Отчет по лабораторной работе №5: Модель ‘Хищник-жертва’

дисциплина: Математическое моделирование

Швец С., НФИбд-03-18

Содержание

Список иллюстраций

1 Введение

Онсновная цель работы - изучить и построить модель хищник-жертва(модель Лотки-Вольтерры)

1.1 Задачи работы

Выделим основные задачи работы:

- Изучить жесткую модель хищник-жертва.
- Изучит модель хищник-жертва с малым изменением.
- Построить жесткую модель хищник-жертва.

2 Терминология. Условные обозначения

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - *модель Лотки-Вольтерры*. Данная модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени.
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает.
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника несущественны.
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается.
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

Математическа модель

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

- x - число жертв
- y - число хищников
- a - коэффициент, описывающий скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников
- c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв.

Вероятность взаимодействия жертвы и хищника пропорциональна как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников.

Математический анализ жесткой модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние(B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке:

$$x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{d}$$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет.

При малом изменении модели:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x, y) \\ \frac{dx}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x, y), \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

Прибавленые к правым частям малые члены, учитывают конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв и т.п.

Вывод о периодичности, справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

В зависимости от вида малых поправок f и g возможны 3 случая:

1. Равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.
2. Система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию.
3. В системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим.

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Задача:

Вариант 7

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.18x(t) + 0.047x(t)y(t) \\ \frac{dx}{dt} = 0.38y(t) - 0.035x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 12, y_0 = 17$. Найдите стационарное состояние системы.

3.2 Решение

Коэффиценты:

- a = 0.18 // коэффициент естественной смертности хищников
- b = 0.38; // коэффициент естественного прироста жертв
- c = 0.047; // коэффициент увеличения числа хищников

- d = 0.035; // коэффициент смертности жертв

Код на Julia:

```
using  Gadfly
using Plots
using DifferentialEquations

a= 0.18;
b= 0.38;
c= 0.047;
d= 0.035;
x0 = 12;
y0 =17;

    function syst(dy,y,p,t)
        dy[1] = -a*y[1]+c*y[1]*y[2]
        dy[2] = b*y[2]-d*y[1]*y[2]
    end

y_0 = [x0, y0];
tspan = (0, 300);



prob = ODEProblem(syst, y_0, tspan);
sol = solve(prob, RK4(),reltol=1e-6, timeseries_steps = 0.01);

N = length(sol.u)
    J = length(sol.u[1])
    U = zeros(N, J)
```

```
    for i in 1:N, j in 1:J
        U[i,j] = sol.u[i][j]
    end
```

```
set_default_plot_size(20cm, 15cm)
Gadfly.plot(x = U[:,1], y = U[:,2],
Theme(  discrete_highlight_color=x->"orange",
                default_color="orange",
                key_title_color="black",
                background_color="white",),)

Plots.plot(sol)
```

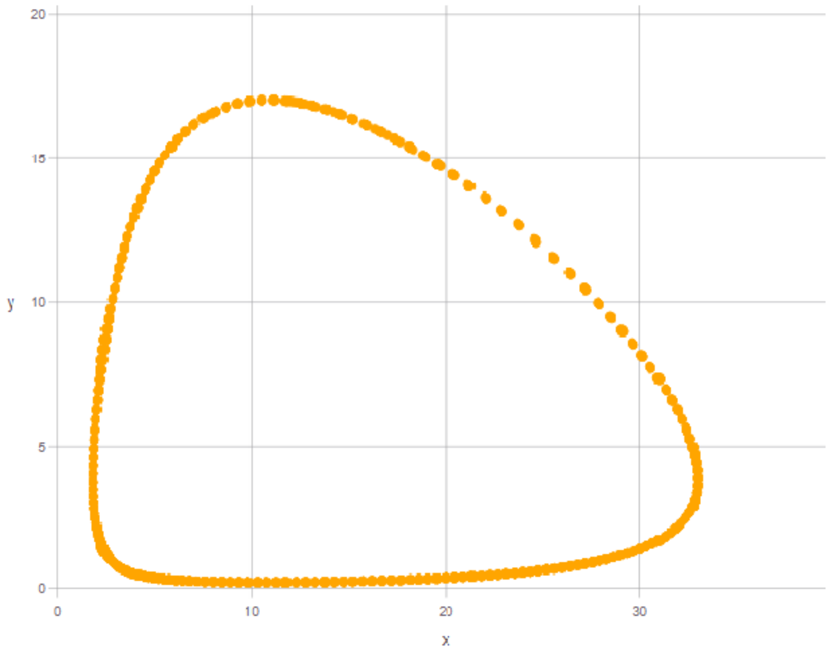

Рис. 3.1: График зависимости численности хищников от численности жертв

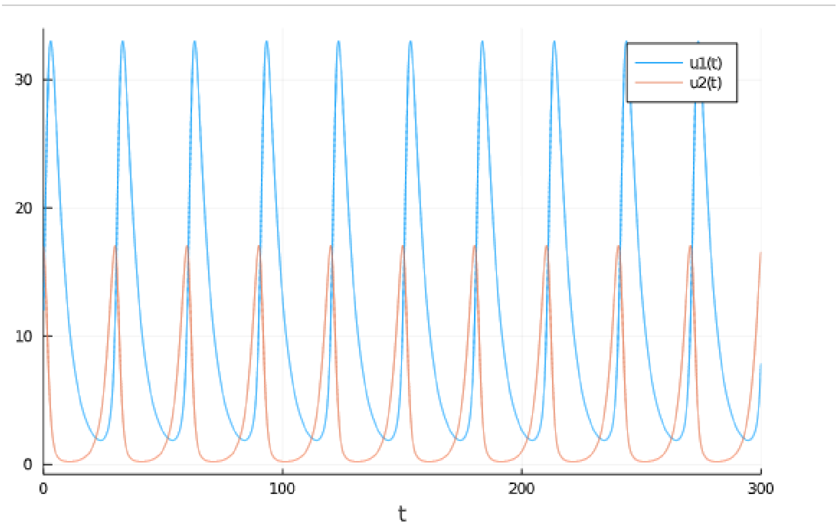

Рис. 3.2: График изменения численности хищников(u1(t)) и численности жертв(u2(t))

4 Выводы

Мы изучили и построили модель хищник-жертва