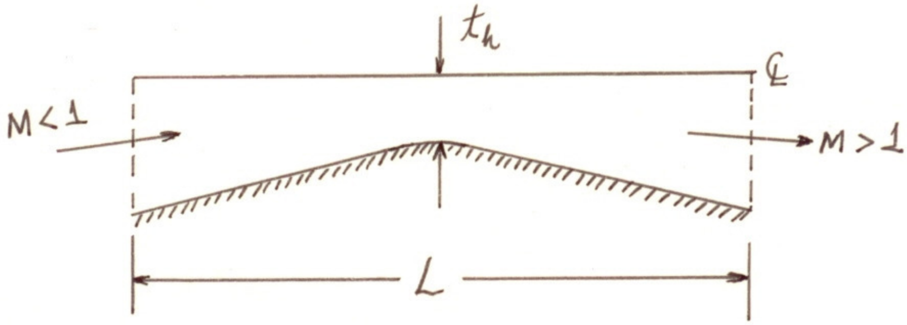

Figura 1

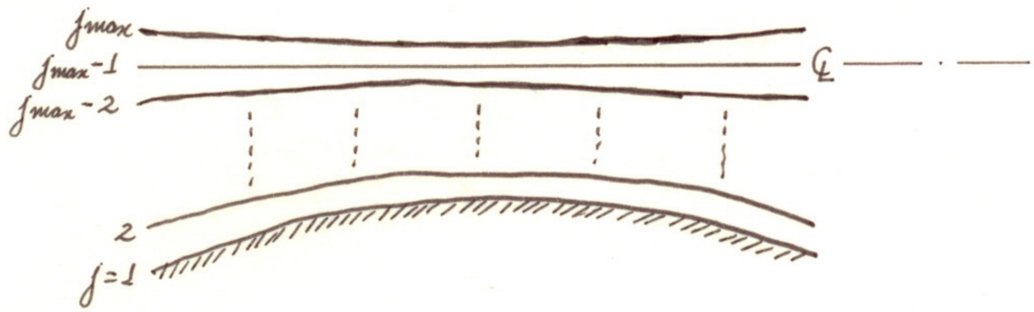

Figura 2

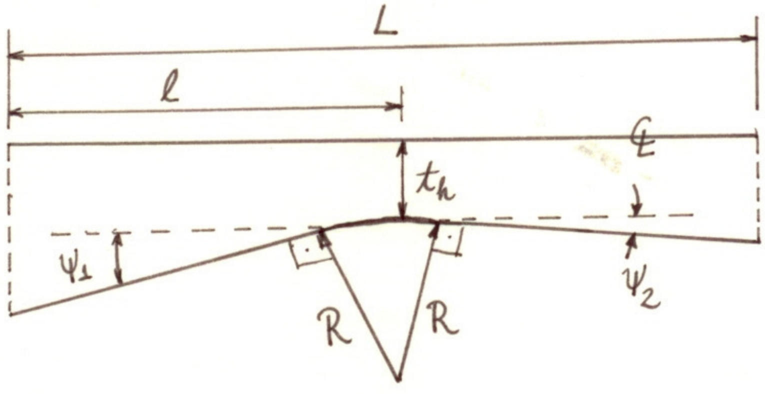

Figura 3