Отчет по лабораторной работе №4: Модель гармонических коллебаний

дисциплина: Математическое моделирование

Швец С., НФИбд-03-18

Содержание

Список иллюстраций

1 Введение

1.1 Цель

Изучить и построить модель линейного гармонического осциллятора

2 Терминология. Условные обозначения

Линейный гармони́ческий осцилля́тор — система, которая при выведении её из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x

2.1 Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора

Линеное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, является примером динамической системы:

$$\ddot{x} = 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x$$

Обозначения:
$\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$

- x -переменная, описывающая состояние системы(смещение грузаб заряд конденсатора и т.д)
- γ - характеризует потерю энергии(трение в механической системе, сопротивление в контуре)
- ω_0 -собственная частота колебаниц
- t - время

2.2 Уравнение осциллятора при остутствие потерь в системе(γ =0)

Энергия колебаний такого консервативного сохраняется во времени:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Зададим начальные условия:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \end{cases}$$

Начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Фазовая плоскость - двумерное пространство в которм “движется” решение

Фазовая траектория - гладкая кривая в фазовой плоскости - решение уравнения движения как функции времени.

Фазовый портрет - картина, образованная набором фазовых траекторий, когда множество различных решений можно изобразить на одной фазовой плоскости.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Формулировка задачи:

Вариант 7

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы: $\ddot{x} + 7x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 6x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы: $\ddot{x} + 5\dot{x} + x = cos(3t)$

На интервале $t \in [0; 5]$(шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = -1, y_0 = -1$

3.2 Решение

Учитывая начальные условия и интервал с шагом 0.05 построим фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы(рис. 3.1)(рис. 3.2)

Решение на Julia:

```
#функция осциляции
function portret(w, g, x0, y0)

    function SDU(du,u,p,t)
        du[1] = u[2]
        du[2] = -w*w*u[1]-g*u[2]-f(t)
    end

    u0 = [x0, y0]
    tspan = (0.0, 25)

    prob = ODEProblem(SDU, u0, tspan)
    sol = solve(prob, RK4(),reltol=1e-6, timeseries_steps = 0.05)

    N = length(sol.u)
    J = length(sol.u[1])

    U = zeros(N, J)

    for i in 1:N, j in 1:J
        U[i,j] = sol.u[i][j]
    end
    U
end
#грфики
f(t) = 0
ans1 = portret(7, 0,1, 1);
```

```
Plots.plot(ans1)

set_default_plot_size(30cm, 20cm)
 Gadfly.plot(x = ans1[:,1], y = ans1[:,2],
        Guide.title("Колебания без затухания без действия внешней силы"))
```

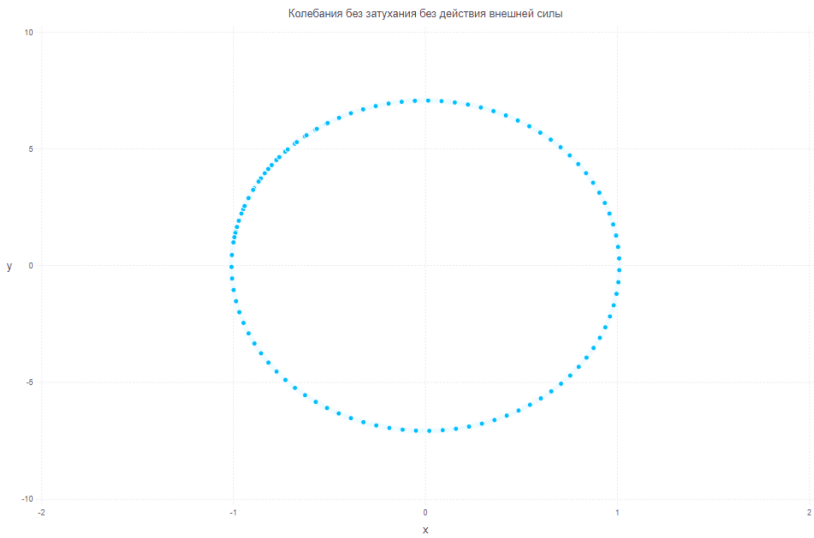

Рис. 3.1: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

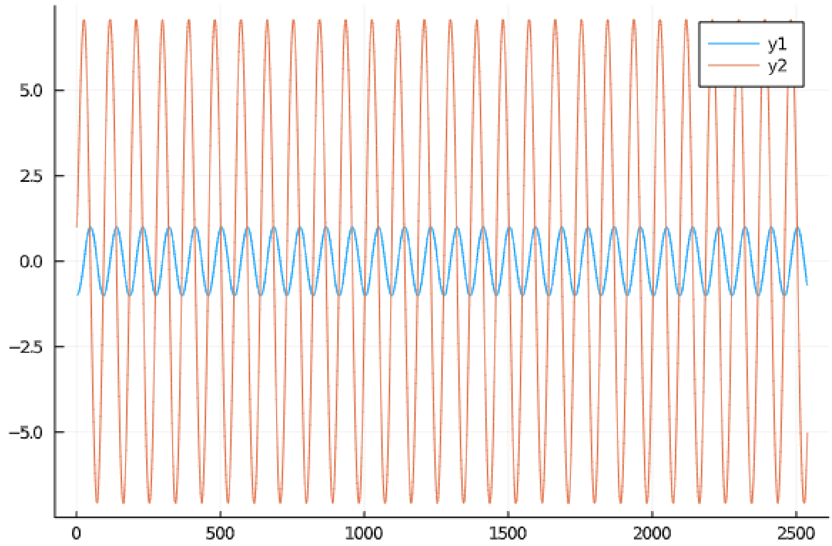

Рис. 3.2: Решение уравнения для модели гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

2. Колебания гармонического осциллятора(рис. 3.3) с затуханием и без действий внешней силы(рис. 3.4): $\ddot{x} + 13\dot{x} + 2x = 0$

Параметры:

- $\omega = \sqrt{2}$
- $\gamma = 13$

Решение, реаллизованное с помощью Julia: код аналогичен, меняем лишь вывод

```
set_default_plot_size(30cm, 20cm)
 Gadfly.plot(x = ans1[:,1], y = ans1[:,2],
        Guide.title("Колебания без затухания без действия внешней силы"))


        Plots.plot(ans2)
```

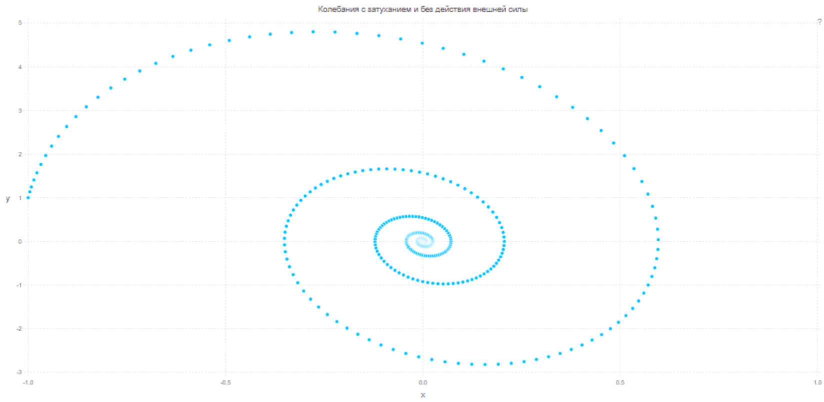

Рис. 3.3: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

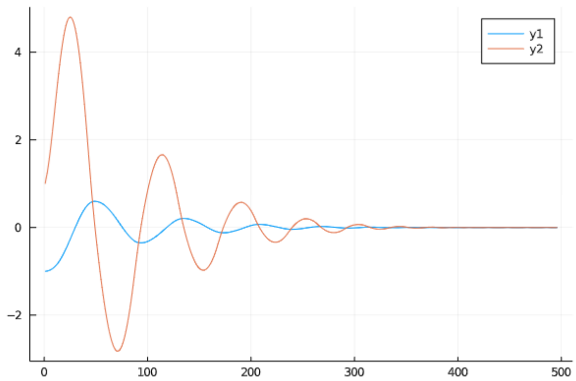

Рис. 3.4: Решение уравнения для модели гармонического осциллятора с затуханиями и без действий внешней силы

3. Колебания гармонического осциллятора(рис. 3.5) с затуханием и под действием внешней силы(рис. 3.6): $\ddot{x} + 0.8\dot{x} + 1.8x = 2.8sin(8t)$

Параметры:

- $\omega = \sqrt{1.8}$

- $\gamma = 0.8$

Начальная функция:

- $f(t) = 2.8sin(8t)$

Решение, реализованное с помощью Julia:

```
f(t) = cos(3t)
ans3 = portret(1, 5, -1, 1)
set_default_plot_size(40cm, 20cm)
 Gadfly.plot(x = ans3[:,1], y = ans3[:,2],
        Guide.title("Колебания с затуханием и под действием внешней силы"

  Plots.plot(ans3)
```

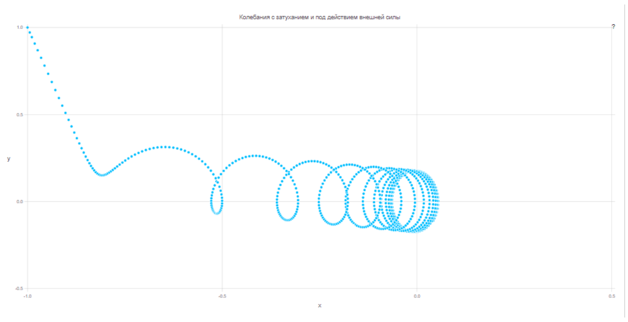

Рис. 3.5: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и действием внешней силы

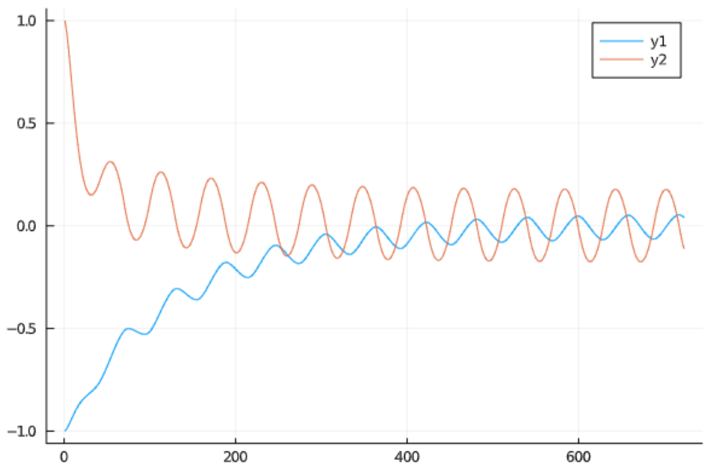

Рис. 3.6: Решение уравнения для модели гармонического осциллятора с затуханиями и с воздействием внешней силы

4 Выводы

Мы изучили модель линейного гармонического коллебания и построили ее фазовую траекторю и график решения