ゼータ関数の特殊値

岡 和磨

2016/12/31

$$\sin\left(\pi z\right) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{0.1}$$

を対数微分し、z を乗じると、

$$\begin{aligned}
\pi z \cot\left(\pi z\right) &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2/n^2}{1 - z^2/n^2} \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{z^{2i}}{n^{2i}}\right) \\
&= 1 - 2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2i}}\right)z^{2i} & &\text{(和の交換に関する考察は付録参照)} \\
&= 1 - 2\sum_{i=1}^{\infty}\zeta\left(2i\right)z^{2i} \qquad (0.2)
\end{aligned}$$

また、

$$\pi z \cot\left(\pi z\right) = 1 - \frac{\left(\pi z\right)^2}{3} - \frac{\left(\pi z\right)^4}{45} - \frac{2\left(\pi z\right)^6}{945} - \frac{\left(\pi z\right)^8}{4725} - \frac{2\left(\pi z\right)^{10}}{93555} + \cdots \tag{0.3}$$

だから、

$$\zeta\left(2\right) = \frac{\pi^2}{6} \tag{0.4}$$

$$\zeta\left(4\right) = \frac{\pi^4}{90} \tag{0.5}$$

$$\zeta\left(6\right) = \frac{\pi^6}{945} \tag{0.6}$$

$$\zeta\left(8\right) = \frac{\pi^8}{9450} \tag{0.7}$$

$$\zeta\left(10\right) = \frac{\pi^{10}}{93555} \tag{0.8}$$

付録

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{z}{n}\right)^{2i}=\left(\frac{z}{n}\right)^{2}\frac{1-(z/n)^{2(N-1)}}{1-(z/n)^{2}} \tag{0.9}$$

$$\therefore\left|\frac{z^2/n^2}{1-z^2/n^2}-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{z}{n}\right)^{2i}\right|=\left|\frac{(z/n)^{2N}}{1-(z/n)^{2}}\right| \tag{0.10}$$

だから、

$$N>\sup_n\left(\frac{\log\left(\left|1-(z/n)^2\right|\varepsilon\right)}{\log|z/n|^2}\right) \tag{0.11}$$

としておけば、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し、

$$\left|\frac{z^2/n^2}{1-z^2/n^2}-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{z}{n}\right)^{2i}\right|<\varepsilon \tag{0.12}$$

とできる。(上記の $\sup_n$ が存在することは、等比級数の収束性よりすべての $n\in\mathbb{N}$ に関して

$$\frac{\log\left(\left|1-(z/n)^2\right|\varepsilon\right)}{\log|z/n|^2} \tag{0.13}$$

が値を持つこと、及び

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\left|1-(z/n)^2\right|\varepsilon\right)}{\log|z/n|^2}=-\infty \tag{0.14}$$

よりわかる）よって、N に対する数列

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{z}{n}\right)^{2i}=\left(\frac{z}{n}\right)^{2}\frac{1-(z/n)^{2(N-1)}}{1-(z/n)^{2}} \tag{0.15}$$

は n に関して一様収束することがわかる。したがって、[3] の定理 3.1 より、極限の順序を交換できて、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{z^{2i}}{n^{2i}}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2i}}\right)z^{2i} \tag{0.16}$$

参考文献

[1] オイラーの数学から — 『無限解析序説』への招待 (http://www.sci.kobe-u.ac.jp/old/seminar/pdf/noumi2007.pdf) アクセス日時:2016 年 12 月 31 日 14 時

[2] Online Algebra Calculator (http://maxima-online.org/index.html) アクセス日時:2016 年 12 月 31 日 15 時

[3] 解析学 II (https://www.cis.fukuoka-u.ac.jp/ nyamada/AnalysisII/anII2014.pdf) アクセス日時:2017 年 1 月 1 日 22 時