关于电磁波在左手媒质中的传播的思考

顾任亮

1、平面电磁波在左手媒质中的传播

通常情况下我们所考虑的电磁介质的介电常数和磁化率都是正的，而我们所要讨论的左手媒质（Left-Handed Medium, LHM）的介电常数ε、磁导率μ却是负的，要讨论左手媒质中电磁波的传输问题首先要考虑的是电磁波的传播方向应该如何确定。

首先必须肯定即使在左手媒质中 Maxwell 方程是仍然成立的，

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\nabla\bullet\vec{D}=\rho\\
&\nabla\bullet\vec{B}=0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

由 Maxwell 方程可以导出 E、H 的波动方程

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\vec{E}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\varepsilon\nabla\rho\\
&\nabla^2\vec{H}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

假设平面波所在的左手媒质中，不存在自由电荷分布和电流，所以上式化简为

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\
&\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

对于 E 的 xyz 三个分量都能解出形式相同的解，为了简化问题假设电磁波为偏振的，电场在 x 方向上并且电场和磁场都只与一个坐标有关，取这个坐标为 z 轴，则

$$E_x=f_1(z-vt)+f_2(z+vt)\tag{1.4}$$

式中$v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$，其中 f_1、f_2 分别代表了向相反的两个方向传播的波的表达式，这里设只取其中的一个方向传播的波进行研究，令

$$E_x=f_1(z-vt)\tag{1.5}$$

将(1.5)代入Maxwell方程$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\nabla\times\vec{H}=-\vec{a}_x\frac{\partial H_y}{\partial z}+\vec{a}_y\frac{\partial H_x}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{a}_x\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

得

$$H_y=\varepsilon vf_1(z-vt)=\frac{1}{Z}f_1(z-vt)\tag{1.6}$$

式中 Z 为波阻抗

$$Z=(\varepsilon v)^{-1}=\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\frac{\mu}{|\mu|}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{1.7}$$

这列波 f_1 的同相位面方程为

$$z-vt=const.$$
$$z=vt+const.$$

看到随着时间的推移同相位面是向着 z 轴的正方向推进的，定义为相速 $v_p=v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Poyting 矢量

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{a}_z\frac{1}{Z}f_1^{\,2}(z-vt) \tag{1.8}$$

当 $\varepsilon<0$、$\mu<0$ 时，$Z<0$，可见 Poynting 矢量却是指向 z 的负方向，如图 1（b）所示，E、H、S 三者满足右手法则，而 E、H、k 满足左手法则，那么在这样一种左手媒质中，f_1 这列波的传播方向方向到底如何取舍，是以能量的传播方向为准还是以相位面的传播方向为准呢？在此取能量为真正的传播方向，而电磁波的方向矢量取与能流密度方向相反。这样前面提到的波阻抗就应当修正过来

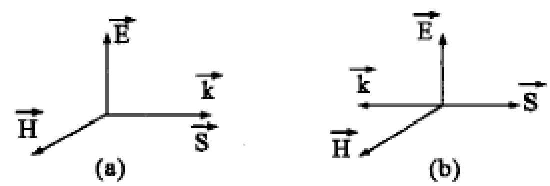


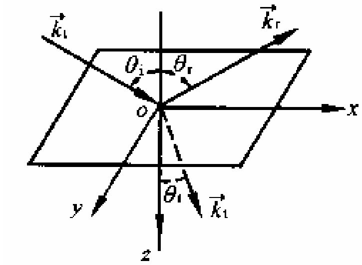
图 1　右手系与左手系

$$Z=|Z|=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

同时我们也得到了一个在左手媒质中负的传播常数 k。

2、电磁波在右手—左手媒质的界面上的折射、反射

设媒质分界面与 *xoy* 面平行，当入射波斜入射到媒质分界面上，令入射面与 *xoz* 面平行，如图所示 $z>0$ 的区域为右手媒质，$z<0$ 的区域为左手媒质，其中 k 的方向都代表能量流动方向。



同时在分界面上仍然满足右手媒质中的边界条件

$$\vec{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$$
$$\vec{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=0 \tag{1.9}$$

根据已有的空间中平面波的波动方程，列出入射波 $\vec{E}_i$、反射波 $\vec{E}_r$、折射波 $\vec{E}_t$ 的表达式

$$\vec{E}_i=\vec{E}_{i0}e^{-j(k_1 sin\theta_i x+k_1 cos\theta_i z)}$$
$$\vec{E}_r=\vec{E}_{r0}e^{-j(k_1 sin\theta_r x-k_1 cos\theta_r z)} \tag{1.10}$$
$$\vec{E}_t=\vec{E}_{t0}e^{-j(k_2 sin\theta_t x+k_2 cos\theta_t z)}$$

式中的 k_1、k_2 为电磁波传播的传播常数

$$k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} \tag{1.11}$$
$$k_1=-\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} \tag{1.12}$$

由边界条件，得

$$\vec{E}_{i0}e^{-jk_1 sin\theta_i x}+\vec{E}_{r0}e^{-jk_1 sin\theta_r x}=\vec{E}_{t0}e^{-jk_2 sin\theta_t x} \tag{1.13}$$

要使上式恒成立，则

$$k_1 sin\theta_i = k_1 sin\theta_r = k_2 sin\theta_t \tag{1.14}$$

反射定律仍然成立，而折射角因为k_1、k_2异号，所以

$$n=\frac{sin\theta_i}{sin\theta_t}=\frac{k_2}{k_1}=-\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} \tag{1.15}$$

可以看到这里的折射率是负值，折射波的方向竟然与入射波在法线的同一侧，所以说在左手媒质中存在着令人难以理解的物理现象。

3、正弦平面波在左右手界面的斜入射

入射平面波可以分解为垂直极化波和平行极化波的叠加，这里同样有一系列推导过程，但是左手媒质在其中的影响仅仅是将θ_2变为负值，其它物理量之间量的关系依然不变，因为θ_2的正负并不影响$cos\theta_2$的值。唯一不同的就是折射波的方向是与入射波在法线的同侧。

4、ε、μ为负与负能量？

电场能量密度为$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$，磁场能量密度为$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$式中 E、H 分别为电场强度、磁场强度；如果$\varepsilon<0$、$\mu<0$就得到负的w_e和w_m，亦即负电磁能量。也就是说在一个充满左手媒质的空间中如果有一个正电荷q^+，那么空间中的电场方向不是远离q^+而去的而是指向q^+，那么q^+所在的点的电势竟然可以是负无穷……这些都令我们感到困惑，希望存在于负能量问题和左手媒质的问题早日真相大白，还有许多工作等待着科学家们去做。

参考文献：

1、 黄志洵——负折射率研究中的若干理论问题
2、 谭康伯、梁昌洪、安翔——Fermat原理在左手媒质中的推广

（04005009 顾任亮 2007-12-19）