三角関数の部分分数展開

岡 和磨

2016/12/31

1　公式

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \tag{1.1}$$

$$\pi \tan(\pi z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n+1/2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n} \tag{1.3}$$

$$\frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n+1/2} \tag{1.4}$$

2　証明

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} \tag{2.1}$$

とおく。$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上有界な整関数だから、リウヴィルの定理により定数関数であることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) = 0 \\ \therefore \pi \cot(\pi z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}。 \end{aligned} \tag{2.2}$$

また、$z = z' + 1/2$ とすると、

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= \pi \cot\left(\pi z' + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\pi \tan \pi z' \end{aligned} \tag{2.3}$$

だから、

$$\pi \tan(\pi z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n+1/2}。 \tag{2.4}$$

さらに、

$$\pi \cot(\pi z) + \pi \tan(\pi z) = \frac{2\pi}{\sin(2\pi z)} \tag{2.5}$$

より、

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z/2+n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z/2+n+1/2}\right) \\
\therefore \frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}、 \qquad (2.6) \\
\therefore \frac{\pi}{\cos(\pi z)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n+1/2}。 \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

まとめると、

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n} \tag{2.8}$$

$$\pi \tan(\pi z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n+1/2} \tag{2.9}$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n} \tag{2.10}$$

$$\frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n+1/2} \tag{2.11}$$

参考文献

[1] Wikipedia 三角関数の部分分数展開 (https://ja.wikipedia.org/wiki/三角関数の部分分数展開) アクセス日時:2016 年 12 月 31 日 11 時 50 分