תורת החישוביות – 236343 – תרגיל בית 4

הנחיות

- יש להגיש את התרגילים לאתר הקורס עד יום שלישי ה־17.5.
- **הערה:** לאורך התרגיל ניתן להניח שא"ב הקלט הוא $\{0,1\}$.

1 סיווג שפות

עבור מ"ט M_1 ומ"ט M_2 נסמן $f_{M_1}(w) = f_{M_2}(w)$ אם שתי המכונות עוצרות בריצה על w והפלט שלהן על w זהה.
עבור כל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא שייכת ל־R, שייכת ל־$\mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}$ או לא שייכת ל־RE, והוכיחו את תשובתכם.

1. $L_1 = \{(\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle) \mid \exists w\ f_{M_1}(w) = f_{M_2}(w)\}$
2. $L_2 = \{(\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle) \mid \forall w\ f_{M_1}(w) = f_{M_2}(w)\}$
3. $L_3 = \{\langle M\rangle \mid$ לכל M' ו־w, $f_M(\langle M'\rangle, w) = 1$ אם M' עוצרת על w ו־0 אחרת$\}$

2 ווריאציות על משפט רייס

2.1 משפט רייס ל־coRE

נגדיר תכונה של שפות ב־coRE להיות תת קבוצה של שפות $S \subseteq \mathrm{coRE}$.
תכונה S תקרא לא טריוויאלית אם $S \neq \emptyset$ וגם $S \neq \mathrm{coRE}$.
בהינתן תכונה S, נגדיר $L_S = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in S\}$.

1. הוכיחו/הפריכו: עבור כל תכונה S טריוויאלית מתקיים $L_S \in \mathrm{R}$.
2. נסחו משפט המאפיין את כל התכונות S של שפות ב־coRE עבורן מתקיים $L_S \notin \mathrm{R}$ והוכיחו אותו.

2.2 משפט רייס לפונקציות

תהי $\mathcal{F}$ מחלקת הפונקציות הניתנות לחישוב. נגדיר תכונה של פונקציות ב - $\mathcal{F}$ להיות קבוצה של פונקציות $S \subseteq \mathcal{F}$. תכונה S תיקרא "לא טריוויאלית" אם $S \neq \emptyset$ וגם $S \neq \mathcal{F}$. בהינתן תכונה S נגדיר $L_S = \{\langle M\rangle \mid f_M \in S\}$.

<u>משפט רייס לפונקציות</u> - תהא S תכונה לא טריוויאלית של פונקציות. אזי $L_S \notin \mathrm{R}$.

1. הוכיחו שעבור תכונה S טריוויאלית $L_S \in \mathrm{R}$.
2. הוכיחו את משפט רייס לפונקציות. האם ניתן להוסיף תנאי על S כך ש - $L_S \notin \mathrm{RE}$?

2.3 הרחבות למשפט רייס

1. תהי $S \subseteq \mathrm{RE}$ תכונה לא טריוויאלית כך ש־$\Sigma^* \notin S$. הוכיחו כי $L_S \notin \mathrm{RE}$.

3 מגבלות זיכרון ופונקציות חשיבות

בשאלה זו נניח כי $\Gamma = \{0,1,\flat\}$, $\Sigma = \{0,1\}$. קבעו האם הפונקציות הבאות ניתנות לחישוב:

1. הפונקציה f_1 על קלט $\langle M\rangle$ מחזירה את מספרו של התא הימני ביותר אליו המכונה M מגיעה בריצתה על ε.
<u>הערה</u> - אם אין תא ימני ביותר אזי f_1 אינה מוגדרת.
2. $f_2(n) = \max\{f_1(\langle M\rangle) : M \in E_n\}$, כאשר E_n הינה קבוצת כל המ"ט בעלות n מצבים שעוצרות על הקלט ε.

4 קבלה גמישה

כזכור, עבור מכונת טיורינג M, הגדרנו את שפת המכונה, $L(M)$, להיות אוסף הקלטים שהמכונה עוצרת עליהם במצב מקבל. קלט שהמכונה עוצרת עליו במצב דוחה, או אינה עוצרת עליו כלל, אינו חלק משפת המכונה.

בשאלה זו נגדיר עבור מכונה M את השפה שהמכונה "מקבלת בגמישות", $\text{Flex-}L(M)$: עבור מילה $w \in \Sigma^*$, יתקיים $w \in \text{Flex-}L(M)$ אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

1. M עוצרת על w במצב מקבל, או:
2. M, בריצתה על w, מבצעת אינסוף צעדי S (לאו דווקא רצופים).

נגדיר את A להיות מחלקת כל השפות הניתנות לקבלה בגמישות, כלומר

$$\mathrm{A} = \{L \mid L = \text{Flex-}L(M) \text{ קיימת מ"ט } M \text{ כך ש-}\}.$$

1. הוכיחו \ הפריכו: $\mathrm{RE} \subseteq \mathrm{A}$.
2. הוכיחו \ הפריכו: $\overline{\mathrm{HP}} \in \mathrm{A}$.
3. הוכיחו \ הפריכו: $L_{=3} \in \mathrm{A}$.

5 סיווג שפות

לאורך השאלה כל המכונות עליהן מדובר הן **מכונות אי דטרמיניסטיות**.

עבור כל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא שייכת ל-R, שייכת ל-$\mathrm{RE}\backslash\mathrm{R}$ או לא שייכת ל-RE, והוכיחו את תשובתכם.

1. $L_1 = \{\langle M \rangle \mid$ לא עוברת את תא מספר 10 M בו ϵ על הקלט M מסלול חישוב של **וקיים** מ"ט א"ד $M\}$.
2. $L_2 = \{\langle M \rangle \mid$ שהוא מסלול סופי ϵ על הקלט M מסלול חישוב של **ואין** מ"ט א"ד $M\}$.
3. $L_3 = \{\langle M \rangle \mid$ מבקרת באותה קונפיגורציה פעמיים M בו ϵ על הקלט M מסלול חישוב של **וקיים** מ"ט א"ד $M\}$.

6 סיבוכיות קולמוגורוב על קבוצה סופית

בהינתן שפה L נגדיר את הפונקציה

$$f_L(x) = \begin{cases} K(x) & x \in L \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

כאשר $K(x)$ הוא סיבוכיות קולמוגורוב של x.

הוכיחו / הפריכו את הטענה הבאה: לכל שפה $L \subset \{0,1\}^*$ סופית, הפונקציה f_L ניתנת לחישוב.
הערה: הוכחה צריכה להתייחס **לכל** שפה סופית, ואילו כדי להפריך את הטענה מספיק להראות **דוגמה** לשפה סופית שלא מקיימת אותה.