同様に、

三角関数の無限乗積展開

岡 和磨

2016/12/31

1　公式

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-1/2)^2}\right) \tag{1.2}$$

$$\sinh(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{1.3}$$

$$\cosh(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{(n-1/2)^2}\right) \tag{1.4}$$

2　証明

$$f(z) = \frac{\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}{\sin(\pi z)} \tag{2.1}$$

とおく。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \log(f(z)) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} - \pi \cot(\pi z) \\
&= 0 \\
\therefore f(z) &= f(0) = 1 \\
\therefore \sin(\pi z) &= \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

同様に、

$$g(z) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-1/2)^2}\right)}{\cos(\pi z)} \tag{2.3}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\log\left(g\left(z\right)\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n+1/2}+\pi\tan\left(\pi z\right)\\
&=0\\
\therefore g\left(z\right) &= g\left(0\right)=1\\
\therefore \cos\left(\pi z\right) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\left(n-1/2\right)^2}\right) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

参考文献

[1] Wikipedia 三角関数の無限乗積展開 (https://ja.wikipedia.org/wiki/三角関数の無限乗積展開) アクセス日時:2016 年 12 月 31 日 13 時