

ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-કમાંડ
મશબ/1219/119-125/ઇ, તા. 16-02-2019 થી મંજૂર

ગાણિત

ધોરણ X



પ્રતિષ્ઠાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્વી વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરોશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સમ્યતાથી વર્તાશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા આપું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

કિંમત : ₹ 126.00



રાષ્ટ્રીય શૈક્ષિક અનુસંધાન ઔર પ્રશિક્ષણ પરિષદ
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING



ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને
હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં NCERT, નવી દિલ્હી અને
ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી જ્યોતિષ અન. ભાડ
શ્રી વિજય વોરા
ડૉ. રવિ બોરાણા
શ્રી નરેશ જાલોરીયા
ડૉ. અતુલ વ્યાસ
શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડ્યા
શ્રી કલેશ અભાડી

સમીક્ષા

ડૉ. એ. એચ. હાસમાણી
ડૉ. પી. આઈ. અંધારીયા
ડૉ. જી. સી. પ્રભાપતિ
શ્રી અસ. આર. ગંજેરા
ડૉ. હરેશ ભૂટક
શ્રી હન્મવદન શાહ
શ્રી કમલેશ ભાડ
શ્રી પ્રતિભાબહેન નાગેયા
શ્રી યોગેશ ટેવલુક
શ્રી કલેશ વ્યાસ
ડૉ. દીપક વ્યાસ
ડૉ. જી. એફ. મહેતા
શ્રી લલીત યાદવ
શ્રી અંજનાભહેન અન. પટેલ

ભાગશુદ્ધિ

ડૉ. નરેશ દવે

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ અસ. લીભારીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સર્વે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશીની નીતિના અનુસંધાને
ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા
કરાવ કર્માંક: મશબ/1217/1036/૭ તા.25/10/2017 થી શાળા કક્ષાએ
NCERTના પાઠ્યપુસ્તકેનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને
અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત ધોરણ X ના ગણિત વિષયના
પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરવીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકૃતાં ગુજરાત
રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાચ્યાપકો અને
શિક્ષકો પાસે કરવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં
ધોરણ સુધારાન્વયપારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ
પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક રાજ્ય કક્ષાની સમિતિની રચના કરવામાં આવી. આ
સમિતિની સાથે NCERT ના પ્રતિનિધિ તરીકે આર.આઈ.ઈ. બોપાલથી ઉપસ્થિત
રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક દિદિવસીય કાર્યશિબિન્દુનું આયોજન કરવામાં આવ્યું
અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું, જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ,
શ્રી જ્યોતિષ અન. ભાડ, શ્રી હન્મવદન શાહ, ડૉ. જી. એફ. મહેતા, શ્રી હિતેશકુમાર
વી. પંડ્યા, શ્રી રમણકલાલ વિરપરા, ડૉ. અસનીકુમાર ગર્વ (આર.આઈ.ઈ.,
બોપાલ), ડૉ. સુરેશ મહેવાળા (આર.આઈ.ઈ., બોપાલ) ઉપસ્થિત રથ્યા હતા અને
તેમણે પોતાનાં કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરાં પાડ્યાં છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા તેમજ તેની
ગુણવત્તા જાળવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂર્તી કાળજી લેવામાં આવી છે. તેમ છીતાં
શિક્ષણમાં રસ પરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં
સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્હીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

પી. ભારતી (IAS)

નિયામક

તા.

કાર્યવાહક પ્રમુખ

ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2019,

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાધન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી અવાતિકા સિંઘ, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the Textbook Development Committee responsible for this textbook. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J. V. Narlikar and the Chief Advisor for this textbook, Dr. H. K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G. P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to the systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

New Delhi
20 November 2006

Director
National Council of Educational
Research and Training

Preface

Through the years, from the time of the Kothari Commission, there have been several committees looking at ways of making the school curriculum meaningful and enjoyable for the learners. Based on the understanding developed over the years, a National Curriculum Framework (NCF) was finalised in 2005. As part of this exercise, a National Focus Group on Teaching of Mathematics was formed. Its report, which came in 2005, highlighted a constructivist approach to the teaching and learning of mathematics.

The essence of this approach is that children already know, and do some mathematics very naturally in their surroundings, before they even join school. The syllabus, teaching approach, textbooks etc., should build on this knowledge in a way that allows children to enjoy mathematics, and to realise that mathematics is more about a way of reasoning than about mechanically applying formulae and algorithms. The students and teachers need to perceive mathematics as something natural and linked to the world around us. While teaching mathematics, the focus should be on helping children to develop the ability to particularise and generalise, to solve and pose meaningful problems, to look for patterns and relationships, and to apply the logical thinking behind mathematical proof. And, all this in an environment that the children relate to, without overloading them.

This is the philosophy with which the mathematics syllabus from Class I to Class XII was developed, and which the textbook development committee has tried to realise in the present textbook. More specifically, while creating the textbook, the following broad guidelines have been kept in mind.

- The matter needs to be linked to what the child has studied before, and to her experiences.
- The language used in the book, including that for ‘word problems’, must be clear, simple and unambiguous.
- Concepts/processes should be introduced through situations from the children’s environment.
- For each concept/process give several examples and exercises, but not of the same kind. This ensures that the children use the concept/process again and again, but in varying contexts. Here ‘several’ should be within reason, not overloading the child.
- Encourage the children to see, and come out with, diverse solutions to problems.
- As far as possible, give the children motivation for results used.
- All proofs need to be given in a non-didactic manner, allowing the learner to see the flow of reason. The focus should be on proofs where a short and clear argument reinforces mathematical thinking and reasoning.
- Whenever possible, more than one proof is to be given.
- Proofs and solutions need to be used as vehicles for helping the learner develop a clear and logical way of expressing her arguments.
- All geometric constructions should be accompanied by an analysis of the construction and a proof for the steps taken to do the required construction. Accordingly, the children would be trained to do the same while doing constructions.
- Add such small anecdotes, pictures, cartoons and historical remarks at several places which the children would find interesting.
- Include optional exercises for the more interested learners. These would not be tested in the examinations.

- Give answers to all exercises, and solutions/hints for those that the children may require.
- Whenever possible, propagate constitutional values.

As you will see while studying this textbook, these points have been kept in mind by the Textbook Development Committee. The book has particularly been created with the view to giving children space to explore mathematics and develop the abilities to reason mathematically. Further, two special appendices have been given — Proofs in Mathematics, and Mathematical Modelling. These are placed in the book for interested students to study, and are only optional reading at present. These topics

may be considered for inclusion in the main syllabi in due course of time.

As in the past, this textbook is also a team effort. However, what is unusual about the team this time is that teachers from different kinds of schools have been an integral part at each stage of the development. We are also assuming that teachers will contribute continuously to the process in the classroom by formulating examples and exercises contextually suited to the children in their particular classrooms. Finally, we hope that teachers and learners would send comments for improving the textbook to the NCERT.

PARVIN SINCLAIR

G.P. DIKSHIT

Chief Advisors

Textbook Development Committee

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

CHIEF ADVISOR

Dr. H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Anjali Gupte, Teacher, Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan

Avantika Dam, TGT, CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi

Dharam Prakash, Reader, CIET, NCERT, New Delhi

H.C. Pradhan, Professor, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai, Maharashtra

Harsha J. Patadia, Senior Reader, Centre of Advance Study in Education, M.S. University of Baroda, Vadodara, Gujarat

Jabashree Ghosh, TGT, DM School, RIE, NCERT, Bhubaneswar, Orissa

Mahendra Shankar, Lecturer (S.G.) (Retd.), NCERT, New Delhi

Meena Shrimali, Teacher, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan

R. Athmaraman, Mathematics Education Consultant, TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu

S. Pattanayak, Professor, Institute of Mathematics and Application, Bhubaneswar, Orissa

S.K.S. Gautam, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

Shraddha Agarwal, PGT, Sir Padampat Singhania Education Centre, Kanpur, (U.P.)

Srijata Das, Sr. Lecturer (Mathematics), SCERT, New Delhi

U.B. Tewari, Professor, Department of Mathematics, IIT, Kanpur, (U.P.)

Uaday Singh, Lecturer, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBER-COORDINATORS

Ashutosh K. Wazalwar, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

Praveen K. Chaurasia, Lecturer, DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council acknowledges the valuable comments of the following participants of the workshop towards the finalisation of the book – K.K. Gupta, Reader, U.N.P.G. College, Padrauna, Uttar Pradesh; Deepak Mantri, Teacher, Vidya Bhawan Basic School, Udaipur, Rajasthan; Shagufta Anjum, Teacher, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan; Ranjana Sharma, Teacher, Vidya Bhawan Secondary School, Udaipur, Rajasthan. The Council acknowledges the suggestions given by Utpal Chakraborty, Lecturer, SCERT, Raipur, Chattisgarh.

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop : K. Balaji, TGT, Kendriya Vidyalaya, Donimalai, Karnataka; Shiv Kumar Nimesh, TGT, Rajkiya Sarvodaya Bal Vidyalaya, Delhi; Ajay Singh, TGT, Ramjas Senior Secondary School No. 3, Delhi; Rajkumar Dhawan, PGT, Geeta Senior Secondary School No. 2, Delhi; Shuchi Goyal, PGT, The Airforce School, Delhi; Manjit Singh, TGT, Government High School, Gurgaon, Haryana; Pratap Singh Rawat, Lecturer, SCERT, Gurgaon, Haryana; Ritu Tiwari, TGT, Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Delhi.

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur for conducting the third workshop of the development committee at Udaipur, and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, Head, DESM, NCERT.

The Council also acknowledges the efforts of Uttam Kumar (NCERT) and Rajesh Sen (Vidya Bhawan Society, Udaipur), DTP Operators; Monika Saxena, Copy Editor; and Abhimanyu Mohanty, Proof Reader; APC office and the administrative staff DESM, NCERT and the Publication Department of the NCERT.

અનુક્રમણિકા



પ્રકરણ 1	વાસ્તવિક સંખ્યાઓ (Real Numbers)	1
1.1	પ્રાસ્તાવિક	1
1.2	યુક્તિભૂત બાગાકારનું પૂર્વમેય	2
1.3	અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય	6
1.4	અસંમેય સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તન	10
1.5	સંમેય સંખ્યાઓ અને તેના દર્શાવણા નિરૂપણનું પુનરાવર્તન	13
1.6	સારાંશ	16
પ્રકરણ 2	બહુપદીઓ (Polynomials)	18
2.1	પ્રાસ્તાવિક	18
2.2	બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ	19
2.3	બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ	24
2.4	બહુપદીઓ માટે ભાગ પ્રવિધિ	28
2.5	સારાંશ	32
પ્રકરણ 3	દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગમ (Pair of Linear Equations in Two Variables)	33
3.1	પ્રાસ્તાવિક	33
3.2	દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગમ	34
3.3	દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગમના ઉકેલ માટે આવેખની રીત	38
3.4	સુરેખ સમીકરણયુગમનો ઉકેલ મેળવવાની બૈજિક રીત	42
3.4.1	આદેશની રીત	42
3.4.2	લોપની રીત	45
3.4.3	ચોકરી ગુણાકારની રીત	48
3.5	દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી શકાય તેવાં સમીકરણો	53
3.6	સારાંશ	58
પ્રકરણ 4	દ્વિઘાત સમીકરણ (Quadratic Equations)	59
4.1	પ્રાસ્તાવિક	59
4.2	દ્વિઘાત સમીકરણ	60
4.3	અવયવીકરણ વડે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ	62
4.4	પૂર્ણવર્ગની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ	65
4.5	બીજનાં સ્વરૂપ	74
4.6	સારાંશ	76
પ્રકરણ 5	સમાંતર શ્રેષ્ઠી (Arithmetic Progression)	78
5.1	પ્રાસ્તાવિક	78
5.2	સમાંતર શ્રેષ્ઠી	79

5.3	સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું n મું ૫૬	84
5.4	સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો	90
5.5	સારાંશ	98
પ્રકરણ 6	ત્રિકોણ (Triangles)	99
6.1	પ્રાસ્તાવિક	99
6.2	સમરૂપ આકૃતિઓ	100
6.3	ત્રિકોણોની સમરૂપતા	104
6.4	ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો સિદ્ધાંત	110
6.5	સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ	120
6.6	પાયથાગોરસ પ્રમેય	123
6.7	સારાંશ	131
પ્રકરણ 7	યામ ભૂમિતિ (Coordinate Geometry)	133
7.1	પ્રાસ્તાવિક	133
7.2	અંતરસૂત્ર	134
7.3	વિભાજન સૂત્ર	139
7.4	ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ	144
7.5	સારાંશ	147
પ્રકરણ 8	ત્રિકોણભિતીનો પરિચય (Introduction to Trigonometry)	149
8.1	પ્રાસ્તાવિક	149
8.2	ત્રિકોણભિતીય ગુણોત્તરો	150
8.3	વિશેષ માપના ખૂણા માટેના ત્રિકોણભિતીય ગુણોત્તરો	157
8.4	કોટિકોણના ત્રિકોણભિતીય ગુણોત્તરો	163
8.5	ત્રિકોણભિતીય નિત્યસમો	165
8.6	સારાંશ	169
પ્રકરણ 9	ત્રિકોણભિતીના ઉપયોગો (Some Applications of Trigonometry)	170
9.1	પ્રાસ્તાવિક	170
9.2	જેંચાઈ અને અંતર	171
9.3	સારાંશ	179
પ્રકરણ 10	વર્તુળ (Circles)	180
10.1	પ્રાસ્તાવિક	180
10.2	વર્તુળનો સ્પર્શક	181
10.3	સમતલના કોઈ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની સંખ્યા	183
10.4	સારાંશ	188
પ્રકરણ 11	રચના (Constructions)	189
11.1	પ્રાસ્તાવિક	189
11.2	રેખા�ંડનું વિભાજન	189
11.3	વર્તુળના સ્પર્શકની રચના	193
11.4	સારાંશ	194

પ્રકરણ 12	વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ (Areas Related to Circles)	195
12.1	પ્રાસ્તાવિક	195
12.2	વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ - એક સમીક્ષા	196
12.3	વર્તુળના વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ	197
12.4	સંયોજિત સમતલ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ	202
12.5	સારાંશ	207
પ્રકરણ 13	પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ (Surface Areas and Volumes)	208
13.1	પ્રાસ્તાવિક	208
13.2	સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું કુલ પૃષ્ઠફળ	209
13.3	સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ	214
13.4	એક ઘનાકારનું બીજા ઘનાકારમાં રૂપાંતર	217
13.5	શંકુનો આડછેદ	220
13.6	સારાંશ	226
પ્રકરણ 14	અંકડાશાલો (Statistics)	227
14.1	પ્રાસ્તાવિક	227
14.2	વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક	227
14.3	વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક	237
14.4	વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ	241
14.5	સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણની આલેખીય પ્રસ્તુતિ	252
14.6	સારાંશ	256
પ્રકરણ 15	સંભાવના (Probability)	257
15.1	પ્રાસ્તાવિક	257
15.2	સંભાવના - પ્રશ્નાએ અભિગમ	258
15.3	સારાંશ	271
પરિશિષ્ટ A1	ગાણિતમાં સાબિતીઓ (Proofs in Mathematics)	273
A1.1	પ્રાસ્તાવિક	273
A1.2	ગાણિતિક વિધાનોનો પુનઃપરિચય	273
A1.3	આનુમાનિક તર્ક	276
A1.4	ધારણાઓ, પ્રમેયો, સાબિતીઓ અને ગાણિતિક તર્ક	278
A1.5	વિધાનનું નિષેષ	282
A1.6	વિધાનનું પ્રતીપ	285
A1.7	વિરોધાભાસથી સાબિતી	288
A1.8	સારાંશ	291
પરિશિષ્ટ A2	ગાણિતિક મોડેલિંગ (Mathematical Modeling)	292
A2.1	પ્રાસ્તાવિક	292
A2.2	ગાણિતિક મોડેલિંગના સોપાનો	293
A2.3	કેટલાંક ઉદાહરણો	297
A2.4	ગાણિતિક મોડેલિંગ કેમ મહત્વનું છે ?	300
A2.5	સારાંશ	301
જવાબો અને સૂચનો	(Answers and Hints)	302



H1W4U3

વાસ્તવિક સંખ્યાઓ

1

1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં તમે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દુનિયામાં ડોડિયું કર્યું અને તમને અસંમેય સંખ્યાઓ મળી. આ પ્રકરણમાં આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ચર્ચા ચાલુ રાખીશું. આપણે વિભાગ 1.2 અને 1.3 માં ધન પૂર્ણકોના ખૂબ જ અગત્યના ગુણધર્મો, યુક્તિલઙ્ઘની ભાગ પ્રવિષ્ટિ અને અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયથી પ્રારંભ કરીશું.

'યુક્તિલઙ્ઘની ભાગ પ્રવિષ્ટિ' નામ જ દર્શાવે છે કે, તેને પૂર્ણકોની વિભાજ્યતા સાથે કંઈક સંબંધ છે. સરળ ભાષામાં કહીએ તો કોઈ પણ ધન પૂર્ણક a ને બીજા કોઈ ધન પૂર્ણક b વડે ભાગવામાં આવે, તો અનૃણ શેષ r વધે અને તે b કરતાં નાની હોય. તમારામાંથી મોટા ભાગના અભ્યાસાર્થી કદાચ ભાગાકારને સ્વાભાવિક લાંબી પ્રક્રિયા તરીકે ઓળખતા હશે. જો કે, આ પરિણામ ખૂબ જ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજી શકાય, છતાં આ પરિણામો દર્શાવવા અને સમજવા લગભગ સરળ છે, પૂર્ણકોની વિભાજ્યતાના ગુણધર્મો સંબંધી તેના ધણા બધા ઉપયોગો છે. આપણે તેમાંના કેટલાકને સમજશું અને તેનો ઉપયોગ મુજબત્વે બે ધન પૂર્ણકોના ગુ.સા.અ. (ગુરુત્વમાં સામાન્ય અવયવ, HCF અથવા GCD) શોધવા માટે કરીશું.

અન્ય પાસામાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયમાં ધન પૂર્ણકોના ગુણાકારની વાત આવે છે. તમે જોશો છો કે, દરેક વિભાજ્ય પૂર્ણકને અવિભાજ્ય પૂર્ણકોના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય. આ અગત્યનો ગુણધર્મ એ **અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય** છે. આ પરિણામ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજાવી શકાય. આપણે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના બે મુજબ વ્યવહારું ઉપયોગ કરીશું. તેના ગણિતના ક્ષેત્રમાં કેટલાક ખૂબ જ ઊડા અને નોંધપાત્ર ઉપયોગો છે. તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે કે, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ જેવી ધણી બધી સંખ્યાઓને અસંમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

બીજું, આ પ્રમેયનો ઉપયોગ, સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) ની દર્શાંશ અભિવ્યક્તિ ક્યારે સાંત્ત હોય અને ક્યારે અનંત આવૃત્ત હોય તે જાણવામાં થાય છે. આ માટે આપણે $\frac{p}{q}$ ના છેદ q ના અવિભાજ્ય અવયવો પર દિઝિપાત કરીએ છીએ. તમે જોશો કે, q નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ $\frac{p}{q}$ ની દર્શાંશ અભિવ્યક્તિનું સંપૂર્ણ સ્વરૂપ નક્કી કરે છે. આથી, ચાલો આપણે નિરીક્ષણ દ્વારા અભ્યાસનો પ્રારંભ કરીએ.

1.2 યુક્તિનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય

નીચે દર્શાવેલ લોક કોયડાને વિચારીએ.*

એક વેપારી રસ્તા પર ઈંડાં વેચી રહ્યો હતો. જેની પાસે કંઈ જ કામ ન હતું તેવો એક આળસુ માણસ તે વેપારી સાથે શાબ્દિક બન્ધમાં ઉત્તરી ગયો અને તેનું પરિણામ તકરારમાં આવ્યું. તેણે ઈંડાંની ટોપલી બેંચી લીધી અને જમીન પર પછાડી. ઈંડાં તૂટી ગયાં. વેપારી પંચાયત પાસે ગયો અને પેલા આળસુ વ્યક્તિ પાસેથી તૂટેલાં ઈંડાંના પૈસા અપાવવા કર્યું. પંચાયતે પૂછ્યું કે કેટલાં ઈંડાં તૂટી ગયાં હતાં, તેણે આ પ્રમાણે જવાબ આપ્યો :



જો ઈંડાંને બે-બેના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, એક ઈંડું બાકી રહે;

જો ઈંડાંને ત્રણ-ત્રણના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, બે ઈંડાં બાકી રહે;

જો ઈંડાંને ચાર-ચારના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, ત્રણ ઈંડાં બાકી રહે;

જો ઈંડાંને પાંચ-પાંચના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, ચાર ઈંડાં બાકી રહે;

જો ઈંડાંને છ-છના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, પાંચ ઈંડાં બાકી રહે;

જો ઈંડાંને સાત-સાતના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, કોઈ ઈંડું બાકી ન રહે.

મારી ટોપલીમાં 150 થી વધુ ઈંડાં સમાઈ શકે નથિ. તો તે ટોપલીમાં કેટલાં ઈંડાં હતાં? ચાલો આપણે કોયડો ઉકેલવા પ્રયાસ કરીએ. ધારો કે ઈંડાંની સંખ્યા w હતી. ગણતરી કરતાં પહેલાં એ તો સ્પષ્ટ છે કે, w ની ડિમ્બત 150 કે તેથી ઓછી હોય.

જો ઈંડાંની સાત-સાતના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો કંઈ જ બાકી રહે નહિ, તેથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા p માટે, $w = 7p + 0$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની છ-છના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, પાંચ ઈંડાં બાકી રહે. કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા q માટે, $w = 6q + 5$

જો ઈંડાંની પાંચ-પાંચના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, ચાર ઈંડાં બાકી રહે. તેથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા r માટે, $w = 5r + 4$

જો ઈંડાંની ચાર-ચારના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, ત્રણ ઈંડાં બાકી રહે. તેથી, કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા s માટે, $w = 4s + 3$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની ત્રણ-ત્રણના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, બે ઈંડાં બાકી રહે. આથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા t માટે, $w = 3t + 2$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની બે-બેના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, એક ઈંડું બાકી રહે. તેથી, કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા u માટે, $w = 2u + 1$ વડે દર્શાવી શકાય.

દરેક કિસ્સામાં, આપણે આપેલ a નો ધન પૂર્ણાંક b (આપણા આ ઉદાહરણમાં b ની ડિમ્બત કર્મિક રીતે 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 છે.) વડે ભાગાકાર થાય છે અને શેષ r વધે છે. (આપણા આ ઉદાહરણમાં r ની ડિમ્બત કર્મિક રીતે 0, 5, 4, 3, 2 અને 1 છે.) અને શેષ r કરતાં ઓછી છે. જ્યારે આપણે આવાં સમીકરણો લખીએ છીએ ત્યારે આપણે પ્રમેય 1.1માં આપેલ યુક્તિનું ભાગાકારનું પૂર્વ પ્રમેય વાપરીએ છીએ.

ફરી આપણે આપણા કોયડા તરફ જઈએ. તમને કોઈ ખ્યાલ આવે છે કે, આપણે તેને કેવી રીતે ઉકેલી શકીએ? હા, આ બધી જ સ્થિતિનું સમાધાન કરે તેવા 7 ના ગુણિત શોધવા જોઈએ. પ્રયત્ન અને ભૂલ પરથી, (લ.સ.અ.ની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરતાં) તમને તેની પાસે 119 ઈંડાં હતાં તેવી માહિતી મળી શકે.

યુક્તિના ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો પરિચય મેળવવા માટે, નીચે આપેલ પૂર્ણાંકેના યુગ વિચારીએ.

17, 6;

5, 12;

20, 4

* આ એ. રામપાલ અને અન્યો દ્વારા લિખિત ‘Numeracy Counts!’ માં આપેલ કોયડાનું સુધારેલ સ્વરૂપ છે.

આ કોયડામાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, આપણે દરેક યુગમ વચ્ચે નીચે પ્રમાણે સંબંધ દર્શાવી શકીએ :

$$17 = 6 \times 2 + 5$$

(17 માં 6 ને વખત છે અને 5 શેષ વધે છે.)

$$5 = 12 \times 0 + 5$$

(12 એ 5 થી મોટા હોવાથી આ સંબંધ આમ થશે.)

$$20 = 4 \times 5 + 0$$

(અહીં 4 ના પાંચ ગણા 20 થાય અને કંઈ જ શેષ ન વધે.)

ધન પૂર્ણાંકો a અને b ના પ્રત્યેક યુગમ માટે, આપણાને નીચેના સંબંધને સંતોષે તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r મળે છે.

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

આપણે નોંધીએ કે, q અથવા r શૂન્ય પણ હોઈ શકે. (પરંતુ બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)

હવે નીચે દર્શાવેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ના યુગમ માટે તમે પૂર્ણાંકો q અને r શેષવા પ્રયત્ન કરી શકશો?

- (i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

તમે નોંધ્યું કે q અને r અનન્ય છે? તે $0 \leq r < b$ માટે $a = bq + r$ નું સમાધાન કરતા હોય તેવા પૂર્ણાંકોની એક માત્ર જોડ મળે.

તમને એવી અનુભૂતિ પડા થઈ હશે કે આપણે ભાગાકારની જે લાંબી પ્રક્રિયા વર્ણી કરતા આવ્યા હીએ તેનું આ તો માત્ર નવા સ્વરૂપે પુનઃવિધાન છે અને તેમાં આ પૂર્ણાંકો q અને r ને અનુક્રમે ભાગફળ અને શેષ કહે છે.

આપણે આ પરિણામને ઔપયારિક રીતે નીચેના સ્વરૂપમાં સામાન્ય વિધાન સ્વરૂપે મૂકી શકીએ :

પ્રમેય : 1.1 (યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય) : આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને સંગત અનન્ય અનુષ્ઠાનું પૂર્ણાંકો q અને r એવા મળે કે જેથી $a = bq + r, 0 \leq r < b$.

નોંધ : q અનુષ્ઠાનું હોય તથા r બંને સાથે શૂન્ય નથી. આ પરિણામ લાંબા સમયથી પ્રયત્નિત છે. પરંતુ તેની પ્રથમ વખત નોંધ યુક્લિડ (Euclid)-ની Elements Book-VII માં લેવાઈ હતી. યુક્લિડની ભાગાવિધિ (Euclid's division algorithm) આ પૂર્વ-પ્રમેય પર આધારિત છે.

An **algorithm** is a series of well defined steps which gives a procedure for solving a type of problem.

The word **algorithm** comes from the name of the 9th century Persian mathematician **al-Khwarizmi**. In fact, even the word 'algebra' is derived from a book, he wrote, called **Hisab al-jabr w'al-muqabala**.

A **lemma** is a proven statement used for proving another statement.



Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi
(C.E. 780 - C.E. 850)

યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિ એ આપેલા બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. શેષવા માટેની પ્રવિધિ છે. જેના વડે ધન પૂર્ણાંકો a અને b બંને વિભાજ્ય હોય તેવો મોટામાં મોટો ધન પૂર્ણાંક d એ કે a અને b નો ગુ.સા.અ. છે.

ચાલો, પ્રથમ આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા આ પ્રવિધિનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકાય છે તે જોઈએ. ધારો કે આપણે બે પૂર્ણાંકો 455 અને 42 નો ગુ.સા.અ. શેષવો છે તો આપણે મોટા પૂર્ણાંક 455 થી શરૂઆત કરીશું. ત્યાર બાદ તેની ઉપર આપણે યુક્લિડનું પૂર્વ પ્રમેય વાપરીશું.

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

હવે આપણે ભાજક 42 ને ભાજ્ય તરીકે લઈ અને શેષ 35 ને ભાજક તરીકે લઈને ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ તો,

$$42 = 35 \times 1 + 7 \text{ મળે.}$$

હવે ભાજક 35 ને ભાજ્ય તરીકે લઈ અને શેષ 7 ને ભાજક તરીકે લઈને ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$35 = 7 \times 5 + 0 \text{ મળે.}$$

આપણે નોંધીએ કે, શેષ શૂન્ય મળે છે અને હવે આપણે પ્રક્રિયા આગળ નથી કરી શકતા. આ તબક્કે આપણે એવું નિર્ણયાત્મક રીતે કહીએ છીએ કે 455 અને 42 નો ગુ.સા.અ. 7 થાય. તમે 455 અને 42 ના અવયવોની યાદી બનાવીને સરળતાથી આ ચકાસી શકો છો. આ પદ્ધતિ કેમ નિર્ણયાત્મક છે? આનો જવાબ નીચેના પરિણામ ઉપરથી મળશે.

હવે, આપણે **યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ** સ્પષ્ટપણે દર્શાવી શકીએ.

$c > d$ હોય તેવા બે ધન પૂર્ણાંકો c અને d નો ગુ.સા.અ. મેળવવા માટે નીચેનાં સોપાન છે :

સોપાન 1 : યુક્લિડના ભાગાકાર પૂર્વ-પ્રમેયનો c અને d ઉપર ઉપયોગ કરતાં આપણને $c = dq + r$, $0 \leq r < d$ થાય તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ રીતે કહી શકો છો. આ પદ્ધતિ કેમ નિર્ણયાત્મક છે? આનો જવાબ નીચેના પરિણામ ઉપરથી મળશે.

સોપાન 2 : જો $r = 0$, તો d એ c અને d નો ગુ.સા.અ. થાય.

જો $r \neq 0$, તો d અને r ને ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય લગાડીએ.

સોપાન 3 : આ પ્રક્રિયા જ્યાં સુધી શેષ 0 ન થાય ત્યાં સુધી ચાલુ રાખો. આ તબક્કે જ્યારે શેષ શૂન્ય બને ત્યારે ભાજક એ માંગેલ ગુ.સા.અ. થાય.

આ પ્રવિધિમાં પરિણામ મળે છે કારણ કે ગુ.સા.અ. $(c, d) = \text{ગુ.સા.અ. } (d, r)$.

ગુ.સા.અ. (c, d) એ c અને d નો ગુ.સા.અ. દર્શાવે છે, વગેરે.

ઉદાહરણ 1 : યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી 4052 અને 12576 નો ગુ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ :

સોપાન 1 : $12576 > 4052$ હોવાથી ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ 12576 અને 4052 ઉપર કરતાં,

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

સોપાન 2 : શેષ 420 શૂન્યેતર હોવાથી ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ 4052 અને 420 ઉપર કરતાં,

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

સોપાન 3 : ભાજક 420ને નવા ભાજ્ય તરીકે અને શેષ 272 ને નવા ભાજક તરીકે લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

હવે આપણે નવો ભાજ્ય 272 અને નવો ભાજક 148 લઈએ અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ, તો

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

હવે નવો ભાજ્ય 148 અને નવો ભાજક 124 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

નવો ભાજ્ય 124 અને નવો ભાજક 24 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

નવો ભાજ્ય 24 અને નવો ભાજક 4 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

શેષ હવે શૂન્ય બને છે. આથી આપણી પ્રક્રિયા અટકે છે. આ તબક્કે ભાજક 4 હોવાથી, 12576 અને 4052નો ગુ.સા.અ. 4 થાય.

$$\begin{aligned}
 \text{આપણે નોંધીએ કે } 4 &= \text{ગુ.સા.અ. } (24, 4) \\
 &= \text{ગુ.સા.અ. } (124, 24) \\
 &= \text{ગુ.સા.અ. } (148, 124) \\
 &= \text{ગુ.સા.અ. } (272, 148) \\
 &= \text{ગુ.સા.અ. } (420, 272) \\
 &= \text{ગુ.સા.અ. } (4052, 420) \\
 &= \text{ગુ.સા.અ. } (12576, 4052).
 \end{aligned}$$

યુક્તિઝની ભાગપ્રવિધિ માત્ર ખૂબ જ મોટી સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ. મેળવવા માટે જ ઉપયોગી છે, એટલું જ નહિ પરંતુ તે કમચૂટરના પ્રોગ્રામ તૈયાર કરવા માટેના અલગોરિધમ (પ્રવિધિ)ના ખૂબ જ શરૂઆતનાં ઉદાહરણોમાંની એક છે.

આપણે નોંધીએ કે જ્યાં સુધી શેષ 0 ન બને ત્યાં સુધી દરેક તબક્કે ભાજક એ નવો ભાજ્ય બને છે અને શેષ એ નવો ભાજક બને છે. શેષ શૂન્ય બને તે તબક્કે છેલ્લો ભાજક એ આપેલ સંખ્યાઓનો ગુ.સા.અ. છે.

નોંધ :

1. યુક્તિઝના ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય અને ભાગપ્રવિધિ ખૂબ જ નજીકથી એકબીજા સાથે જોડાયેલા હોવાથી લોકો અવારનવાર ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયને પણ ભાગપ્રવિધિ કહેતા હતા.
2. વળી, યુક્તિઝની ભાગપ્રવિધિનું વિધાન માત્ર ધન પૂર્ણાંકો માટે જ કર્યું છે, છતાં તેને $b \neq 0$ હોય તેવા બધા જ શૂન્યેતર પૂર્ણાંકો સુધી વિસ્તારી શક્ય, જોકે ભાગપ્રવિધિના આ પાસાની ચર્ચા આપણે અહીં નહિ કરીએ.

સંખ્યાઓના ગુણધર્મો મેળવવા માટે યુક્તિઝની ભાગપ્રવિધિના કેટલાક ઉપયોગો છે. આપણે આ ઉપયોગોના કેટલાંક ઉદાહરણો અહીં આપીએ.

ઉદાહરણ 2 : દર્શાવો કે દરેક યુગમ ધન પૂર્ણાંક એ કોઈક પૂર્ણાંક q માટે, $2q$ સ્વરૂપમાં હોય અને દરેક અયુગમ ધન પૂર્ણાંક કોઈક પૂર્ણાંક q માટે, $2q + 1$, સ્વરૂપમાં હોય.

ઉકેલ : ધારો કે a કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે અને $b = 2$. તો,

યુક્તિઝની ભાગપ્રવિધિ અનુસાર કોઈ પૂર્ણાંક $q \geq 0$ માટે $a = 2q + r$ અને $r = 0$ અથવા $r = 1$, કારણ કે $0 \leq r < 2$. માટે, $a = 2q$ અથવા $2q + 1$.

જો $a = 2q$, તો a એ 2 વડે વિભાજ્ય છે અને a ને યુગમ પૂર્ણાંક કહે છે.

જો $a = 2q + 1$ તો a એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી તથા a ને 2 વડે ભાગતાં 1 શેષ વધે છે. આવા પૂર્ણાંક a ને અયુગમ પૂર્ણાંક કહે છે.

જો a એ $2q$ ના સ્વરૂપમાં હોય તો a યુગમ પૂર્ણાંક છે. વળી કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક યુગમ અથવા અયુગમ હોઈ શકે. માટે કોઈ પણ અયુગમ ધન પૂર્ણાંક એ $2q + 1$ સ્વરૂપમાં હોય.

ઉદાહરણ 3 : દર્શાવો કે કોઈ પણ અયુગમ ધન પૂર્ણાંક એ કોઈક પૂર્ણાંક q માટે $4q + 1$ અથવા $4q + 3$, સ્વરૂપમાં હોય.

ઉકેલ : ચાલો આપણે અયુગમ ધન પૂર્ણાંક a લઈએ. આપણે પૂર્ણાંક a અને $b = 4$ માટે ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરીએ.

$0 \leq r < 4$, હોવાથી સંભવિત શેષ 0, 1, 2 અને 3 થાય.

આથી, q ને ભાગફળ લેતાં, a એ $4q$, અથવા $4q + 1$, અથવા $4q + 2$, અથવા $4q + 3$.

જો કે a અયુગમ હોવાથી a એ $4q$ અથવા $4q + 2$ ન હોઈ શકે. (કારણ કે બંને 2 વડે વિભાજ્ય છે.)

માટે, કોઈ પણ અયુગમ પૂર્ણાંક એ $4q + 1$ અથવા $4q + 3$ સ્વરૂપનો હોય.

ઉદાહરણ 4 : એક મીઠાઈવાળા પાસે 420 નંગ કાજુ બરફી અને 130 નંગ બદામ બરફી છે. તે એવી રીતે આ બરફીઓને થખી સ્વરૂપે ગોઠવવા માંગે છે કે દરેક થખીમાં બરફીની સંખ્યા સમાન હોય અને તે તાસકમાં ઓછામાં ઓછી જગ્યા રોકે. આ હેતુ માટે દરેક થખીમાં કેટલી સંખ્યામાં બરફી રાખવી જોઈએ?

ઉકેલ : આ મશનો ઉકેલ પ્રયત્ન અને ભૂલ દ્વારા મેળવી શકાય. પરંતુ આને ગાણિતિક રીતે કરવા માટે આપણે ગુ.સા.અ. (420, 130) શોધવો જોઈએ. આ ગુ.સા.અ. દરેક થખીમાં રહેલ બરફીની મહત્તમ સંખ્યા થાય અને થખીઓની સંખ્યા પણ લઘૃતમ થાય. આથી તાસકમાં વપરાયેલ જગ્યા પણ લઘૃતમ થાય.

હવે તેનો ગુ.સા.અ. શોધવા માટે યુક્તિલાં પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરતાં,

$$420 = 130 \times 3 + 30$$

$$130 = 30 \times 4 + 10$$

$$30 = 10 \times 3 + 0$$

આથી 420 અને 130 નો ગુ.સા.અ. 10 થાય.

માટે તે મીઠાઈવાળા દરેક થખીમાં કોઈ પણ પ્રકારની બરફીની સંખ્યા 10 રાખી શકે.

નોંધ : દરેક થખીમાં બરફીની સમાન સંખ્યા d હોય, તો 420 તથા 130 બંને d વડે વિભાજ્ય છે. થખીઓની

સંખ્યા $\frac{420}{d}$ તથા $\frac{130}{d}$ ન્યૂનતમ હોય તો, તાસકમાં ઓછામાં ઓછી જગ્યા રોકે. આ માટે d મહત્તમ હોય તે આવશ્યક છે. આથી $d =$ ગુ.સા.અ. (420, 130).

સ્વાધ્યાય 1.1

- યુક્તિલાં ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી ગુ.સા.અ. શોધો :
 - 135 અને 225
 - 196 અને 38220
 - 867 અને 255
- દર્શાવો કે કોઈ પણ અયુગમ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા, કોઈક પૂર્ણાંક q માટે $6q + 1$, અથવા $6q + 3$, અથવા $6q + 5$ પ્રકારની હોઈ શકે.
- એક લશ્કરનું 616 સભ્યોનું જૂથ લશ્કરના બેન્ડના 32 સભ્યોની પાછળ કૂચ કરી રહ્યું છે. બંને જૂથ સમાન સંખ્યાના સંભાળું કૂચ કરી રહ્યા છે. તે જે સંભાળું કૂચ કરી રહ્યા છે તેવા કોઈ પણ સંભાળ મહત્તમ કેટલા સભ્યો હશે?
- યુક્તિલાં ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ કોઈક પૂર્ણાંક m માટે $3m$ અથવા $3m + 1$ સ્વરૂપમાં હોય.

[સૂચન : ધારો કે x કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે તો તે $3q, 3q + 1$ અથવા $3q + 2$ સ્વરૂપમાં હોય. હવે દરેકનો વર્ગ કરો અને દર્શાવો કે ફરીથી તેને $3m$ અથવા $3m + 1$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય.]

- યુક્તિલાં ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય વાપરીને દર્શાવો કે કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો ધન $9m, 9m + 1$ અથવા $9m + 8$ સ્વરૂપનો હોય.

1.3 અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય

અગાઉના ધોરણોમાં તમે જોયું છે કે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર રૂપે લખી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે, $2 = 2, 4 = 2 \times 2, 253 = 11 \times 23$, અને આ પ્રમાણે આગળ વધી શકાય.

હવે, આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું બીજું પાસું જોવા પ્રયત્ન કરીએ. કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના



ગુણાકારથી મેળવી શકાય? ચાલો આપણે જોઈએ. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ સમૂહ લો. ઉદાહરણ તરીકે, 2, 3, 7, 11 અને 23. આપણે કેટલીક અથવા બધી જ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરીએ અને આપણે હશીએ તેટલી વખત તેનું પુનરાવર્તન કરવાની છૂટ આપીએ તો આપણે બહોળી સંખ્યામાં ધન પૂર્ણકો મેળવી શકીએ. (ખરેખર તો, અનંત સંખ્યાઓ) ચાલો આપણે કેટલીક યાદી બનાવીએ.

$$7 \times 11 \times 23 = 1771$$

$$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$$

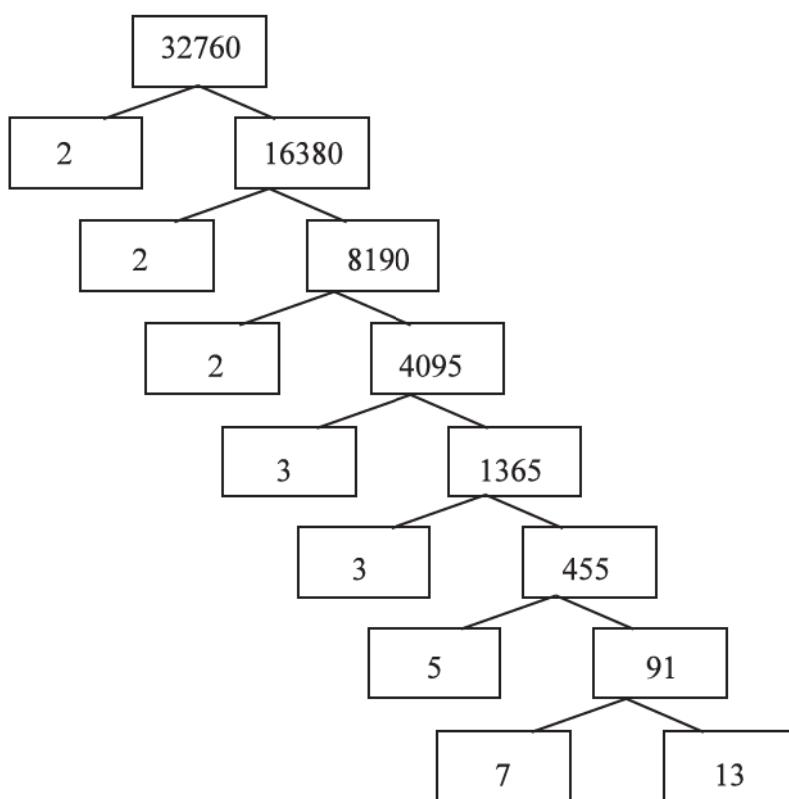
$$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$$

$$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$$

$$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252 \text{ અને આ પ્રમાણે...}$$

હવે, ધારો કે તમારા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના સમૂહમાં બધી જ શક્ય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ લઈએ તો આ સમૂહનું કદ કેટલું થાય તે માટે તમારું શું અનુમાન છે? શું તેમાં માત્ર નિશ્ચિત સંખ્યામાં જ પૂર્ણકો હશે? અથવા અનંત સંખ્યામાં પૂર્ણકો હશે? ખરેખર તો અનંત સંખ્યામાં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આથી, જો આપણે બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને આ રીતે સાંકળીએ તો, બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અને બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના તમામ શક્ય ગુણાકારો લઈને આપણે અનંત સંખ્યાઓનો સમૂહ મેળવી શકીએ. પ્રશ્ન એ છે કે આપણે બધી જ વિભાજ્ય સંખ્યાઓ આ રીતે મેળવી શકીએ? તમે શું વિચારો છો? તમે વિચારો છો કે જે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતનો ગુણાકાર ન હોય તેવી કોઈ વિભાજ્ય સંખ્યા કદાચ હશે? આપણે ઉત્તર આપીએ તે પહેલાં, ચાલો આપણે ધન પૂર્ણકોનું અવયવીકરણ કરીએ. આપણે અગાઉ જે કર્યું છે તેનાથી ઊંઠાં પ્રક્રિયા કરીએ.

આપણે તમને પરિચિત એવા અવયવ વૃક્ષનો ઉપયોગ કરીએ. ચાલો, આપણે કોઈ મોટી સંખ્યા લઈએ જેમકે 32,760 અને આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે અવયવ પાડીએ :



આથી આપણને 32760 એ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ જેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર રૂપે મળે છે.

આથી $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર રૂપે દર્શાવી શકાય. ચાલો આપણે બીજી સંખ્યા 123456789 ચકાસીએ. તેને $3^2 \times 3803 \times 3607$ તરીકે લખી શકાય. ખરેખર તો તમારે પરીક્ષણ કરવું જોઈએ કે 3803 અને 3607 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે! (તમારી જાતે બીજી કેટલીક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે પરીક્ષણ કરો.) આ તથ્ય આપણને એવી ધારણા તરફ દોરી જાય છે કે દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાય. ખરેખર તો આ વિધાન સત્ય છે. પૂર્વાંકોના અભ્યાસ માટે તેની પાયાની નિર્ણાયક ભૂમિકા હોવાથી તેને અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય કહે છે.

ચાલો આપણે હવે આ પ્રમેયને ઔપचારિક રીતે દર્શાવીએ.

પ્રમેય 1.2 (અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય) : દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને, તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે લખી શકાય છે.

An equivalent version of Theorem 1.2 was probably first recorded as Proposition 14 of Book IX in *Euclid's Elements*, before it came to be known as the *Fundamental Theorem of Arithmetic*. However, the first correct proof was given by *Carl Friedrich Gauss* in his *Disquisitiones Arithmeticae*. *Carl Friedrich Gauss* is often referred to as the 'Prince of Mathematicians' and is considered one of the three greatest mathematicians of all time, along with *Archimedes* and *Newton*. He has made fundamental contributions to both mathematics and science.



Carl Friedrich Gauss
(C.E.1777 – C.E.1855)

અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય દર્શાવે છે કે, દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાનું અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર સ્વરૂપે અવયવીકરણ કરી શકાય. હકીકતમાં તે કંઈક વધુ દર્શાવે છે. તે દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાનું તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે નિરૂપણ કરી શકાય.

આ પરથી આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય અને તેમાં કઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા ક્યા ક્રમ મળશે તે માટે આપણે ચોક્કસ ન હોઈ શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે ગુણાકારમાં દર્શાવેલ સંખ્યા $2 \times 3 \times 5 \times 7$ અને $3 \times 5 \times 7 \times 2$ તરીકે અથવા બીજા કોઈ પણ શક્ય ક્રમમાં દર્શાવેલ આ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને લખીએ તો તે બધા ગુણાકાર સમાન છે. આ હકીકતને નીચેના સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય.

૧ વી મોટી કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ તેના ક્રમને અવગણીએ તો અનન્ય હોય છે.

વ્યાપક રીતે, આપેલ વિભાજ્ય સંખ્યા x ને આપણે $x = p_1 p_2 \dots p_n$ તરીકે લખી શકીએ, જ્યાં p_1, p_2, \dots, p_n એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે અને ચડતા ક્રમમાં લખેલી છે, એટલે કે $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$. જો આપણે સમાન અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને ગુણીએ, તો આપણને અવિભાજ્ય સંખ્યાના ઘાત મળે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

એક વખત આપણે નક્કી કરીએ કે, અવિભાજ્ય અવયવો ચડતા ક્રમમાં હશે તો આપણું અવયવીકરણ અનન્ય હશે.

ગણિતમાં અને બીજા ક્ષેત્રમાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનેક ઉપયોગો છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : કોઈક ધન પૂર્ણાંક n માટે 4^n નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હશે કે કેમ તે નિર્ણય કરો.

ઉકેલ : જો કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે સંખ્યા 4^n નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હોય, તો તે 5 વડે વિભાજ્ય હોય. આથી 4^n ના અવિભાજ્ય અવયવોમાં 5 હોવો જોઈએ. આ શરીર નથી, કારણ કે $4^n = (2)^{2n}$; આથી 4^n ના અવયવીકરણમાં એક જ અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક 2 મળે. આથી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયની અનન્યતા શરૂત અનુસાર નક્કી થાય છે કે 4^n ના અવયવીકરણમાં 2 સિવાય બીજ કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. માટે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n એવી ન મળે કે જેના માટે 4^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય હોય.

અગાઉના ધોરણોમાં તમે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયનો સ્પષ્ટ રીતે ઉલ્લેખ કર્યા વગર બે ધન પૂર્ણાંકોના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. (લયુતમ સામાન્ય અવયવ, LCM, Least Common Multiple) શોધતાં શીખી ગયાં છે. આ પદ્ધતિ અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પદ્ધતિ તરીકે પણ ઓળખાય છે. ચાલો આપણે આ પદ્ધતિને ઉદાહરણ દ્વારા યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પદ્ધતિથી 6 અને 20 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $6 = 2^1 \times 3^1$ અને $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ હોવાથી,

અગાઉના ધોરણોમાં મેળવ્યું છે તેમ તમે ગુ.સા.અ. $(6, 20) = 2$ અને લ.સા.અ. $(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ મળ્યું શકો.

જુઓ કે, ગુ.સા.અ. $(6, 20) = 2^1 =$ આપેલી સંખ્યાઓમાં રહેલા સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવના નાનામાં નાના ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર

લ.સા.અ. $(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 =$ આપેલી સંખ્યામાં રહેલા તમામ અવિભાજ્ય અવયવોના મહત્વમાં ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે જોયું હશે કે ગુ.સા.અ. $(6, 20) \times$ લ.સા.અ. $(6, 20) = 6 \times 20$.

ખરેખર તો આપણે ચકાસી શકીએ કે કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો, એ અને b માટે

ગુ.સા.અ. $(a, b) \times$ લ.સા.અ. $(a, b) = a \times b$ થાય.

જો બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. આપેલ હોય તો આપણે આ પરિણામનો ઉપયોગ કરી તેમનો લ.સા.અ. શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 7 : 96 અને 404 નો ગુ.સા.અ. અવિભાજ્ય અવયવની રીતે મેળવો અને તે પરથી તેનો લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : 96 અને 404 નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $96 = 2^5 \times 3, 404 = 2^2 \times 101$ મળશે.

આથી આ બંને પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. $= 2^2 = 4$.

$$\text{વળી, લ.સા.અ. } (96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{ગુ.સા.અ. } (96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

ઉદાહરણ 8 : અવિભાજ્ય અવયવોની રીતથી 6, 72 અને 120 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે,

$$6 = 2 \times 3, 72 = 2^3 \times 3^2, 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

અહીં, સામાન્ય અવયવો અનુક્રમે 2 અને 3 ની નાનામાં નાની ઘાત 2^1 અને 3^1 છે.

$$\text{આથી } \text{ગુ.સા.અ. } (6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$$

આપેલી ગણેય સંખ્યાઓમાં 2^3 , 3^2 અને 5^1 એ અવિભાજ્ય અવયવો 2 , 3 અને 5 ની મોટામાં મોટી ઘાત છે.

$$\text{આથી, લ.સા.અ. } (6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$$

નોંધ : જુઓ કે, $6 \times 72 \times 120 \neq$ ગુ.સા.અ. $(6, 72, 120) \times$ લ.સા.અ. $(6, 72, 120)$.

આથી ત્રણ સંપ્રાયાઓનો ગૃહણકાર તેમના ગૃ.સા.અ. અને લ.સા.અ.ના ગૃહણકારને સમાન ન પણ હોય.

स्वाध्याय 1.2

1.4 અસંમેય સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તન

ધોરણ IX માં અસંમેય સંખ્યાઓ અને તેના ઘણા બધા ગુણધર્મોનો પરિયય તમને કરાવવામાં આવ્યો હતો. તમે તેના અસ્તિત્વનો અને કેવી રીતે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ સાથે મળીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓ બનાવે છે તેનો અભ્યાસ કર્યો હતો. તમે અસંમેય સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર દર્શાવતાં પણ શીખ્યા છો. જો કે આપણે તે સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે તેમ સાબિત નહોતું

કર્યું. આ વિભાગમાં, આપણે $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ અને વાપક રીતે અવિભાજ્ય p માટે \sqrt{p} અસંમેય છે તે સાબિત કરીશાં. અંકગણિતના મળભત પ્રમેય અને અન્ય પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરી આપણે આ પરિણામ પ્રાપ્ત કરીશાં.

યાદ કરો કે જે સંખ્યાને પૂર્ણાંક p તથા શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી ન શકાય તે સંખ્યા 'સ' ને અસંમેય સંખ્યા કહેવાય છે. જેનાથી આપણે પરિચિત છીએ, તેવા $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, π , $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110... જેવી અસંમેય સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણો મળે.

આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેમ સાબિત કરીએ તે પહેલાં આપણને આગળ દર્શાવેલ પ્રમેયની જરૂર પડશે. તેની સાબિતી અંકગણિતના મળભત પ્રમેય પર આધુનિક છે.



પ્રમેય 1.3 : ધારો કે p એ એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. ધન પૂર્ણાંક a માટે, a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય હોય.

***સાબિતી :** ધારો કે a નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$a = p_1 p_2 \dots p_n$, જ્યાં p_1, p_2, \dots, p_n એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આવશ્યક નથી કે તે p_1, p_2, \dots, p_n બિન્દુના સંખ્યાઓ જ હોય.

$$\text{માટે}, a^2 = (p_1 p_2 \dots p_n)(p_1 p_2 \dots p_n) = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2$$

હવે આપણને આપેલ છે કે a^2 એ p વડે વિભાજ્ય છે. માટે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પરથી કહી શકાય કે p એ a^2 નો એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનન્યતાની શરત પરથી કહી શકાય કે a^2 ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર p_1, p_2, \dots, p_n છે. આથી p એ p_1, p_2, \dots, p_n પૈકીનો એક હોય. હવે $a = p_1 p_2 \dots p_n$, હોવાથી p એ a નો અવયવ પણ હોય.

હવે આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેની સાબિતી આપવા માટે તૈયાર છીએ.

આ સાબિતી ‘અનિષ્ટાપત્તિ’ની પ્રયુક્તિ પર આધારિત છે. (આ પ્રયુક્તિની કેટલીક ચર્ચા પરિશિષ્ટ 1 માં વિગતે કરેલ છે.)

પ્રમેય 1.4 : $\sqrt{2}$ એ અસંમેય છે.

સાબિતી : આથી ઉલ્લંઘન, ધારો કે $\sqrt{2}$ સંમેય છે.

$$\text{આથી આપણો } \sqrt{2} = \frac{r}{s} \text{ થાય તેવા પૂર્ણાંકો } r \text{ અને } s (s \neq 0) \text{ મેળવી શકીએ.}$$

જો r અને s ને 1 સિવાય સામાન્ય અવયવ હોય, તો તે તમામ સામાન્ય અવયવ વડે r તથા s ને ભાગતાં $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ મળે.

આપણે a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય લઈ શકીએ. આથી, $b\sqrt{2} = a$.

આપણે બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરીએ તો, $2b^2 = a^2$ મળે. માટે, a^2 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે, પ્રમેય 1.3 અનુસાર, a એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક c માટે $a = 2c$ લખી શકીએ.

a ની કિમત મૂકતાં આપણને $2b^2 = 4c^2$ મળે. આથી, $b^2 = 2c^2$ થાય.

આનો અર્થ એ થાય કે b^2 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. આથી, b પણ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(કરીથી પ્રમેય 1.3, $p = 2$ સાથે ઉપયોગમાં લેતાં)

માટે, a તથા b ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 2 છે.

આથી, a અને b ને 1 સિવાય કોઈ જ સામાન્ય અવયવ નથી તે ધારણાનો વિરોધાભાસ મળે.

$\sqrt{2}$ સંમેય છે તે ધારણા અસત્ય હોવાથી આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો.

આથી, કહી શકાય કે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

*પરીક્ષાના હેતુથી આપેલ નથી.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઉલટું શક્ય હોય તો, ધારો કે $\sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે શૂન્યેતર પૂર્ણાંક a અને b શોધી શકીએ કે જેથી $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય.

ધારો કે a અને b ને 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ છે. આથી આપણે તેને સામાન્ય અવયવ વડે ભાગી શકીએ અને વ્યાપકતા ગુમાવ્યા સિવાય માની શકીએ કે, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.

$$\text{આથી, } b\sqrt{3} = a.$$

બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણાને $3b^2 = a^2$ મળે.

માટે a^2 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. આથી પ્રમેય 1.3 અનુસાર a પણ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક c માટે $a = 3c$ લખી શકીએ.

a ની કિંમત મૂકવાથી $3b^2 = 9c^2$. આથી, આપણાને $b^2 = 3c^2$ મળે.

આનો અર્થ એ થયો કે b^2 ને 3 વડે ભાગી શકાય અને તેથી b ને પણ 3 વડે ભાગી શકાય.

($p = 3$ માટે પ્રમેય 1.3નો ઉપયોગ કરતાં)

આથી, a તથા b ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 3 છે.

માટે, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય હોવાના વિધાનનો વિરોધાભાસ ઉત્તો થયો.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભબ્યો કારણકે આપણે $\sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય છે.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ધોરણ IX માં આપણે દર્શાવ્યું હતું કે,

- સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કે તકાવત અસંમેય હોય છે, અને
- શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાઓના ગુણકાર અને ભાગફળ અસંમેય હોય છે.

આપણે કેટલાક ખાસ વિકલ્પોમાં આ પરિણામ સાબિત કરીએ.

ઉદાહરણ 10 : દર્શાવો કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઉલટું ધારો કે $5 - \sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને પૂર્ણાંક b શોધી શકીએ કે જેથી $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય ($b \neq 0$).

$$\text{માટે } 5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}.$$

આ સમીકરણની પુનઃગોઠવણી કરતાં આપણાને $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$ મળે. a અને b પૂર્ણાંકો હોવાથી

$5 - \frac{a}{b}$ સંમેય મળે અને આથી $\sqrt{3}$ પણ સંમેય થાય.

આથી, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે તથ્યનો વિરોધાભાસ ઉત્પત્ત થાય.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભબ્યો, કારણ કે આપણે $5 - \sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય હતી.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉદાહરણ 11 : દર્શાવો કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઉલટું ધારો કે $3\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને પૂર્ણાંક b શોધી શકીએ કે જેથી $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$). પુનઃગોઠવાશ કરતાં આપણને $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ મળે.

3, a અને b પૂર્ણાંકો હોવાથી, $\frac{a}{3b}$ સંમેય છે અને આથી $\sqrt{2}$ પણ સંમેય છે. પરંતુ $\sqrt{2}$ અસંમેય છે. આથી તે તથનો વિરોધાભાસ ઊભો થાય.

આથી આપણે કહી શકીએ કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. સાબિત કરો કે, $\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
2. સાબિત કરો કે, $3 + 2\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
3. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યા અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો :
 - (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 - (ii) $7\sqrt{5}$
 - (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 સંમેય સંખ્યાઓ અને તેના દર્શાંશ નિરૂપણનું પુનરાવર્તન



ધોરણ IX માં તમે અભ્યાસ કર્યો કે, સંમેય સંખ્યાઓનું દર્શાંશ નિરૂપણ સાન્ત અથવા અનંત અને આવૃત્ત હોય છે. આ વિભાગમાં આપણે સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) લઈએ અને શોધીએ કે તેનું દર્શાંશ નિરૂપણ ક્યારે સાન્ત અને ક્યારે અનંત અને આવૃત્ત હોય છે. કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈ આપણે તે નક્કી કરીએ.

ચાલો આપણે નીચે દર્શાવેલ સંમેય સંખ્યાઓ લઈએ :

- (i) 0.375
- (ii) 0.104
- (iii) 0.0875
- (iv) 23.3408

હવે,

$$(i) 0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$$

$$(ii) 0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$$

$$(iii) 0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$$

$$(iv) 23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$$

કોઈ પણ અપેક્ષા રાખી શકે કે આ તમામને જેનો છેદ 10 નો ધાત હોય તેવી સંમેય સંખ્યા તરીકે દર્શાવી શકીએ. ચાલો આપણે અંશ અને છેદમાં રહેલા સામાન્ય અવયવોને દૂર કરીએ અને જોઈએ કે આપણને શું પ્રાપ્ત થાય છે :

$$(i) \quad 0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$$

$$(ii) \quad 0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$$

$$(iii) \quad 0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$$

$$(iv) \quad 23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$$

કોઈ તરાહ દેખાય છે? આપણે સાન્ત દશાંશ સ્વરૂપમાં આપેલી વાસ્તવિક સંખ્યાને જ્યાં p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય અને q શૂન્યેતર હોય તેવા સંમેય સંખ્યાના સ્વરૂપ $\frac{p}{q}$ માં રૂપાંતરિત કરી અને છેદ q ના અવિભાજ્ય અવયવોની 2 ની ધાતમાં અથવા 5 ની અથવા તેમના બંનેની ધાત છે. આપણે 10 ના ધાતના અવયવો માત્ર 2 તથા 5 ના ધાત હોય તેવી જ અપેક્ષા રાખીએ છીએ.

જો કે આપણે અમુક જ ઉદાહરણો પર કાર્ય કર્યું, છીતાં આપણે જોઈ શકીએ કે, જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય એવી કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાને છેદમાં 10 ના ધાતવાળી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તેવા સ્વરૂપમાં પરિણામતી સંખ્યા તરીકે દર્શાવી શકાય. વળી 10 ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર 2 અને 5 છે. આથી અંશ અને છેદ વચ્ચેના સામાન્ય અવયવો દૂર કરતાં આ વાસ્તવિક સંખ્યા જ્યાં q નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ સ્વરૂપમાં હોય અને n, m એ અનૃત્યા પૂર્ણાંક હોય એવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં મળે.

ચાલો આપણે આપણું પરિણામ ઓપચારિક રીતે લખીએ :

પ્રમેય 1.5 : જો x એ સાન્ત દશાંશ નિરૂપણવાળી સંમેય સંખ્યા હોય, તો x ને જ્યાં p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય અને q નું અવિભાજ્યમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ સ્વરૂપમાં હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. n, m એ અનૃત્યા પૂર્ણાંકો છે. (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$. તે અવિભાજ્યોમાં વર્ગીકરણ નથી. x પોતે જ પૂર્ણાંક છે.)

જો પ્રમેય 1.5ના પ્રતીપનો વિચાર કરીએ તો શું થશે તે જાડીને તમને આશ્રય થશે. જો આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યા પસંદ કરીએ અને અનૃત્યા પૂર્ણાંકો m તથા n માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ હોય, તો $\frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત થશે? (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$ તથા $\frac{p}{q}$ પોતે જ પૂર્ણાંક છે.)

ચાલો આપણે આ સત્ય હોવાના દેખીતાં કારણો જોઈએ. તમે ચોક્કસ સહમત થશો કે જ્યાં b એ 10 નો ધાતાંક હોય તેવી $\frac{a}{b}$ સ્વરૂપની સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે. જ્યાં q એ $2^n 5^m$ સ્વરૂપે હોય, તેવા સ્વરૂપની સંખ્યા $\frac{p}{q}$ ને જ્યાં b એ 10 ની ધાત હોય તેવા સમકક્ષ સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરવી એ અર્થસભર થશે.

ચાલો આપણે ઉપરનાં ઉદાહરણો તરફ જઈએ અને ઉલટી પ્રક્રિયા કરીએ.

$$(i) \quad \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$$

$$(ii) \frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$$

$$(iii) \frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$$

$$(iv) \frac{14588}{625} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4} = \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4} = \frac{233408}{10^4} = 23.3408$$

આ ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે જો q એ $2^n 5^m$ સ્વરૂપમાં હોય, તો આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાને જ્યાં કે

એ 10 ની ઘાત હોય તેવી સમાન સંખ્યા $\frac{a}{b}$ માં કેવી રીતે રૂપાંતરિત કરી શકીએ. આથી આવી સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત છે. હવે આ પરિણામ આપણે ઔપચારિક રીતે લખીએ.

પ્રમેય 1.6 : જો $x = \frac{p}{q}$ માં q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ સ્વરૂપે હોય અને n, m એ અનુષ્ઠાનીકીય હોય, તો x નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય. (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$)

હવે આપણે જેનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય એવી સંમેય સંખ્યાઓ તરફ જવા તૈયાર છીએ. ફરીથી આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ અને જોઈએ આગળ શું થાય છે.

આપણે ધોરણ IXના પુસ્તકમાંથી પ્રકરણ 1નું $\frac{1}{7}$ ના દશાંશ નિરૂપણ વિષયક ઉદાહરણ 5 જોઈએ.

અહીં શેષ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1... અને ભાજક 7 છે.

આપણે નોંધીએ કે અહીં છેદ 7 સ્પષ્ટપણે $2^n 5^m$ સ્વરૂપમાં નથી. આથી પ્રમેય 1.5 અને 1.6 પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{7}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત ન હોઈ શકે. 0 એ શેષ તરીકે નથી આવતો (કારણ?) અને શેષ અમુક તબક્કા બાદ પુનરાવર્તન પામે છે. આથી, આપણાને અંકસમૂહ 142857 નું પુનરાવર્તિત જૂથ $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળના ભાગ રૂપે મળે છે.

$\frac{1}{7}$ ના ડિસ્સામાં આપણે જે જોયું તે પ્રમેય 1.5 અને 1.6 માં આવરી લેવાઈ ન હોય તેવી કોઈપણ સંમેય સંખ્યા માટે સત્ય છે. આવી સંખ્યાઓ માટે આપણી પાસે :

પ્રમેય 1.7 : જો q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ અનુષ્ઠાનીકીય હોય, તો $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય.

ઉપરની ચર્ચાને અંતે આપણે એવા તારણ પર આવીએ કે દરેક સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાના અથવા અનંત અને આવૃત હોય છે.

$$\begin{array}{r} 0.1428571 \\ 7 \overline{) 10} \\ \underline{7} \\ 3 \\ 2 \overline{) 8} \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ 35 \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ 7 \\ 0 \end{array}$$

સ્વાધ્યાય 1.4

1. ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યો વગર, નીચે દર્શાવેલ સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે કે અનંત અને આવૃત્ત છે તે જણાવો :

- (i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$
 (v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$
 (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. પ્રશ્ન 1 માં જે સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય તેનું દશાંશ નિરૂપણ દર્શાવો.
 3. નીચેની વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ દર્શાવેલ છે. દરેક માટે જણાવો કે તે સંમેય છે કે નહિ. અને જો સંમેય હોય, તો તેના $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં q ના અવિભાજ્ય અવયવો વિશે તમે શું કહી શકશો ?

- (i) 43.123456789 (ii) 0.120 1200 12000 120000... (iii) 43.123456789

1.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. યુક્તિઓનું ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય

આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને સંગત $a = bq + r, 0 \leq r < b$ નું સમાધાન કરે તેવી અનન્ય પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r નું અસ્તિત્વ છે. (બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)

2. યુક્તિની ભાગ-પ્રવિધિ : યુક્તિના ભાગાકારના પૂર્વ-પ્રમેય અનુસાર $a > b$ હોય તેવા કોઈપણ બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b નો ગુ.સા.અ. નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

પગલું 1 : $a = bq + r, 0 \leq r < b$ થાય તેવા q અને r મેળવવા ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરો.

પગલું 2 : જો $r = 0$ તો ગુ.સા.અ. b છે. જો $r \neq 0$ તો ભાગાકારના પૂર્વ-પ્રમેયનો b અને r માટે ઉપયોગ કરો.

પગલું 3 : જ્યાં સુધી શેષ 0 ન મળે ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખો. શેષ 0 થાય તે તબક્કે ભાજક એ ગુ.સા.અ. (a, b) થાય. વળી ગુ.સા.અ. $(a, b) =$ ગુ.સા.અ. (b, r)

3. અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય : દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને તેના અવયવોના કમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે.

4. જો p અવિભાજ્ય હોય અને a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય છે.

5. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરવું.
6. જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે તેવી સંમેય સંખ્યા a ને આપણે $\frac{P}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીએ. p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય છે અને અનૃત્થ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ સ્વરૂપમાં હોય.
(જો $m = n = 0$ તો $q = 1$ અને તેનું અવિભાજ્યોમાં વર્ગાકરણ નથી. $\frac{P}{q}$ પૂર્ણાંક જ છે.)
7. જેમાં અનૃત્થ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ સ્વરૂપનું હોય તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{P}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય.
8. જેમાં અનૃત્થ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n 5^m$ સ્વરૂપનું ન હોય તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{P}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય.

વાચકને નોંધ

તમે જોયું છે કે,

ધન પૂર્ણાંકો p, q, r માટે ગુ.સા.અ. $(p, q, r) \times$ લ.સા.અ. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, (પ્રશ્ન 8)

આમ છતાં, ગ્રાફ સંખ્યાઓ p, q, r માટે નીચેનાં પરિણામો સત્ય છે :

$$\text{લ.સા.અ. } (p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{ગુ.સા.અ. } (p, q, r)}{\text{ગુ.સા.અ. } (p, q) \times \text{ગુ.સા.અ. } (q, r) \times \text{ગુ.સા.અ. } (p, r)}$$

$$\text{ગુ.સા.અ. } (p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{લ.સા.અ. } (p, q, r)}{\text{લ.સા.અ. } (p, q) \times \text{લ.સા.અ. } (q, r) \times \text{લ.સા.અ. } (p, r)}$$



જાળકારી માટે

C.E. is an abbreviation for Common Era
B.C.E. is an abbreviation for Before Common Era
C.E. and B.C.E. are used in exactly the same way as AD and BC.



બહુપદીઓ

2

2.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે એક ચલ બહુપદી અને તેમની ઘાતનો અલ્યાસ કર્યો છે. યાદ કરો કે જો $p(x)$ ચલ x માં બહુપદી હોય તો, $p(x)$ માં x ના મહત્તમ ઘાતાંકને બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, $4x + 2$ એ ચલ x માં એક ઘાતવાળી બહુપદી છે. $2y^2 - 3y + 4$ એ ચલ y માં 2 ઘાતવાળી બહુપદી છે, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ એ ચલ x માં 3 ઘાતવાળી બહુપદી છે અને $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ એ ચલ u માં 6 ઘાતવાળી બહુપદી છે.

$\frac{1}{x-1}, \sqrt{x} + 2, \frac{1}{x^2+2x+3}$ વગેરે જેવી અભિવ્યક્તિઓ બહુપદીઓ નથી.

એક ઘાતવાળી બહુપદીને સુરેખ બહુપદી (*Linear Polynomial*) કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે $2x - 3, \sqrt{3}x + 5, y + \sqrt{2}, x - \frac{2}{11}, 3z + 4, \frac{2}{3}u + 1$, વગેરે બધી જ સુરેખ બહુપદીઓ છે. $2x + 5 - x^2, x^3 + 1$ વગેરે જેવી બહુપદીઓ સુરેખ બહુપદીઓ નથી.

જે ઘાતવાળી બહુપદીને દ્વિઘાત બહુપદી (*Quadratic Polynomial*) કહે છે. ‘quadratic’ શબ્દ ‘quadrate’ પરથી મેળવવામાં આવ્યો છે અને તેનો અર્થ ‘વર્ગ’ એવો થાય છે. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}, y^2 - 2, 2 - x^2 + \sqrt{3}x, \frac{u}{3} - 2u^2 + 5, \sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v, 4z^2 + \frac{1}{7}$ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે. (તેમના સહગુજારી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.) વ્યાપક રીતે, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c માટે અને શૂન્યેતર a માટે x માં કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ સ્વરૂપમાં હોય.

ત્રણ ઘાત ધરાવતી બહુપદીને ત્રિઘાત બહુપદી (*Cubic Polynomial*) કહે છે. ત્રિઘાત બહુપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો $2 - x^3, x^3, \sqrt{2}x^3, 3 - x^2 + x^3, 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ છે. હકીકતમાં ત્રિઘાત બહુપદીનું ખૂબ જ સરળ વ્યાપક સ્વરૂપ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ છે. અહીં, a, b, c, d વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a \neq 0$.

હવે, બહુપદી $p(x) = x^2 - 3x - 4$ નો વિચાર કરો. આ બહુપદીમાં $x = 2$ મૂક્તાં, આપણાને $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ મળે. $x^2 - 3x - 4$ માં $x = 2$ મૂક્તાં મૂલ્ય '−6' મળ્યું તે $x^2 - 3x - 4$ ની $x = 2$ આગળની કિમત થાય. આ જ પ્રમાણે, $p(0)$ એ $p(x)$ નું $x = 0$ આગળનું મૂલ્ય છે અને તે −4 છે.

જો $p(x)$ એ x માં બહુપદી હોય, અને જો k કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $p(x)$ માં x ને બદલે k મૂક્તવાથી મળતા મૂલ્ય ને $p(x)$ ની $x = k$ આગળની કિમત કરે છે અને તેને $p(k)$ વડે દર્શાવાય છે.

$x = -1$ આગળ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ની કિમત શું થાય?

આપણાને $p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$ મળે.

વળી, એ પણ જુઓ કે $p(4) = (4)^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$

$p(-1) = 0$ અને $p(4) = 0$ હોવાથી, -1 અને 4 ને દ્વિધાત બહુપદી $x^2 - 3x - 4$ નાં શૂન્યો કહે છે. વ્યાપક રીતે, જો $p(k) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા k ને બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય કહે છે.

આપણે ધોરણ IX માં સુરેખ બહુપદીનાં શૂન્ય કેવી રીતે મેળવવા તેનો અભ્યાસ કર્યો છે. ઉદાહરણ તરીકે જો k એ $p(x) = 2x + 3$ નું એક શૂન્ય હોય તો $p(k) = 0$. આથી આપણાને $2k + 3 = 0$ મળશે. આથી, $k = \frac{-3}{2}$.

વ્યાપક રીતે, k એ $p(x) = ax + b$ નું શૂન્ય હોય તો, $p(k) = ak + b = 0$. આથી $k = \frac{-b}{a}$ થાય.

આમ, સુરેખ બહુપદી $ax + b$ નું શૂન્ય = $\frac{-b}{a}$ -(અચળ પદ)
= એ નો સહગુણક

આથી, સુરેખ બહુપદીના શૂન્યને બહુપદીના સહગુણકો સાથે સંબંધ છે. શું અન્ય બહુપદીઓના ડિસ્સામાં પણ આવું બનશે? ઉદાહરણ તરીકે, દ્વિધાત બહુપદીનાં શૂન્યોને પણ તેના સહગુણકો સાથે સંબંધ છે?

આ પ્રકારણમાં, આપણે આ પ્રશ્નોના જવાબ મેળવવા પ્રયત્ન કરીશું. આપણે બહુપદીઓ માટે ભાગ પ્રવિધિનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

2.2 બહુપદીનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ

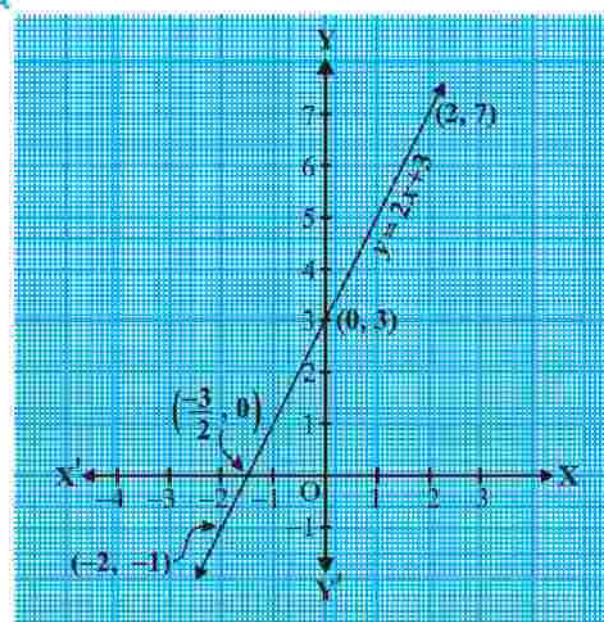


આપણે જાણીએ છીએ કે જો $p(k) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા k એ બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય છે પરંતુ બહુપદીનાં શૂન્યો શા માટે અગત્યનાં છે? આના ઉત્તર માટે, પ્રથમ આપણે સુરેખ અને

દ્વિધાત બહુપદીઓનું ભૌમિતિક નિરૂપણ અને તેનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ જોઈએ.

પ્રથમ સુરેખ બહુપદી $ax+b$, $a \neq 0$ નો વિચાર કરો. આપણે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે કે $y = ax + b$ નો આલેખ એક રેખા છે. ઉદાહરણ તરીકે $y = 2x + 3$ નો આલેખ એ બિંદુઓ $(-2, -1)$ અને $(2, 7)$ માંથી પસાર થતી રેખા છે.

x	−2	2
$y = 2x + 3$	−1	7



આકૃતિ 2.1

આકૃતિ 2.1 પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $y = 2x + 3$ નો આલેખ x -અક્ષને $x = -1$ અને $x = -2$ ની મધ્યમાં આવેલા બિંદુ $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ માં છેદે છે.

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે બહુપદી $2x + 3$ નું શૂન્ય $\frac{-3}{2}$ છે. આથી, બહુપદી $2x + 3$ નું શૂન્ય એ $y = 2x + 3$ નો આલેખ x -અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તેનો x -યામ છે.

વ્યાપક રીતે, સુરેખ બહુપદી $ax + b$, $a \neq 0$ માટે $y = ax + b$ નો આલેખ x -અક્ષને બરાબર એક બિંદુ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ બિંદુમાં છેદતી રેખા છે.

આથી શૂન્યેતર a માટે સુરેખ બહુપદી $ax + b$ ને એક જ શૂન્ય $\frac{-b}{a}$ છે અને તે $y = ax + b$ નો આલેખ x -અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તેનો x -યામ છે.

હવે, આપણે દ્વિધાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ જોઈએ. $x^2 - 3x - 4$ દ્વિધાત બહુપદીનો વિચાર કરો. ચાલો આપણે જોઈએ કે $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ* કેવો દેખાશે.

આપણે કોષ્ટક 2.1 માં x ની કેટલીક કિમતોને અનુરૂપ $y = x^2 - 3x - 4$ ની કિમતોની યાદી બનાવી છે.

કોષ્ટક 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

જો આપણે ઉપરની યાદીમાં દર્શાવેલાં બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવી આલેખ દોરાએ તો તે આકૃતિ 2.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણોનો દેખાશે.

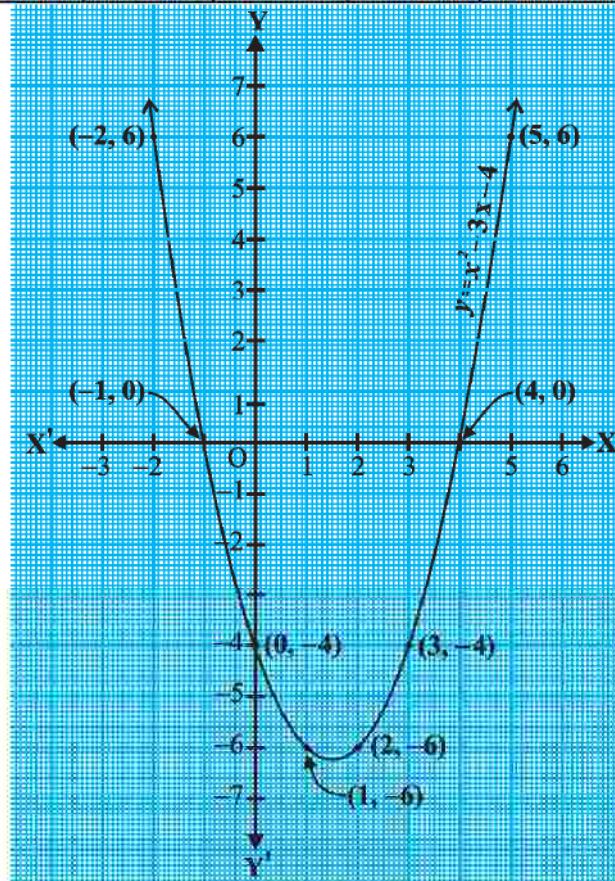
ખરેખર તો, શૂન્યેતર a હોય તેવી કોઈ પણ દ્વિધાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, ના સંદર્ભમાં તેને અનુરૂપ સમીકરણ $y = ax^2 + bx + c$ નો આલેખ અનુક્રમે $a > 0$ અથવા $a < 0$ અનુસાર ઉપરની તરફ ખુલ્લો વક્ક \cup અથવા નીચેની તરફ ખુલ્લો વક્ક \cap મળશે. (આ વક્કને પરવલય કહે છે.)

તમે કોષ્ટક 2.1 પરથી જોઈ શકો છો કે -1 અને 4 એ આપેલ દ્વિધાત બહુપદીનાં શૂન્યો છે.

આકૃતિ 2.2 પરથી નોંધો કે $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ x -અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે. તેમના x યામ -1 અને 4 છે.

આમ, દ્વિધાત બહુપદી $x^2 - 3x - 4$ નાં શૂન્યો એ $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ x -અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે તેમના x યામ થાય.

આ હકીકિત કોઈ પણ દ્વિધાત બહુપદી માટે સત્ય છે, દ્વિધાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ નાં શૂન્યો એ



આકૃતિ 2.2

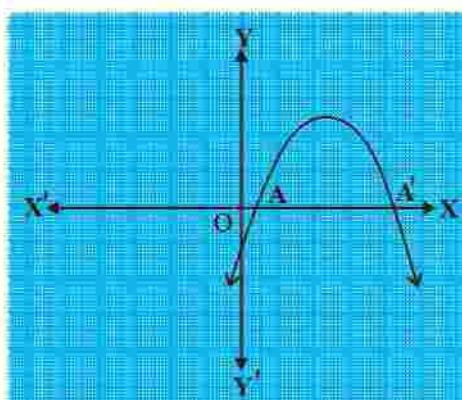
* વિદ્યાર્થી એ દ્વિધાત તથા ત્રિધાત બહુપદીઓના આલેખ દોરવાનું અપેક્ષિત નથી તથા તે મૂલ્યાંકનનો હિસ્સો નથી.

નિશ્ચિતપણે $y = ax^2 + bx + c$ ને દર્શાવતો પરવલય x -અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદ છે તે બિંદુઓના x -યામ થાય.

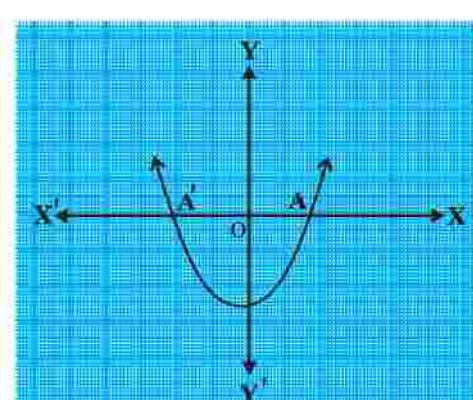
અગાઉના આપણા નિરીક્ષણને આધારે $y = ax^2 + bx + c$ ના આલેખના આકાર માટે નીચે પ્રમાણેના ત્રણ વિકલ્પ હોઈ શકે :

વિકલ્પ (i) : અહીં આલેખ x -અક્ષને બે બિંદુઓનો A અને A' માં છેદ છે.

આ કિસ્સામાં A અને A' ના x -યામ એ દ્વિધાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં બે શૂન્યો થાય. (જુઓ આકૃતિ 2.3.)



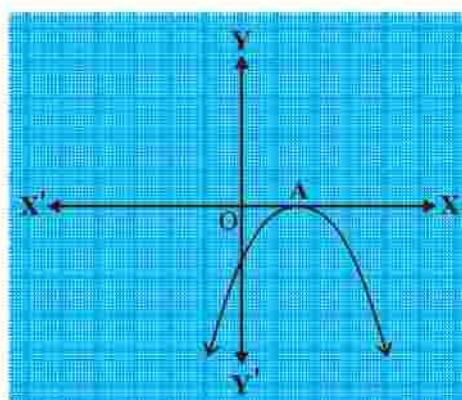
(i)



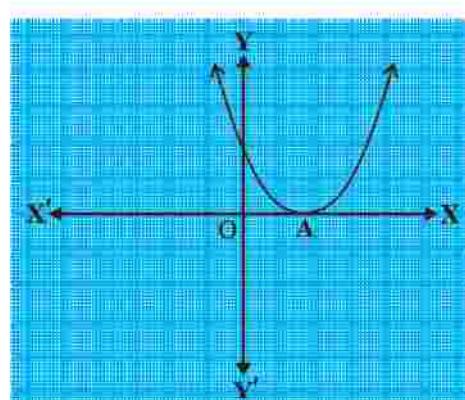
(ii)

આકૃતિ 2.3

વિકલ્પ (ii) : અહીં આલેખ x -અક્ષને એક બિંદુમાં છેદ છે. એટલે કે તે x -અક્ષને બે સંપાતી બિંદુઓમાં છેદ છે. આથી વિકલ્પ (i)વાળા બિંદુ A અને A' સંપાતી બને છે અને એક જ છેદબિંદુ A મળે છે. (જુઓ આકૃતિ 2.4.)



(i)

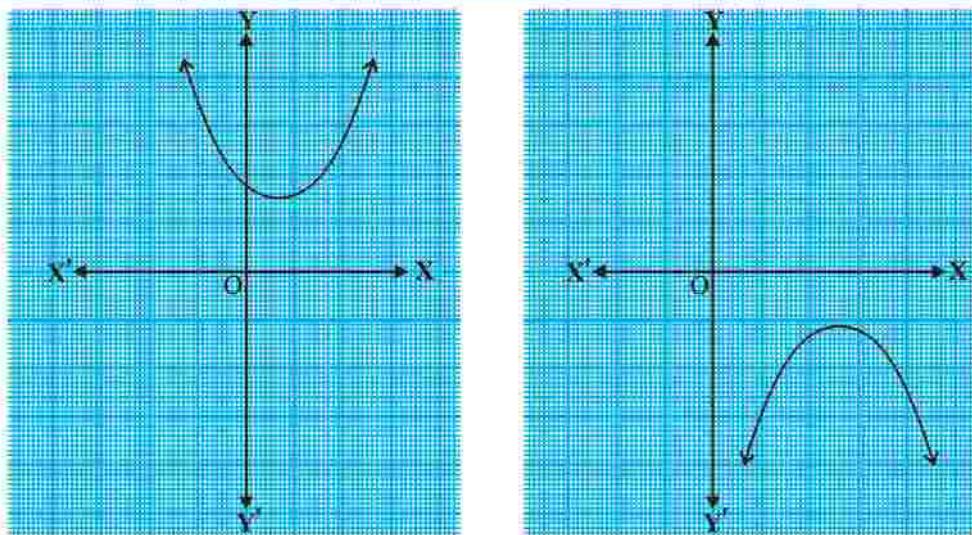


(ii)

આકૃતિ 2.4

આ કિસ્સામાં બિંદુ Aનો x -યામ એ દ્વિધાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નું એક માત્ર શૂન્ય થશે.

વિકલ્પ (iii) : અહીં આલેખ સંપૂર્ણપણે x -અક્ષની ઉપર અથવા સંપૂર્ણપણે x -અક્ષની નીચે છે અને તે x -અક્ષને કોઈ પણ બિંદુએ છેદશે નહીં. (જુઓ આકૃતિ 2.5.)



આકૃતિ 2.5

આથી, આ કિસ્સામાં ત્રિધાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ ને વાસ્તવિક શૂન્ય નથી.

આથી, ભૌમિતિક રીતે જોઈ શકાય કે, ત્રિધાત બહુપદીને કાં તો બે ભિન્ન શૂન્યો હોય અથવા બે સમાન શૂન્યો હોય (એટલે કે એક શૂન્ય) અથવા શૂન્ય ન હોય. આનો અર્થ એ પણ થાય કે બે ઘાતવાળી બહુપદીને વધુમાં વધુ બે શૂન્યો હોય.

હવે, ત્રિધાત બહુપદીનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ માટે તમે શું અપેક્ષા રાખો છો ? ચાલો, આપણે નક્કી કરીએ. ત્રિધાત બહુપદી $x^3 - 4x$ નો વિચાર કરો. $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ કેવો દેખાશે તે જોઈએ.

ચાલો, આપણે x ની કેટલીક કિમતોને અનુરૂપ y ની કેટલીક કિમતોની યાદી કોષ્ટક 2.2 માં દર્શાવેલ છે તે જોઈએ.

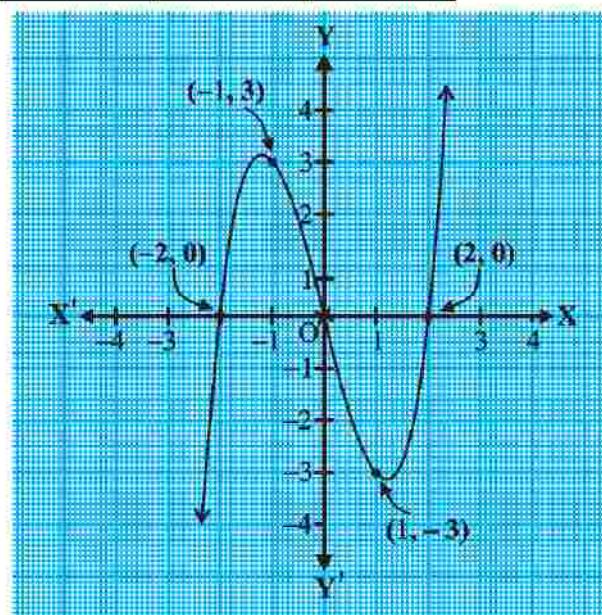
કોષ્ટક 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવી આલેખ દોરતાં આપણે જોઈ શકીએ કે, $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ ખરેખર આકૃતિ 2.6 માં દર્શાવેલ છે તેવો લાગશે.

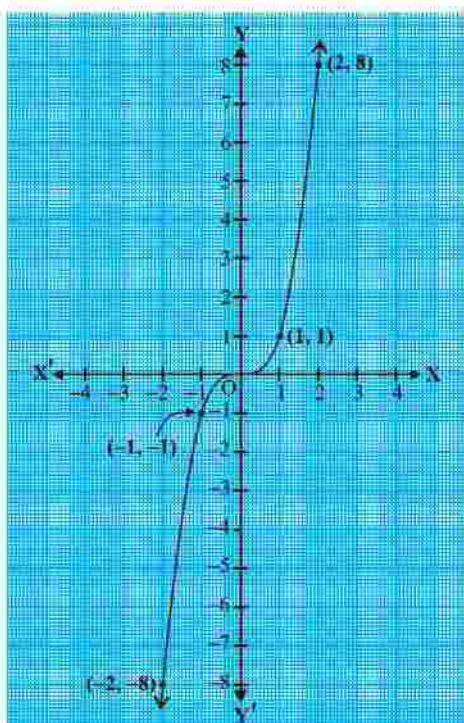
ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે જોઈ શકીએ કે $-2, 0$ અને 2 એ ત્રિધાત બહુપદી $x^3 - 4x$ નાં શૂન્યો છે અવલોકન કરો કે $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ x -અક્ષને જ્યાં છેદ છે તે બિંદુઓના x -યામ જ હકીકતમાં $-2, 0$ અને 2 છે.

વક્ત x -અક્ષને આ ત્રણ બિંદુએ જ છેદતો હોવાથી તેના x -યામ આ બહુપદીનાં શૂન્યો થાય અને આ સિવાય અન્ય જોઈ શૂન્ય ન મળે.

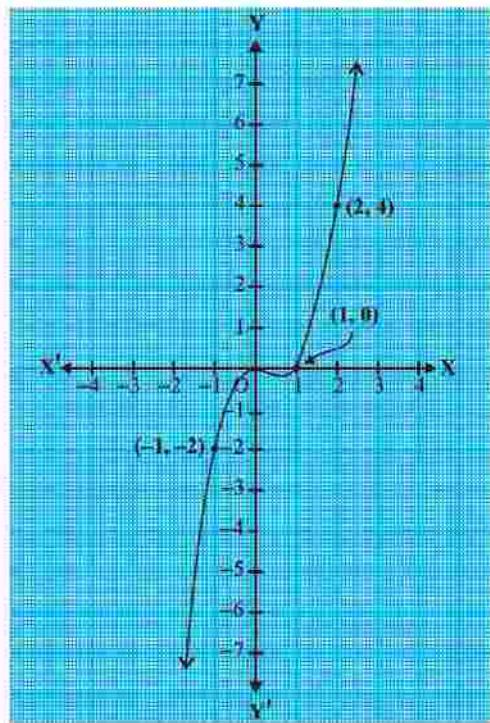


આકૃતિ 2.6

આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો લઈએ. ત્રિઘાત બહુપદીઓ x^3 અને $x^3 - x^2$ નો વિચાર કરો. આકૃતિ 2.7 અને આકૃતિ 2.8 માં અનુક્રમે $y = x^3$ અને $y = x^3 - x^2$ ના આલેખ આપણે દોર્યાં છે.



આકૃતિ 2.7



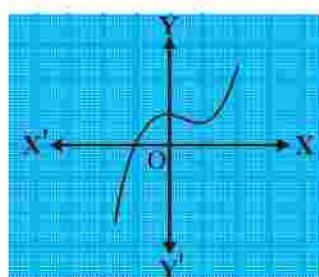
આકૃતિ 2.8

આપણે નોંધીએ કે 0 એ બહુપદી x^3 નું એક માત્ર શૂન્ય છે. વળી, આકૃતિ 2.7 પરથી તમે જોઈ શકો છો કે $y = x^3$ નો આલેખ x -અક્ષને માત્ર એક બિંદુમાં છેદ છે અને તેનો x -યામ 0 છે. $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ હોવાથી, બહુપદી $x^3 - x^2$ નાં શૂન્યો માત્ર 0 અને 1 છે. વળી, આકૃતિ 2.8 પરથી આ મૂલ્યો $y = x^3 - x^2$ નો આલેખ x -અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદ છે તેમના x -યામ છે.

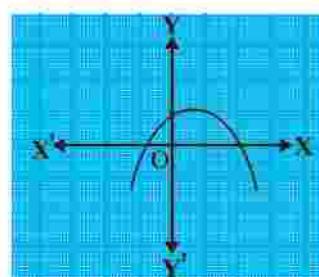
ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી, આપણે જોયું કે કોઈ પણ ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય છે. બીજા શર્ધોમાં કહીએ તો ત્રણ ઘાતવાળી બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય છે.

નોંધ : બાપ્યક રીતે કહીએ તો આપેલી બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત n હોય તો $y = p(x)$ નો આલેખ x -અક્ષને વધુમાં વધુ n બિંદુઓમાં છેદ. માટે n ઘાતવાળી બહુપદી $p(x)$ ને વધુમાં વધુ n શૂન્યો હોય.

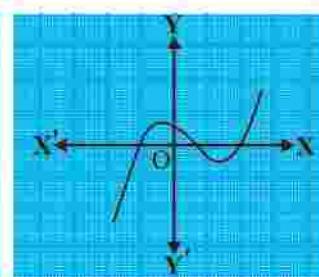
ઉદાહરણ 1 : નીચે આકૃતિ 2.9માં આપેલ આલેખ જુઓ. પ્રત્યેક આલેખ બહુપદી $p(x)$ માટે $y = p(x)$ ના આલેખ છે. પ્રત્યેક આલેખ માટે $p(x)$ નાં શૂન્યોની સંખ્યા શોધો.



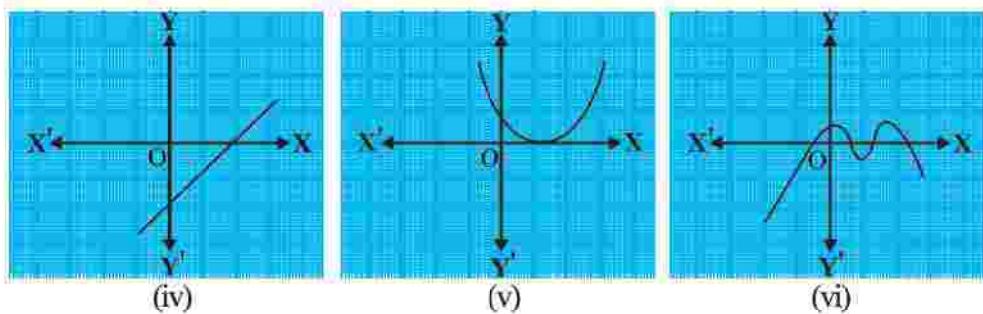
(i)



(ii)



(iii)



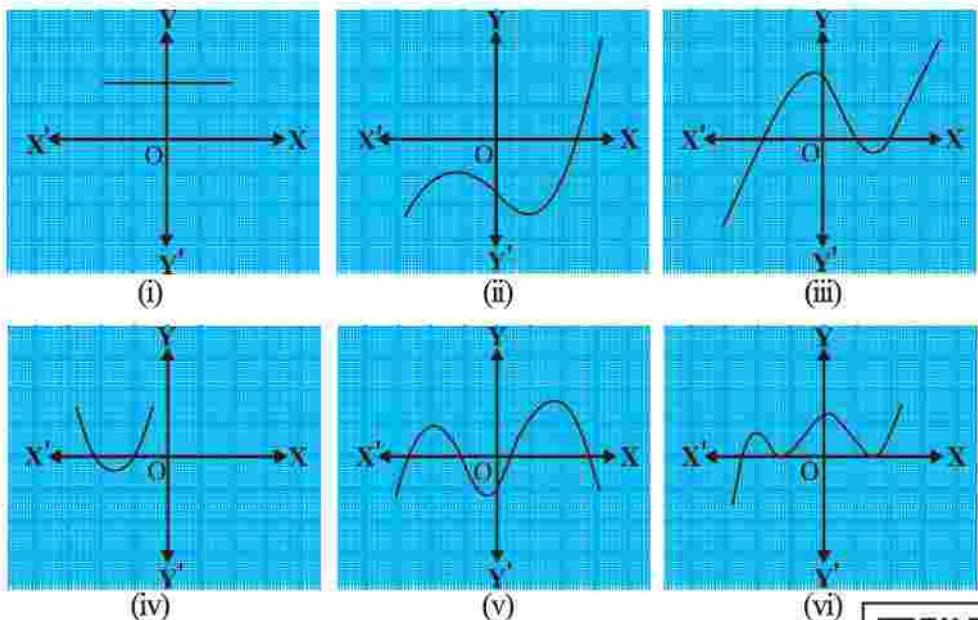
આકૃતિ 2.9

ઉકેલ :

- (i) આલેખ x -અક્ષને એક જ બિંદુમાં છેદતો હોવાથી શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે.
- (ii) આલેખ x -અક્ષને બે બિંદુમાં છેદતો હોવાથી શૂન્યોની સંખ્યા 2 છે.
- (iii) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 3 છે. (શા માટે ?)
- (iv) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે. (શા માટે ?)
- (v) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે. (શા માટે ?)
- (vi) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 4 છે. (શા માટે ?)

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચે આકૃતિ 2.10 માં કોઈ બહુપદી $p(x)$ માટે $y = p(x)$ ના આલેખ આપેલ છે. દરેક કિસ્સામાં $p(x)$ નાં શૂન્યોની સંખ્યા શોધો.



આકૃતિ 2.10

2.3 બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ

તમે જોયું કે સુરેખ બહુપદી $ax + b$ નું શૂન્ય $\frac{-b}{a}$ છે. હવે આપણે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેના



સંબંધના સંદર્ભે વિભાગ 2.1 માં ઉદ્ભવેલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવા પ્રયત્ન કરીએ. ચાલો, આ માટે આપણે દ્વિધાત બહુપદી $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ લઈએ. ધોરણ IX માં તમે દ્વિધાત બહુપદીના મધ્યમપદના ભાગ પાડી તેના અવયવ પાડતાં શીખ્યાં છો. માટે, આપણે મધ્યમ પદના એવા બે ભાગ પાડીએ જેમનો સરવાળો $-8x$ થાય અને જેમનો ગુણાકાર $6 \times 2x^2 = 12x^2$ આવે. આથી,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x(x-3) - 2(x-3) \\ &= (2x-2)(x-3) \\ &= 2(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

આથી, જ્યારે $x-1 = 0$ અથવા $x-3 = 0$ હોય ત્યારે $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ની ક્રિમત શૂન્ય થાય. આથી $2x^2 - 8x + 6$ નાં શૂન્યો 1 અને 3 છે.

અવલોકન કરો કે,

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો સરવાળો} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = -\frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો ગુણાકાર} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{અયણ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\begin{aligned} \text{ચાલો, આપણે વધુ એક દ્વિધાત બહુપદી } p(x) = 3x^2 + 5x - 2 \text{ લઈએ. મધ્યમપદના ભાગ પાડવાની પદ્ધતિ દારા,} \\ 3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 \\ = 3x(x+2) - 1(x+2) \\ = (3x-1)(x+2) \end{aligned}$$

$$3x^2 + 5x - 2 \text{ ની ક્રિમત શૂન્ય લેતાં, } 3x-1 = 0 \text{ અથવા } x+2 = 0 \text{ થાય. આથી } x = \frac{1}{3} \text{ અથવા } x = -2.$$

માટે, $3x^2 + 5x - 2$ નાં શૂન્યો $\frac{1}{3}$ અને -2 થાય. અવલોકન કરો કે,

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો સરવાળો} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો ગુણાકાર} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{અયણ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

વ્યાપક રીતે, જો શૂન્યેતર a માટે દ્વિધાત બહુપદી $p(x) = ax^2 + bx + c$, નાં શૂન્યો α^* અને β^* હોય, તો આપણે જાણીએ છીએ કે $x-\alpha$ અને $x-\beta$ એ $p(x)$ ના અવયવો થાય. માટે,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= k(x-\alpha)(x-\beta), \quad k \text{ શૂન્યેતર અયળ} \\ &= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta], \\ &= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\alpha\beta \end{aligned}$$

બંને બાજુ x^2 , x નાં સહગુણકો અને અયળ પદને સરખાવતાં આપણાને,

$$a = k, \quad b = -k(\alpha+\beta), \quad c = k\alpha\beta \text{ મળે.}$$

* અ તથા β ગ્રીક મૂળાક્ષરો છે અને તેમનો ઉચ્ચાર અનુક્રમે “આલ્કા” અને “બીટા” થાય છે. આગળ જતાં જેનો ઉચ્ચાર જેમા થાય તેવા વધુ એક મૂળાક્ષર ગુણો ઉપયોગ કરીશું.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha \beta = \frac{c}{a} મળે.$$

આથી શૂન્યોનો સરવાળો $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = \alpha \beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 2 : દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 7x + 10$ નાં શૂન્યો શોધો તથા તેનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

ઉકેલ : આપણી પાસે

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

આથી, જ્યારે $x + 2 = 0$ અથવા $x + 5 = 0$ હોય, ત્યારે $x^2 + 7x + 10$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

માટે $x = -2$ અથવા $x = -5$.

આથી, $x^2 + 7x + 10$ નાં શૂન્યો -2 અને -5 થાય. હવે,

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = (-2) + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

ઉદાહરણ 3 : બહુપદી $x^2 - 3$ નાં શૂન્યો શોધો અને તેનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

ઉકેલ : નિત્યસમ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ યાદ કરી તેનો ઉપયોગ કરી, આપણે લખી શકીએ કે,

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

આથી, જ્યારે $x = \sqrt{3}$ અથવા $x = -\sqrt{3}$ હોય ત્યારે $x^2 - 3$ ની કિંમત શૂન્ય થાય.

માટે, $x^2 - 3$ નાં શૂન્યો $\sqrt{3}$ અને $-\sqrt{3}$ છે.

હવે,

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

ઉદાહરણ 4 : જેનાં શૂન્યોના સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે -3 અને 2 હોય તેવી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો α અને β છે.

આપણી પાસે

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha \beta = 2 = \frac{c}{a}$$

જો $a = 1$ તો $b = 3$ અને $c = 2$

આથી, આપેલ શરતને અનુરૂપ એક દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 3x + 2$ છે.

તમે એ પણ ચકાસી શકો કે શૂન્યેતર વાસ્તવિક k માટે, $k(x^2 + 3x + 2)$ સ્વરૂપની કોઈ પણ બીજી દ્વિઘાત બહુપદી આ શરતોને અનુરૂપ લઈ શકાય.

ચાલો, આપણે હવે ત્રિઘાત બહુપદીઓ જોઈએ. તમે કલ્યાણ કરી શકશો કે ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો અને તેના સહગુણકો વચ્ચે શું આવો જ સંબંધ હશે ?

$$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 \text{ નો વિચાર કરીએ,}$$

$p(x)$ ને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય. આપણે $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ માટે $p(x) = 0$ થાય તે ચકાસી શકીએ. આ સંખ્યાઓ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ નાં શૂન્યો થાય. હવે,

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{\text{-(}x^2\text{ નો સહગુણક)}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{\text{-(}x^3\text{ નો સહગુણક)}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

જો કે અહીં એક વધુ સંબંધ છે. બધે શૂન્યોના ગુણાકારોના સરવાળાનો વિચાર કરીએ. આપણી પાસે

$$\{4 \times (-2)\} + \{(-2) \times \frac{1}{2}\} + \{\frac{1}{2} \times 4\} = -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

વ્યાપક રીતે, જો ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો α, β, γ હોય, તો સાબિત કરી શકાય કે,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

ચાલો, એક ઉદાહરણ સમજીએ.

ઉદાહરણ 5* : ચકાસો કે $3, -1, -\frac{1}{3}$ એ ત્રિઘાત બહુપદી $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ નાં શૂન્યો છે અને તે પછી શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

* પરીક્ષાના દ્રષ્ટિકોણથી લીધેલ નથી.

ઉકેલ : આપેલી બહુપદીને $ax^3 + bx^2 + cx + d$ સાથે સરખાવતિ,

આપણને $a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$ મળશે. વધુમાં

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

આથી, 3, -1 અને $-\frac{1}{3}$ એ $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ નાં શૂન્યો છે.

આથી, આપણો $\alpha = 3$, $\beta = -1$ અને $\gamma = -\frac{1}{3}$ લઈએ.

۸۹

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + \left((-1) \times \left(-\frac{1}{3} \right) \right) + \left(\left(-\frac{1}{3} \right) \times 3 \right)$$

$$= -3 + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha \beta \gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = -\left(-\frac{3}{3}\right) = \frac{-d}{a}$$

स्वाध्याय 2.2

1. નીચે દર્શાવેલ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં શૂન્યો શોધો તથા તેમનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો :

 - (i) $x^2 - 2x - 8$
 - (ii) $4s^2 - 4s + 1$
 - (iii) $6x^2 - 3 - 7x$
 - (iv) $4u^2 + 8u$
 - (v) $t^2 - 15$
 - (vi) $3x^2 - x - 4$

2. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ અનુક્રમે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો સરવાળો અને શૂન્યોનો ગુણકાર છે તે પરથી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો :

 - (i) $\frac{1}{4}, -1$
 - (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$
 - (iii) $0, \sqrt{5}$
 - (iv) $1, 1$
 - (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$
 - (vi) $4, 1$



$x^3 - 3x^2 - x + 3$ ને $x - 1$ વડે ભાગો. આ તો તમે ધોરણ IX માં શીખ્યાં છો. આથી ભાગફળ $x^2 - 2x - 3$ મળશે.

બાદમાં, $x^2 - 2x - 3$ ના મધ્યમ પદનું વિભાજન કરતાં તમને $(x + 1)(x - 3)$ અવયવ મળશે.

$$\text{આથી, } x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3) \text{ મળશે.}$$

આથી, આપેલા ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો હવે 1, -1 અને 3 મળી જાય છે.

ચાલો આપણો એક બહુપદીનો બીજી બહુપદી વડે ભાગાકાર કરવાની પદ્ધતિની વિગતવાર ચર્ચા કરીએ. પરંપરાગત સોપાનોની નોંધ કરતાં પહેલાં આપણે એક ઉદાહરણનો અભ્યાસ કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : $2x^2 + 3x + 1$ ને $x + 2$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે જ્યારે શેષ શૂન્ય હોય અથવા તેની ઘાત ભાજકની ઘાત કરતાં ઓછી હોય ત્યારે આપણે ભાગાકારની પ્રક્રિયા અટકાવીશું. આથી, અહીં ભાગફળ $2x - 1$ અને શેષ 3 છે.

વળી,

$$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$\text{માટે, } 2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$$

આથી, ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ

ચાલો, હવે આપણે એક બહુપદીને દ્વિઘાત બહુપદી વડે ભાગીને આ પ્રક્રિયા સમજીએ.

ઉદાહરણ 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ને $1 + 2x + x^2$ વડે

ભાગો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે ભાજક અને ભાજ્યનાં પદોને તેમના ઘાતાંકના ઉત્તરતા ક્રમમાં ગોઠવીએ. યાદ કરો કે બહુપદીનાં પદોને આ ક્રમમાં ગોઠવીએ તો, તે સ્વરૂપને બહુપદીનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કરે છે. આ ઉદાહરણમાં, ભાજ્ય પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં જ છે અને $x^2 + 2x + 1$ એ ભાજકનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ થશે.

$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ x + 2 \sqrt{2x^2 + 3x + 1} \\ \underline{-} \quad \underline{-} \\ 2x^2 + 4x \\ \underline{-} \quad \underline{-} \\ -x + 1 \\ -x - 2 \\ \underline{+} \quad \underline{+} \\ 3 \end{array}$$

સોપાન 1 : ભાગફળનું પ્રથમ પદ મેળવવા માટે ભાજ્યના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદને (એટલે કે $3x^3$) ભાજકના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદ (એટલે કે x^2) વડે ભાગો. ભાગફળ $3x$ થશે. ત્યાર બાદ ભાગાકારની પ્રક્રિયા આગળ ધ્યાવતાં $-5x^2 - x + 5$ વધશે.

$$\begin{array}{r} 3x - 5 \\ x^2 + 2x + 1 \sqrt{3x^3 + x^2 + 2x + 5} \\ \underline{-} \quad \underline{-} \quad \underline{-} \\ 3x^3 + 6x^2 + 3x \\ \underline{-} \quad \underline{-} \quad \underline{-} \\ -5x^2 - x + 5 \\ -5x^2 - 10x - 5 \\ \underline{+} \quad \underline{+} \quad \underline{+} \\ 9x + 10 \end{array}$$

સોપાન 2 : હવે ભાગફળનું બીજું પદ મેળવવા માટે ભાગાકારના નવા ભાજ્યનાં સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદને (એટલે કે $-5x^2$). ભાજકના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદ (એટલે કે x^2) વડે ભાગો. ભાગફળ -5 મળશે. ફરીથી ભાગાકારની પ્રક્રિયા $-5x^2 - x + 5$ સાથે આગળ ધ્યાવો.

સોપાન 3 : $9x + 10$ બાકી રહેશે. હવે, $9x + 10$ ની ઘાત ભાજક $x^2 + 2x + 1$ ની ઘાત કરતાં ઓછી છે માટે, આપણે ભાગાકાર આગળ ધ્યાવી શકીશું નહિં.

માટે, ભાગફળ $3x - 5$ અને શેષ $9x + 10$ છે. વળી,

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10 \\ = 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

અહીં પણ આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

$$\text{ભાજ્ય} = \text{ભાજક} \times \text{ભાગફળ} + \text{શેષ}$$

અહીં આપણે જે પ્રવિધિ લાગુ પાડી તે ચુક્કિલાની લાગ પ્રવિધિને સમાન છે. આપણે તેનો પ્રકરણ 1માં અભ્યાસ કર્યો છો.

તે દર્શાવે છે કે,

જો $p(x)$ અને $g(x)$ બે બહુપદીઓ હોય અને $g(x) \neq 0$, તો આપણે એવી બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ શોધી શકીએ, જેથી

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x),$$

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ ની ઘાત $< g(x)$ ની ઘાત.

આ પરિણામ બહુપદીઓ માટે ભાગપ્રવિધિ તરીકે ઓળખાય છે.

ચાલો, આપણે તેનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ નો $x - 1 - x^2$ વડે ભાગાકાર કરો અને ભાગ પ્રવિધિ ચકાસો.

ઉકેલ : જુઓ કે આપેલ બહુપદીઓ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી. આથી, ભાગાકાર કરવા માટે આપણે પ્રથમ ભાજ્ય અને ભાજકને તેની ઘાતના ઉત્તરતા કમમાં ગોઠવીશું.

આથી, ભાજ્ય $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ અને ભાજક $= -x^2 + x - 1$.

ભાગાકારની પ્રક્રિયા જમણી બાજુએ દર્શાવેલ છે.

આપણે 3માં x ની ઘાત $= 0 < 2 =$ ઘાત $(-x^2 + x - 1)$

થવાથી ત્યાં અટકીશું.

આથી, ભાગફળ $= x - 2$, શેષ $= 3$

$$\text{હવે, } \text{ભાજક} \times \text{ભાગફળ} + \text{શેષ} = (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3 \\ = -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3 \\ = -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ = \text{ભાજ્ય}$$

આ રીતે ભાગપ્રવિધિને ચકાસી શકાય.

ઉદાહરણ 9 : જો $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ એ $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ નાં બે શૂન્યો છે તેવું તમે જાણતા હો, તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

ઉકેલ : $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ બે શૂન્યો હોવાથી, $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ એ આપેલ બહુપદીનો અવયવ થશે. હવે આપણે આપેલી બહુપદીને $x^2 - 2$ વડે ભાગીએ.

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 \end{array} \begin{array}{r} -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ -x^3 + x^2 - x \\ \hline 2x^2 - 2x + 5 \\ 2x^2 - 2x + 2 \\ \hline - \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 2x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 x^2 - 2 \overline{)2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2} \\
 2x^4 - 4x^2 \\
 \hline
 -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 -3x^3 + 6x \\
 \hline
 x^2 - 2 \\
 x^2 - 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

ભાગફળનું પ્રથમ પદ $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$
 ભાગફળનું બીજું પદ $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$
 ભાગફળનું તૃતીય પદ $\frac{x^2}{x^2} = 1$

આથી, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

હવે, $-3x$ ના ભાગ પાડતાં આપણે $2x^2 - 3x + 1$ ના અવયવ $(2x - 1)(x - 1)$ પાડી શકીશું. આથી, તેનાં શૂન્યો $x = \frac{1}{2}$ અને $x = 1$ થશે. માટે આપેલી બહુપદીનાં શૂન્યો $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 1$ છે.

સ્વાક્ષરાય 2.3

- નીચે આપેલ તમામ બહુપદી $p(x)$ ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગો અને ભાગફળ તથા શેષ મેળવો :
 - $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$
 - $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, g(x) = x^2 + 1 - x$
 - $p(x) = x^4 - 5x + 6, g(x) = 2 - x^2$
- નીચે આપેલ બે બહુપદીઓ પૈકી બીજી બહુપદીને પ્રથમ બહુપદી વડે ભાગીને ચકાસો કે પ્રથમ બહુપદી એ બીજી બહુપદીનો અવયવ છે કે નહિ.
 - $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$
 - $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$
 - $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$
- જો $\sqrt{\frac{5}{3}}$ અને $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ એ $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ નાં બે શૂન્યો હોય, તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.
- $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગતાં ભાગફળ અને શેષ અનુકૂમે $x - 2$ અને $-2x + 4$ મળે છે, તો $g(x)$ શોધો.
- ભાગપ્રવિધિ અને નીચેની શરતોને સંતોષે તેવી બહુપદીઓ $p(x), g(x), q(x)$ અને $r(x)$ નાં ઉદાહરણો આપો.
 - $p(x)$ ની ઘાત = $q(x)$ ની ઘાત
 - $q(x)$ ની ઘાત = $r(x)$ ની ઘાત
 - $r(x)$ ની ઘાત = 0

સ્વાધ્યાય 2.4 (વેક્ટલિયક)*

1. નીચે ત્રિઘાત બહુપદીની સાથે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ તેનાં શૂન્યો છે તે ચકાસો. દરેક પ્રશ્નમાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ પડા ચકાસો :
 - (i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 ; \frac{1}{2}, 1, -2$
 - (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 ; 2, 1, 1$
2. જેનાં શૂન્યોનો સરવાળો, બબ્લે શૂન્યોના ગુણાકારનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે $2, -7, -14$ છે એવી ત્રિઘાત બહુપદી શોધો.
3. જો બહુપદી $x^3 - 3x^2 + x + 1$ નાં શૂન્યો $a - b, a, a + b$ હોય તો a અને b શોધો.
4. બહુપદી $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ નાં બે શૂન્યો $2 \pm \sqrt{3}$ હોય તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.
5. બહુપદી $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ ને બીજી બહુપદી $x^2 - 2x + k$ વડે ભાગતાં આવે તો શેષ $x + a$ મળે તો k અને a શોધો.

2.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. 1, 2 અને 3 ઘાત ધરાવતી બહુપદીઓને અનુક્રમે સુરેખ, દ્વિઘાત અને ત્રિઘાત બહુપદીઓ કહે છે.
2. વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c તથા શૂન્યેતર a માટે, x પરની વાસ્તવિક સહગુણકો ધરાવતી દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ છે.
3. $y = p(x)$ નો આલેખ x -અક્ષને જે બિંદુએ છેંદ છે તે બિંદુના x -યામ એ બહુપદી $p(x)$ નાં શૂન્યો છે.
4. દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 વાસ્તવિક શૂન્યો અને ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 3 વાસ્તવિક શૂન્યો હોય છે.
5. જો α અને β એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો હોય, તો

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \beta = \frac{c}{a}$$

6. જો α, β, γ એ ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો હોય, તો

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\text{અને} \quad \alpha \beta \gamma = \frac{-d}{a}$$

7. ભાગ પ્રવિષ્ટ દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ બહુપદી $p(x)$ અને કોઈ શૂન્યેતર બહુપદી $g(x)$ ને સંગત બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ મળે જેથી,
- $$p(x) = g(x) q(x) + r(x),$$
- જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ ની ઘાત $< g(x)$ ની ઘાત.



* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.



દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગમ

3

3.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે નીચે આપેલી પરિસ્થિતિ જેવી પરિસ્થિતિમાંથી પસાર થયા જ હશો.

અભિલા તેના ગામમાં મેળામાં ગઈ હતી. તેને ચકડોળમાં બેસવાનો આનંદ માશવો હતો અને હૂપલા (Hoopla) (જેમાં તમે સ્ટોલમાં રાખેલી વસ્તુઓ પર રિંગ ફેંકો અને જો રિંગ કોઈ પણ વસ્તુને સંપૂર્ણ આવરી લે, તો તે વસ્તુ તમને મળે એવી એક રમત) રમવા માંગતી હતી. તે જેટલી વખત હૂપલા રમી તે સંઘ્યા એ ચકડોળ પરની સવારીની સંઘ્યાથી અડધી છે. જો પ્રત્યેક વખત ચકડોળમાં બેસવાનો ખર્ચ ₹ 3 અને હૂપલાની પ્રત્યેક રમત રમવાનો ખર્ચ ₹ 4 થતો હોય, તો તમે ચકડોળમાં બેસવાની સંઘ્યા કેવી રીતે શોધી શકશો અને તે કેટલી વાર હૂપલાની રમત રમી હશે તે કેવી રીતે નક્કી કરશો? તેણે આ માટે કુલ ₹ 20 ખર્ચ્યા હતા.

કદાચિત્, તમે વિવિધ સ્થિતિની વિચારણા કરીને અજમાવી શકો છો. જો તેણે એક વખત સવારી કરી હોય, તે શક્ય છે? શું બે વખત સવારી શક્ય છે? અને આમ આગળ ચાલો અથવા આવો પરિસ્થિતિઓને દર્શાવવા માટે તમે ધોરણ IX ના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી શકો.



ચાલો આ અભિગમ અપનાવીએ.

અભિલાની ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યાને x કહો અને હૃપલા રમવાની સંખ્યાને y કહો. આ પરિસ્થિતિને બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$y = \frac{1}{2}x \quad \dots (1)$$

$$3x + 4y = 20 \quad \dots (2)$$

શું આપણો આ બે સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીશું?

ઉકેલ શોધવાની ઘણી રીતો છે. આપણો આ મકરણમાં તેમનો અભ્યાસ કરીશું.

3.2 દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ



ધોરણ IX નો અભ્યાસ યાદ કરો. નીચે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનાં ઉદાહરણો છે :

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

$$\text{અને} \quad x - 2y = 3, \text{ એટલે કે } x = 2$$

જો a, b અને c થો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોય તો જે સમીકરણે $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય તેને ચલ x અને ચલ y માં દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે એમ તમે જાણો છો. (a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોઈ શકે તે શરતને સામાન્ય રીતે $a^2 + b^2 \neq 0$ વડે પણ દર્શાવાય છે).

તમે અભ્યાસ કર્યો છો કે, આવા સમીકરણના ઉકેલનાં મૂલ્યોની એક x અને બીજો y એમ એક જોડ મળે છે. તે સમીકરણની બંને બાજુઓ સમાન બનાવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ $2x + 3y = 5$ ની ડાબી બાજુએ $x = 1$ અને $y = 1$ કિમત મૂકતાં,

ડાબી બાજુ = $2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5$ અને તે સમીકરણની જમણી બાજુ બરાબર છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 1$ એ $2x + 3y = 5$ નો એક ઉકેલ છે.

હવે, $x = 1$ અને $y = 7$ કિમત $2x + 3y = 5$ માં મૂકતાં,

$$\text{ડાબી બાજુ} = 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$$

તે સમીકરણની જમણી બાજુ બરાબર નથી.

તેથી, $x = 1$ અને $y = 7$ એ $2x + 3y = 5$ નો ઉકેલ નથી.

ભૌમિતિક રીતે, આનો અર્થ શું છે? તેનો અર્થ એ છે કે બિંદુ $(1, 1)$ એ સમીકરણ $2x + 3y = 5$ દ્વારા દર્શાવતી રેખા પર છે અને $(1, 7)$ તે રેખા પર નથી. તેથી સમીકરણનો દરેક ઉકેલ તે સમીકરણને દર્શાવતી રેખા પરના બિંદુનું નિરૂપણ છે.

હકીકતમાં, આ કોઈ પણ સુરેખ સમીકરણ માટે સત્ય છે, એટલે કે $ax + by + c = 0$ નો પ્રત્યેક ઉકેલ (x, y) એ સમીકરણને દર્શાવતી રેખા પરના કોઈ બિંદુને સંગત છે અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

હવે, ઉપર્યુક્ત સમીકરણ (1) અને (2) નો વિચાર કરો.

આ સમીકરણો અભિલાની મેળાની મુલાકાત વિશેની માહિતી એક સાથે દર્શાવે છે.

આ બંને સુરેખ સમીકરણોમાં x અને y માત્ર બે ચલ છે. આ સમીકરણને દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહે છે.

ચાલો આ જોડીનો બીજગણિતની રીતે વિચાર કરીએ.

ચલ x અને y માં દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ છે. અહીં $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલાં છે :

$$2x + 3y - 7 = 0 \text{ અને } 9x - 2y + 8 = 0$$

$$5x = y \text{ અને } -7x + 2y + 3 = 0$$

$$x + y = 7 \text{ અને } 17 = y$$

શું તમે જાણો છો કે ભૌમિતિક રીતે તે શું સૂચવે છે ?

યાદ કરો, તમે ધોરણ IX માં ભૌમિતિક રીત (એટલે કે આલેખની રીત)નો અભ્યાસ કર્યો છે કે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણ એ રેખા નિર્દેશ કરે છે. શું તમે હવે કહેશો કે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમનું આલેખાત્મક સ્વરૂપ કેવું દેખાશે ? તે બે રેખાઓ એક સા�ે દર્શાવશે.

તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો કે, સમતલમાં બે રેખાઓ માટે નીચેની ત્રણ શક્યતાઓ પૈકી એક અને માત્ર એક સત્ય હોઈ શકે :

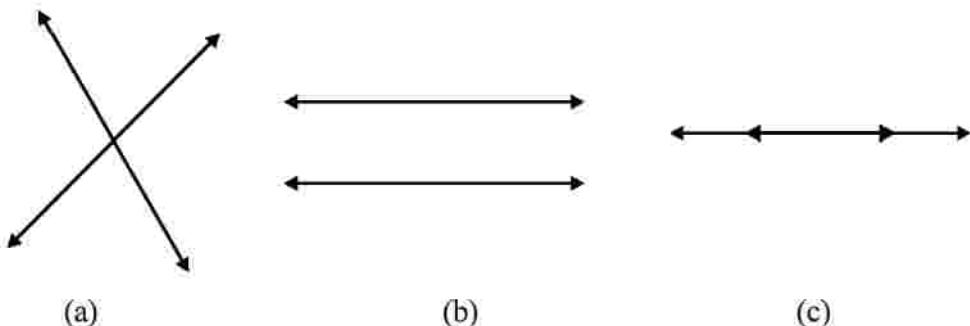
- (i) બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદશે.
- (ii) બે રેખાઓ છેદતી નથી, એટલે કે તે પરસ્પર સમાંતર છે.
- (iii) બે રેખાઓ સંપાતી થશે.

આપણે આ બધી શક્યતાઓને આકૃતિ 3.1માં બતાવી છે.

આકૃતિ 3.1 (a), બંને છેદ છે.

આકૃતિ 3.1 (b), બંને સમાંતર છે.

આકૃતિ 3.1 (c), બંને સંપાતી છે.



આકૃતિ 3.1

સુરેખ સમીકરણયુગમની રજૂઆત કરવા બૈજિક અને ભૌમિતિક રીત બંનેનો સાથે-સાથે ઉપયોગ થઈ શકે છે.

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : આપણે વિભાગ 3.1 માંથી ઉદાહરણ લઈએ. અનિલા ₹ 20 લઈને મેળામાં જાય છે અને તે ચકડોળમાં બેસવા માંગે છે અને હૂપલા રમત રમે છે. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે (ભૌમિતિક રીતે) રજૂ કરો.

ઉકેલ : સમીકરણોની જોડાઓ :

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$\text{એટલે કે, } x - 2y = 0 \quad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \quad (2)$$

આપણે આ સમીકરણોને આલેખાત્મક રીતે દર્શાવીએ. આ માટે આપણાને દરેક સમીકરણ માટે ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલની જરૂર છે. આપણે આ ઉકેલો કોષ્ટક 3.1માં આપીએ.

ક્રોષક 3.1

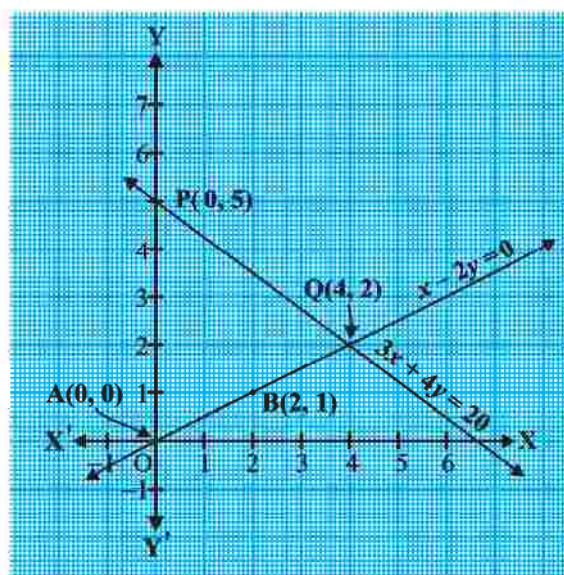
x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

(i)

ધોરણ IX માંથી યાદ કરીએ કે, દરેક સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલો છે. તેથી તમે કોઈ પણ બે મૂલ્યો પસંદ કરી શકો છો. આપણે પસંદ કર્યા છે તે મૂલ્ય પસંદ કરવા જરૂરી નથી. તમે અનુમાન કરી શકો કે, આપણે શા માટે પ્રથમ સમીકરણમાં અને બીજા સમીકરણમાં $x = 0$ પસંદ કર્યું છે? જ્યારે એક ચલ શૂન્ય હોય છે ત્યારે સમીકરણ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ મળશે અને તે સરળતાથી ઉકેલી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ (2) માં $x = 0$ મૂક્તાં, આપણાને $4y = 20$ મળે એટલે કે $y = 5$ મળે છે. તે જ રીતે સમીકરણ (2) માં $y = 0$ મૂક્તાં આપણાને $3x = 20$ મળે. એટલે કે $x = \frac{20}{3}$ મળે

છે. પણ $\frac{20}{3}$ એ પૂર્ણાંક નથી. આલેખપત્ર પર તેનું આલેખન સરળતાથી થઈ શકે નહિં. તેથી, આપણે $y = 2$ પસંદ કરીએ છીએ અને આપણાને પૂર્ણાંક મૂલ્ય $x = 4$ મળે છે.

ક્રોષક 3.1 માંથી ઉકેલને સંગત બિંદુઓ $A(0, 0)$, $B(2, 1)$ અને $P(0, 5)$, $Q(4, 2)$ દર્શાવો. હવે રેખાઓ AB અને PQ દોરો. તે આકૃતિ 3.2 માં સમીકરણ $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y = 20$ નું નિરૂપણ કરે છે.



આકૃતિ 3.2

આકૃતિ 3.2 માં અવલોકન કરો કે બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ પરસ્પર બિંદુ $Q(4, 2)$ માં છેદે છે. પછીના વિભાગમાં આપણે આનો શો અર્થ થાય છે તે અંગે ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 2 : રોમીલાએ સ્ટેશનરીની દુકાનમાંથી 2 પેન્સિલ અને 3 રબર ₹ 9 માં ખરીદ્યા હતાં. તેની મિત્ર સોનાલીએ રોમીલા પાસેની પેન્સિલોમાં નવીન પ્રકારની પેન્સિલો અને રબર જોયાં અને તેણે પણ તેટલી જ ડિમતોવાળાં 4 પેન્સિલ અને 6 રબર ₹ 18માં ખરીદ્યા હતા. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે 1 પેન્સિલની ડિમત રૂ x અને 1 રબરની ડિમત રૂ y છે. તેથી સમીકરણોનું બૈજિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે છે.

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

તેને સમકક્ષ આલેખાત્મક નિરૂપણ મેળવવા માટે, આપણે દરેક સમીકરણનું નિરૂપણ કરતી રેખા પર બે બિંદુઓ શોધીશું. એટલે કે આપણે દરેક સમીકરણના બે ઉકેલો શોધીએ.

આ ઉકેલ ક્રોષક 3.2 માં આપવામાં આવ્યા છે.

કોષ્ટક 3.2

x	0	4.5
$y = \frac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

આપણે આ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર મૂકીને રેખાઓ દોરીશું. આપણાને બે સંપાતી રેખાઓ મળશે. (જુઓ આંકૃતિ 3.3.) આમ બનવાનું કારણ એ છે કે, બંને સમીકરણો એકરૂપ છે. એટલે કે એક સમીકરણ પરથી બીજું સમીકરણ તારવી શકાય.

ઉદાહરણ 3 : રેલવેના બે પાટા સમીકરણ $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવેલા છે. આ પરિસ્થિતિનું ભૌમિતિક રીતે નિરૂપણ કરો.

ઉકેલ : સમીકરણો

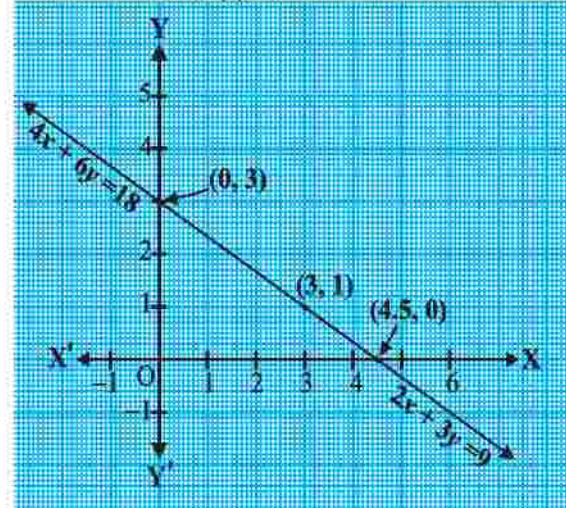
$$x + 2y - 4 = 0$$

$$2x + 4y - 12 = 0$$

ના બે-બે ઉકેલો કોષ્ટક 3.3 માં આપેલા છે.

x	0	3
$y = \frac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)



આંકૃતિ 3.3

(2)

કોષ્ટક 3.3

x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

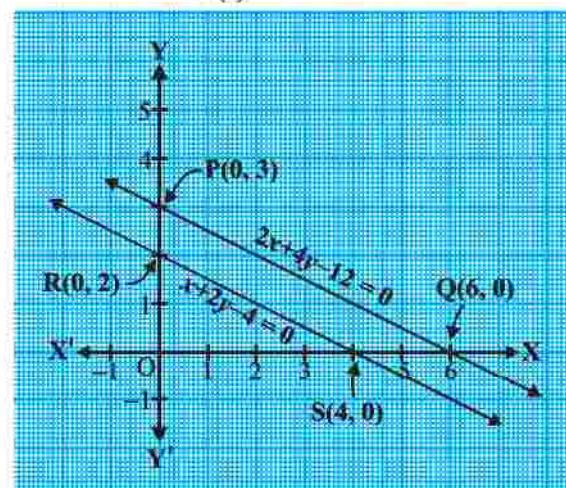
(i)

સમીકરણોને આલેખપત્ર પર દર્શાવતાં આપણાને બિંદુઓ R (0, 2) અને S (4, 0)ને જોડતી રેખા RS અને બિંદુઓ P (0, 3) અને Q (6, 0)ને જોડતી રેખા PQ મળે છે. આપણે આંકૃતિ 3.4 માં અવલોકન કરીએ તો રેખાઓ ક્રાંતિ છેદ્ધતી નથી એટલે કે તે સમાંતર છે.

આપણે સુરેખ સમીકરણયુગ્મ દ્વારા દર્શાવતી કેટલીક પરિસ્થિતિ જાઈ. આપણે તેમને બૈજિક અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવ્યા છે. હવે પછીના કેટલાક વિભાગમાં આપણે ચર્ચા કરીશું કે, આ બૈજિક અને ભૌમિતિક રજૂઆતોના ઉપયોગથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મની જોડના ઉકેલો કેવી રીતે મેળવાય.

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)



આંકૃતિ 3.4

સ્વાધ્યાય 3.1

- આફતાબ તેની દીકરીને કહે છે, “સાત વર્ષ પહેલાં મારી ઉંમર તે વખતની તારી ઉંમર કરતાં સાત ગણી હતી હવે પછીના ગણ વર્ષ પછી મારી ઉંમર તારી તે વખતની ઉંમર કરતાં ગણ ગણી હશે.” (શું આ રસપ્રદ છે ?) આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે દર્શાવો.

ગાળિત

2. કિકેટ ટીમના પ્રશિક્ષક રૂ 3900 માં 3 બેટ અને 6 દાઓ ખરીએ છે. પછી તે બીજું તે જ પ્રકારનું 1 બેટ અને તે જ પ્રકારના વધુ 3 દાઓ રૂ 1300 માં ખરીએ છે. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવો.
3. એક દિવસે 2 કિગ્રા સફરજન અને 1 કિગ્રા દ્રાક્ષની કિમત રૂ 160 હતી. એક મહિના પછી 4 કિગ્રા સફરજન અને 2 કિગ્રા દ્રાક્ષની કિમત રૂ 300 હતી. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવો.

3.3 દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમના ઉકેલ માટે આલેખની રીત

આના પહેલાના વિભાગમાં તમે જોઈ ગયાં કે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમની રેખાઓને આલેખપત્ર પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. તમે એ પણ જોઈ ગયાં કે રેખાઓ છેદે અથવા સમાંતર હોય કે સંપાતી હોઈ શકે. દરેક વિકલ્પમાં આપણે સમીકરણયુગમને ઉકેલી શકીએ ? અને જો આ શક્ય હોય તો કેવી રીતે બને? આપણે આ પ્રશ્નોના જવાબ ભૌમિતિક દાખિકોણથી આપવા પ્રયત્ન કરીશું.



P7F5V6

આપણે પહેલાના ઉદાહરણોને એક પછી એક જોઈએ.

- ઉદાહરણ 1ની પરિસ્થિતિમાં અખિલા ચકડોળમાં કેટલી વાર બેઠી હતી અને કેટલી વાર હૂપલા રમત રહી હતી, તે દર્શાવે છે.

આકૃતિ 3.2 માં તમે નોંધ્યું છો કે, ભૌમિતિક રીતે આ પરિસ્થિતિ (4, 2) માં છેદતી બે રેખાઓ દર્શાવે છે. તેથી બિંદુ (4, 2) એ બંને સમીકરણો $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y = 20$ થી દર્શાવેલી રેખાઓ ઉપર છે અને આ જ એક માત્ર સામાન્ય બિંદુ છે.

આપણે બૈજિક રીત વડે $x = 4$ અને $y = 2$ સમીકરણયુગમના ઉકેલો છે તેમ ચકાસીએ. દરેક સમીકરણમાં x અને y નાં મૂલ્યોને મૂકતાં, આપણને $4 - 2 \times 2 = 0$ અને $3(4) + 4(2) = 20$ મળે. તેથી આપણે $x = 4, y = 2$ એ બે સમીકરણોના ઉકેલ છે તેમ ચકાસ્યું. બંને રેખાઓનું એક માત્ર સામાન્ય બિંદુ (4, 2) છે. આ દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમનો એક અને માત્ર એક ઉકેલ છે.

આમ, અખિલા 4 વખત ચકડોળમાં બેસે છે અને 2 વખત હૂપલા રમત રહે છે.

ઉદાહરણ 2 ની પરિસ્થિતિમાં એક પેન્સિલની કિમત અને એક રબરની કિમત કેવી રીતે શોધી શકાય ?

આકૃતિ 3.3 માં પરિસ્થિતિનું ભૌમિતિક નિરૂપણ સંપાતી રેખાઓની જોડ દ્વારા દર્શાવ્યું છે. તે સમીકરણોના ઉકેલો આ રેખાઓનાં સામાન્ય બિંદુ છે.

શું આ રેખાઓ પર કોઈ સામાન્ય બિંદુઓ છે ? આલેખ પરથી આપણે અવલોકન કરીએ કે રેખા પરનું દરેક બિંદુ એ બંને સમીકરણોનો સામાન્ય ઉકેલ છે. તેથી સમીકરણો $2x + 3y = 9$ અને $4x + 6y = 18$ ના ઉકેલોની સંખ્યા અનંત છે. આપણને તે આશ્રય પમાડતું નથી, કારણ કે, સમીકરણ $4x + 6y = 18$ ને 2 વડે ભાગવાથી આપણને $2x + 3y = 9$ મળશે. તે સમીકરણ (1) જ છે. તેથી, બંને સમીકરણો સમકક્ષ છે. આલેખ પરથી રેખાના દરેક બિંદુ પરથી આપણને પેન્સિલ અને રબરની કિમત મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિમત અનુકૂમે રૂ 3 અને રૂ 1 છે તેમ કહી શકાય. અથવા એક પેન્સિલની કિમત રૂ 3.75 અને એક રબરની કિમત રૂ 0.50 અને આમ $2x + 3y = 9$ નું સમાધાન કરતાં અસંખ્ય x અને y મળે.

ઉદાહરણ 3 ની પરિસ્થિતિમાં શું તે રેલવેના પાટા એકબીજાને છેદી શકે છે ?

આકૃતિ 3.4 માં, બે સમાંતર રેખાઓ ભૌમિતિક રીતે રજૂ કરવામાં આવેલી છે. રેખાઓ એકબીજાને છેદતી નથી. તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી. આનો અર્થ એ પણ થાય છે કે, બે સમીકરણોને સામાન્ય ઉકેલ નથી.

જે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમને એક પણ ઉકેલ ન હોય તેવું સમીકરણયુગમ સુસંગત નથી તેમ કહેવાય. જે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમને ઉકેલ હોય તેવું સમીકરણયુગમ સુસંગત છે તેમ કહેવાય. જે દ્વિયલ સુરેખ

સમીકરણયુગ્મનાં બંને સમીકરણો સમાન હોય તેને અનંત જિન ઉકેલો હોય. આવા સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી સમીકરણો છે તેમ કહેવાય. સ્પષ્ટ છે કે જે સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી હોય તે સમીકરણો સુસંગત હોય છે જ.

સારાંશમાં આપણે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રેખાઓનું નિરૂપણ અને ઉકેલના અસ્તિત્વ વિશે નીચે પ્રમાણે કહી શકીએ :

- (i) રેખાઓ એક જ બિંદુમાં છેઠી શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોની જોડિને એક (અનન્ય) ઉકેલ છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ)
- (ii) રેખાઓ સમાંતર હોઈ શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને કોઈ ઉકેલ નથી. (સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.)
- (iii) રેખાઓ સંપાતી છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને અનંત ઉકેલો છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ, અવલંબી સમીકરણો)

ચાલો આપણે ઉદાહરણ 1, 2 અને 3 તરફ પાછા વળીએ અને ભૌમિતિક રીતે સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કેવું રેખાયુગ્મ દર્શાવે છે તે નોંધીએ.

- (i) $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y - 20 = 0$ (રેખાઓ છેટે છે.)
- (ii) $2x + 3y - 9 = 0$ અને $4x + 6y - 18 = 0$ (રેખાઓ સંપાતી છે.)
- (iii) $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ (રેખાઓ સમાંતર છે.)

હવે આપણે ત્રણે ઉદાહરણની $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની ડિમતો લખીએ અને તમામને સરખાવીએ.

અહીંયા a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 એ વિભાગ 3.2 માં આવેલા પ્રમાણિત સ્વરૂપનાં સમીકરણોના સહગુજરાતી છે.

કોષ્ટક 3.4

ક્રમ નં.	રેખાઓની જોડ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	ગુજરાતરોની સરખામણી	આલેખાતમક સ્વરૂપ	બૈજિક સ્વરૂપ
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	છેદતી રેખાઓ	માત્ર એક ઉકેલ (અનન્ય)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	સંપાતી રેખાઓ	અનંત ઉકેલો
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ એટલે કે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અને $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$	સમાંતર રેખાઓ	ઉકેલ નથી.

ઉપરના કોષ્ટકમાંથી, તમે જોઈ શકો છો કે જો સમીકરણો

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ

- (i) છેદતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) સંપાતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) અમાંતર હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

વાસ્તવમાં કોઈ પણ રેખાઓની જોડ માટે તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તમે તમારી જાતે પણ કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરી ઉપરની ચકાસણી કરી શકો છો.

આપણો હવે વધુ ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 4 : સમીકરણયુગ્મ

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

સુસંગત છે કે નહિ તે ચકાસો. જો સુસંગત હોય તો આલેખની મદદથી ઉકેલો.

ઉકેલ : સમીકરણો (1) અને (2) ના આલેખ દોરીએ. આ માટે આપણે દરેક સમીકરણના બષ્ટે ઉકેલ શોધીશું.
(કોણક 3.5માં દર્શાવેલ)

કોણક 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	-4	-2

આલેખપત્ર ઉપર બિંદુઓ A(0, 2), B(6, 0), P(0, -4) અને Q(3, -2) દર્શાવો. આકૃતિ 3.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને જોડતી રેખાઓ AB અને PQ દોરો.

આપણે નોંધીએ કે, બિંદુ B(6, 0) એ બંને રેખાઓ AB અને PQ ઉપરનું સામાન્ય બિંદુ છે. તેથી, સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ $x = 6$ અને $y = 0$ છે. આથી, આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

ઉદાહરણ 5 : આલેખની રીતથી નીચેના સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ નથી, અનન્ય ઉકેલ છે અથવા અનંત ઉકેલો છે તે નક્કી કરો.

$$5x - 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

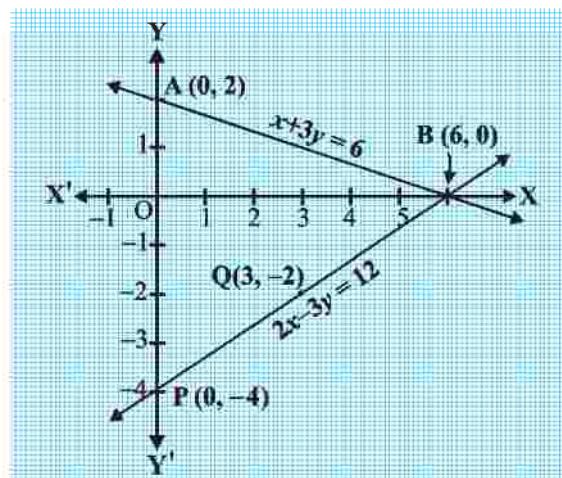
$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \quad (2)$$

ઉકેલ : સમીકરણ (2) ને $\frac{5}{3}$ વડે ગુણાતાં, આપણાને

$$5x - 8y + 1 = 0 \text{ મળશે.}$$

તે, સમીકરણ (1) ને સમાન છે. સમીકરણો (1) અને (2) દર્શાવતી રેખાઓ સંપાતી છે તેમ તેમનું નિરૂપણ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે.

આલેખ પર કેટલાંક બિંદુઓ દર્શાવો અને જાતે ચકાસો.



આકૃતિ 3.5

ઉદાહરણ 6 : ચંપા ‘સેલ’ માં કેટલાંક પેન્ટ અને સ્કર્ટ ખરીદવા ગઈ હતી. જ્યારે તેને તેના મિત્રોએ પૂછ્યું કે, તેણે દરેકની કેટલી સંખ્યાની ખરીદી કરી હતી, ત્યારે તેણે જવાબ આપ્યો, “પેન્ટની સંખ્યાના બે ગણામાંથી બે ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદાં. પણ પેન્ટની સંખ્યાના ચાર ગણામાંથી ચાર ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદા.” ચંપાએ કેટલી સંખ્યામાં પેન્ટ અને કેટલી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદાં તે શોધવા તેના મિત્રોને મદદ કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, ચંપાએ x પેન્ટ તથા y સ્કર્ટ ખરીદા છે. આથી આપેલ માહિતી પરથી સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે :

$$y = 2x - 2 \quad (1)$$

અને

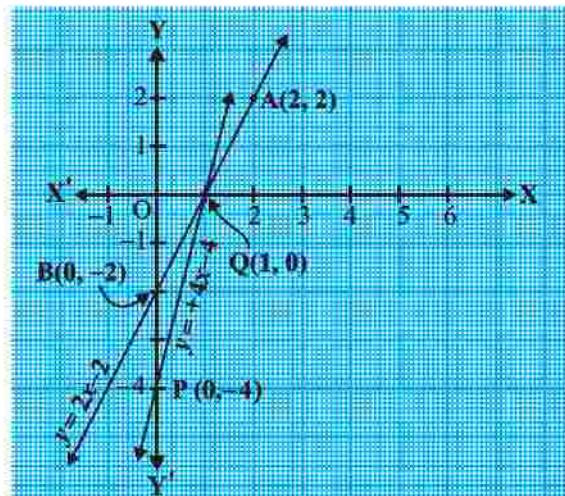
$$y = 4x - 4 \quad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ના બે-બે ઉકેલોની મદદથી આલોખનપત્ર પર આલોખ દોરો. કોષ્ટક 3.6 માં તેમના ઉકેલો આપેલા છે.

કોષ્ટક 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0



આકૃતિ 3.6

આકૃતિ 3.6 માં $A(2, 2)$ તથા $B(0, -2)$ માંથી પસાર થતી રેખા AB તથા $P(0, -4)$ અને $Q(1, 0)$ માંથી પસાર થતી રેખા PQ દોરો. સમીકરણોના ઉકેલ સમાવતાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાઓ દર્શાવો. તે બે રેખાઓ બિંદુ $(1, 0)$ આગળ છેદે છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 0$ એ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ થશે. એટલે કે તે 1 પેન્ટ ખરીદે છે અને સ્કર્ટ ખરીદતી નથી.

ચકાસો : તમારો જવાબ આપેલા કૂટપ્રશ્નોની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 3.2

- નીચેની સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમનો ઉકેલ આલોખની રીતે શોધો.
 - ધોરણ X ના દસ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતના કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લે છે. જો ભાગ લેનાર છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓની સંખ્યા કરતાં 4 વધારે હોય, તો કેટલાં છોકરાઓએ અને કેટલી છોકરીઓએ કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લીધો હશે તે શોધો.
 - 5 પેન્સિલ અને 7 પેનની કુલ કિમત ₹ 50 છે અને તે 4 કિમતવાળી 7 પેન્સિલ તથા 5 પેનની કુલ કિમત ₹ 46 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક પેનની કિમત શોધો.
- નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મથી બનતી રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે છે કે સમાંતર છે અથવા સંપાતી છે, તેમ $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ગુણોત્તરોની તુલના કરીને નક્કી કરો :

(i) $5x - 4y + 8 = 0$	(ii) $9x + 3y + 12 = 0$	(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$	$18x + 6y + 24 = 0$	$2x - y + 9 = 0$

ગાળિત

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે ગુણોત્તર $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમત પરથી નક્કી કરો :
- $3x + 2y = 5 ; 2x - 3y = 7$
 - $2x - 3y = 8 ; 4x - 6y = 9$
 - $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7 ; 9x - 10y = 14$
 - $5x - 3y = 11 ; -10x + 6y = -22$
 - $\frac{4}{3}x + 2y = 8 ; 2x + 3y = 12$
4. નીચેના પૈકી કયું સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે જણાવો. જો તે સુસંગત હોય, તો ભૌમિતિક રીતે ઉકેલ શોધો :
- $x + y = 5, 2x + 2y = 10$
 - $x - y = 8, 3x - 3y = 16$
 - $2x + y - 6 = 0, 4x - 2y - 4 = 0$
 - $2x - 2y - 2 = 0, 4x - 4y - 5 = 0$
5. એક લંબાઓરસ બગીચાની અર્ધપરિમિતિ 36 મીટર છે તથા તેની લંબાઈ એ તેની પહોળાઈ કરતાં 4 મીટર વધુ છે, તો બગીચાની બાજુઓનાં માપ શોધો.
6. સુરેખ સમીકરણ $2x + 3y - 8 = 0$ આપેલ છે. એવું બીજું દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણ લખો કે જેથી બનતી જોડિનું ભૌમિતિક નિરૂપણ નીચે પ્રમાણે હોય :
- છેદતી રેખાઓ
 - સમાંતર રેખાઓ
 - સંપાતી રેખાઓ
7. સમીકરણો $x - y + 1 = 0$ અને $3x + 2y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને x -અક્ષ દ્વારા રચાયેલા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ દર્શાવો અને બનતા ત્રિકોણાકાર પ્રદેશને છાયાંકિત કરો.

3.4 સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની બેઝિક રીત

આગણના વિભાગમાં આપણે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આલેખની રીત વિશે ચર્ચા કરી ગયાં. આલેખ પર $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ જેવાં પૂર્ણાંક ન હોય તેવા યામ ધરાવતાં બિંદુઓ આવતાં હોય ત્યારે આ રીત અનુકૂળ નથી. આવાં બિંદુઓ (આલેખપત્ર પર) આલેખવામાં ભૂલ થવાની શક્યતાઓ રહે છે. શું આવા યુગ્મનો ઉકેલ શોધવાની મુશ્કેલી દૂર કરવા બીજી કોઈ અન્ય રીતો છે? આના માટે ધ્યાન બેઝિક રીતો છે.

હવે આપણે, કેટલીક બેઝિક રીતો દ્વારા ઉકેલ શોધવાની ચર્ચા કરીશું.

3.4.1 આદેશની રીત : કેટલાંક ઉદાહરણોની મદદથી આપણે આદેશની રીતની ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 7 : આદેશની રીતનો ઉપયોગ કરી, નીચે આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવો :

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad (2)$$



Z8G1E6

ઉકેલ :

સોપાન 1 : આ રીતમાં કોઈ પણ એક સમીકરણમાંથી એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવવામાં આવે છે. ધારો કે સમીકરણ (2) લઈએ.

$$x + 2y = 3 \quad \text{ને}$$

$$x = 3 - 2y \quad \text{તરીકે લો.}$$

$$(3)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (1) માં x ની કિમત મૂકતાં,

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$\therefore 21 - 14y - 15y = 2$$

$$\therefore -29y = -19$$

$$\therefore y = \frac{19}{29}$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (3) માં y ની કિમત મૂકતાં,

$$x = 3 - 2 \left(\frac{19}{29} \right) = \frac{49}{29}$$

$$\therefore ઉકેલ x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29} મળે.$$

ચક્કાસણી : તમે બંને સમીકરણોમાં $x = \frac{49}{29}$ અને $y = \frac{19}{29}$ મૂકશો તો જણાશે કે બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

આદેશની રીતને વધુ સ્પષ્ટ રીતે સમજવા માટે નીચેનાં સોપાનો દ્વારા તેનો વિચાર કરીએ.

સોપાન 1 : અનુકૂળ હોય તે રીતે એક સમીકરણ પરથી એક ચલ, ઉદાહરણ તરીકે, y ને બીજા ચલ x ના સ્વરૂપમાં મેળવો.

સોપાન 2 : આ સિવાયના સમીકરણમાં y ની કિમત મૂકતાં, સમીકરણ એક ચલ x ના સ્વરૂપમાં મળશે અને આપણે તેને ઉકેલી શકીશું.

કેટલીક વખત ઉદાહરણ 9 અને ઉદાહરણ 10 ની જેમ તમે ચલ વિનાનું વિધાન મેળવો તે શક્ય છે. જો આ વિધાન સત્ય હોય તો તમે અનુમાન કરી શકો કે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો છે. જો આ વિધાન અસત્ય હોય તો દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

સોપાન 3 : સોપાન 1 ની મદદથી બીજા ચલ x ની કિમતને સોપાન 2 ના સમીકરણમાં મૂકતાં ચલ y (અથવા x) ની કિમત મળશે.

નોંધ : આપણે એક ચલની કિમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવીને સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવીએ છીએ.

તેથી ઉકેલ મેળવવાની આ રીત આદેશની રીત તરીકે ઓળખાય છે.

ઉદાહરણ 8 : સ્વાધ્યાય 3.1નો પ્રશ્ન નંબર 1 આદેશની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે આફિતાબ અને તેની પુત્રીની વર્તમાન ઉંમર (વર્ષમાં) અનુકૂળે ડ અને t છે. આપેલ માહિતી પરથી દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને આ પરિસ્થિતિમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$$s - 7 = 7(t - 7), એટલે કે s - 7t + 42 = 0 \quad (1) \quad અને$$

$$s + 3 = 3(t + 3), એટલે કે s - 3t = 6 \quad (2)$$

સમીકરણ (2)નો ઉપયોગ કરતાં, $s = 3t + 6$ મળે છે. s ની આ કિમત સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$$

$$\therefore 4t = 48$$

$$\text{તેથી } t = 12.$$

સમીકરણ (2)માં t ની કિમત મૂકતાં, આપણને

$$s = 3(12) + 6 = 42 \text{ મળે.}$$

તેથી, આફિતાબ અને તેની પુત્રીની ઉંમર અનુકૂળે 42 વર્ષ અને 12 વર્ષ છે.

આ સમસ્યા માટે આ ઉકેલ સમીકરણોમાં મૂકી સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તેમ ચકાસી શકાય છે.

ઉદાહરણ 9 : વિભાગ 3.3 માંથી ઉદાહરણ 2 પરથી, 2 પેન્સિલો અને 3 રબરની કિમત ₹ 9 છે અને 4 પેન્સિલોની અને 6 રબરની કિમત ₹ 18 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિમત શોધો.

ઉકેલ : દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

આપણે પ્રથમ ચલ x ની કિમત y ના સ્વરૂપમાં દર્શાવતાં,

$$\text{સમીકરણ } 2x + 3y = 9 \text{ માંથી } x = \frac{9-3y}{2} \text{ મળે છે.} \quad (3)$$

સમીકરણ (2) માં, x ની કિમત મૂકતાં,

$$\begin{aligned} \frac{4(9-3y)}{2} + 6y &= 18 \\ \therefore 18 - 6y + 6y &= 18 \\ \therefore 18 &= 18 \end{aligned}$$

આ વિધાન y ની તમામ કિમતો માટે સત્ય છે. આપણાને y ની કોઈ નિશ્ચિત કિમત ઉકેલ સ્વરૂપે મળતી નથી. તેથી આપણાને x ની નિશ્ચિત કિમત પણ મળતી નથી. આ પરિસ્થિતિ ઊભી થાય છે, કારણ કે બંને સમીકરણો સમાન છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે. આપણે નોંધીએ કે આલેખની રીતે પણ સમાન ઉકેલો મળે છે. (વિભાગ 3.2માં આકૃતિ 3.3 અનુસાર) આપણે એક પેન્સિલ અને એક રબરની અનન્ય કિમત શોધી શકતા નથી, કારણ આ પરિસ્થિતિમાં તેને ઘણા સમાન ઉકેલો મળે છે.

ઉદાહરણ 10 : વિભાગ 3.2 ના ઉદાહરણ 3 નો વિચાર કરીએ. શું રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદશે ?

ઉકેલ : દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી x ને y ના સ્વરૂપમાં સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$x = 4 - 2y$$

હવે, સમીકરણ (2) માં x ની કિમત મૂકતાં,

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

$$\therefore 8 - 12 = 0$$

$$\therefore -4 = 0$$

આ વિધાન અસત્ય છે.

તેથી સમીકરણોને એક પણ સામાન્ય ઉકેલ નથી, તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. નીચેના દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

$$(i) \quad x + y = 14$$

$$(ii) \quad s - t = 3$$

$$x - y = 4$$

$$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$$

$$(iii) \begin{aligned} 3x - y &= 3 \\ 9x - 3y &= 9 \end{aligned}$$

$$(iv) \begin{aligned} 0.2x + 0.3y &= 1.3 \\ 0.4x + 0.5y &= 2.3 \end{aligned}$$

$$(v) \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$$

$$(vi) \frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$$

$$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$$

2. $2x + 3y = 11$ અને $2x - 4y = -24$ નો ઉકેલ શોધો અને એવો 'm' શોધો કે જેથી $y = mx + 3$ થાય.

3. નીચેની સમસ્યા ઉપરથી દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને તેમનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

- બે સંખ્યાનો તફાવત 26 છે અને એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી ગણી છે, તો તે બે સંખ્યા શોધો.
- બે પૂર્કકોણો પૈકી મોટો ખૂણો નાના ખૂણા કરતાં 18° મોટો હોય, તો તે પૂર્કકોણો શોધો.
- કિકેટ ટીમના કોચે 7 બેટ અને 6 દાડાઓ રૂ 3800માં ખરીદા. પછીથી તેણે તે જ કિમતવાળા 3 બેટ અને 5 દાડાઓ રૂ 1750 માં ખરીદાં. તો એક બેટની કિમત અને એક દાડાની કિમત શોધો.
- એક શહેરમાં ટેક્સીનું ભાડું નિશ્ચિત ભાડા અને અંતરના પ્રમાણમાં સંયુક્ત રીતે લેવાય છે. 10 કિમીના અંતર માટે રૂ 105 અને 15 કિમીની મુસાફરી માટે રૂ 155 ની ચૂકવણી કરવી પડે છે. તો નિશ્ચિત ભાડું કેટલું અને પ્રતિ કિમી કેટલા દરે કિમત ચૂકવી પડે ? મુસાફરે 25 કિમીની મુસાફરી માટે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડશે ?
- એક અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 2 ઉમેરતાં તે $\frac{9}{11}$ બને છે. જો અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 3 ઉમેરતાં તે $\frac{5}{6}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.
- પાંચ વર્ષ પછી જેકબની ઉમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉમર (વર્ષમાં) કરતાં ગણી હશે. પાંચ વર્ષ પહેલાં, જેકબની ઉમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉમરથી સાત ગણી હોય, તો તેમની વર્તમાન ઉમર શોધો ?

3.4.2 લોપની રીત :



હવે, આપણે એક અન્ય રીતમાં એક ચલનો લોપ (દૂર કરીને) કરવાની રીતનો વિચાર કરીશું. આ રીત આદેશની રીત કરતાં કેટલીક વાર વધારે અનુકૂળ રીત પડે છે. આપણે આ રીત કેવી રીતે કામ કરે છે તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 11 : બે વ્યક્તિની માસિક આવકનો ગુણોત્તર 9:7 છે અને તેમના માસિક ખર્ચનો ગુણોત્તર 4:3 છે. જો દરેક વ્યક્તિ માસિક રૂ 2000 ની બચત કરે, તો તેમની માસિક આવક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે વ્યક્તિની આવક અનુકૂમે રૂ $9x$ અને રૂ $7x$ છે અને તેમનો ખર્ચ અનુકૂમે રૂ $4y$ અને રૂ $3y$ છે.

આ પરિસ્થિતિ દર્શાવતાં સમીકરણો આ પ્રમાણે છે :

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

$$\text{અને} \quad 7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને 3 વડે ગુણતાં અને સમીકરણ (2) ને 4 વડે ગુણતાં y ના સહગુણકો સમાન બનશે.

આપણને સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

ગાળિત

સોપાન 2 : સમીકરણ (4) માંથી સમીકરણ (3) બાદ કરતાં, y નો લોપ થશે, કારણ કે y ના સહગુણકો સરખા છે.

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000 \\ \therefore x = 2000$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (1) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$9(2000) - 4y = 2000 \\ \therefore y = 4000$$

તેથી, સમીકરણોના ઉકેલ $x = 2000$, $y = 4000$ છે તેથી બંને વ્યક્તિઓની માસિક આવક અનુક્રમે ₹ 18,000 અને ₹ 14,000 છે.

ચકાસણી : $18000 : 14000 = 9 : 7$

અને તેમના ખર્ચનો શુષ્ઠોત્તર = $(18000 - 2000) : (14000 - 2000) = 16000 : 12000 = 4 : 3$ મળશે.

નોંધ :

1. ઉપરના ઉદાહરણમાં ઉકેલ મેળવવા માટે વપરાયેલ પદ્ધતિને 'લોપની રીત' કહેવામાં આવે છે, કારણ કે આપણે પ્રથમ એક ચલનો લોપ કરીને એક ચલનું સુરેખ સમીકરણ મેળવીએ છીએ. ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે y નો લોપ કર્યો હતો. આપણે x નો લોપ પણ કરી શકીએ.
2. તમે આ સમસ્યાનો ઉકેલ શોધવા આદેશની રીત અથવા આદેશની રીતનો પણ ઉપયોગ કરી શક્યા હોતા.

આમ કરતા જ રહો અને જુઓ કે કઈ રીત વધુ સાનુકૂળ છે.

આપણે લોપની રીતનાં સોપાનોને નીચે પ્રમાણે નોંધીશું :

સોપાન 1 : સૌપ્રથમ બંને સમીકરણોને કોઈ યોગ્ય શૂન્યત્તર અચળ સંખ્યાઓ વડે ગુણવાથી (x અથવા y પૈકી કોઈ એકના સહગુણક) એક ચલના સહગુણકો સમાન થાય.

સોપાન 2 : ત્યાર બાદ એક સમીકરણમાં બીજું સમીકરણ ઉમેરો અથવા એક સમીકરણમાંથી બીજું સમીકરણ બાદ કરતાં એક ચલનો લોપ થશે. જો તમને એક ચલનું સમીકરણ મળે તો સોપાન 3 પર જાઓ.

સોપાન 2 માં, આપણાને ચલ ન હોય તેવું સત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળશે.

સોપાન 2 માં, આપણાને ચલ ન હોય તેવું અસત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. એટલે કે તે સુસંગત નથી.

સોપાન 3 : એક ચલ સુરેખ સમીકરણ ઉકેલતાં આપણાને (x અથવા y) કોઈ એક ચલની કિંમત મળે.

સોપાન 4 : મૂળ સમીકરણ પૈકીના કોઈ એક સમીકરણમાં x (અથવા y)ની કિંમત મૂકતાં આપણાને બીજા ચલની કિંમત મળે છે.

હવે, તે સમજવા માટે આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો ઉકેલીશું.

ઉદાહરણ 12 : નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મના શક્ય ઉકેલો લોપની રીતનો ઉપયોગ કરી શોધો :

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

ઉકેલ :

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને 2 વડે અને સમીકરણ (2) ને 1 વડે ગુણતાં x ના સહગુણકો સમાન મળશે. આપણાને સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે.

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

સોધાન 2 : સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$$\therefore (4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

$$\therefore 0 = 9. \text{ આ અસત્ય વિધાન છે.}$$

તેથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી.

ઉદાહરણ 13 : બે અંકોની એક સંખ્યા અને તે સંખ્યાના અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યાનો સરવાળો 66 છે. જો તે સંખ્યાના અંકોનો તકાવત 2 હોય, તો તે સંખ્યા શોધો. આવી કેટલી સંખ્યાઓ છે ?

ઉકેલ : ધારો કે બે અંકોની પ્રથમ સંખ્યાના દશકનો અંક અને એકમનો અંક અનુક્રમે x અને y છે.

તેથી પ્રથમ સંખ્યા દશાંશ રૂપમાં $10x + y$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે) $56 = 10(5) + 6$

જ્યારે અંકોની અદલાબદલી કરતાં x એ એકમનો અંક અને y દશકનો અંક બનશે. આ સંખ્યાનું દશાંશ સ્વરૂપ $10y + x$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે) 56 ના અંકોની અદલાબદલી પછીનું સ્વરૂપ $65 = 10(6) + 5$

આપેલ શરત અનુસાર,

$$\begin{aligned} (10x + y) + (10y + x) &= 66 \\ \therefore 11(x + y) &= 66 \\ \therefore x + y &= 6 \end{aligned} \quad (1)$$

આપણને આપેલ છે કે તે સંખ્યાના બે અંકોનો તકાવત 2 છે.

$$\therefore x - y = 2 \quad (2)$$

$$\text{અથવા } y - x = 2 \quad (3)$$

જો $x - y = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (2) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 4$ અને $y = 2$ મળે.

આ સ્થિતિમાં આપણને માંગેલ સંખ્યા 42 મળે.

જો $y - x = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (3) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 2$ અને $y = 4$ મળે.

આ સ્થિતિમાં, આપણને માંગેલ સંખ્યા 24 મળે.

આમ, આપણને બે સંખ્યાઓ 42 અને 24 માંયા ગ્રમાણો મળે છે.

ચક્કાસણી : અહીં $42 + 24 = 66$ અને $4 - 2 = 2$ તથા $24 + 42 = 66$ અને $4 - 2 = 2$ મળે છે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ લોપની રીતે અને આદેશની રીતે શોધો :

$$(i) x + y = 5 \text{ અને } 2x - 3y = 4 \qquad (ii) 3x + 4y = 10 \text{ અને } 2x - 2y = 2$$

$$(iii) 3x - 5y - 4 = 0 \text{ અને } 9x = 2y + 7 \qquad (iv) \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1 \text{ અને } x - \frac{y}{3} = 3$$

2. આપેલી સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમના ઉકેલો (જો શક્ય હોય તો) લોપની રીતે શોધો :

- (i) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાં 1 ઉમેરતાં અને છેદમાંથી 1 બાદ કરતાં અપૂર્ણાંક કિમત અતિસંક્ષિપ્તરૂપમાં 1 બને છે. જો માત્ર છેદમાં 1 ઉમેરતાં અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{2}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.
- (ii) પાંચ વર્ષ પહેલાં, નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી ત્રણ ગણી હતી. દસ વર્ષ પછી નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી બે ગણી થશે, તો નૂરી અને સોનુની વર્તમાન ઉંમર કેટલી થશે ?
- (iii) બે અંકોની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. વળી સંખ્યાના નવ ગણા કરતાં મળતી સંખ્યા એ અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યા કરતાં બે ગણી છે, તો તે સંખ્યા શોધો.
- (iv) મીના ₹ 2000 ઉપાડવા બેન્કમાં ગઈ હતી. તેણે કેશયરને કલું હતું કે મને માત્ર ₹ 50 અને ₹ 100 ની નોટો જ જોઈએ છે. મીનાને કુલ 25 નોટો મળી હતી. તો તેણે ₹ 50 અને ₹ 100 ની પ્રત્યેકની કેટલી નોટો મેળવી હશે ?
- (v) એક પ્રતિષ્ઠિત પુસ્તકાલય પ્રથમ ત્રણ દિવસનું એક પુસ્તકનું નિશ્ચિત ભાડું લે છે અને પછીના પ્રત્યેક દિવસ દીઠ અતિરિક્ત ભાડું લે છે. સરિતા સાત દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 27 ચૂકવે છે. સુસી પાંચ દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 21 ચૂકવે છે, તો નિશ્ચિત ભાડું અને પ્રત્યેક વધારાના દિવસનું ભાડું શોધો.

3.4.3 ચોકડી ગુણાકારની રીત :

અત્યાર સુધી તમે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમનો ઉકેલ આલેખની રીતે, આદેશની રીતે અને લોપની રીતે કેવી રીતે મેળવવો તે શીખ્યાં.

હવે આપણે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગમનો ઉકેલ મેળવવાની એક વધુ બૈજિક રીતનો પરિચય મેળવીશું. ઘણા બધાં કારણોસર સમીકરણોના ઉકેલ માટે આ રીત ઉપયોગી છે. આગણ વધતાં પહેલાં આપણે નીચેની પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

જો 5 નારંગી અને 3 સફરજનની કિમત ₹ 35 અને 2 નારંગી અને 4 સફરજનની કિમત ₹ 28 હોય, તો આપણે એક નારંગી અને એક સફરજનની કિમત શોધીએ.

ધારો કે એક નારંગીની કિમત ₹ x અને એક સફરજનની કિમત ₹ y છે. તેથી આપણાને આ પ્રમાણે સમીકરણ મળે.

$$5x + 3y = 35, \text{ એટલે } 5x + 3y - 35 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y = 28, \text{ એટલે } 2x + 4y - 28 = 0 \quad (2)$$

આપણે, આ સમીકરણોનો ઉકેલ લોપની રીતથી મેળવીએ.

સમીકરણ (1) ને 4 વડે ગુણો અને સમીકરણ (2) ને 3 વડે ગુણો,

$$\text{જેથી, } (4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \quad (3)$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \quad (4)$$

સમીકરણ (3)માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં

$$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$$

$$\therefore x = \frac{-[(4)(-35) - 3(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$$

$$\therefore x = \frac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)} \quad (5)$$



B3H2T8

જો સમીકરણ (1) અને (2)ને $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, વડે દર્શાવીએ તો, આપણાને $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = -35, a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = -28$ મળે. તેથી,

સમીકરણ (5) ને $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ તરીકે લખી શકાય.

તે જ રીતે, તમને $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ મળી શકે.

સમીકરણ (5) નું સાંદુર રૂપ આપતાં, આપણાને

$$x = \frac{-84+140}{20-6} = 4$$

$$\text{તે જ રીતે, } y = \frac{(-35)(2)-(5)(-28)}{20-6} = \frac{-70+140}{14} = 5$$

તેથી $x = 4, y = 5$ એ આપેલ દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ છે.

તેથી એક નારંગીની કિમત ₹ 4 અને એક સફરજનની કિમત ₹ 5 છે.

ચક્કાસણી : 5 નારંગીની કિમત + 3 સફરજનની કિમત = ₹ 20 + ₹ 15 = ₹ 35.

2 નારંગીની કિમત + 4 સફરજનની કિમત = ₹ 8 + ₹ 20 = ₹ 28.

ચાલો આપણે જોઈએ કે આ પદ્ધતિ કોઈ પણ દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ માટે કેવી રીતે ઉપયોગી છે.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ઉપરનાં સમીકરણોમાંથી x અને y ની કિમત મેળવવા માટે આપણે નીચે પ્રમાણેનાં સોપાનોને અનુસરીશું :

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને b_2 વડે અને સમીકરણ (2) ને b_1 વડે ગુણતાં,

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad \text{મળે.} \quad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં, આપણાને,

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x + (b_2b_1 - b_1b_2)y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

$$\therefore (b_2a_1 - b_1a_2)x = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$\text{તેથી, } x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \text{જ્યાં, } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad (5)$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (1) અથવા (2) માં x ની કિમત મૂકતાં,

$$\text{આપણાને, } y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{મળશે.} \quad (6)$$

હવે, આપણાને બે વિકલ્પો મળશે.

વિકલ્પ 1 : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. આ પરિસ્થિતિમાં, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,

તેથી દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળે.

વિકલ્પ 2 : જો $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, તો આપણે $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ લખીએ, તો

$a_1 = k a_2, b_1 = k b_2$ થશે.

સમીકરણ (1) માં a_1 અને b_1 ની કિમતો મૂકૃતાં, આપણને

$k(a_2x + b_2y) + c_1 = 0$ મળશે. (7)

સમીકરણ (7) અને (2) બંને સમીકરણોનું સમાધાન માત્ર $c_1 = kc_2$, એટલે કે $\frac{c_1}{c_2} = k$ માટે થાય છે તેમ અવલોકન કરી શકાય.

જો $c_1 = kc_2$, તો સમીકરણ (2) નો કોઈ પણ ઉકેલ સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરશે અને તેથી ઉલદું પણ શક્ય છે.

તેથી, જો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ તો દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણ યુગ્મ (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે.

જો $c_1 \neq kc_2$, તો સમીકરણ (2) માટેનો કોઈ પણ ઉકેલ સમીકરણ (1) નું સમાધાન નહિ કરે અને તેથી ઉલદું પણ શક્ય છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. આપણે દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ (1) અને (2) ની ઉપર્યુક્ત ચર્ચાને સંક્ષિપ્તમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

(i) જ્યારે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ત્યારે આપણને અનન્ય ઉકેલ મળે છે.

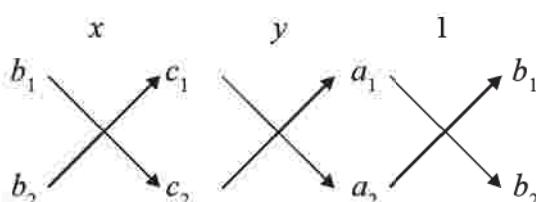
(ii) જ્યારે, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ત્યારે અનંત ઉકેલો મળે છે.

(iii) જ્યારે, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અને $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ત્યારે ઉકેલ નથી.

સમીકરણ (5) અને (6) ના ઉકેલોને તમે નીચે પ્રમાણે પણ નોંધો શકો :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (8)$$

ઉપરના પરિણામ યાદ રાખવા નીચે પ્રમાણેની આકૃતિ તમને ઉપયોગી થશે :



બે સંખ્યાઓ વચ્ચેના તીર પરથી સંકેત મળે છે કે, તેમનો ગુણાકાર કરવાનો છે અને પ્રથમ ગુણાકારથી ગ્રામ સંખ્યામાંથી બીજા ગુણાકારથી ગ્રામ સંખ્યા બાદ કરવાની છે.

આ પદ્ધતિથી સુરેખ સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આપણે આગળ પ્રમાણેનાં સોપાનોને અનુસરીશું.

સોપાન 1 : આપેલાં સમીકરણોને (1) અને (2) સ્વરૂપમાં લખો.

સોપાન 2 : ઉપરની આકૃતિનો ઉપયોગ કરી (8) માં બતાવ્યા પ્રમાણે સમીકરણો લખો.

સોપાન 3 : જો $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, તો x અને y શોધો.

સોપાન 2 પરથી આપણે કહી શકીએ કે, આ પદ્ધતિને શા માટે ચોકડી ગુજરાતની રીત કહેવામાં આવે છે.

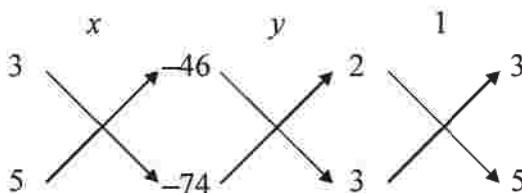
ઉદાહરણ 14 : જો આપણે બેંગલોરના એક બસ સ્ટેન્ડથી મલ્લેશ્વરમની 2 ટિકિટ અને યશવંતપુરની 3 ટિકિટો રૂ 46 માં ખરીદી શકીએ. પરંતુ જો આપણે મલ્લેશ્વરમની 3 ટિકિટો અને યશવંતપુરની 5 ટિકિટો રૂ 74 માં મળે તો, બસ સ્ટેન્ડથી મલ્લેશ્વરમું અને યશવંતપુરનું ભાડું શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બેંગલોરથી મલ્લેશ્વરમું સુધીનું ભાડું રૂ x છે અને યશવંતપુરનું ભાડું રૂ y છે. આપેલી માહિતી અનુસાર આપણને નીચે પ્રમાણે સમીકરણો મળશે :

$$2x + 3y = 46, \text{ તેથી, } 2x + 3y - 46 = 0 \quad (1)$$

$$3x + 5y = 74, \text{ તેથી, } 3x + 5y - 74 = 0 \quad (2)$$

ચોકડી ગુજરાતની રીતથી સમીકરણના ઉકેલો મેળવવા આપણે નીચે પ્રમાણે આકૃતિ દોરીએ :



$$\text{તેથી, } \frac{x}{(3)(-74) - (5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3) - (-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5) - (3)(3)}$$

$$\frac{x}{-222 + 230} = \frac{y}{-138 + 148} = \frac{1}{10 - 9}$$

$$\therefore \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

$$\therefore \frac{x}{8} = 1 \text{ અને } \frac{y}{10} = 1$$

$$\therefore x = 8 \text{ અને } y = 10$$

તેથી, બેંગલોરથી મલ્લેશ્વરમનું ભાડું રૂ 8 અને બેંગલોરથી યશવંતપુરનું ભાડું રૂ 10 છે.

ચકાસણી : તમે ચકાસી શકો છો કે, આપણે શોધેલો સમસ્યાનો ઉકેલ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 15 : p ની કઈ કિમતથી નીચે આપેલ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ અનન્ય મળો ?

$$4x + py + 8 = 0$$

$$2x + 2y + 2 = 0$$

ઉકેલ : અહીં, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$

હવે, સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે. માટે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ આવશ્યક છે.

$$\therefore \frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

$$\therefore p \neq 4$$

તેથી, 4 સિવાયની p ની તમામ કિમત માટે સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળશે.

ઉદાહરણ 16 : k ની કઈ કિમત માટે નીચે આપેલા સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળો?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0$$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$

સુરેખ સમીકરણ યુગ્મને અનંત ઉકેલ હોવા માટે : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$\text{આથી } \frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}.$$

$$\text{આમ } \frac{k}{12} = \frac{3}{k} \text{ થવું જોઈએ.}$$

$$k^2 = 36 \text{ મળે છે.}$$

$$\text{એટલે કે, } k = \pm 6$$

$$\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k} \text{ પણ આવશ્યક છે.}$$

$$\text{આપણને } 3k = k^2 - 3k, \text{ આવશ્યક છે.}$$

$$\text{એટલે કે, } 6k = k^2. \text{ તેનો અર્થ થાય છે કે } k = 0 \text{ અથવા } k = 6.$$

તેથી, $k = 6$ માટે સમીકરણયુગ્મના અનંત ઉકેલો માટેની બંને શરતોનું સમાધાન થાય છે. $k = 6$ માટે સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ છે.

સ્વાધ્યાય 3.5

1. નીચેનાં પૈકી ક્યાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે, ઉકેલ નથી અથવા અનંત ઉકેલ છે તે જણાવો. જો અનન્ય ઉકેલ હોય તો ચોકડી ગુણાકારની રીતે તેનો ઉકેલ શોધો :

$$(i) x - 3y - 3 = 0 \quad (ii) 2x + y = 5 \quad (iii) 3x - 5y = 20 \quad (iv) x - 3y - 7 = 0 \\ 3x - 9y - 2 = 0 \quad 3x + 2y = 8 \quad 6x - 10y = 40 \quad 3x - 3y - 15 = 0$$

2. (i) નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને a અને b ની કઈ કિમતો માટે અનંત ઉકેલો છે?

$$2x + 3y = 7$$

$$(a - b)x + (a + b)y = 3a + b - 2$$

(ii) નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને k ની કઈ કિમત માટે ઉકેલ ન મળો?

$$3x + y = 1$$

$$(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે અને ચોકડી ગુણાકારની રીતે શોધો :

$$8x + 5y = 9$$

$$3x + 2y = 4$$

4. નીચેના કૂટપ્રશ્નોમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને કોઈ પણ બૈજિક રીતે તેમના ઉકેલ (જો શક્ય હોય તો) શોધો :

(i) એક હોસ્પિટના વિદ્યાર્થીઓનું ભોજનખર્ચ અંશતઃ અચળ અને અંશતઃ વિદ્યાર્થીઓએ જેટલા દિવસ ભોજન લીધું હોય તે દિવસોની સંખ્યાના પ્રમાણમાં હોય છે. વિદ્યાર્થી A, 20 દિવસ ભોજન લે છે અને તેનું ભોજનખર્ચ ₹ 1000 ચૂક્યે છે. વિદ્યાર્થી B, 26 દિવસ ભોજન લે છે અને ભોજનખર્ચ પેટે ₹ 1180 ચૂક્યે છે, તો નિશ્ચિત દૈનિકખર્ચ તથા દૈનિક ભોજનખર્ચ શોધો.

- (ii) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાંથી 1 બાદ કરવામાં આવે, તો નવા અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિમ સ્વરૂપ $\frac{1}{3}$ છે અને તે જ અપૂર્ણાંકના છેદમાં 8 ઉમેરવામાં આવે, તો મળતા અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિમ સ્વરૂપ $\frac{1}{4}$ થાય છે, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.
- (iii) યશને એક કસોટીમાં 40 ગુણ મળ્યા હતા. તેને પ્રત્યેક સાચા જવાબના 3 ગુણ મળે છે અને પ્રત્યેક ખોટા જવાબ માટે 1 ગુણ કપાય છે. જો પરીક્ષકે દરેક સત્ય જવાબ માટે 4 ગુણ આપ્યા હોત અને દરેક ખોટા જવાબ માટે 2 ગુણ કાપ્યા હોત, તો યશે 50 ગુણ મેળવ્યા હોત, તો આ કસોટીમાં કેટલા પ્રશ્નો હતા?
- (iv) ધોરીમાર્ગ પર સ્થાન A અને સ્થાન B એકબીજાથી 100 કિમી દૂર છે. એક ગાડી A થી ઉપરે છે અને બીજી ગાડી B થી ઉપરે છે. ગાડીઓ એક જ દિશામાં ભિન્ન, અચળ ઝડપથી ચાલે તો 5 કલાકમાં એકબીજાને મળે છે. તેઓ એકબીજા તરફ ચાલે તો તે 1 કલાકમાં મળે છે, તો બે ગાડીઓની ઝડપ કેટલી હશે?
- (v) જો એક લંબચોરસની લંબાઈમાં 5 એકમ ઘટાડો થાય અને પહોળાઈમાં 3 એકમ વધારો થાય, તો લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ 9 ચોરસ એકમ જેટલું ઘટે છે. જો આપણે લંબાઈમાં 3 એકમ અને પહોળાઈમાં 2 એકમ વધારોએ તો ક્ષેત્રફળ 67 ચોરસ એકમ વધે છે. તો લંબચોરસનાં પરિમાણ શોધો.

3.5 દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણના સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી શકાય તેવાં સમીકરણો



આ વિભાગમાં આપણે સુરેખ ન હોય પરંતુ યોગ્ય આદેશ વડે સુરેખ સમીકરણોમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય એવાં સમીકરણયુગ્મ જોઈશું. આ માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 17 : આપેલા સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ શોધો :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13,$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

ઉકેલ : આપણે સમીકરણયુગ્મને આ રીતે લખીએ,

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \quad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \quad (2)$$

આ સમીકરણો $ax + by + c = 0$ ના સ્વરૂપમાં નથી. હવે સમીકરણ (1) અને (2) માં,

$$\frac{1}{x} = p \text{ અને } \frac{1}{y} = q \text{ આદેશ લેતાં,}$$

$$2p + 3q = 13 \quad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \quad (4)$$

તેથી, આપણને સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સ્વરૂપ મળશે.

હવે, આપણે કોઈ પણ પદ્ધતિ દ્વારા આ સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીએ અને તેમ કરતાં $p = 2, q = 3$ મળશે.

$$\text{તમે જાણો છો કે, } p = \frac{1}{x} \text{ અને } q = \frac{1}{y}$$

p અને q ની કિમત મૂકતાં,

$$\frac{1}{x} = 2 \text{ એટલે કે } x = \frac{1}{2} \text{ અને } \frac{1}{y} = 3 \text{ એટલે કે } y = \frac{1}{3}$$

ચકાસણી : $x = \frac{1}{2}$ અને $y = \frac{1}{3}$ એ આપેલ સમીકરણોમાં મૂકતાં, બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

ઉદાહરણ 18 : નીચેના સમીકરણયુગ્મોને સુરેખ સમીકરણયુગ્મમાં રૂપાંતરિત કરીને ઉકેલો :

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{1}{x-1} = p$ અને $\frac{1}{y-2} = q$.

$$5 \left(\frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{y-2} = 2 \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{1}{x-1} \right) - 3 \left(\frac{1}{y-2} \right) = 1 \quad (2)$$

$$\text{રૂપાંતરિત સમીકરણો \quad \quad \quad 5p + q = 2} \quad (3)$$

$$6p - 3q = 1 \quad (4)$$

સમીકરણ (3) અને (4) સુરેખ સમીકરણયુગ્મના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે. હવે, તમે કોઈ પણ પદ્ધતિ દ્વારા આ સમીકરણો ઉકેલી શકો. ઉકેલતાં આપણાને $p = \frac{1}{3}$ અને $q = \frac{1}{3}$ મળશે.

હવે p માટે $\frac{1}{x-1}$ મૂકતાં, $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$ મળો.

$$\therefore x - 1 = 3 \text{ એટલે કે } x = 4$$

તે જ રીતે q માટે $\frac{1}{y-2}$ મૂકતાં, $\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$

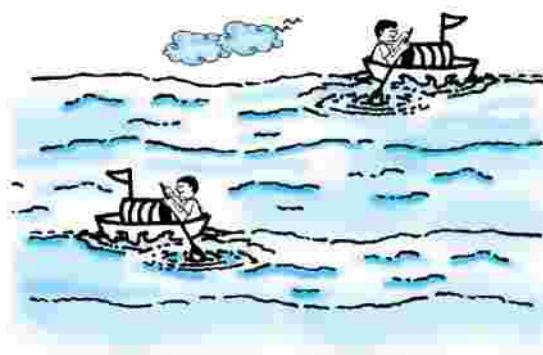
$$\therefore y - 2 = 3 \text{ એટલે કે } y = 5$$

$x = 4, y = 5$ એ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ છે.

ચકાસણી : સમીકરણ (1) અને (2) માં $x = 4$ અને $y = 5$ મૂકી જોતાં સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તે ચકાસી શકાય.

ઉદાહરણ 19 : એક હોડી નદીના સામા પ્રવાહે 30 કિમી અને પ્રવાહની દિશામાં 44 કિમી અંતર 10 કલાકમાં કાપે છે. તે હોડીને તે જ નદીમાં 40 કિમી સામા પ્રવાહે અને 55 કિમી પ્રવાહની દિશામાં કાપતાં 13 કલાક જેટલો સમય લાગે છે. નદીના પ્રવાહની અને હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ x કિમી/કલાક છે અને પ્રવાહની ઝડપ y કિમી/કલાક છે. તેથી પ્રવાહની દિશામાં હોડીની ઝડપ $(x + y)$ કિમી/કલાક થાય અને સામા પ્રવાહે હોડીની ઝડપ $(x - y)$ કિમી/કલાક થશે.



$$\text{ઉપરાંત સમય} = \frac{\text{અંતર}}{\text{જડ્ય}}$$

તેથી હોયી 30 કિમી પ્રવાહની સામેની દિશામાં જાય ત્યારે લાગતો સમય t_1 કલાકમાં લઈએ તો

$$t_1 = \frac{30}{x-y}$$

જો હોયી 44 કિમી પ્રવાહની દિશામાં જાય ત્યારે લાગતો સમય t_2 કલાકમાં લઈએ તો

$$t_2 = \frac{44}{x+y}$$

વળી, $t_1 + t_2 = 10$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \quad (1)$$

તે જ પ્રમાણે, 40 કિમી સામા પ્રવાહે અને 55 કિમી પ્રવાહની દિશામાં અંતર કાપતાં લાગતો સમય 13 કલાક છે.

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \quad (2)$$

$$(1) \text{ અને } (2) \text{ માં \ } \frac{1}{x-y} = u \text{ અને } \frac{1}{x+y} = v \text{ લઈએ,} \quad (3)$$

સમીકરણ (1) અને (2)માં આ કિમતો મૂક્તાં આપણને સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મળશે.

$$30u + 44v = 10 \text{ અથવા } 30u + 44v - 10 = 0 \quad (4)$$

$$40u + 55v = 13 \text{ અથવા } 40u + 55v - 13 = 0 \quad (5)$$

ચોકડી ગુણાકારની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{u}{44(-13)-55(-10)} = \frac{v}{40(-10)-30(-13)} = \frac{1}{30(55)-44(40)}$$

$$\therefore \frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

$$\therefore u = \frac{1}{5}, v = \frac{1}{11}$$

હવે, u અને v ની કિમત સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5} \text{ અને } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$$

$$\therefore x - y = 5 \text{ અને } x + y = 11 \quad (6)$$

આ સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં,

$$2x = 16$$

$$\therefore x = 8$$

(6) માં આપેલ સમીકરણોની બાદબાકી કરતાં,

$$2y = 6$$

$$\therefore y = 3$$

સ્થિર પાણીમાં હોડીની ઝડપ 8 કિમી/કલાક અને નદીના પ્રવાહની ઝડપ 3 કિમી/કલાક છે.

ચકાસણી : ઉકેલ પ્રશ્નની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 3.6

1. નીચેનાં સમીકરણયુગમને યોગ્ય આદેશ વડે સુરેખ સમીકરણયુગમમાં રૂપાંતરિત કરીને તેમનો ઉકેલ મેળવો :

$$(i) \frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2 \quad (ii) \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6} \quad \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$$

$$(iii) \frac{4}{x} + 3y = 14 \quad (iv) \frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{3}{x} - 4y = 23 \quad \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$$(v) \frac{7x-2y}{xy} = 5 \quad (vi) 6x + 3y = 6xy$$

$$\frac{8x+7y}{xy} = 15 \quad 2x + 4y = 5xy$$

$$(vii) \frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \quad (viii) \frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2 \quad \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$$

2. નીચેની સમસ્યાઓમાંથી સમીકરણયુગમ રચો અને તેમનો ઉકેલ શોધો :

- રીતુ પ્રવાહની દિશામાં 20 કિમી અંતર 2 કલાકમાં અને પ્રવાહની સામેની દિશામાં 4 કિમી અંતર 2 કલાકમાં કાપે છે. તેની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ અને પ્રવાહની ઝડપ શોધો.
- 2 ખીઓ અને 5 પૂરુષો સાથે મળીને એક ભરતકામ 4 દિવસમાં પૂરું કરી શકે છે. જો 3 ખીઓ અને 6 પૂરુષોને તે જ કામ સોંપવામાં આવે તો તે કામ 3 દિવસમાં પૂરું કરે છે. તો એક ખીને સ્વતંત્ર રીતે કામ પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે ? એક પૂરુષને સ્વતંત્ર રીતે કામ પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે ?
- રૂહી તેના વતન જવા માટે 300 કિમીની મુસાફરી અંશતઃ ટ્રેન દ્વારા અને અંશતઃ બસ દ્વારા કરે છે. જો તે 60 કિમી મુસાફરી ટ્રેન દ્વારા અને બાકીની મુસાફરી બસ દ્વારા કરે તો તેને વતન પહોંચતાં 4 કલાક લાગે છે. જો તે ટ્રેન દ્વારા 100 કિમી અને બાકીની મુસાફરી બસ દ્વારા કરે તો તેને વતન પહોંચતાં 10 મિનિટ વધારે લાગે છે, તો ટ્રેન અને બસની પ્રતિ કલાક સરેરાશ ઝડપ શોધો.

સ્વાધ્યાય 3.7 (વૈકલ્પિક)*

- બે ભિત્રો અની અને બીજુની ઉંમરનો તફાવત 3 વર્ષ છે. અનીના પિતા ધરમની ઉંમર (વર્ષમાં) અનીની ઉંમરથી બમણી અને બીજુની ઉંમર (વર્ષમાં) તેની બહેન કેથી કરતાં બે ગણી છે. જો કેથી અને ધરમની ઉંમરના વર્ષનો તફાવત 30 વર્ષ હોય, તો અની અને બીજુની ઉંમર શોધો.
- એક વક્તિ તેના ભિત્રને કહે છે, ‘જો તું મને સો રૂપિયા આપે તો મારી પાસે તારાથી બે ગણા રૂપિયા હશે.’ બીજો વક્તિ કહે છે “જો તું મને દસ રૂપિયા આપે, તો મારી પાસે તારાથી છ ગણા રૂપિયા હશે.” અનુકૂળે બંનેની મૂડી રકમ જણાવો.

[ભાસ્કર-II ના બીજગણિતમાંથી] [સૂચન : $x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$]

- એક ટ્રેન અચળ જડપે ચોક્કસ અંતર કાપે છે. જો ટ્રેનની જડપમાં 10 કિમી/કલાક વધારો થાય તો, તે મુસાફરી માટે નક્કી સમય કરતાં 2 કલાક ઓછો સમય લે છે અને ટ્રેનની જડપમાં 10 કિમી/કલાકનો ઘટાડો કરતાં, તે મુસાફરી માટે નક્કી સમય કરતાં 3 કલાક વધારે સમય લે છે, તો ટ્રેન દ્વારા કપાયેલું કુલ અંતર શોધો.
- એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને હારમાં ઊભા રાખવામાં આવ્યા છે. દરેક હારમાં 3 વિદ્યાર્થીઓ વધારે ઊભા રાખતાં 1 હાર ઓછી બને છે. 3 વિદ્યાર્થીઓ પ્રત્યેક હારમાં ઓછા ઊભા રાખતાં 2 હાર વધારે બને છે, તો વર્ગખંડમાં રહેલા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.
- સમીકરણો $5x - y = 5$ અને $3x - y = 3$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાના આલોખ દોરો. y -અક્ષ અને બંને રેખાઓ દ્વારા બનતાં ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ જણાવો.
- નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ ઉકેલો :

(i) $px + qy = p - q$

(ii) $ax + by = c$

$qx - py = p + q$

$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

(iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

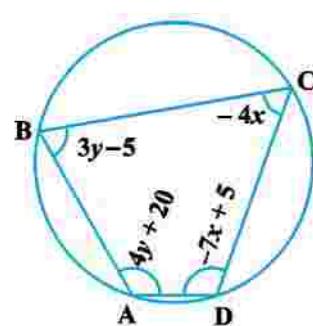
$ax + by = a^2 + b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$

$-378x + 152y = -604$

- (આકૃતિ 3.7 જુઓ.) જો ABCD ચકીય ચતુર્ભુષા હોય, તો તે ચકીય ચતુર્ભુષાના ખૂણાઓ શોધો.



આકૃતિ 3.7

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષા માટે ધ્યાનમાં લેવાનો નથી.

3.6 सार्वज्ञ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મૃદ્ગાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. એકના એક જ બે ચલમાં બે સૂરેખ સમીકરણોને આપણે દ્વિચલ સૂરેખ સમીકરણ્યુગમ કહીશું.

द्वियल सरेख सभीकरणयात्रमनं व्यापक स्वतुपः

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, જ્યાં $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

तथा $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

2. દ્વિયલ સરેખ સમીકરણ્યુગમનો ઉકેલ મેળવવાની બે રીતો છે :

- ### 3. આલેખની રીત :

સરેખ સમીકરણયુગમનો આલેખ એક જ આલેખપત્ર પર બે રેખાઓ દર્શાવે છે.

- (i) જો ઉપર્યુક્ત બંને રેખાઓ પરસ્પર છેદે તો સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ હોય અને બે રેખાઓના અનન્ય છેદબિંદુના યામ એ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ દર્શાવે. આ પરિસ્થિતિમાં આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય.

- (ii) જો બંને રેખાઓ સંપાતી હોય, તો રેખા પરનાં અનંત બિંદુઓના યામ સમીકરણનો ઉકેલ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો છે તેમ કહેવાય. આ પરિસ્થિતિમાં બંને સમીકરણો સુરેખ અવલંબી છે તેમ કહેવાય.

- (iii) જો બને રેખાઓ સમાંતર હોય, તો તેમનું સામાન્ય બિંદુ ન મળે. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણયુગ્મને કોઈ વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણો સુસંગત નથી તેમ કહેવામ.

4. સુરેખ સમીકરણયુગમના ઉકેલ માટે ત્રણ બૈજિક રીતો છે.

- (i) આદેશની રીત (ii) લોપની રીત (iii) ચોકરી ગુણાકારની રીત

5. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પો ઉદ્દૂભવે છે.

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ तथा $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; आस्थितिमां सुरेख समीकरणयुग्म सुसंगत न थी।

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે અને અવલંબી છે.

6. સુરેખ ન હોય તેવાં કેટલાંક સમીકરણોને યોગ્ય આદેશ પસંદ કરી સુરેખ સમીકરણમાં ઉપાંતર કરી શક્ય છે.





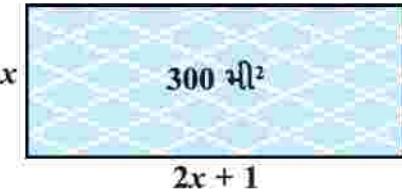
M8E3D2

દ્વિઘાત સમીકરણ

4

4.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 2 માં તમે વિવિધ પ્રકારની બહુપદીનો અભ્યાસ કર્યો. શુન્યેતર a માટે $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ દ્વિઘાત બહુપદી છે. જો આ બહુપદીનું મૂલ્ય શૂન્ય લેવામાં આવે, તો આપણને દ્વિઘાત સમીકરણ મળે. વાસ્તવિક જીવનસંબંધી ઘણા બધા પ્રશ્નોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક ધાર્મિક ટ્રસ્ટને 300 ચોરસ મીટર જગામાં જેની લંબાઈ તેની પહોળાઈના બમણા કરતાં 1 મીટર વધારે હોય તેવો એક પ્રાર્થનાંડ બાંધવો છે. તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી હોવી જોઈએ? ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, તેની લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર હોવી જોઈએ. આપણે આ માહિતી આફૃતિ 4.1 પ્રમાણે ચિત્ર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ.



$$\text{હવે, ખંડનું ક્ષેત્રફળ} = (2x + 1) \cdot x \text{ મી}^2 = (2x^2 + x) \text{ મી}^2$$

$$\text{આથી, } 2x^2 + x = 300 \text{ (આપેલ છે.)}$$

$$\text{આમ, } 2x^2 + x - 300 = 0$$

$$\text{આથી, ખંડની પહોળાઈ દ્વિઘાત સમીકરણ } 2x^2 + x - 300 = 0 \text{ નું સમાધાન કરે છે.}$$

ઘણા લોકો માને છે કે સૌપ્રથમ બેબીલોનવાસીઓએ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવ્યો. ઉદાહરણ તરીકે, બે ધન સંખ્યાના સરવાળા અને ગુણાકાર આપેલ હોય, તો તે સંખ્યાઓ કેવી રીતે મેળવવી તે એ લોકો જાણતાં હતાં અને આ પ્રશ્ન $x^2 - px + q = 0$ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવાને સમકક્ષ છે. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી યુલિયસ Euclid લંબાઈ શોધવાની ભૌમિતિક રીત વિકસાવી. તેને આપણે વર્તમાન પરિભાષામાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ કહીએ છીએ. સામાન્ય રીતે, દ્વિઘાત સમીકરણ ઉકેલવાનો શ્રેય મોટે ભાગે પ્રાચીન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓને જાય છે. વાસ્તવમાં, બ્રહ્મગુપ્ત Brahmagupta (C.E. 598 - C.E.665) $ax^2 + bx = c$ દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલ માટે સ્પષ્ટ સૂત્ર આપ્યું, પછીથી, શ્રીપત્ર આચાર્ય Shridharacharya (C.E. 1025)એ દ્વિઘાત સૂત્ર તરીકે ઓળખાતું સૂત્ર પ્રસ્થાપિત કર્યું. (તેનો ઉલ્લેખ ભાસ્કર-II માં કરેલ છે.) તેમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે પૂર્ણ વર્ગની

આફૃતિ 4.1

ગણિત

રીતનો ઉપયોગ કરાય છે. એક અરબ ગણિતશાસ્કી **અલ-ખવારિઝ્મી (Al-khwarizmi)** (C.E. 800 ની આસપાસ)એ પણ વિવિધ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો અભ્યાસ કર્યો હતો. **અબ્રાહમ બાર હિયા હા-નાસી (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi)** એ યુરોપમાં C.E. 1145 માં તેણે લખેલ પુસ્તક **Liber Embadorum** માં બિન્ન-બિન્ન દ્વિઘાત સમીકરણના પૂર્ણ ઉકેલ આપ્યા.

આ પ્રકરણમાં તમે દ્વિઘાત સમીકરણો અને તેમના ઉકેલ મેળવવા માટેની જુદી-જુદી રીત શીખશો. દ્વિઘાત સમીકરણના રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગ પણ જોશો.

4.2 દ્વિઘાત સમીકરણ

a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તથા $a \neq 0$ હોય, તો ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, $2x^2 + x - 300 = 0$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. આ જ રીતે, $2x^2 - 3x + 1 = 0, 4x - 3x^2 + 2 = 0$ અને $1 - x^2 + 300 = 0$ પણ દ્વિઘાત સમીકરણો છે.



I6X1G5

ખરેખર તો $p(x)$ એ 2 ધાતની બહુપદી હોય, તો $p(x) = 0$ પ્રકારનું કોઈ પણ સમીકરણ, એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. પરંતુ જ્યારે આપણે $p(x)$ ના પ્રત્યેક પદને ધાતાંકના ઊતરતા કમમાં લખીએ ત્યારે આપણાને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ મળે છે. **આમ, $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહેવાય.**

આપણી આસપાસની દુનિયામાં અનેક જુદી-જુદી સ્થિતિમાં અને ગણિતનાં બિન્ન ક્ષેત્રોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉદ્દ્દેશ થતો હોય છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ સ્થિતિને ગાણિતિક રીતે વ્યક્ત કરો :

- જહોન અને જીવંતી પાસે કુલ 45 લખોટીઓ છે. પ્રત્યેક વ્યક્તિ પાંચ-પાંચ લખોટી ખોઈ કાઢે છે અને હવે તેમની પાસે બાકી રહેલી લખોટીઓની સંખ્યાનો ગુણાકાર 124 છે, આપણે જાણવું છે કે તેમની પાસે શરૂઆતમાં કેટલી લખોટીઓ હતી.
- એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલાંક રમકડાં બનાવે છે. પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (રૂપિયામાં) 55માંથી એક દિવસમાં ઉત્પાદિત થતાં રમકડાંની સંખ્યા બાદ કરીએ તેટલો છે. કોઈ એક ચોક્કસ દિવસે ઉત્પાદન-ખર્ચ ₹ 750 છે. આપણે તે દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા જાણવી છે.

ઉકેલ :

- ધારો કે જહોન પાસે x લખોટીઓ છે.

આથી, જીવંતી પાસેની લખોટીઓની સંખ્યા = $45 - x$

(કેમ ?)

જહોન પાસે 5 લખોટીઓ ખોઈ કાઢ્યા બાદની લખોટીઓની સંખ્યા = $x - 5$

જીવંતી પાસે 5 લખોટી ખોઈ કાઢ્યા પછી લખોટીની સંખ્યા = $45 - x - 5 = 40 - x$

આથી, તેમનો ગુણાકાર = $(x - 5)(40 - x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

આથી, $-x^2 + 45x - 200 = 124$

(ગુણાકાર 124 આપેલ છે.)

$$\therefore -x^2 + 45x - 324 = 0$$

$$\therefore x^2 - 45x + 324 = 0$$

આથી, જહોન પાસેની લખોટીની સંખ્યા, દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 45x + 324 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. માંગેલ પ્રશ્નની આ ગાણિતિક રજૂઆત છે.

(ii) ધારો કે નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા x છે.

આથી, તે નિશ્ચિત દિવસે પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (₹ માં) = $55 - x$.

આથી, તે દિવસનો રમકડાં બનાવવાનો કુલ ખર્ચ = $x (55 - x)$

આથી, $x (55 - x) = 750$

$$\therefore 55x - x^2 = 750$$

$$\therefore -x^2 + 55x - 750 = 0$$

$$\therefore x^2 - 55x + 750 = 0$$

આથી, નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 55x + 750 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. આ આપેલ પ્રશ્નની ગાણિતિક રજૂઆત છે.

ઉદાહરણ 2 : ચકાસો કે નીચેનાં સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે નહિ :

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$

(ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$

(iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

ઉકેલ :

(i) ડા.ભા. = $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1$
 $= x^2 - 4x + 5$

આથી, $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ને
 $x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ તરીકે લખી શકાય.

$$\therefore x^2 - 6x + 8 = 0$$

$a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(ii) $x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$ અને

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$$
 છે.

આથી, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$$\therefore x + 12 = 0$$

આ સમીકરણ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું નથી.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

(iii) અહીં, ડા.ભા. = $x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

આથી, $x(2x + 3) = x^2 + 1$ ને

$$2x^2 + 3x = x^2 + 1 સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.$$

આથી, $x^2 + 3x - 1 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે, $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(iv) અહીં, જ.બા. = $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

આથી, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ને

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4 \text{ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.}$$

$$6x^2 + 12x + 12 = 0 \quad \text{અથવા} \quad x^2 + 2x + 2 = 0$$

આ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિધાત સમીકરણ છે.

નોંધ : ચોકસાઈ રાખો. ઉપર (ii)માં આપેલ સમીકરણ દ્વિધાત સમીકરણ જેવું લાગે છે. પરંતુ તે દ્વિધાત સમીકરણ નથી.

ઉપર (iv)માં આપેલ સમીકરણ નિધાત સમીકરણ (3 ધાતવાળું સમીકરણ) જેવું દેખાય છે, દ્વિધાત સમીકરણ જેવું નહિ. પરંતુ તે દ્વિધાત સમીકરણમાં પરિવર્તિત થાય છે. આમ જોઈ શકશો કે ઘણી વખત આપેલ સમીકરણ દ્વિધાત સમીકરણ છે કે કેમ તે નક્કી કરતાં પહેલાં તેનું સાહું રૂપ આપવું જરૂરી છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચે આપેલ સમીકરણો દ્વિધાત સમીકરણો છે કે કેમ તે ચકાસો :

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. નીચે આપેલ પરિસ્થિતિઓને દ્વિધાત સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) જમીનના એક લંબચોરસ ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ 528 મી² છે. તેની લંબાઈ (મીટરમાં), પહોળાઈ (મીટરમાં)ના બમણાથી એક મીટર જેટલી વધુ છે. આપણે જમીનના આ ટુકડાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધવી છે.

(ii) બે કભિક ધન પૂર્ણાંકિનો ગુણાકાર 306 છે. આપણે આ પૂર્ણાંક શોધવા છે.

(iii) રોહનની માતા તેના કરતાં 26 વર્ષ મોટાં છે. આજથી 3 વર્ષ પછી તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 360 હશે. આપણે રોહનની હાલની ઉંમર શોધવી છે.

(iv) એક ટ્રેન 480 કિમીનું અંતર અચળ ઝડપથી કાપે છે. જો ઝડપ 8 કિમી/કલાક ઓછી હોય, તો આટલું જ અંતર કાપવા તે 3 કલાક વધુ લે છે, તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

4.3 અવયવીકરણ વડે દ્વિધાત સમીકરણનો ઉકેલ

દ્વિધાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નો વિચાર કરો. જો સમીકરણની ડાબી બાજુમાં x ને બદલે 1 લઈએ તો $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 = જ.બા.$ મળે છે. આપણે કહી શકીએ, કે, દ્વિધાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નું એક બીજી જ છે. આથી, એમ પણ આપણે કહી શકીએ કે દ્વિધાત બહુપદી $2x^2 - 3x + 1$ નું એક શૂન્ય 1 છે.

વ્યાપક રીતે, જો $ax^2 + bx + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α એ દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ નું બીજ કહેવાય. આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે,

$x = \alpha$ એ દ્વિધાત સમીકરણનો ઉકેલ છે અથવા α દ્વિધાત સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આપણે નોંધીએ કે, દ્વિધાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો તથા દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન છે.



P2B4K5

તમે પ્રકરણ 2 માં જોયું કે દ્વિધાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 શૂન્યો હોય. આથી, કોઈ પણ દ્વિધાત સમીકરણને વધુમાં વધુ 2 બીજ હોય.

તમે ધોરણ IX માં કોઈ પણ દ્વિધાત બહુપદીના મધ્યમ પદને બે ભાગમાં વહેચી તેના અવયવ પાડવાની રીત શીખી ગયા. આપણે આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ દ્વિધાત સમીકરણનાં બીજ શોધવા કરીશું. જોઈએ, આ કેવી રીતે શક્ય બને છે.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અવયવ પાડીને શોધો.

ઉકેલ : આપણે સૌપ્રથમ મધ્યમપદ $-5x$ ના બે ભાગ $-2x$ અને $-3x$ કરીએ.

$$[\text{કેમ કે } (-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3].$$

$$\text{આથી, } 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$$

$$\text{હવે, } 2x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ ને } (2x - 3)(x - 1) = 0 \text{ લખી શકાય.}$$

$$\text{આથી, } 2x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ તથા } (2x - 3)(x - 1) = 0 \text{ માટેનાં } x \text{ નાં મૂલ્યો સમાન હશે.}$$

$$\text{અર્થાત्, } 2x - 3 = 0 \text{ અથવા } x - 1 = 0.$$

$$\text{હવે } 2x - 3 = 0 \text{ પરથી } x = \frac{3}{2} \text{ અને } x - 1 = 0 \text{ પરથી } x = 1 \text{ મળશે.}$$

$$\text{આથી, } x = \frac{3}{2} \text{ અને } x = 1 \text{ આપેલ સમીકરણના ઉકેલ હશે.}$$

$$\text{બીજા શરૂઆતીના, } 1 \text{ અને } \frac{3}{2} \text{ સમીકરણ } 2x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ નાં બીજ છે.}$$

$$\text{ચકાસો કે } 1 \text{ અને } \frac{3}{2} \text{ આપેલ સમીકરણનાં બીજ છે.}$$

આપણે નોંધીએ કે $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ, $2x^2 - 5x + 3$ ના બે સૂરેખ અવયવ પાડી અને દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈને શોધ્યું છે.

ઉદાહરણ 4 : દ્વિધાત સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

$$\begin{aligned}\text{ઉકેલ : અહીં, } 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1) \\ &= (3x - 2)(2x + 1)\end{aligned}$$

$$6x^2 - x - 2 = 0 \text{ નાં બીજ એ } (3x - 2)(2x + 1) = 0 \text{ દ્વારા મળતાં } x \text{ નાં મૂલ્યો છે.}$$

$$\text{આથી, } 3x - 2 = 0 \text{ અથવા } 2x + 1 = 0$$

$$\text{અર્થાત્, } x = \frac{2}{3} \text{ અથવા } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{આથી, } 6x^2 - x - 2 = 0 \text{ નાં બીજ } \frac{2}{3} \text{ અને } -\frac{1}{2} \text{ છે.}$$

આપણે, $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નું સમાધાન કરે છે તે ચકાસીને બીજની ચકાસણી કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 5 : દ્વિઘાત સમીકરણ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

$$\begin{aligned} \text{Q34 : } 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 &= 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2 \\ &= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

આથી, સમીકરણનાં બીજું $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$ થાય તેવા x નાં મૂલ્યો છે.

$$\text{આમ, } \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0 \text{ પરથી } x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

આથી, આ બીજે બે વખત પુનરાવર્તિત અવયવ $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ ને સંગત મળો છે.

આમ, $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજી $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ ફે.

ઉદાહરણ ૬ : વિભાગ 4.1માં ચર્ચા કરેલ પ્રાર્થનાખંડની બાજુઓનાં માપ શોધો.

ઉકેલ : વિભાગ 4.1માં આપણે જોયું કે જો ખંડની પહોળાઈ x મી હોય તો x એ સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે. અવયવીકરણની રીતનો ઉપયોગ કરતાં, આપણે સમીકરણને $2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$ એમ લખી શકીએ.

$$\therefore 2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

$$\therefore (x - 12)(2x + 25) = 0$$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ $x = 12$ અથવા $x = -12.5$ છે. પરંતુ x એ ખંડની પહોળાઈ હોવાથી તે જગ્યા ન હોઈ શકે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 12 મી અને તેની લંબાઈ $2x + 1 = 25$ મી.

स्वाध्याय 4.2

- નીચે આપેલ સમીકરણના ઉકેલ અવયવીકરણની રીતથી મેળવો :
 - $x^2 - 3x - 10 = 0$
 - $2x^2 + x - 6 = 0$
 - $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$
 - $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
 - $100x^2 - 20x + 1 = 0$
 - ગ્રાહકરણ (1)માં આપેલ પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવો.
 - બે એવી સંખ્યાઓ શોધો કે જેમનો સરવાળો 27 અને ગુણાકાર 182 હોય.
 - જેના વર્ગોનો સરવાળો 365 થાય એવી બે કંબિક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ શોધો.
 - એક કાટકોણ ત્રિકોણનો વેધ તેના પાયા કરતાં 7 સેમી નાનો છે. જો કર્ણની લંਬાઈ 13 સેમી હોય, તો બાકીની બે બાજુનાં માપ શોધો.
 - એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલીક માર્ટીની વસ્તુઓ બજાવે છે. એક નિશ્ચિત દિવસે જડાયું કે પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કંમત (રૂપિયામાં), તે દિવસે ઉત્પાદિત વસ્તુના બમણા કરતાં 3 વધુ હતી. જો તે દિવસે ઉત્પાદિત ખર્ચ ₹ 90 હોય તો, ઉત્પાદિત વસ્તુની સંખ્યા અને પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કંમત શોધો.

4.4 પૂર્ણવર્ગની રીતે દ્વિધાત સમીકરણનો ઉકેલ



C4A7Y4

આગળના વિભાગમાં આપણે દ્વિધાત સમીકરણના ઉકેલની એક રીત શીખ્યાં. આ વિભાગમાં આપણે તે માટેની બીજી રીત શીખોશું.

નીચેની પરિસ્થિતિ વિચારો :

સુનીતાની અત્યારની ઉંમરથી બે વર્ષ પહેલાંની અને ચાર વર્ષ પછીની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો (વર્ષમાં) ગુણાકાર તેની અત્યારની ઉંમરના બમણાં કરતાં એક વધુ છે. તો તેની અત્યારની ઉંમર કેટલી હશે ?

આનો જવાબ શોધવા, ધારો કે તેની અત્યારની ઉંમર x વર્ષ છે. તો અત્યારથી બે વર્ષ પહેલાં અને ચાર વર્ષ પછીની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર $(x - 2)(x + 4)$ થાય.

$$\begin{aligned} \text{આથી, } (x - 2)(x + 4) &= 2x + 1 \\ \therefore x^2 + 2x - 8 &= 2x + 1 \\ \therefore x^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

આથી, સુનીતાની અત્યારની ઉંમર દ્વિધાત સમીકરણ $x^2 - 9 = 0$ નું સમાપ્તાન કરે છે.

આપણે તેને $x^2 = 9$ એમ લખી શકીએ. વર્ગમૂળ લેતાં,

$x = 3$ અથવા $x = -3$ મળે. પરંતુ, ઉંમર ધન સંખ્યા હોવાથી, $x = 3$.

આથી, સુનીતાની અત્યારની ઉંમર 3 વર્ષ છે.

હવે, દ્વિધાત સમીકરણ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ નો વિચાર કરો. તેને ઉકેલવા, આપણે $(x + 2)^2 = 9$ એમ લખી શકીએ. વર્ગમૂળ લેતાં, આપણને $x + 2 = 3$ અથવા $x + 2 = -3$ મળે.

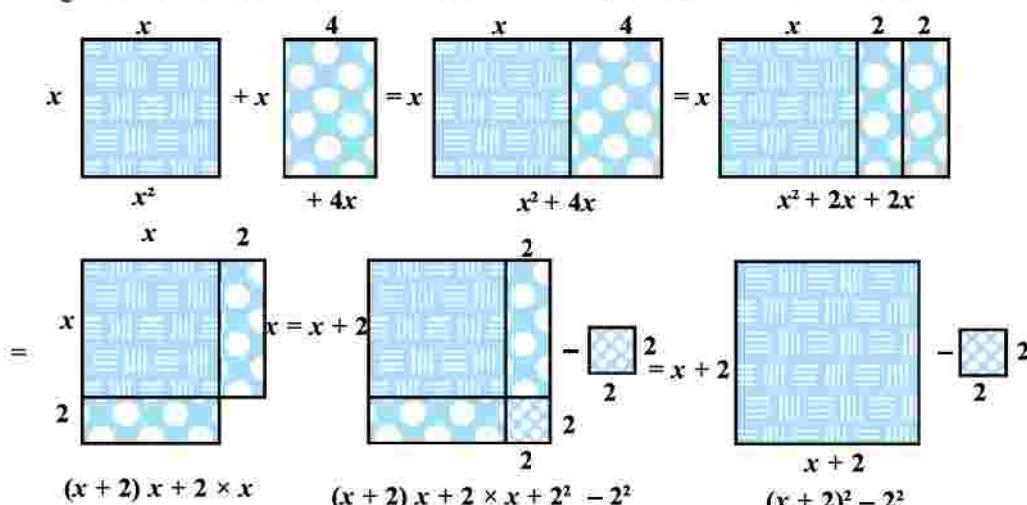
આથી, $x = 1$ અથવા $x = -5$

આમ, સમીકરણ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ નાં બીજ 1 અને -5 છે.

ઉપરના બંને ઉદાહરણોમાં x ને સમાવતું પદ પૂર્ણ વર્ગનું એક પદ છે અને આથી, વર્ગમૂળ લેતાં આપણે સરળતાથી બીજ શોધી શકીએ છીએ. પરંતુ સમીકરણ $x^2 + 4x - 5 = 0$ નો ઉકેલ શોધવાનું કહે, તો શું થાય ? આપણે ઘણુંખરું અવયવીકરણની રીત ઉપયોગમાં લઈએ, સિવાય કે (કોઈક રીતે !) આપણને સૂઝે કે $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ નો ઉકેલ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ના ઉકેલ બરાબર છે. અલબાન્સ, આપણે કોઈ પણ દ્વિધાત સમીકરણને $(x + a)^2 - b^2 = 0$ સ્વરૂપે ફેરવી શકીએ અને ત્યાર બાદ સરળતાથી તેનાં બીજ શોધી શકીએ. આવો જોઈએ કે શું આ સંભવ છે ? (જુઓ આકૃતિ 4.2.)

આ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $x^2 + 4x$ ને $(x + 2)^2 - 4$ માં ફેરવેલ છે.



આકૃતિ 4.2

આ પ્રક્રિયા નીચે પ્રમાણે થાય છે :

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x &= (x^2 + \frac{4}{2}x) + \frac{4}{2}x \\
 &= x^2 + 2x + 2x \\
 &= (x+2)x + 2 \times x \\
 &= (x+2)x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2 \\
 &= (x+2)x + (x+2) \times 2 - 2 \times 2 \\
 &= (x+2)(x+2) - 2^2 \\
 &= (x+2)^2 - 4
 \end{aligned}$$

આમ, $x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ ને પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની આ રીત પ્રમાણે તેને $(x+2)^2 - 9 = 0$ તરીકે લખી શકાય. આ પ્રક્રિયાને પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની રીત કહેવાય છે.

ટૂકમાં, તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$$x^2 + 4x = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ નીચેની રીતે લખી શકાય.

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

$$\therefore (x+2)^2 - 9 = 0$$

હવે, સમીકરણ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ લઈએ. આપણે નોંધીએ કે, x^2 -નો સહગુણક પૂર્ણવર્ગ નથી. આથી, સમીકરણની બંને બાજુએ 3 વડે ગુણતાં,

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

હવે, $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

આથી, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ને

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \text{ તરીકે લખી શકાય.}$$

$$\therefore \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

આથી, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ નાં બીજ અને $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ નાં બીજ સમાન છે.

$$\therefore 3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ અથવા } 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

(આપણે $3x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$ લખી શકીએ. જ્યાં \pm ધન કે ઋણ દર્શાવે છે.)

$$\therefore 3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{અથવા} \quad 3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \quad \text{અથવા} \quad x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = 1 \quad \text{અથવા} \quad x = \frac{4}{6}$$

$$\text{આમ, } x = 1 \quad \text{અથવા} \quad x = \frac{2}{3}$$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ 1 અને $\frac{2}{3}$ છે.

નોંધ : આ પ્રશ્નના ઉકેલની બીજ રીત નીચે પ્રમાણે છે :

$$\text{સમીકરણ} \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{અને}$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \quad \text{સમાન છે.}$$

$$\begin{aligned} \text{હવે,} \quad x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} &= \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3} \\ &= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36} \\ &= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} \\ &= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

આથી, $3x^2 - 5x + 2 = 0$ નાં બીજ અને $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

$$\text{આથી } x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6} \quad \text{અર્થात् } x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1 \quad \text{અથવા} \quad x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

ચાલો આપણે આ પ્રક્રિયા દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : ઉદાહરણ 3માં આપેલ સમીકરણને પૂર્ણવર્ગની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ અને $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ સમાન છે.

$$\text{હવે,} \quad x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ તરીકે પણ લખી શકાય.

આથી સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ નાં બીજ સમાન જ છે.

હવે, $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ અને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ સમાન છે.

$$\therefore x - \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \text{ અથવા } x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \text{ અથવા } x = 1$$

આથી, સમીકરણના ઉકેલ $x = \frac{3}{2}$ અને 1 છે.

ચાલો, આપણે આ ઉકેલ ચકાસીએ.

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ માં } x = \frac{3}{2} \text{ લેતાં, } 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0 \text{ મળે, જે સત્ય છે.}$$

આ જ રીતે, આપણે ચકાસી શકીએ કે $x = 1$ પણ આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 7 માં સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને 2 વડે ભાગતાં $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ મળે છે કે જેથી પ્રથમ પદ પૂર્ણવર્ગ બને છે અને પછી પૂર્ણવર્ગમાં પરિવર્તિત કરવામાં આવે છે અથવા સમીકરણની બંને બાજુને 2 વડે ગુણતાં, પ્રથમ પદ $4x^2 = (2x)^2$ મળે અને પછી પૂર્ણવર્ગમાં પરિવર્તિત કરી શકાય.

આ રીત નીચેના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદાહરણ 8 : સમીકરણ $5x^2 - 6x - 2 = 0$ નાં બીજ પૂર્ણવર્ગની રીતે શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 5 વડે ગુણતાં,

$$25x^2 - 30x - 10 = 0 \text{ મળે.}$$

$$\text{આથી, } (5x)^2 - 2 \times (5x) \times (3) + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

$$\therefore (5x - 3)^2 - 9 - 10 = 0$$

$$\therefore (5x - 3)^2 - 19 = 0$$

$$\therefore 5x - 3 = \pm \sqrt{19}$$

$$\therefore 5x = 3 \pm \sqrt{19}$$

$$\text{આમ, } x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$$

$$\text{આથી, બીજ } \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \text{ અને } \frac{3 - \sqrt{19}}{5} \text{ છે.}$$

$$\text{ચકાસો કે, } \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \text{ અને } \frac{3 - \sqrt{19}}{5} \text{ બીજ છે.}$$

ઉદાહરણ 9 : $4x^2 + 3x + 5 = 0$ નાં બીજ પૂર્ણવર્ગની રીતે શોધો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે $4x^2 + 3x + 5 = 0$ અને $(2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$ સમાન છે.

$$\therefore \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

$$\therefore \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

$$\therefore \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{71}{16} < 0$$

પરંતુ x ના કોઈ પણ વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$ ઋણ ના હોઈ શકે. (કેમ ?)

આથી, કોઈ જ વાસ્તવિક સંખ્યા x આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ. આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી.

હવે, તમે પૂર્ણવર્ગની રીતનાં ઘણાં ઉદાહરણો જોયાં.

આથી, આપણે વ્યાપક રીતે વિચારીએ.

દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) નો વિચાર કરો. બંને બાજુ શૂન્યેતર a વડે ભાગતાં,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ મળે.}$$

$$\text{તે } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \text{ ને સમાન છે.}$$

$$\text{એટલે કે } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ અને

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{અર્થાત्}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{નાં બીજ સમાન હશે.} \quad (1)$$

જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, સમીકરણ (1)ની બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

આમ, જો $b^2 - 4ac \geq 0$ ત્થા, $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી. (તમ ?)

આમ, જો $b^2 - 4ac \geq 0$ ત્થા, દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ થાય.

દ્વિધાત સમીકરણનાં બીજ શોધવાના આ સૂત્રને દ્વિધાત સૂત્ર કહેવાય છે.

ચાલો દ્વિધાત સૂત્રનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : સ્વાચ્છાય 4.1ના પ્રશ્ન 2(i)ને દ્વિધાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર થાય. હવે, આપણને આપેલ છે કે $x(2x + 1) = 528$ અર્થાતું $2x^2 + x - 528 = 0$.

$a = 2, b = 1, c = -528$ માટે, આ સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ સ્વરૂપનું છે.

આથી દ્વિધાત સૂત્ર દ્વારા મળતો ઉકેલ,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$\therefore x = \frac{64}{4} \text{ અથવા } x = -\frac{66}{4}$$

$$\therefore x = 16 \text{ અથવા } x = -\frac{33}{2}$$

પરંતુ x ઋણ ના હોઈ શકે, કેમ કે તે એક પરિમાણ છે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 16 મીટર અને આથી લંબાઈ 33 મીટર થાય.

તમારે એ ચકાસવું જોઈએ કે આ ડિમતો આપેલ પ્રશ્નની શરતોનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 11 : બે કભિક અયુગમ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો 290 હોય, તો બંને સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે કભિક અયુગમ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ પૈકી નાની સંખ્યા x છે. આથી બીજ સંખ્યા $x + 2$ થાય.

આપેલ પ્રશ્ન મુજબ,

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$\therefore x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\therefore 2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x - 143 = 0$$

આ x માં દ્વિધાત સમીકરણ છે.

દ્વિધાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$$\therefore x = 11 \text{ અથવા } x = -13$$

પરંતુ x ધન અયુગમ સંખ્યા આપેલ છે.

$$\therefore x \neq -13. \text{ આથી } x = 11$$

આથી, માંગેલ બે કંભિક અયુગમ પૂર્ણાંકો 11 અને 13 છે.

$$\text{ચકાસો : } 11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290.$$

ઉદાહરણ 12 : એક એવો લંબચોરસ બગીચો બનાવવો છે કે જેની પહોળાઈ તેની લંબાઈ કરતાં 3 મી ઓછી હોય. તેનું ક્ષેત્રફળ જેનો પાયો લંબચોરસ બગીચાની પહોળાઈ જેટલો હોય અને વેધ 12 મી હોય તેવા પહેલેથી બનેલા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણાકાર બગીચાના ક્ષેત્રફળ કરતાં 4 મી² વધુ હોય લંબચોરસ બગીચાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો. (જુઓ આંકૃતિ 4.3).

ઉકેલ : ધારો કે લંબચોરસ બગીચાની પહોળાઈ x મી છે.

$$\text{આથી, તેની લંબાઈ} = (x + 3) \text{ મી}$$

$$\begin{aligned} \text{આથી, લંબચોરસ બગીચાનું ક્ષેત્રફળ} &= x(x + 3) \text{ મી}^2 \\ &= (x^2 + 3x) \text{ મી}^2 \end{aligned}$$

$$\text{હવે, સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો} = x \text{ મી}$$

$$\text{આથી તેનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x \text{ મી}^2$$

આપણી જરૂરિયાત મુજબ,

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$\therefore x^2 - 3x - 4 = 0$$

દ્વિધાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ અથવા } -1$$

પરંતુ $x \neq -1$.

(કમ ?)

આથી, $x = 4$.

આમ, બગીચાની પહોળાઈ = 4 મી અને લંબાઈ 7 મી થશે.

ચકાસણી : લંબચોરસ બગીચાનું ક્ષેત્રફળ = 28 મી²

$$\text{ત્રિકોણાકાર બગીચાનું ક્ષેત્રફળ} = 24 \text{ મી}^2 = (28 - 4) \text{ મી}^2$$

ઉદાહરણ 13 : દ્વિધાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી, શક્ય હોય તો નીચેનાં દ્વિધાત સમીકરણનાં બીજ મેળવો :

$$(i) 3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (ii) x^2 + 4x + 5 = 0 \quad (iii) 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

ઉકેલ :

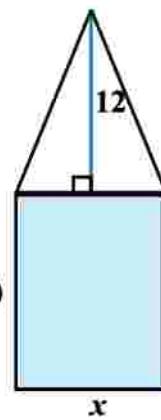
$$(i) \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\text{અહીં, } a = 3, b = -5, c = 2$$

$$\text{આથી, } b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0.$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \text{ અર્થાત્, } x = 1 \text{ અથવા } x = \frac{2}{3}$$

આમ, બીજ $\frac{2}{3}$ અને 1 છે.



આંકૃતિ 4.3

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0.$

અહીં, $a = 1, b = 4, c = 5$

આથી, $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0.$

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ ઋષ ના હોઈ શકે. આથી, $b^2 - 4ac$ નું વર્ગમૂળ વાસ્તવિક ન મળે.

આથી, આપેલ સમીકરણને એક પણ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0.$

અહીં, $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$

આથી, $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0.$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0 \text{ અર્થાત् } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

આથી, બીજ $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ બને.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં સમીકરણનાં બીજ શોધો :

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

ઉકેલ :

(i) સમીકરણ $x + \frac{1}{x} = 3$ ને x વડે ગુણતાં,

$$x^2 + 1 = 3x$$

અર્થાત્, $x^2 - 3x + 1 = 0.$

આ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

અહીં, $a = 1, b = -3, c = 1$

આથી, $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{કમ?})$$

આથી, બીજ $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ અને $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ બને.

(જુઓ કે $x \neq 0$)

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

$x \neq 0, 2$ હોવાથી, સમીકરણને $x(x-2)$ વડે ગુણતાં,

$$\begin{aligned} (x-2) - x &= 3x(x-2) \\ &= 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

આથી, આપેલ સમીકરણ પરિવર્તિત થઈ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ બને. આ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

અહીં, $a = 3, b = -6, c = 2$ આથી, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

આથી, એંઝ $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ અને $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ છે.

નોંધ : જુઓ કે $x \neq 0$ અથવા 2

ઉદાહરણ 15 : એક મોટરબોટની શાંત પાણીમાં જડપ 18 કિમી/કલાકની છે. જો પ્રવાહની સામી દિશામાં 24 કિમી અંતર કાપવા લાગતો સમય, પ્રવાહની દિશામાં તેટલું ૪ અંતર કાપવા લાગતો સમય કરતાં 1 કલાક વધુ હોય, તો પ્રવાહની જડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પ્રવાહની ઝડપ x કિમી/કલાક છે.

આથી, પ્રવાહની સામી બાજુ જતાં મોટરબોટની ઝડપ = $(18 - x)$ કિમી/કલાક અને

પ્રવાહની દિશામાં જતાં મોટરબોટની ઝડપ = $(18 + x)$ કિમી/કલાક હશે.

$$\text{प्रवाहनी सामी बाजू जवा लागतो समय} = \frac{\text{अंतर}}{\text{जड़प}} = \frac{24}{18-x} \text{ क्लाक}$$

આ જ પ્રમાણે પ્રવાહની દિશામાં જવા લાગતો સમય = $\frac{24}{18+x}$ કલાક

પ્રશ્નાની માહિતી પરથી,

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$$\therefore 24(18+x) - 24(18-x) = (18-x)(18+x)$$

$$\therefore x^2 + 48x - 324 = 0$$

દ્વિધાત સૂત્રાનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2} = \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ અથવા } -54$$

પરંતુ, x એ પ્રવાહની જડપ હોવાથી ગ્રાણ હોઈ શકે નહિ. આથી, બીજ $x = -54$ ને અવગાણતાની, $x = 6$ મળે. આથી, પ્રવાહની જડપ 6 કિમી/કલાક છે.

स्वाध्याय 4.3

- નીચે આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ, શક્ય હોય તો પૂર્ણવર્ગની રીતથી મેળવો :
 - $2x^2 - 7x + 3 = 0$
 - $2x^2 + x - 4 = 0$
 - $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$
 - $2x^2 + x + 4 = 0$
 - પ્રશ્ન 1માં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી મેળવો.
 - નીચેનાં સમીકરણનાં બીજ શોધો :

$$(i) x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$$

$$(ii) \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$$

ગણિત

4. રહેમાનની આજથી ત્રણ વર્ષ પહેલાંની ઉમરના (વર્ષમાં) વસ્ત અને હવેથી 5 વર્ષ પછીની ઉમરના વસ્તનો સરવાળો $\frac{1}{3}$ છે. તેની અત્યારની ઉમર શોધો.
5. એક વર્ગ કસોટીમાં શેફાલીના ગણિત અને અંગ્રેજીના ગુણનો સરવાળો 30 છે. જો તેને ગણિતમાં 2 ગુણ વધુ અને અંગ્રેજીમાં 3 ગુણ ઓછા મળ્યા હોત, તો તેમનો ગુણાકાર 210 થયો હોત. તેણે આ બંને વિષયમાં મેળવેલ ગુણ શોધો.
6. એક લંબચોરસ ખેતરના વિકર્ષણનું માપ તેની નાની બાજુના માપથી 60 મીટર વધુ છે. જો મોટી બાજુ, નાની બાજુ કરતાં 30 મીટર વધુ હોય તો, ખેતરની બાજુઓનાં માપ શોધો.
7. બે સંખ્યાઓના વર્ગોનો તફાવત 180 છે. નાની સંખ્યાનો વર્ગ મોટી સંખ્યા કરતાં 8 ગણો છે. બંને સંખ્યાઓ શોધો.
8. એક ટ્રેન એકધારી ઝડપે 360 કિમી અંતર કાપે છે. જો તેની ઝડપ 5 કિમી/કલાક વધુ હોય તો, આટલું જ અંતર કાપતાં તેને 1 કલાક ઓછો સમય લાગે છે. તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.
9. પાણીના બે નળ એક સાથે $9\frac{3}{8}$ કલાકમાં એક ટાંકી ભરી શકે છે. મોટા વ્યાસવાળો નળ ટાંકી ભરવા માટે નાના વ્યાસવાળા નળ કરતાં 10 કલાકનો ઓછો સમય લે છે. બંને નળ દ્વારા ટાંકી ભરવાનો અલગ-અલગ સમય શોધો.
10. એક ઝડપી ટ્રેન મૈસૂર અને બેંગલૂર વચ્ચેનું 132 કિમી અંતર કાપવા ધીમી ટ્રેન કરતાં 1 કલાક ઓછો સમય લે છે. (વચ્ચેનાં સ્ટેશનનો પર ઊભા રહેવાનો સમય ધ્યાનમાં ના લો.) જો ઝડપી ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ, ધીમી ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ કરતાં 11 કિમી/કલાક વધુ હોય તો બંને ગાડીની સરેરાશ ઝડપ શોધો.
11. બે ચોરસનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો 468 મી^2 છે. જો તેમની પરિમિતિનો તફાવત 24 મી હોય તો, બંને ચોરસની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.

4.5 બીજાનાં સ્વરૂપ

આગણના વિભાગમાં તમે જોયું કે દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ છે.}$$



જો, $b^2 - 4ac > 0$ તો, આપણાને બે લિન બીજ $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ અને $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ મળે.

જો, $b^2 - 4ac = 0$ તો, $x = \frac{-b}{2a} \pm 0$,

અર્થાત્, $x = \frac{-b}{2a}$ અથવા $x = \frac{-b}{2a}$

આમ, સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને બીજ $\frac{-b}{2a}$ થાય.

આથી, આપણે કહી શકીએ કે આ વિકલ્પમાં દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને વાસ્તવિક બીજ સમાન છે.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો એવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા ના મળે, જેનો વર્ગ $b^2 - 4ac$ થાય. આથી, આ વિકલ્યમાં આપેલ દ્વિધાત સમીકરણનાં કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

$b^2 - 4ac$ દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક છે કે નહિ તે નક્કી કરતો હોવાથી, $b^2 - 4ac$ ને દ્વિધાત સમીકરણનો વિવેચક કહેવાય છે.

આથી દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માટે

- (i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.
- (ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.
- (iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો સમજુએ.

ઉદાહરણ 16 : દ્વિધાત સમીકરણ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ નો વિવેચક શોધો અને તેના પરથી બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

ઉકેલ : આપેલ દ્વિધાત સમીકરણ $a = 2, b = -4, c = 3$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ મુકારનું છે, આથી, વિવેચક

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

આથી, આપેલ દ્વિધાત સમીકરણને કોઈ વાસ્તવિક બીજ શક્ય નથી.

ઉદાહરણ 17 : 13 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળાકાર બગીચાની સીમા પરના એક બિંદુએ એક થાંબલો એવી રીતે લગાવેલ છે કે જેથી આ બગીચાના એક વ્યાસના બંને અંત્યબિંદુઓ A અને B આગળ બનેલ ફાટકથી થાંબલાના અંતરનો તફાવત 7 મીટર હોય. શું આ શક્ય છે? જો હા, તો બંને ફાટકથી કેટલે દૂર થાંબલો લગાવવો જોઈએ?

ઉકેલ : ચાલો પ્રથમ રેખાકૃતિ બનાવીએ. (જુઓ આકૃતિ 4.4.)

ધારો કે P થાંબલાનું જરૂરી સ્થાન છે. ધારો કે થાંબલાથી ફાટક B નું અંતર x મી, અર્થાત् $BP = x$ મી. હવે, થાંબલાથી બંને ફાટકના અંતરનો તફાવત = $AP - BP$ (અથવા $BP - AP$) = 7 મી

આથી, $AP = (x + 7)$ મી

હવે, AB વ્યાસ હોવાથી, $AB = 13$ મી

$$\angle APB = 90^\circ \quad (\text{કેમ?})$$

$$\text{હવે, } AP^2 + PB^2 = AB^2 \quad (\text{પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી})$$

$$\therefore (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$$

$$\therefore x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$$

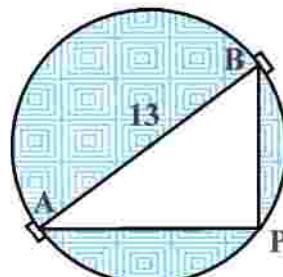
$$\therefore 2x^2 + 14x - 120 = 0$$

આથી, થાંબલાનું ફાટક B થી અંતર ' x ' એ સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

આથી જો દ્વિધાત સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તો, થાંબલાનું સ્થાન નક્કી કરવું શક્ય બને. આ શક્ય છે કે કેમ, તે જોવા ચાલો વિવેચક નો વિચાર કરીએ.

$$\text{વિવેચક } b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$$

આથી, આપેલ દ્વિધાત સમીકરણનાં બે બીજ વાસ્તવિક બીજ છે અને આથી બગીચાની સીમા પર થાંબલો લગાવવાનું શક્ય છે.



આકૃતિ 4.4

द्विघात समीकरण $x^2 + 7x - 60 = 0$ ने द्विघात सत्रथी उकेलती,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

આમ, $x = 5$ અથવા -12 મળે.

પરંતુ, x થાંબલા અને ફાટક B વચ્ચેનું અંતર હોવાથી, તે ધન જ હોવું જોઈએ. આથી, $x = -12$ ને અવગણવું જોઈએ. આથી, $x = 5$

આથી, સીમા પર થાંબલો એ રીતે લગાવવો જોઈએ કે જેથી તેનું શાટક B થી અંતર 5 મી અને શાટક A થી અંતર 12 મી હોય.

ઉદાહરણ 18 : સમીકરણ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ નો વિવેચક શોધો. તે પરથી સમીકરણનાં બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો. જો તે વાસ્તવિક હોય તો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3$, $b = -2$, $c = \frac{1}{3}$

$$\text{આથી, વિવેચક } b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$$

આથી, આપેલ દ્વિધાત સમીકરણનાં બંને બીજ વાસ્તવિક અને સમાન છે.

எனவே $\frac{-b}{2a}$, $\frac{-b}{2a}$ அமைத்து $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{6}$ அமைத்து $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ ஆக.

स्वाध्याय 4.4

4.6 सारांश

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મદાનો અભ્યાસ કર્યો :

1. a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને $a \neq 0$ માટે ચલ x માં દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય.
 2. જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ કહેવાય. દ્વિધાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો અને દ્વિધાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન હોય.

3. જો આપણે $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ને સુરેખ અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈ મેળવી શકીએ.
4. પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની રીતનો ઉપયોગ કરીને પણ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય.
5. દ્વિઘાત સૂત્ર : દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ તરીકે મળે, જ્યાં $b^2 - 4ac \geq 0$
6. દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માં
 - (i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.
 - (ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.
 - (iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

વાચકને નોંધ

શાબ્દિક ફૂટપ્લોના ઉકેલોની ચકાસણી મેળવેલ સમીકરણને આધારે કરવાને બદલે મૂળ પ્રશ્નાની શરતોને આધારે કરવી જોઈએ. (પ્રકરણ 3 નાં ઉદાહરણો 11, 13, 19 અને પ્રકરણ 4 નાં ઉદાહરણો 10, 11, 12 જુઓ.)



C3L7H3





સમાંતર શ્રેણી

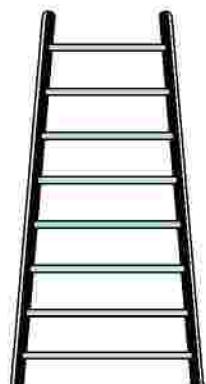
5

5.1 પ્રાસ્તાવિક

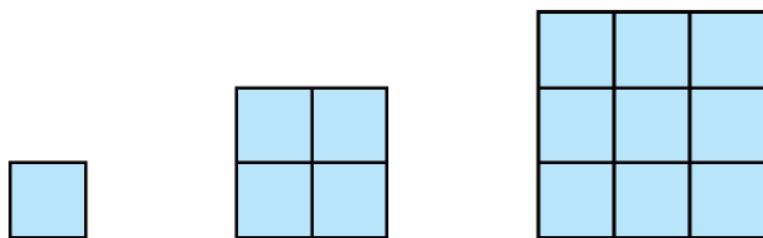
તમે એ ચોક્કસ નોંધ્યું હશે કે, પ્રકૃતિમાં અનેક વસ્તુઓ, સૂરજમુખીના ફૂલની પાંદડીઓ, મધ્યપૂડાનાં છિદ્રો, મકાઈના ડોડા પરના દાણા, અનાનસ અને દેવદાર (pine cone) પરના ફુંલ વગેરે એક નિશ્ચિત તરાહને અનુસરે છે.

હવે આપણે રોજિંદા જીવનમાં અનુભવવામાં આવતી કેટલીક તરાહ જોઈએ. અતે આવાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપેલ છે.

- શીનાએ નોકરી માટે અરજી કરી અને નોકરી માટે તેની પસંદગી થઈ. તેનો શરૂઆતનો માસિક પગાર ₹ 8000 છે અને પછી પ્રતિ વર્ષ માસિક પગાર વધારો ₹ 500 નક્કી થાય છે. તેનો ₹ માં માસિક પગાર પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય, ... વર્ષ અનુકૂલે 8000, 8500, 9000, ... હશે.
- એક નિસરણીના પગથિયાની લંબાઈ નીચેથી ઉપર તરફ એકસરખી 2 સેમી ઘટતી જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.1.) સૌથી નીચેના પગથિયાની લંબાઈ 45 સેમી છે. તળિયાથી ટોચ તરફના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ... 8માં પગથિયાની (સેમીમાં) લંબાઈ અનુકૂલે, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31 થાય.
- કોઈ બચત યોજનામાં મૂકેલ રકમ દર 3 વર્ષ $\frac{5}{4}$ ગણી થાય છે. ₹ 8000ના રોકાણની (₹ માં) પાકતી રકમ 3, 6, 9 અને 12 વર્ષને અંતે અનુકૂલે 10,000, 12,500, 15,625 અને 19,531.25 થાય.
- 1, 2, 3, ... એકમ લંબાઈના ચોરસમાં એકમ લંબાઈના ચોરસની સંખ્યા અનુકૂલે $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ છે. (જુઓ આકૃતિ 5.2.)

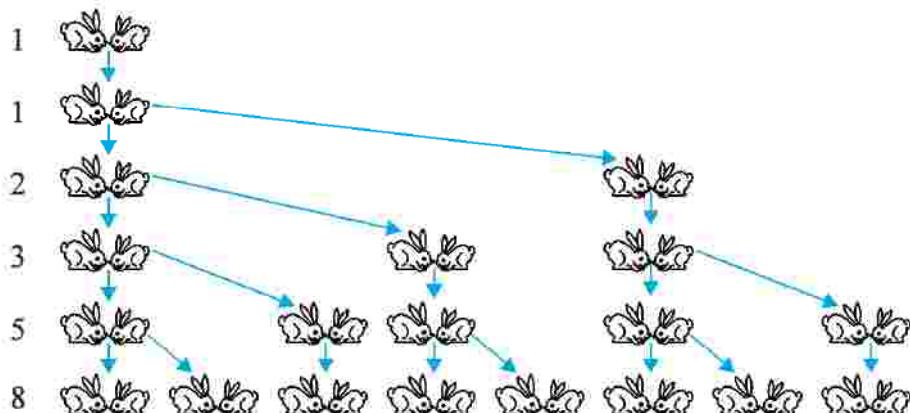


આકૃતિ 5.1



આકૃતિ 5.2

- (v) શકીલા જ્યારે તેની પુત્રી 1 વર્ષની હતી ત્યારે તેના ગલ્લામાં રૂ 100 મૂકે છે અને પછી તે દરેક વર્ષ તેમાં રૂ 50નો ઉમેરો કરે છે. તેના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા... જન્મદિવસે તેના ગલ્લાની (રૂ માં) રકમ અનુકૂળે 100, 150, 200, 250, ... હતી.
- (vi) સસલાનું એક જોડું પ્રથમ મહિને પ્રજનન કરવા માટે પરીપક્વ નથી. સસલાની પ્રત્યેક નવી જોડ બીજા અને આવનારા દરેક મહિને એક જોડ સસલાને જન્મ આપે છે (જુઓ આકૃતિ 5.3). માની લો કે, કોઈ સસલાનું મૃત્યુ પામતું નથી, તો પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ..., છઢા મહિનાના પ્રારંભે સસલાની જોડની સંખ્યા અનુકૂળે, 1, 1, 2, 3, 5, 8 હશે.



આકૃતિ 5.3

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાં આપણે કેટલીક તરાહ જોઈ શકીએ છીએ. કેટલાકમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે પુરોગામી પદમાં કોઈ અચળ સંખ્યા ઉમેરી પછીનું પદ મેળવી શકાય છે. કેટલાકમાં અચળ સંખ્યા વડે ગુણવાથી, જ્યારે બીજા કેટલાકમાં તે કભિક સંખ્યાના વર્ગ સ્વરૂપે વગેરે રીતે જણાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે જેમાં પુરોગામી પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરવાથી અનુગામી પદ મળે છે, એવી એક તરાહની ચર્ચા કરીશું. આપણે એ પણ જોઈશું કે તેનું n મું પદ અને n કભિક પદોનો સરવાળો કેવી રીતે શોધી શકાય અને આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ કેટલાક રોજિંદા પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા કરીશું.

5.2 સમાંતર શ્રેણી :

નીચે આપેલ સંખ્યાઓની યાદી પર વિચાર કરો :

- 1, 2, 3, 4, ...
- 100, 70, 40, 10, ...
- 3, -2, -1, 0, ...



J7Q6L1

- (iv) 3, 3, 3, 3, ...
(v) -1.0, -1.5, -2.0, -2.5, ...

યાદીમાં આપેલ દરેક સંખ્યાને **પદ** કહેવાય.

ઉપરની યાદીમાં એક પદ આપેલ હોય તો પછીનું પદ તમે લખી શકશો ? જો હા, તો કેવી રીતે ? કદાચ કોઈ તરાહ કે નિયમનો ઉપયોગ કરી તમે તે કરી શકો.

ચાલો, આપણે અવલોકન કરીએ અને નિયમ લખીએ:

- (i) માં પ્રત્યેક પદ, તેના આગળના પદથી 1 વધુ છે.
(ii) માં પ્રત્યેક પદ, તેના આગળના પદથી 30 ઓછું છે.
(iii) માં પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં 1 ઉમેરો.
(iv) માં પ્રત્યેક પદ 3 છે અર્થાત્ દરેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં 0 ઉમેરો (કે, તેમાંથી 0 બાદ કરો).
(v) માં પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં -0.5 ઉમેરો (અર્થાત્, તેમાંથી 0.5 બાદ કરો.)

ઉપરની યાદીમાં આપે જોયું કે પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં કોઈ નિયત સંખ્યા ઉમેરવામાં આવે છે. સંખ્યાઓની આવી યાદી માટે કહી શકાય કે આ પદો સમાંતર શ્રેષ્ઠી (Arithmetic Progression અથવા A.P.) બનાવે છે.

આમ, જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયના પ્રત્યેક પદ, આગળના પદમાં નિયત સંખ્યા ઉમેરી મેળવી શકાય તેવી સંખ્યાઓની યાદી એ સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે.

આ નિયત સંખ્યાને સમાંતર શ્રેષ્ઠીનો સામાન્ય તફાવત કહેવાય છે. યાદ રાખો કે, તે ધન, ઋક્ષ અથવા શૂન્ય હોઈ શકે છે.

ચાલો, આપણે સમાંતર શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ પદને a_1 , બીજી પદને a_2 , ... n માં પદને a_n વડે દર્શાવીએ અને સામાન્ય તફાવતને d વડે દર્શાવીએ. આથી, સમાંતર શ્રેષ્ઠી $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ માટે

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$$

સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે છે :

- (a) એક શાળામાં સવારની સભામાં એક હારમાં ઊભેલા કેટલાક વિદ્યાર્થીઓની ઊચાઈ (સેમીમાં) 147, 148, 149, ..., 157 છે.
(b) કોઈ શહેરના જાન્યુઆરી મહિનાના એક સમાધના ન્યૂનતમ તાપમાનની વધતા કમમાં નોંધણી (ઇંગ્રી સેલ્સિયસમાં) -3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5 છે.
(c) ₹ 1000 ની લોનના અચળ 5 ટકાના દરે પૈસા ચૂક્યા બાદ બાકી રહેતી રકમ (₹ માં) 950, 900, 850, 800, ..., 50 છે.
(d) કોઈ શાળામાં 1 થી 12 ઘોરણના પ્રથમ કર્મે આવેલ વિદ્યાર્થીઓને (₹ માં) અપાત્તી રોકડ ઈનામની રકમ 200, 250, 300, 350, ..., 750 છે.
(e) જો પ્રત્યેક મહિને ₹ 50ની બયત કરાય તો 10 મહિનામાં થયેલ બયતની રકમ (₹ માં) દર માસના અંતે 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500 હશે.

ઉપરની યાદી શા માટે સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે. એ સમજાવવાનું તમારા ઉપર સ્વાધ્યાય તરીકે છોડવામાં આવે છે.

તમે જોઈ શકો છો કે,

પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લેતાં, $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ સમાંતર શ્રેષ્ઠી દર્શાવે છે. આને સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું વ્યાપક રૂપ કહેવાય છે.

આપણે નોંધીએ કે ઉપરનાં ઉદાહરણો (a) થી (e) માં પદની સંખ્યા **નિઃશ્વા (finite)** છે. આવી સમાંતર શ્રેણીને **સાંત્ર (finite)** સમાંતર શ્રેણી કહેવાય. વળી આપણે નોંધીએ કે આ પ્રત્યેક સમાંતર શ્રેણીમાં અંતિમ પદ છે. આ વિભાગમાં આપેલ ઉદાહરણ (i) થી (v) માંની એક પણ સમાંતર શ્રેણી સાંત્ર શ્રેણી નથી. આથી, તેને **અનંત સમાંતર શ્રેણી (Infinite Arithmetic Progression)** કહેવાય. આવી સમાંતર શ્રેણીમાં અંતિમ પદ ના મળે.

હવે, એક સમાંતર શ્રેણી જાણવા કેટલી ન્યૂનતમ માહિતીની જરૂર પડે? શું પ્રથમ પદ જાણવું પૂરતું છે? કે માત્ર સામાન્ય તફાવતની જાણકારી પૂરતી છે? તમે જોઈ શકશો કે આ બંને માહિતી, પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d બંને જ્ઞાત હોય તે જરૂરી છે.

ઉદાહરણ તરીકે પ્રથમ પદ $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = 3$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી,
 $6, 9, 12, 15, \dots$, બને.

અને $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = -3$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી,
 $6, 3, 0, -3, \dots$, બને.

આ જ રીતે, જ્યારે,

$a = -7, d = -2$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $-7, -9, -11, -13, \dots$

$a = 1.0, d = 0.1$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots$

$a = 0, d = 1\frac{1}{2}$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \dots$

$a = 2, d = 0$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $2, 2, 2, 2, \dots$

આમ, જો a અને d આપેલ હોય તો સમાંતર શ્રેણી લખી શકાય. તેનાથી વિપરીત પ્રક્રિયા માટે શું કહી શકો? અર્થાત્, જો તમને સંખ્યાઓની યાદી આપેલ હોય તો તમે કહી શકો કે તે એક સમાંતર શ્રેણી છે અને તે શ્રેણીના a અને d શોધી શકો? પ્રથમ પદ a હોવાથી, તે સહેલાઈથી લખી શકાય. આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરી પછીનું પદ મેળવી શકાય. તે ઉમેર્યા બાદ કોઈ પણ પદમાંથી આગળના પદની બાદબાકી કરતાં d મળી શકે, અર્થાત્, આ રીતે મળેલ પદ સમાંતર શ્રેણી માટે સમાન હોવું જોઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે સંખ્યાઓની યાદી

$6, 9, 12, 15, \dots$, માટે

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$

$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$

$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

અહીં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો તફાવત પ્રત્યેક વિકલ્યમાં 3 છે. આથી, આપેલ પદ સમાંતર શ્રેણીનાં પદ છે. તેનું પ્રથમ પદ $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = 3$ છે.

સંખ્યાઓની યાદી

$6, 3, 0, -3, \dots$, માટે

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$$

$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3,$$

$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

આ જ પ્રમાણે, આ પણ એક સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે. તેનું પ્રથમ પદ 6 અને સામાન્ય તફાવત -3 છે.

વ્યાપક રીતે, સમાંતર શ્રેષ્ઠી a_1, a_2, \dots, a_n માટે, a_{k+1} અને a_k એ અનુક્રમે $k+1$ માં અને k માં પદ હોય, તો

$$d = a_{k+1} - a_k$$

આપેલ સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં d શોધવા પ્રત્યેક $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ જાણવાની જરૂર નથી. આમાંથી કોઈ પણ એકની કિમત શોધવી પર્યામ છે.

1, 1, 2, 3, 5, ... આ યાદીના આંકડા તપાસો. અહીં, કોઈ પણ બે કમિક પદ વચ્ચેનો તફાવત સરખો નથી. આથી, તે સમાંતર શ્રેષ્ઠી નથી.

આપણે નોંધીએ કે, 6, 3, 0, -3, ... સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં d શોધવા આપણે 3 માંથી 6 ની બાદબાકી કરી, નહીં કે 6 માંથી 3 ની બાદબાકી. અર્થાત્, d શોધવા $(k+1)$ માં પદમાંથી k માં પદની બાદબાકી કરવી જોઈએ. પછી ભલે $(k+1)$ મું પદ નાનું કેમ ના હોય.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા આ સંક્લયના વધુ સ્પષ્ટ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેષ્ઠી $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ માટે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લખો.

ઉકેલ : અહીં, $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

આપણે નોંધીએ કે, જો આપણે જાણતા હોઈએ કે, આપેલ પદો સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં છે, તો કોઈ પણ બે કમિક પદના તફાવત દ્વારા d શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે? જો તે સમાંતર શ્રેષ્ઠી હોય તો તેના પછીનાં બે પદ લખો :

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| (i) 4, 10, 16, 22, ... | (ii) 1, -1, -3, -5, ... |
| (iii) -2, 2, -2, 2, -2, ... | (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ... |

ઉકેલ : (i) અહીં, $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$

$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

અર્થાત્, $a_{k+1} - a_k$ હંમેશાં સમાન રહે છે.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેષ્ઠી બનાવે છે અને સામાન્ય તફાવત $d = 6$ છે.

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, આ જ તરાહ આગળ પણ ચાલશે.

પછીનાં બે પદ : $22 + 6 = 28$ અને $28 + 6 = 34$

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$ | $a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$ |
| $a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$ | |

અર્થાત્, $a_{k+1} - a_k$ હંમેશાં સમાન રહે છે.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેષ્ઠી બનાવે છે તથા સામાન્ય તફાવત $d = -2$ છે.

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, આ જ તરાહ આગળ પણ ચાલશે.

પછીનાં બે પદ : $-5 + (-2) = -7$ અને $-7 + (-2) = -9$

$$\text{(iii)} \quad a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$

$$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$$

આમ, $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$. આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી.

$$\text{(iv)} \quad a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$$

$$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$$

આહી, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ પરંતુ $a_2 - a_1 \neq a_4 - a_3$.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલ સ્થિતિમાંથી કઈ સ્થિતિમાં સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બને અને કેમ?

- (i) ટેક્સીનું ભાડું; પ્રથમ કિલોમીટર માટે ₹ 15 અને પછીના વધારના પ્રત્યેક કિલોમીટર માટે ₹ 8 છે.
- (ii) નળાકારમાં રહેલ હવાનું પ્રમાણ; હવા કાઢવાના પંપ દ્વારા દર વખતે નળાકારની બાકી રહેલ હવાનો $\frac{1}{4}$ ભાગ બદાર કાઢે છે.
- (iii) પ્રત્યેક મીટરના ખોદકામ બાદ એક કૂવો ખોદવા માટે લાગતો ખર્ચ; પ્રથમ મીટરના ₹ 150 અને પછીના પ્રત્યેક મીટર દીઠ ₹ 50 પ્રમાણે વધતો જાય છે.
- (iv) 8 % ના વાર્ષિક ચકવૃદ્ધિ દરથી શરૂઆતની રકમ ₹ 10000 મૂકેલ હોય, તો દર વર્ષ ખાતામાં જમા થતી રકમ

2. જ્યારે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d નાં મૂલ્યો નીચે પ્રમાણે હોય ત્યારે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદ શોધો :

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| (i) $a = 10, d = 10$ | (ii) $a = -2, d = 0$ |
| (iii) $a = 4, d = -3$ | (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$ |
| (v) $a = -1.25, d = -0.25$ | |

3. નીચે આપેલ સમાંતર શ્રેણી માટે, પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો :

- | | |
|--|----------------------------------|
| (i) $3, 1, -1, -3, \dots$ | (ii) $-5, -1, 3, 7, \dots$ |
| (iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \dots$ | (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \dots$ |

4. નીચેનામાંથી કઈ સમાંતર શ્રેણી છે? જો તે સમાંતર શ્રેણી બનાવે તો સામાન્ય તફાવત d અને પછીનાં ત્રણ પદ લખો :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| (i) $2, 4, 8, 16, \dots$ | (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$ |
| (iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \dots$ | (iv) $-10, -6, -2, 2, \dots$ |

- (v) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \dots$
- (vii) $0, -4, -8, -12, \dots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$
- (ix) $1, 3, 9, 27, \dots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \dots$
- (xi) a, a^2, a^3, a^4, \dots (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \dots$
- (xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \dots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \dots$
- (xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \dots$

5.3 સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું n મું પદ

ચાલો આપણે વિભાગ 5.1માં આપેલ ઉદાહરણમાં આપેલ માહિતી પ્રમાણે જ્યાં રીતા એક નોકરી માટે અરજી કરે છે અને નિયુક્તિ પામે છે તે ઉદાહરણનો ફરી વિચાર કરીએ. તેને શરૂઆતમાં માસિક ₹ 8000 અને પછીના વર્ષ ₹ 500 નો હજાફો (વેતન વધારો) આપવાનું નક્કી થાય છે. પાંચમા વર્ષ તેનો માસિક પગાર કેટલો હશે?



C5P9V9

આનો જવાબ શોધવા, બીજા વર્ષ તેનો માસિક પગાર કેટલો હશે તે જોઈએ.

બીજા વર્ષનો માસિક પગાર ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500 હશે. આ જ રીતે, આપણે ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા વર્ષ પગારની માહિતી મેળવવા માટે આગળના વર્ષના માસિક પગારની રકમમાં ₹ 500 ઉમેરી શકાય.

$$\text{આમ, ત્રીજા વર્ષ મળતો માસિક પગાર} = ₹ (8500 + 500)$$

$$= ₹ (8000 + 500 + 500)$$

$$= ₹ (8000 + 2 \times 500)$$

$$= ₹ [8000 + (3 - 1) \times 500]$$

$$= ₹ 9000$$

(ત્રીજા વર્ષ માટે)

$$\text{ચોથા વર્ષ મળતો માસિક પગાર} = ₹ (9000 + 500)$$

$$= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)$$

$$= ₹ (8000 + 3 \times 500)$$

$$= ₹ [8000 + (4 - 1) \times 500]$$

$$= ₹ 9500$$

(ચોથા વર્ષ માટે)

$$\text{પાંચમા વર્ષ મળતો માસિક પગાર} = ₹ (9500 + 500)$$

$$= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)$$

$$= ₹ (8000 + 4 \times 500)$$

$$= ₹ [8000 + (5 - 1) \times 500]$$

$$= ₹ 10000$$

(પાંચમા વર્ષ માટે)

જુઓ કે આપણાને મળતી સંખ્યાઓની યાદી,

8000, 8500, 9000, 9500, 10,000, છે.

આ સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેષ્ઠી બનાવે છે.

(કેમ?)

હવે, ઉપરની સંખ્યાઓની યાદી જોઈ તમે કહી શકશો કે છઢા વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? પંદરમા વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? અને માની લઈએ કે તે હજુ નોકરી કરે છે, તો 25માં વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? આનો જવાબ મેળવવા તમે દરેક વર્ષને આગળના વર્ષના વેતનમાં ₹ 500 ઉમેરશો. શું આ પ્રક્રિયાને આપણે વધુ ટૂંકી બનાવી શકીએ? ચાલો જોઈએ. જે રીતે વેતનના આંકડા ઉપર મેળવ્યા તે પરથી તમને થોડો ખ્યાલ તો આવ્યો જ હશે.

$$\begin{aligned} 15\text{માં વર્ષે મળતું માસિક વેતન} &= 14\text{માં વર્ષે મળતું વેતન} + ₹ 500 \\ &= ₹ \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + \dots + 500}_{13 \text{ વર્ષ}} \right] + ₹ 500 \\ &= ₹ [8000 + 14 \times 500] \\ &= ₹ [8000 + (15 - 1) \times 500] = ₹ 15,000 \end{aligned}$$

અથવા, પ્રથમ માસિક વેતન + (15 - 1) × વાર્ષિક વેતન વધારો

$$\begin{aligned} \text{આ જ રીતે, તેને 25માં વર્ષે મળતું માસિક વેતન} \\ &= ₹ [8000 + (25 - 1) \times 500] = ₹ 20,000 \\ &= \text{પ્રથમ વેતન} + (25 - 1) \times \text{વાર્ષિક વેતન વધારો} \end{aligned}$$

આ ઉદાહરણ પરથી તમને સમાંતર શ્રેણીનું 15મું પદ અથવા 25મું પદ અને વ્યાપક રીતે n મું પદ કઈ રીતે લખવું તેનો ખ્યાલ આવ્યો હશે.

ધારો કે, a_1, a_2, a_3, \dots સમાંતર શ્રેણી છે. તેનું પ્રથમ પદ a_1 એ અને સામાન્ય તફાવત d છે.

તો, બીજું પદ, $a_2 = a + d = a + (2 - 1) d$

ત્રીજું પદ, $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1) d$

ચોથું પદ, $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1) d$

.....

.....

આમ, આપણે કહી શકીએ કે n મું પદ $a_n = a + (n - 1) d$.

આથી, પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $a_n = a + (n - 1) d$ દ્વારા મળે.

a_n ને સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ પણ કહેવાય છે. જો સમાંતર શ્રેણીમાં m પદો હોય તો a_m તેનું અંતિમ પદ દર્શાવે છે. તેને ઘણી વર્ણને દ્વારા પણ દર્શાવાય છે.

ચાલો, કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સમાંતર શ્રેણી 2, 7, 12, ... નું 10 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 2, d = 7 - 2 = 5$ અને $n = 10$

હવે, $a_n = a + (n - 1) d$

$$a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનું 10 મું પદ 47 છે.

ગણિત

ઉદાહરણ 4 : સમાંતર શ્રેષ્ઠી 21, 18, 15... નું ક્યું પદ -81 હશે? વળી કોઈ પદ 0 હશે? સકારણ જવાબ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ અને ધારો કે $a_n = -81$

આપણે n નું મૂલ્ય શોધવું છે.

$$a_n = a + (n - 1) d \text{ હોવાથી,}$$

$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$

$$\therefore -81 = 24 - 3n$$

$$\therefore -105 = -3n$$

$$\therefore n = 35$$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું 35મું પદ -81 થાય.

હવે, આપણે એ જાજવું છે કે $a_n = 0$ થાય તેવો ધન પૂર્ણાંક n શક્ય છે? જો આવો ધન પૂર્ણાંક n શક્ય હોય તો,

$$21 + (n - 1)(-3) = 0$$

$$\therefore 3(n - 1) = 21$$

$$\therefore n = 8$$

આથી, આઠમું પદ 0 બને.

ઉદાહરણ 5 : જેનું ગ્રીજું પદ 5 અને 7 મું પદ 9 હોય એવી સમાંતર શ્રેષ્ઠી શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a_3 = a + (3 - 1)d = a + 2d = 5$ (1)

અને $a_7 = a + (7 - 1)d = a + 6d = 9$ (2)

સુરેખ સમીકરણયુગમ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં,

$a = 3$ અને $d = 1$ મળે.

આથી, મંગેલ સમાંતર શ્રેષ્ઠી 3, 4, 5, 6, 7, ... છે.

ઉદાહરણ 6 : ચકાસો કે 301 એ 5, 11, 17, 23, ... સંખ્યાની યાદીનું કોઈ પદ છે કે નહીં?

ઉકેલ : અહીં,

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

$a_{k+1} - a_k$ નું મૂલ્ય $k = 1, 2, 3$ વગેરે માટે સમાન હોવાથી આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે.

હવે, $a = 5$ અને $d = 6$.

ધારો કે, સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું n મું પદ 301 છે.

આપણે જાહેરીએ છીએ કે,

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$\text{આથી, } 301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

$$\therefore 301 = 6n - 1$$

$$\therefore n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

પરંતુ, n ધન પૂર્ણક સંખ્યા જ હોવો જોઈએ. (કેમ?)

આથી, આપેલ યાદીનું કોઈ પણ પદ 301 ના હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 7 : બે અંકની કેટલી સંખ્યાઓ 3 વડે વિભાજ્ય હશે ?

ઉકેલ : 3 વડે વિભાજ્ય બે અંકની સંખ્યાઓ :

$$12, 15, 18, \dots, 99 \text{ છે.}$$

શું આ સમાંતર શ્રેણી છે ? હા. અહીં, $a = 12, d = 3, a_n = 99$.

$$a_n = a + (n - 1) d \text{ હોવાથી,}$$

$$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

$$\therefore 87 = (n - 1) \times 3$$

$$\therefore n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$\therefore n = 29 + 1 = 30$$

આમ, 3 વડે વિભાજ્ય બે અંકના પૂર્ણકોની સંખ્યા 30 છે.

ઉદાહરણ 8 : સમાંતર શ્રેણી 10, 7, 4, ..., -62 માં છેલ્લેથી (પ્રથમ પદ તરફ) 11મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 10, d = 7 - 10 = -3, l = -62$.

$$l = a + (n - 1) d$$

છેલ્લેથી 11મું પદ શોધવા, આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં કેટલાં પદ છે તે શોધીશું.

$$-62 = 10 + (n - 1)(-3)$$

$$\therefore -72 = (n - 1)(-3)$$

$$\therefore n - 1 = 24$$

$$\therefore n = 25$$

આમ, આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં 25 પદ છે.

છેલ્લેથી 11મું પદ એ 15મું પદ બને. (આપણે નોંધીએ કે તે 14મું પદ નહિ હોય. કેમ ?)

$$\text{આથી, } a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$$

આથી, છેલ્લેથી 11મું પદ = -32 છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ :

જો આપેલ સમાંતર શ્રેણીના પદ ઉલટા કર્મમાં લખીએ, તો $a = -62$ અને $d = 3$

(કેમ ?)

આથી, આ પ્રશ્ન a અને d નાં મૂલ્યો પરથી 11મું પદ શોધવાનો બને.

$$\text{આથી, } a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3 = -62 + 30 = -32$$

આથી, છેલ્લેથી માંગેલ 11 માં પદનું મૂલ્ય = -32 થાય.

ગણિત

ઉદાહરણ 9 : ₹ 1000ની રકમ 8 % વાર્ષિક સાદા વ્યાજ પર મૂકવામાં આવે છે. દરેક વર્ષને અંતે મળતા વ્યાજની ગણતરી કરો. શું આ વ્યાજ સમાંતર શ્રેષ્ઠી બનાવે છે? જો હા, તો 30 વર્ષના અંતે મળતા વ્યાજની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણોએ છીએ કે, સાદા વ્યાજની ગણતરી માટે

$$\text{સાદું વ્યાજ} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.}$$

$$\text{આથી, પ્રથમ વર્ષના અંતે વ્યાજ} = ₹ \frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$$

$$= ₹ 80$$

$$\text{દીજા વર્ષના અંતે વ્યાજ} = ₹ \frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$$

$$= ₹ 160$$

$$\text{ત્રીજા વર્ષના અંતે વ્યાજ} = ₹ \frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$$

$$= ₹ 240$$

આ જ રીતે, ચોથા, પાંચમા વગેરે વર્ષ માટે વ્યાજ મેળવી શકાય.

આથી, પહેલાં, દીજા, ત્રીજા ... વર્ષના અંતે મળતા વ્યાજ (₹ માં) અનુકૂલ 80, 160, 240, ... છે.

આ એક સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે કારણ કે બે કમિક પદનો તફાવત 80 છે. અર્થાત્ $d = 80$. વળી, $a = 80$.

આથી, 30 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ શોધવા આપણે a_{30} શોધીશું.

$$a_{30} = a + (30 - 1)d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

આમ, 30 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ ₹ 2400 હશે.

ઉદાહરણ 10 : કૂલોની એક ક્યારીમાં પ્રથમ હારમાં 23 ગુલાબના છોડ, દીજી હારમાં 21 ગુલાબના છોડ, ત્રીજી હારમાં 19 ગુલાબના છોડ, વગેરે છે. તેની છેલ્લી હારમાં 5 ગુલાબના છોડ છે. આ ક્યારામાં કુલ કેટલી હાર હશે?

ઉકેલ : પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય, ... હારમાં ગુલાબના છોડની સંખ્યા

$$23, 21, 19, \dots, 5 \text{ છે.}$$

આ સંખ્યાઓ એક સમાંતર શ્રેષ્ઠી બનાવે છે.

(ક્મ ?)

ધારો કે હારની સંખ્યા n છે.

$$\text{અહીં, } a = 23, d = 21 - 23 = -2, a_n = 5$$

$$\text{હવે, } a_n = a + (n - 1)d$$

$$\text{આથી, } 5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

$$\therefore -18 = (n - 1)(-2)$$

$$\therefore n = 10$$

આથી, કૂલની ક્યારીમાં 10 હાર છે.

स्वाध्याय 5.2

1. નીચેના કોષ્ટકમાં સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a , સામાન્ય તફાવત d અને n મું પદ a_n છે. ખાલી જગ્યા પૂરો :

a	d	n	a_n
7	3	8	...
-18	...	10	0
...	-3	18	-5
-18.9	2.5	...	3.6
3.5	0	105	...

2. નીચેનામાંથી સાચો જવાબ શોધો અને ચકાસો :

- (i) સમાંતર શ્રેષ્ઠી 10, 7, 4, ... નું 30 મું પદ છે.

- (ii) સમાંતર શ્રેષ્ઠી $-3, -\frac{1}{2}, 2, \dots$ નું 11 મું પદ છે.

3. नीचेनी समांतर श्रेष्ठीमां खाली खानानां पद शोधो :

- (i) 2, , 26

- (ii) , 13, , 3

- $$(iii) \quad 5, \boxed{}, \boxed{}, 9\frac{1}{2}$$

- (iv) -4, , , , , 6

4. ਅਮਾਂਤਰੀ ਕ੍ਰੋਣੀ 3 8 13 18 ਨੂੰ ਫੇਲਾਮਾਂ ਪਦ 78 ਥਾਂ ?

- ੫ ਸੀਵੇਂ ਅਮਾਂਤਰ ਥੋਡੀਆਂ ਪਦੋਨੀ ਅੰਖਾਂ ਥੋਧੇ :

- $$(i) 7, 13, 19, \dots, 205 \quad (ii) 18, 15\frac{1}{2}, 13, \dots, -47$$

6. સમાંતર શ્રેણી 11, 8, 5, 2 ... નં કોઈ પદ = 150 હોઈ શકે ?

7. સુમાંતર શ્રેણીનાં 11 માં પદ 38 અને 16 માં પદ 73 હોય તો તેનાં 31માં પદ શોધો.

8. ਅੇਕ ਸਮਾਂ ਵਰਤ ਸ਼੍ਰੇ਷਼ਟੀਮਾਂ 50 ਪਦ ਛੇ ਜੋ ਗੁਪਤ 12 ਅਨੇ ਛੇਲਵਾਂ ਪਦ 106 ਲੋਧੀ, ਤੇ ਤੇਜ਼ 29 ਮੰ ਪਦ ਸ਼ੋਧੇ।

9. જો સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં ત્રીજું અને નવમું પદ અનક્કમે 4 અને -8 હોય, તો તે શ્રેષ્ઠીનાં ક્યાં પદ 0 થાય ?

ગણિત

10. કોઈ સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં 17 મું પદ 10 માં પદ કરતાં 7 વધુ છે. તેનો સામાન્ય તફાવત શોધો.
11. સમાંતર શ્રેષ્ઠી 3, 15, 27, 39, ... નું ક્ર્યું પદ 54 માં પદ કરતાં 132 વધુ હશે ?
12. બે સમાંતર શ્રેષ્ઠીના સામાન્ય તફાવત સમાન છે. તેમના 100 માં પદનો તફાવત 100 હોય તો 1000 માં પદનો તફાવત કેટલો હશે ?
13. ગ્રાણ અંકની કેટલી સંખ્યા 7 વડે વિભાજ્ય હશે ?
14. 10 અને 250 વચ્ચે 4 ના કેટલા ગૃહિત હશે ?
15. n ના ક્યા મૂલ્ય માટે બે સમાંતર શ્રેષ્ઠીઓ 63, 65, 67, ... અને 3, 10, 17, ...ના n માં પદ સમાન થાય ?
16. એવી સમાંતર શ્રેષ્ઠી શોધો કે જેનું ગ્રીજું પદ 16 અને 7 મું પદ 5 માં પદથી 12 વધુ હોય.
17. 3, 8, 13, ..., 253 સમાંતર શ્રેષ્ઠી હોય, તો તેનું છેલ્લેથી 20 મું પદ શોધો.
18. એક સમાંતર શ્રેષ્ઠીના ચોથા અને આઠ માં પદનો સરવાળો 24 છે. અને છઢા અને દસ માં પદનો સરવાળો 44 છે. આ સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ ગ્રાણ પદ શોધો.
19. સુખ્ખા રાખે 1995 માં ₹ 5000 ના વાર્ષિક વેતનથી કામ શરૂ કર્યું અને તેમને દર વર્ષ માસિક ₹ 200 ની વેતન વૃદ્ધિ મળે છે. ક્યા વર્ષ તેમનું વેતન ₹ 7000 થશે ?
20. રામકલી વર્ષના પ્રથમ અઠવાડિયે ₹ 5 ની બચત કરે છે. અને પછી તેની અઠવાડિક બચતમાં ₹ 1.75 નો વધારો કરે છે. જો n માં અઠવાડિયે તેની બચત ₹ 20.75 હોય તો n નું મૂલ્ય શોધો.

5.4 સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો

આવો આપણો વિભાગ 5.1 માં આપેલ પરિસ્થિતિનો ફરી વિચાર કરીએ, તેમાં શકીલા તેની પુત્રીના ગલ્લામાં, તે જ્યારે 1 વર્ષની હતી ત્યારે ₹ 100 મૂકે છે અને બીજા જન્મદિવસે ₹ 150 મૂકે છે, ત્રીજા જન્મ દિવસે ₹ 200 મૂકે છે, અને આ રીતે આગળ વધે છે. તે જ્યારે 21 વર્ષની હશે ત્યારે ગલ્લામાં કેટલા રૂપિયા જમા થયા હશે ?



P3N5I7

અહીં, ગલ્લામાં મૂકાતી રકમ (₹ માં) પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા,... જન્મદિવસે અનુકૂમે 100, 150, 200, 250, ... હશે. અને આ જ કમ 21માં જન્મદિવસ સુધી ચાલશે. 21માં જન્મદિવસે ગલ્લાની કુલ રકમ શોધવા આપણે ઉપરની યાદી પ્રમાણે 21 સંખ્યાઓ લખી તેનો સરવાળો કરવો જોઈએ. તમને નથી લાગતું કે આ કંટાળાજનક અને સમય દુર્બ્યય કરનાર કિયા છે ? શું આપણે આ પ્રક્રિયાને ટૂંકી બનાવી શકીએ ? જો આપણે સરવાળો શોધવાની કોઈ રીત શોધી શકીએ તો જ આ શક્ય છે. ચાલો જોઈએ.

ગોસ (જેના વિશે આપણે પ્રકરણ 1માં વાંચી ગયાં છીએ) જ્યારે 10 વર્ષના હતા ત્યારે તેમણે આપેલ પ્રશ્નના ઉકેલ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું. તેમને 1 થી 100 સુધીના ધન પૂર્ણાકનો સરવાળો કરવાનું કહેવામાં આવેલું. તેમણે તરત જ જવાબ આપ્યો કે સરવાળો 5050 છે. શું તમે વિચારી શકો કે તેમણે આ કેવી રીતે વિચાર્યુ હશે ? તેમણે

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 \text{ લખ્યું.}$$

અને પૂર્ણકોનો કમ બદલી,

$$S = 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1 \text{ એમ લખ્યું.}$$

બંનેનો સરવાળો કરતાં,

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \dots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + \dots + 101 + 101$$

(100 વખત)

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050 \text{ અર્થાત્ સરવાળો} = 5050$$

આપણે આ જ સંકલ્પનાનો ઉપયોગ સમાંતર શ્રેણી $a, a+d, a+2d, \dots$ નાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો શોધીશું :

આ સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $a + (n-1)d$ છે.

ધારો કે S આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a + (n-1)d] \quad (1)$$

પદનો કમ બદલી પુનઃ લખતાં,

$$S = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \dots + (a+d) + a \quad (2)$$

(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$$2S = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d]}_{(n \text{ વખત})}$$

$$\text{અથવા} \quad 2S = n [2a + (n-1)d]$$

(કારણ કે પદોની સંખ્યા n છે અને બધા સમાન છે.)

$$\text{અથવા} \quad S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

આથી, સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો નીચેના સૂત્રથી મળે છે.

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

આપણે તેને

$$S = \frac{n}{2} [a + a + (n-1)d] \text{ તરીકે પણ લખી શકીએ.}$$

અર્થાત્,

$$S = \frac{n}{2} (a + a_n) \quad (3)$$

હવે, જો સમાંતર શ્રેણીમાં પદોની કુલ સંખ્યા n હોય, તો અંતિમ પદ $a_n = l$

(3) પરથી, આપણે કહી શકીએ કે

$$S = \frac{n}{2} (a + l) \quad (4)$$

જ્યારે સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ અને અંતિમ પદ આપેલ હોય અને સામાન્ય તકાવત આપેલ ના હોય ત્યારે આ પરિણામ ઉપયોગી બને છે.

હવે, આપણે શરૂઆતમાં તથા ઉપર ઉપસ્થિત કરેલા પ્રશ્ન પર પાછા ફરીએ. શકીલાની પુત્રીના ગલ્લાની રકમ તેના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા, ... જન્માદિવસે અનુકૂમે (₹ માં) 100, 150, 200, 250, ... હતી.

આ એક સમાંતર શ્રેષ્ઠી છે. આપણે તેની 21મી વર્ષગાંઠે કુલ કેટલા રૂપિયા ભેગા થયા હશે તે જાણવું છે. અર્થાતું, સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં 21 પદનો સરવાળો કરવાનો છે.

અહીં, $a = 100$, $d = 50$ અને $n = 21$ માટે સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

આપણને $S_n = \frac{21}{2} [2 \times 100 + (21-1) \times 50]$ મળે.

$$\therefore S_n = \frac{21}{2} [200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

આમ, 21 માં જન્મ દિવસે ગલ્લામાં ભેગી થયેલી રકમ કુલ ₹ 12600 હશે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવાથી ગણતરી સરળ નથી બની?

હવેથી આપણે સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ n પદના સરવાળાને S_n થી દર્શાવીશું. આપણે સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં 20 પદોનો સરવાળો દર્શાવવા માટે S_{20} લખીશું. પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્રમાં કુલ ચાર રાશિ S, a, d અને n નો ઉપયોગ થાય છે. જો આપણે તે પૈકી ત્રણ જાણતા હોઈએ તો ચોથી રાશિ શોધી શકાય.

નોંધ : સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું n મું પદ, તેનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળા તથા પ્રથમ $(n-1)$ પદોના સરવાળાના તફાવત જેટલું હોય છે. અર્થાતું $a_n = S_n - S_{n-1}$

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ :

ઉદાહરણ 11 : સમાંતર શ્રેષ્ઠી 8, 3, -2, ... નાં પ્રથમ 22 પદનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

આપણે જાણુંએ છીએ કે,

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

આથી, $S_{22} = \frac{22}{2} [16 + 21(-5)] = 11 (16 - 105) = 11 (-89) = -979$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ 22 પદોનો સરવાળો -979 છે.

ઉદાહરણ 12 : સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ 14 પદોનો સરવાળો 1050 હોય અને તેનું પ્રથમ પદ 10 હોય, તો તે શ્રેષ્ઠીનું 20 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

હવે, $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

આથી, $1050 = \frac{14}{2} [20 + 13d]$

$$= 140 + 91d$$

$$\therefore 910 = 91d$$

$$\therefore d = 10$$

આથી, $a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$. અર્થાતું 20 મું પદ 200 છે.

ઉદાહરણ 13 : સમાંતર શ્રેણી 24, 21, 18, ..., નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 78 થાય.

ઉકેલ : અહીં, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. આપણે n નું મૂલ્ય શોધવું છે.

$$\text{આપણે જાણીએ છીએ કે, } S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\text{અહીં, } 78 = \frac{n}{2} [48 + (n-1)(-3)]$$

$$= \frac{n}{2} (51 - 3n)$$

$$\therefore 3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$\therefore n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$\therefore (n-4)(n-13) = 0$$

$$\therefore n = 4 \quad \text{અથવા} \quad 13$$

n નાં બંને મૂલ્યો શક્ય છે આથી, માંગેલ પદની સંખ્યા 4 અથવા 13 થાય.

નોંધ :

- આ ઉદાહરણમાં પ્રથમ ચાર પદનો સરવાળો = પ્રથમ 13 પદનો સરવાળો = 78
- આ બંને જવાબ શક્ય છે કેમ કે 5 માં પદથી 13 માં પદનાં મૂલ્યોનો સરવાળો 0 બને છે. આ શક્ય છે કેમ કે a નું મૂલ્ય ધન અને d નું મૂલ્ય ઋણ છે. આથી, કેટલાંક પદ ધન અને બાકીનાં પદ ઋણ બનશે અને આથી કુલ સરવાળો 0 બનાવશે.

ઉદાહરણ 14 : સરવાળો શોધો :

- (i) પ્રથમ 1000 ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (ii) પ્રથમ n ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

ઉકેલ :

- (i) ધારો કે, $S_{1000} = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$

સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્ર,

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l) \text{ નો ઉપયોગ કરતાં,}$$

$$S_{1000} = \frac{1000}{2} (1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

આથી, પ્રથમ 1000 ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો 500500 થાય.

- (ii) ધારો કે, $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

અહીં, $a = 1$ અને અંતિમ પદ $l = n$ છે.

$$\text{આથી, } S_n = \frac{n(1+n)}{2} \text{ અથવા } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

આથી, **પ્રથમ n ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો**

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ મળશે.}$$

ઉદાહરણ 15 : જો n મું પદ $a_n = 3 + 2n$ હોય, તો સંખ્યાઓની આ યાદીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : $a_n = 3 + 2n$, હોવાથી,

$$a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$

$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$

.

.

.

આથી, સંખ્યાઓની યાદી $5, 7, 9, 11, \dots$ બને.

અહીં, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ વગેરે.

આથી, તે સમાંતર શ્રેણી બને છે. સામાન્ય તફાવત $d = 2$.

S_{24} શોધવા, $n = 24, a = 5, d = 2$

$$S_{24} = \frac{24}{2} [2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12 [10 + 46]$$

$$= 672$$

આમ, શ્રેણીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો 672 થશે.

$$\begin{aligned} \text{નોંધ : } & a_n - a_{n-1} \\ &= (3 + 2n) - [3 + 2(n-1)] \\ &= 2n - 2(n-1) + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

\therefore શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે તથા સામાન્ય તફાવત = 2

ઉદાહરણ 16 : ટીવી સેટના ઉત્પાદકે ત્રીજા વર્ષે 600 ટીવી અને 7 માં વર્ષે 700 ટીવી બનાવ્યાં છે. તે માને છે કે દરેક વર્ષ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા એક સમાન વધતી હોવી જોઈએ. તો

(i) પ્રથમ વર્ષનું ઉત્પાદન (ii) 10 માં વર્ષનું ઉત્પાદન

(iii) પ્રથમ 7 વર્ષમાં કુલ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : દરેક વર્ષ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા સમાન રીતે વધતી હોવાથી,

પ્રથમ, દિતીય, તૃતીય... વર્ષ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા એક સમાંતર શ્રેણી બનાવશે.

ધારો કે n માં વર્ષ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા a_n છે.

આથી, $a_3 = 600$ અને $a_7 = 700$

અથવા $a + 2d = 600$ અને $a + 6d = 700$

સમીકરણો ઉકેલતાં, આપણાને $d = 25$ અને $a = 550$ મળે છે.

આથી, પ્રથમ વર્ષ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા 550 હશે.

(ii) હવે, $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

આથી, 10 માં વર્ષ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા 775 છે.

(iii) વળી, $S_7 = \frac{7}{2} [2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2} [1100 + 150] = 4375$$

આથી, પ્રથમ 7 વર્ષમાં ઉત્પાદિત ટીવીની કુલ સંખ્યા 4375 છે.

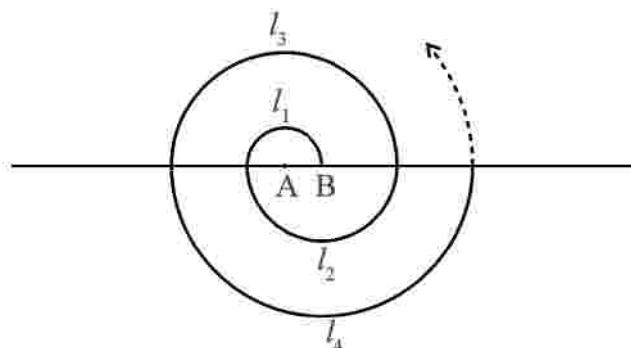
સ્વાધ્યાય 5.3

1. નીચે આપેલ સમાંતર શ્રેષ્ઠી માટે માંગ્યા પ્રમાણે સરવાળો શોધો :
 - (i) $2, 7, 12, \dots, 10$ પદ સુધી
 - (ii) $-37, -33, -29, \dots, 12$ પદ સુધી
 - (iii) $0.6, 1.7, 2.8, \dots, 100$ પદ સુધી
 - (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots, 11$ પદ સુધી
2. નીચેના સરવાળા શોધો : (સમાંતર શ્રેષ્ઠી આપેલ છે.)
 - (i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \dots + 84$
 - (ii) $34 + 32 + 30 + \dots + 10$
 - (iii) $-5 + (-8) + (-11) + \dots + (-230)$
3. સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં
 - (i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$ આપેલ હોય, તો n અને S_n શોધો.
 - (ii) $a = 7, a_{13} = 35$ આપેલ હોય, તો d અને S_{13} શોધો.
 - (iii) $a_{12} = 37, d = 3$ આપેલ હોય, તો a અને S_{12} શોધો.
 - (iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$ આપેલ હોય, તો d અને a_{10} શોધો.
 - (v) $d = 5, S_9 = 75$ આપેલ હોય, તો a અને a_9 શોધો.
 - (vi) $a = 2, d = 8, S_n = 90$ આપેલ હોય, તો n અને a_n શોધો.
 - (vii) $a = 8, a_n = 62, S_n = 210$ આપેલ હોય, તો n અને d શોધો.
 - (viii) $a_n = 4, d = 2, S_n = -14$ આપેલ હોય, તો n અને a શોધો.
 - (ix) $a = 3, n = 8, S = 192$ આપેલ હોય, તો d શોધો.
 - (x) $I = 28, S = 144$ હોય અને પદોની સંખ્યા 9 હોય, તો a શોધો.
4. સમાંતર શ્રેષ્ઠી $9, 17, 25, \dots$ નાં કેટલાં પદનો સરવાળો 636 થાય ?
5. સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ 5, અંતિમ પદ 45 અને સરવાળો 400 છે. શ્રેષ્ઠીનાં પદોની સંખ્યા અને સામાન્ય તકાવત શોધો.
6. સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ પદ અને અંતિમ પદ અનુક્રમે 17 અને 350 છે. જો સામાન્ય તકાવત 9 હોય તો તેમાં કેટલાં પદ હશે અને તેમનો સરવાળો કેટલો થશે ?
7. જે સમાંતર શ્રેષ્ઠીમાં $d = 7$ અને 22 મું પદ 149 હોય, તેનાં 22 પદોનો સરવાળો શોધો.
8. સમાંતર શ્રેષ્ઠીનું બીજું અને ત્રીજું પદ અનુક્રમે 14 અને 18 હોય તો તેનાં પ્રથમ 51 પદોનો સરવાળો શોધો.
9. સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ 7 પદોનો સરવાળો 49 અને 17 પદોનો સરવાળો 289 હોય તો, તેનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.
10. a_n નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :
 - (i) $a_n = 3 + 4n$
 - (ii) $a_n = 9 - 5n$

સાબિત કરો કે, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ સમાંતર શ્રેષ્ઠી બનાવે છે. વળી, દરેકમાં પ્રથમ 15 પદોનો સરવાળો શોધો.
11. સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $4n - n^2$ હોય, તો તેનું પ્રથમ પદ કયું હશે (અર્થાત् S_1) ? પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો કેટલો હશે ? બીજું પદ કયું હશે ? આ જ રીતે ત્રીજું, 10 મું અને n મું પદ શોધો.
12. 6 વડે વિભાજ્ય પ્રથમ 40 ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

ગણિત

13. 8 ના પ્રથમ 15 ગુણિતોનો સરવાળો શોધો.
14. 0 અને 50 વચ્ચેના અયુગમ પૂર્ણકોનો સરવાળો શોધો.
15. નિર્માણ કામ માટે થપેલ કરારમાં નિશ્ચિત તારીખ કરતાં વિલંબથી પૂરા થતા કામ માટે નીચે પ્રમાણેના દંડની જોગવાઈ છે :
પ્રથમ દિવસ માટે ₹ 200, બીજા દિવસ માટે ₹ 250, ત્રીજા દિવસ માટે ₹ 300 વગેરે. પ્રત્યેક દિવસ માટે દંડની રકમ આગળના દિવસ કરતાં ₹ 50 વધુ છે. જો કોન્ટ્રાક્ટર 30 દિવસનો વિલંબ કરે તો તેણે ભરવી પડતી દંડની રકમ શોધો.
16. કોઈ એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓના સમગ્ર શૈક્ષણિક પ્રદર્શન માટે અપાતા 7 ઇનામો માટે કુલ ₹ 700 ની જોગવાઈ કરવાની છે. જો પ્રત્યેક ઇનામ આગળના ઇનામ કરતાં ₹ 20 ઓછું હોય, તો પ્રત્યેક ઇનામની રકમ શોધો.
17. એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓ વાયુ પ્રદૂષણ ઓછું કરવા માટે શાળાની અંદર અને બહાર વૃક્ષ વાવવાનું વિચારે છે. એવું નક્કી કરાયું કે પ્રત્યેક ધોરણનો પ્રત્યેક વિભાગ તે જે ધોરણમાં ભણતા હોય તેટલાં વૃક્ષ વાવશે. દાખલા તરીકે ધોરણ I નો વિભાગ 1 વૃક્ષ, ધોરણ II નો વિભાગ 2 વૃક્ષ અને આવું ધોરણ XII સુધી ચાલશે. દરેક ધોરણમાં ગ્રદ્ધ વિભાગ છે. આ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા કેટલાં વૃક્ષનું વાવેતર થશે ?
18. વારાફરતી A અને B ને કેન્દ્ર લઈ કમિક અર્ધવર્તુળોની મદદથી એક કુંતલ (Spiral) બનાવેલ છે. તેની શરૂઆત A થી થાય છે. આકૃતિ 5.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે નિઝયાઓ 0.5 સેમી, 1.0 સેમી, 1.5 સેમી, 2.0 સેમી ... હોય તો આવા 13 કમિક અર્ધવર્તુળોથી બનતા કુંતલની લંબાઈ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 5.4

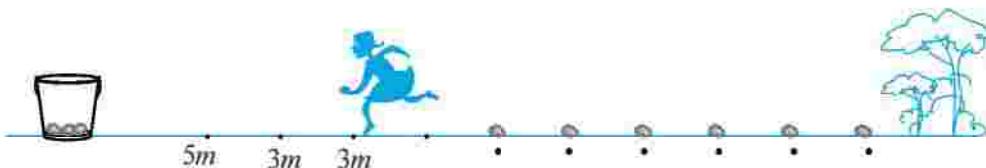
[સૂચન : કમિક અર્ધવર્તુળની લંબાઈ $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots$ અને તેનો અનુક્રમ A, B, A, B, ... છે.]

19. લાકડાના 200 ગોળવા નીચે પ્રમાણે ગોઠવવામાં આવે છે : તથિયાની હારમાં 20 ગોળવા, તેની ઉપરની હારમાં 19 ગોળવા, તેની ઉપરની હારમાં 18 ગોળવા વગેરે. (જુઓ આકૃતિ 5.5.) આવા 200 ગોળવા માટે કેટલી હાર થશે અને સૌથી ઉપરની હારમાં કેટલા ગોળવા થશે ?



આકૃતિ 5.5

20. એક બટાકા ઉપાડવાની હરીજાઈમાં આરંભ બિંદુ પર એક ડોલ રાખેલ છે અને ત્યાર બાદ તેનાથી 5મી દૂર પ્રથમ બટાકું મુકેલ છે ત્યાર પછી દર ત્રણ મીટરે એક બટાકું સીધી રેખામાં ગોક્કવેલ છે. આવાં 10 બટાકા રેખા પર મુકેલ છે. (જુઓ આફ્રતિ 5.6.)



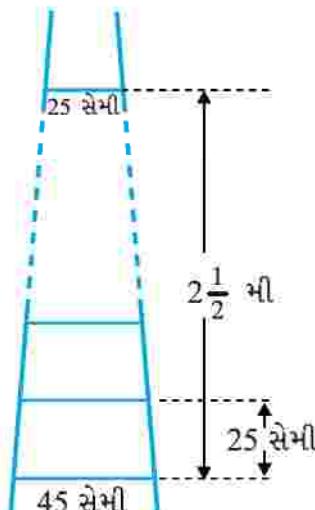
આકાશ 5.6

દરેક હરીકે બાળદી પાસેથી દોડી પોતાની નજીકનું બટાકું ઉપાડી, પાછા આવી બાળદીમાં નાંખવાનું છે. ત્યારબાદ આ જ પ્રમાણે બીજું, ત્રીજું એમ છેલ્લું બટાકું બાળદીમાં મૂકાય ત્યાં સુધી ઢોડવાનું છે. હરીકે કેટલું અંતર ઢોડવું પડે?

[**સુચના** : પ્રથમ અને દ્વિતીય બાટકું ઉપાડવા હરીફ દ્વારા કપાતાં અંતર (મીટરમાં) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

स्वाध्याय 5.4 (वैकल्पिक)*

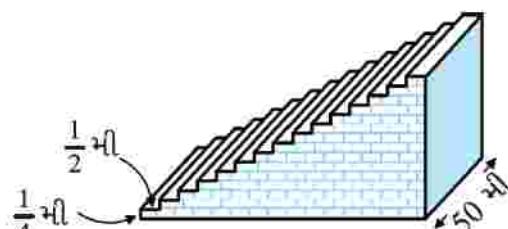
1. સમાંતર શ્રેષ્ઠી 121, 117, 113, ... નું પ્રથમ જ્ઞાણ પદ ક્યું હશે? (સૂચન : $a_n < 0$ થાય તેવો સૌથી નાનો n શોધો.)
 2. કોઈ સમાંતર શ્રેષ્ઠીના ત્રીજા અને સાતમાં પદનો સરવાળો 6 છે અને તેનો ગુણાકાર 8 છે. આ સમાંતર શ્રેષ્ઠીનાં પ્રથમ 16 પદનો સરવાળો શોધો.
 3. એક સીરીના બે કમિક પગથિયાં વચ્ચેનું અંતર 25 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 5.7). સૌથી નીચેના પગથિયાની લંબાઈ 45 સેમી છે અને એકધારા ઘટાડા સાથે સૌથી ઉપરના પગથિયાની લંબાઈ 25 સેમી છે. સૌથી ઉપરના અને સૌથી નીચેના પગથિયા વચ્ચેનું અંતર $2\frac{1}{2}$ મીટર હોય, તો પગથિયામાં વપરાયેલ કુલ લાકડાની લંબાઈ શોધો. [સૂચન : પગથિયાની સંખ્યા = $\frac{250}{25} + 1$]



आकृति 5.7

4. એક હારમાં આવેલા મકાનોને કમશા: 1 થી 49 કમાંક આપેલ છે. સાબિત કરો કે એવી સંખ્યા x મળે કે જેથી તેની આગળના મકાનના કમાંકોનો સરવાળો તે પછીના મકાનોનાં કમાંકોના સરવાળા જેટલો થાય. x નું મૂલ્ય શોધો. [સૂચન : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. ફૂટબોલના એક મેદાનમાં 15 પગથિયાંવાળી નાની અગાસી છે. તે પ્રત્યેકની લંબાઈ 50 મી છે અને તે નક્કર કોંકિનાં બનાવેલ છે. દરેક પગથિયાંની ઉચ્ચાઈ $\frac{1}{2}$ મી. 



આકૃતિ 5.૪

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના દસ્તિકોપથી નથી.

ગણિત

$\frac{1}{4}$ મી તથા પહોળાઈ $\frac{1}{2}$ મી છે. (જુઓ આકૃતિ 5.8) આ અગાસી બનાવવા માટે કુલ કેટલા ઘનફળ કોંકિટની જરૂર પડશે?

[સૂચન : પ્રથમ પગથિયું બનાવવા જરૂરી કોંકિટનું ઘનફળ = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50$ મી³]

5.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

- જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયનું પ્રત્યેક પદ તેની આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરી મેળવી શકાય એવી સંખ્યાઓની યાદી સમાંતર શ્રેણી છે. નિશ્ચિત સંખ્યા d ને સામાન્ય તફાવત કહેવાય છે. સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ છે.
- આપેલ સંખ્યાઓની યાદી a_1, a_2, a_3, \dots માટે જો $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$, સમાન સંખ્યા આવે અર્થાત્ જો તમામ ભિન્ન k માટે $a_{k+1} - a_k$ સમાન હોય, તો તે શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી કહેવાય.
- સમાંતર શ્રેણી માટે જો પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો તેનું n મું પદ (અથવા વ્યાપક પદ) $a_n = a + (n - 1) d$ દ્વારા મળે.
- સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$ દ્વારા મળે.
- સમાંતર શ્રેણીનું છેલ્લું પદ (ધારો કે n મું પદ) l હોય તો બધાં જ પદોનો સરવાળો

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l) \text{ દ્વારા મળે.}$$

વાચકને નોંધ

જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $b = \frac{a+c}{2}$ અને b ને a તથા c નો સમાંતર મધ્યક કહેવાય.



B9L1L1



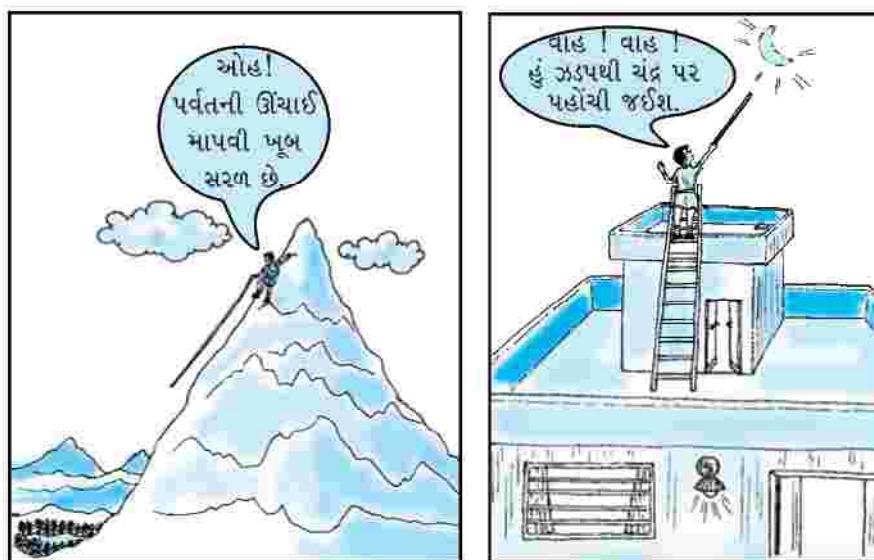
નિકોણ

6

6.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે અગાઉના ધોરણમાં નિકોણ અને તેના ઘણા ગુણધર્મોથી પરિચિત થયાં છો. ધોરણ IX માં તમે નિકોણની એકરૂપતા વિશે વિગતવાર અભ્યાસ કર્યો છે. યાદ કરો કે જ્યારે, બે આકૃતિઓના આકાર અને કદ સમાન હોય ત્યારે, તે બે આકૃતિઓ એકરૂપ છે તેવું કહેવાય. આ પ્રકરણમાં આપણે જેના આકાર સમાન હોય, પરંતુ તેમનાં કદ સમાન હોય કે ન પણ હોય તેવી આકૃતિઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું. **જે બે આકૃતિઓના આકાર સમાન હોય (કદ સમાન હોય તે જરૂરી નથી) તેમને સમરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.** ખાસ કરીને, આપણે બે નિકોણોની સમરૂપતાની ચર્ચા કરીશું અને આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ અગાઉ શીખેલ પાયથાગોરસ પ્રમેયની સરળ સાબિતી આપવા માટે કરીશું.

તમે અનુમાન કરી શકો કે પર્વતો (જેમકે, માઉન્ટ એવરેસ્ટ)ની ઊંચાઈઓ અને દૂરની વસ્તુઓ (જેમકે, ચંદ્ર) નાં અંતર કેવી રીતે શોધી શકાય? શું તમને એવું લાગે છે કે આ માપો માપપદ્ધિથી સીધાં જ માપવામાં આવ્યા છે? ખરેખર



ગણિત

તો આ બધી ઉંચાઈઓ અને અંતરો આકૃતિઓની સમરૂપતાના સિદ્ધાંત પર આધારિત પરોક્ષ માપનની સંકલ્પનાથી શોધવામાં આવ્યાં છે. (જુઓ ઉદાહરણ 7, સ્વાધ્યાય 6.3 નો પ્રશ્ન 15 અને આ પુસ્તકનું પ્રકરણ 8 અને 9)

6.2 સમરૂપ આકૃતિઓ

તમે ધોરણ IX માં જોયું છે કે, સમાન ત્રિજ્યાવાળાં તમામ વર્તુળો એકરૂપ હોય છે. સમાન બાજુવાળા બધા ચોરસો એકરૂપ હોય છે અને સમાન બાજુવાળા બધા સમબાજુ ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.

હવે આપણે કોઈ બે (અથવા વધારે) વર્તુળો વિશે વિચાર કરીએ. (જુઓ, આકૃતિ 6.1 (i)). તેઓ એકરૂપ છે ? તે બધાની ત્રિજ્યા સમાન ન હોવાથી તેઓ એકબીજાને એકરૂપ નથી. તે પૈકી કેટલાંક એકરૂપ છે અને કેટલાંક નથી. પરંતુ, તે બધાના આકાર સમાન છે. તેથી તે બધી આકૃતિઓને આપણે સમરૂપ આકૃતિઓ કહીશું. બે સમરૂપ આકૃતિઓના આકાર સરખા હોય છે, પરંતુ કદ સમાન હોય કે ન પણ હોય તે શક્ય છે. તેથી બધાં વર્તુળો સમરૂપ છે. બે (અથવા વધારે) ચોરસ કે બે (અથવા વધારે) સમબાજુ ત્રિકોણ વિશે તમને શું લાગે છે ? જુઓ આકૃતિ 6.1 (ii) અને (iii) ? જેમ વર્તુળોમાં જોયું, તેમ અહીં બધા ચોરસ અને બધા સમબાજુ ત્રિકોણ પણ સમરૂપ છે.

ઉપરની ચર્ચા પરથી કહી શકાય બધી એકરૂપ આકૃતિઓ સમરૂપ આકૃતિઓ છે, પરંતુ બધી સમરૂપ આકૃતિઓ એકરૂપ હોય તે જરૂરી નથી.

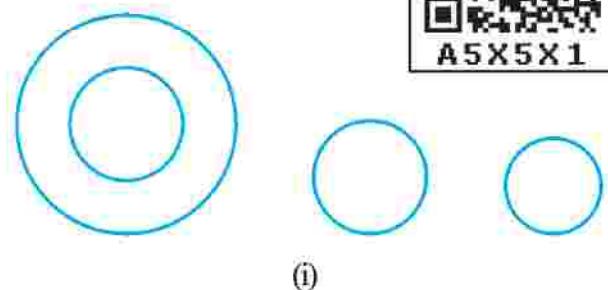
એક વર્તુળ અને એક ચોરસ સમરૂપ થઈ શકે ? એક ત્રિકોણ અને ચોરસ સમરૂપ થઈ શકે ? આ પ્રશ્નોના જવાબ તમે તેમની અનુરૂપ આકૃતિઓ (જુઓ આકૃતિ 6.1.) જોઈને જ આપી શકશો.

સ્પષ્ટ રીતે, આ આકૃતિઓ સમરૂપ નથી.

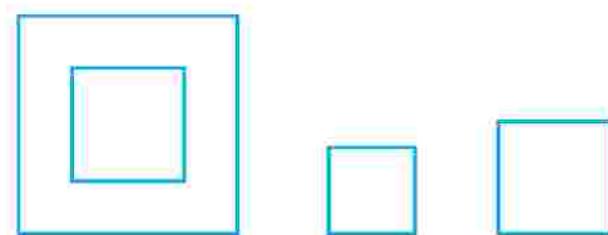
(શા માટે ?)

બે ચતુર્ભુંધો ABCD અને PQRS વિશે શું કહી શકાય ? (આકૃતિ 6.2) તે સમરૂપ છે ? આ આકૃતિઓ સમરૂપ લાગે છે, પરંતુ તેમના વિશે ચોક્કસ ન કહી શકાય. તેથી એ જરૂરી બને છે કે, આકૃતિઓની સમરૂપતાની કોઈ વ્યાખ્યા હોય અને વ્યાખ્યા આધારિત કેટલાક માપદંડ નક્કી કરી શકાય કે આપેલી બે આકૃતિઓ સમરૂપ છે કે નહિ.

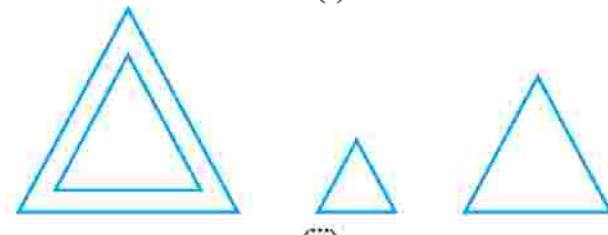
આના માટે આકૃતિ 6.3 માં આપેલ ચિત્રો જુઓ.



(i)

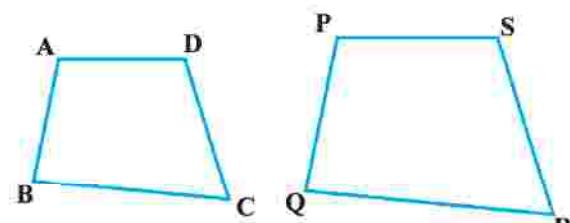


(ii)

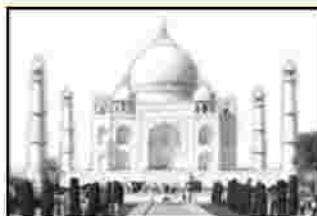


(iii)

આકૃતિ 6.1



આકૃતિ 6.2



આકૃતિ 6.3

તમે તરત જ કહેશો કે તે ચિત્રો એક જ સ્મારક (તાજમહેલ)નાં છે પરંતુ, તેમનાં કદ લિખ છે. તમે કહેશો કે આ ત્રણ ચિત્રો સમરૂપ છે? હા, તે સમરૂપ છે.

કોઈ એક જ વ્યક્તિનાં 10 વર્ષની ઉમરનાં તેમજ 40 વર્ષની ઉમરના એક જ કદનાં બે ચિત્રો માટે શું કહી શકાય? આ ચિત્રો સમરૂપ છે? આ ચિત્રોનાં કદ સમાન છે, પરંતુ સ્પષ્ટપણે તેમના આકાર સમાન નથી. તેથી તે સમરૂપ નથી.

જ્યારે કોઈ તસવીરકાર કોઈ એક નેગેટિવમાંથી જુદા-જુદા કદના ફોટાની નકલ કાઢે છે, ત્યારે તે શું કરે છે? તમે ટિકિટ પ્રમાણેનું કદ, પાસપોર્ટ પ્રમાણેનું કદ અને પોસ્ટકાર્ડ પ્રમાણેના કદની નકલો વિશે સાંભળ્યું હશે. તે સામાન્ય રીતે 35 મિમિ જેવી નાના કદની ફિલ્મ પર ફોટા લે છે અને પછી તેની 45 મિમિ (કે 55 મિમિ)ના કદમાં મોટવજી કરે છે. આમ, જો આપણે નાની નકલના કોઈ રેખાખંડને અનુરૂપ મોટી નકલના સંગત રેખાખંડ લઈએ તો તે મોટી નકલના અનુરૂપ રેખાખંડના $\frac{45}{35}$ (કે $\frac{55}{35}$) ગણા થશે.

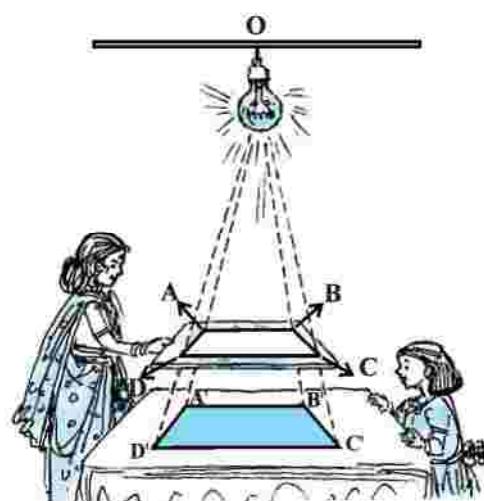
આનો અર્થ ખરેખર એવો છે કે નાની નકલના દરેક રેખાખંડને 35 : 45 (કે 35 : 55) ગુણોત્તરમાં મોટો કરી શકાય છે. એવું પણ કહી શકાય કે મોટી નકલના દરેક રેખાખંડને 45 : 35 (કે 55 : 35) ગુણોત્તરમાં નાનો બનાવી શકાય. વધુમાં, જો તમે જુદા-જુદા કદની બે નકલોના અનુરૂપ રેખાખંડોના ઢાળ (કે ખૂણાઓ) વિશે વિચારો તો તેમના ઢાળ (કે ખૂણાઓ) હંમેશાં સમાન છે. બે આકૃતિઓ અને વિશેષ કરીને બે બહુકોણોની સમરૂપતાનો આ સાર છે. આપણે કહી શકીએ :

જો (i) સમાન બાજુવાળા બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો તે બહુકોણો સમરૂપ છે.

આપણે ધ્યાન આપીએ કે બહુકોણ માટે સંગત બાજુઓના ગુણોત્તર ને સ્કેલમાપન (નિર્દેશક અપુર્વક) કહેવામાં આવે છે. તમે દુનિયાનો નકશો (જેમ કે, વૈશ્વિક નકશો) અને મકાનોના બાંધકામ માટે બનાવેલી રૂપરેખા વિશે સાંભળ્યું હશે. તે થોડ્ય સ્કેલમાપન અને ચોક્કસ રૂઢિને ધ્યાનમાં રાખી બનાવવામાં આવે છે.

આકૃતિઓની સમરૂપતા વધારે સ્પષ્ટ રીતે સમજવા, ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક પ્રકાશિત બલબને છત પરના બિંદુ O પર લગાડો અને તેની બરાબર નીચે વર્ગનું ટેબલ ગોઠવો. ચાલો આપણે એક સીધા પૂછામાંથી એક બહુકોણ, જેમકે, ચતુર્ભુણ ABCD કાપીએ અને આ પૂછાને પ્રકાશિત બલ અને ટેબલ વચ્ચે ટેબલની સપાટીને સમાંતર ગોઠવીએ. તેથી ABCDનો પદ્ધાયો ટેબલ પર પડશે. આ પદ્ધાયાની બહારની રેખા A'B'C'D' આંકી લો. (જુઓ આકૃતિ 6.4.)



આકૃતિ 6.4

ગણિત

આપણે નોંધ કરીએ કે ચતુર્ભુષા $A'B'C'D'$ એ ચતુર્ભુષા $ABCD$ નું વિસ્તૃત (કે વિપુલ) સ્વરૂપ છે અને તે પ્રકાશ સીધી રેખામાં ગતિ કરે છે એ પ્રકાશના ગુણવર્ધનને કારણે છે. તમે એ પણ નોંધ્યું હશે કે A' કિરણ OA પર છે. B' કિરણ OB પર છે, C' કિરણ OC પર છે અને D' કિરણ OD પર છે. આથી ચતુર્ભુષા $A'B'C'D'$ અને $ABCD$ ના આકાર સરખા છે, પરંતુ કદ જુદાં છે.

તેથી ચતુર્ભુષા, $A'B'C'D'$ અને ચતુર્ભુષા $ABCD$ સમરૂપ છે. આપણે એમ કહી શકીએ કે ચતુર્ભુષા $ABCD$ એ ચતુર્ભુષા $A'B'C'D'$ ને સમરૂપ છે.

આપણે એ પણ નોંધીશું કે, શિરોબિંદુ A' એ શિરોબિંદુ A ને સંગત છે, શિરોબિંદુ B' એ શિરોબિંદુ B ને સંગત છે, શિરોબિંદુ C' એ શિરોબિંદુ C ને સંગત છે અને શિરોબિંદુ D' એ શિરોબિંદુ D ને સંગત છે.

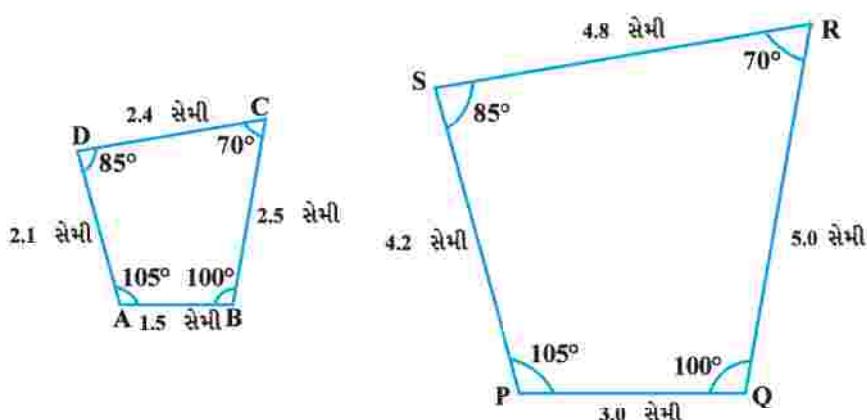
સંકેતમાં આ સંગતતાઓને $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$, $D' \leftrightarrow D$ થી દર્શાવી શકાય. હકીકતમાં, બે ચતુર્ભુષાના ખૂણાઓ તથા બાજુઓ માપીને, તમે ચકાસી શકો કે,

$$(i) \quad \angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C', \quad \angle D = \angle D' \text{ અને}$$

$$(ii) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A},$$

આ પરથી ફરીથી સ્પષ્ટ થાય છે કે જો (i) બે બહુકોણના બધા જ અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની બધી અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો સમાન સંખ્યાની બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ થાય.

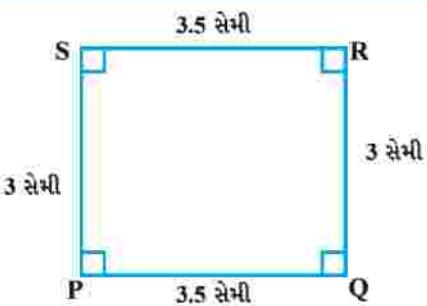
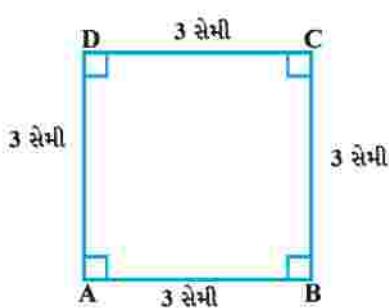
ઉપર પ્રમાણે, તમે સહેલાઈથી કહી શકશો કે આકૃતિ 6.5 માંના ચતુર્ભુષા $ABCD$ અને $PQRS$ સમરૂપ છે.



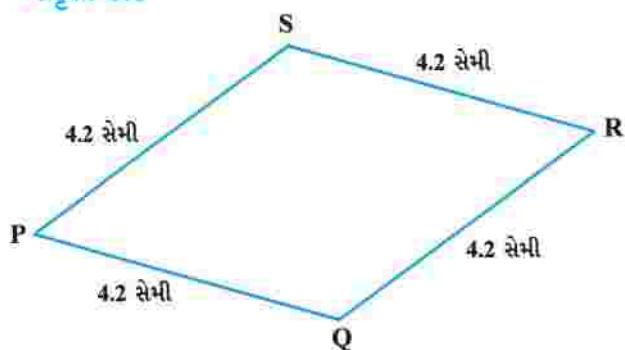
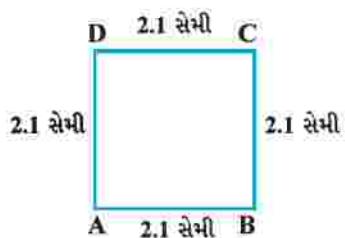
આકૃતિ 6.5

નોંધ : તમે જોઈ શકશો કે, જો એક બહુકોણ બીજા બહુકોણને સમરૂપ હોય અને બીજો બહુકોણ ત્રીજા બહુકોણને સમરૂપ હોય, તો પહેલો બહુકોણ ત્રીજા બહુકોણને સમરૂપ છે.

તમે નોંધ્યું હશે કે આકૃતિ 6.6 માંના બે ચતુર્ભુષા (ચોરસ અને લંબચોરસ)માં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે, પરંતુ, તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન નથી.



આકૃતિ 6.6



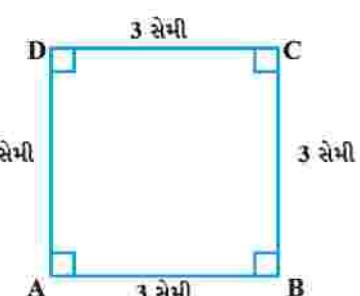
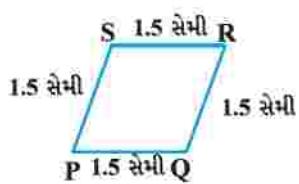
આકૃતિ 6.7

એ જ રીતે તમે નોંધ્યું હશે કે, આકૃતિ 6.7 માંના બે ચતુર્ભુષણો (ચોરસ અને સમબાજુ ચતુર્ભુષણ)ની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર સમાન છે. પરંતુ, તેમના અનુરૂપ ખૂલ્ખાઓ સમાન નથી. ફરીથી બે બહુકોણો (ચતુર્ભુષણો) સમરૂપ નથી.

આમ, બે બહુકોણોની સમરૂપતા માટેની ઉપર દર્શાવેલી બે શરતો (i) અને (ii) પૈકી કોઈ એકના પાલન ચવાથી બહુકોણો સમરૂપ છે તેમ કહી શકાય નહીં.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. કોંસમાં આપેલ શબ્દો પૈકી સાચા શબ્દનો ઉપયોગ કરીને ખાલી જગ્ગા પૂરો :
 - (i) બધાં વર્તુળો છે. (એકરૂપ, સમરૂપ)
 - (ii) બધા ચોરસો છે. (સમરૂપ, એકરૂપ)
 - (iii) બધા ન્યુકોણો સમરૂપ છે. (સમદ્વિબાજુ, સમબાજુ)
 - (iv) જો (અ) બે બહુકોણના અનુરૂપ ખૂલ્ખાઓ હોય. (બ) તેમની અનુરૂપ બાજુઓ હોય, તો સમાન સંખ્યાની બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ છે. (સમાન, સમપ્રમાણમાં)
2. નીચેની જોડીઓનાં બે જુદાં-જુદાં ઉદાહરણો આપો :
 - (i) સમરૂપ આકૃતિઓ
 - (ii) સમરૂપ ન હોય તેવી આકૃતિઓ
3. નીચેના ચતુર્ભુષણો સમરૂપ છે કે નહિ તે જણાવો :



આકૃતિ 6.8

6.3 ત્રિકોણોની સમરૂપતા

બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા વિશે શું કહી શકો ?
તમને યાદ હશે કે ત્રિકોણ પણ બહુકોણ છે. તેથી સમરૂપતા માટેની શરતો બે ત્રિકોણની સમરૂપતા માટે પણ દર્શાવી શકાય. તે આ પ્રમાણે છે.



જો (i) બે ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂલાઓ સમાન હોય (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (એટલે કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય) તો,
તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, જો બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂલાઓ સમાન હોય, તો તેમને સમકોણિક ત્રિકોણો કહેવાય છે. પ્રાચ્યાત ગ્રીક ગણિતજ્ઞ થેલ્સે બે સમકોણિક ત્રિકોણો વિશે અગત્યનું પરિણામ આપ્યું હતું. તે નીચે પ્રમાણે છે :

બે સમકોણિક ત્રિકોણોમાં પ્રત્યેક અનુરૂપ બાજુઓની જોડના ગુણોત્તર સમાન હોય છે.

એવું માનવામાં આવે છે કે તેના માટે તેણે સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયના પરિણામનો ઉપયોગ કર્યો હતો. (તે હવે થેલ્સના પ્રમેય તરીકે જાણીતું છે.)

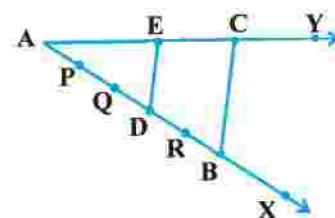
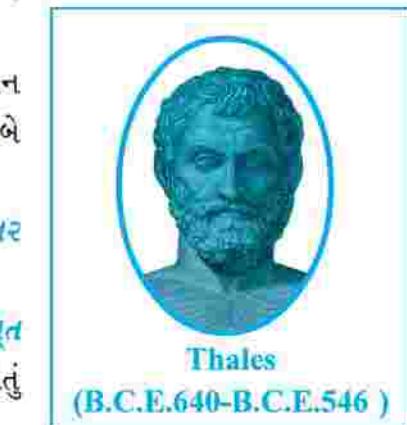
સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયને સમજવા માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 2 : કોઈ પણ ખૂલ્ષો (XAY) દોરો અને તેના ભૂજ AX
પર બિંદુઓ (કહો કે, પાંચ બિંદુઓ) P, Q, D, R અને B
એવી રીતે દર્શાવો કે,

$$AP = PQ = QD = DR = RB.$$

હવે, B માંથી ભૂજ AYને C માં છેદતી કોઈ રેખા દોરો
(જુઓ આદૃતિ 6.9.)

તદ્વપ્રચંત્ર, બિંદુ D માંથી AC ને E માં છેદતી તથા
BC ને સમાંતર હોય તેવી રેખા દોરો.



આદૃતિ 6.9

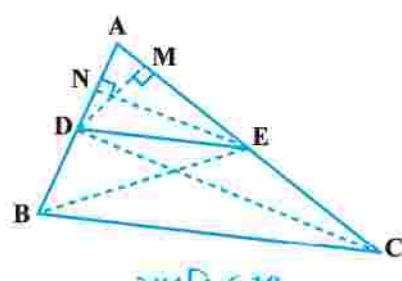
તમારી રચના પરથી તમે અવલોકન કર્યું $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$? AE અને EC માપો. $\frac{AE}{EC}$ માટે શું કહી શકાય ?

અવલોકન કરો કે, $\frac{AE}{EC}$ પણ $\frac{3}{2}$ થશે.

આમ, તમે જોઈ શક્શો કે, $\triangle ABC$ માં, $DE \parallel BC$ અને $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. શું આ યોગાનુયોગ માત્ર છે ? ના, તે નીચેના પ્રમેયના કારણો છે. (આ પ્રમેય સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેય તરીકે જાણીતું છે.)

પ્રમેય 6.1 : જો ત્રિકોણની કોઈ એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા બાકીની બે બાજુઓને બિના બિંદુઓમાં છેટે, તો તે બાજુઓ પર ક્રાતા રેખાખંડો તે બાજુઓનું સમપ્રમાણમાં વિભાજન કરે છે.

સાબિતી : અહીં આપેલું છે કે, ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC ને સમાંતર રેખા બાકીની બે બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેટે છે. (જુઓ આદૃતિ 6.10.)



આદૃતિ 6.10

આપણે સાબિત કરવાનું છે કે, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

BE અને CD જોડો અને DM \perp AC અને EN \perp AB દોરો.

$$\text{હવે, } \Delta ADE \text{ નું ક્ષેત્રફળ} (= \frac{1}{2} \text{ પાયો} \times \text{વેધ}) = \frac{1}{2} AD \times EN$$

ધોરણ IXમાં શીખ્યાં હતાં તે પ્રમાણે ΔADE નું ક્ષેત્રફળ $ar(ADE)$ વડે દર્શાવાય છે, તે પાછ કરો.

$$\text{તેથી, } ar(ADE) = \frac{1}{2} AD \times EN$$

$$\text{એ જ રીતે } ar(BDE) = \frac{1}{2} DB \times EN$$

$$ar(ADE) = \frac{1}{2} AE \times DM \text{ અને } ar(DEC) = \frac{1}{2} EC \times DM$$

$$\text{તેથી, } \frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN}$$

$$= \frac{AD}{DB} \quad (1)$$

$$\text{અને } \frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM}$$

$$= \frac{AE}{EC} \quad (2)$$

હવે નોંધો કે, ΔBDE અને ΔDEC એક જ પાયા DE પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડ BC અને DE વચ્ચે આવેલાં છે.

$$\text{તેથી, } ar(BDE) = ar(DEC) \quad (3)$$

તેથી, (1), (2) અને (3) પરથી

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad ■$$

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે ? (પ્રતીપના અર્થ માટે પરિણિષ્ટ 1 જુઓ.)

આ ચકાસવા માટે, ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

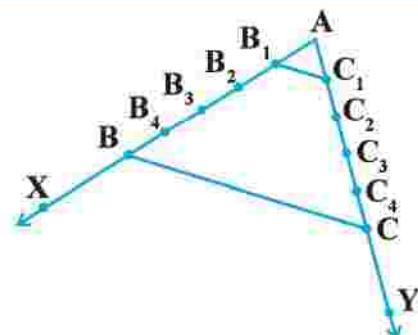
પ્રવૃત્તિ 3 : તમારી નોંધપોથીમાં $\angle XAY$ દોરો અને કિરણ AX પર, બિંદુઓ B_1, B_2, B_3, B_4 અને B એવી રીતે લોકે કે, જેથી $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.

ગણિત

એ જ રીતે કિરણ AY પર બંધુઓ C_1, C_2, C_3, C_4 અને C એવી રીતે લો કે, જેથી $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. હવે, B_1C_1 અને BC જોડો (જુઓ આકૃતિ 6.11.)

$$\text{જુઓ } \frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} \quad (\text{દરેક } \frac{1}{4} \text{ ભરાબર છે.})$$

તમે એ પણ જોઈ શકશો કે રેખાઓ B_1C_1 અને BC એકબીજાને સમાંતર છે.



આકૃતિ 6.11

(1)

$$\text{એટલે કે } B_1C_1 \parallel BC$$

એ જ રીતે, B_2C_2, B_3C_3 અને B_4C_4 જોડીને જોઈ શકો કે,

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(= \frac{2}{3} \right) \text{ અને } B_2C_2 \parallel BC \quad (2)$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(= \frac{3}{2} \right) \text{ અને } B_3C_3 \parallel BC \quad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(= \frac{4}{1} \right) \text{ અને } B_4C_4 \parallel BC \quad (4)$$

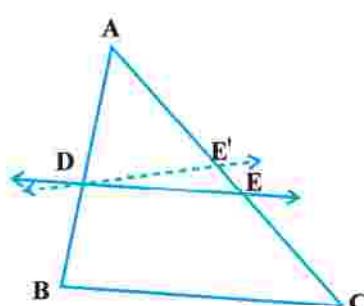
(1), (2), (3) અને (4) પરથી જોઈ શકાય છે કે જો એક રેખા નિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો તે રેખા ગ્રીલ બાજુને સમાંતર છે.

તમે આ પ્રવૃત્તિનું કોઈ અલગ માપનો ખૂબો XAY દોરો અને તેના ભૂજ AX અને AY પર ગમે તેટલા સમાન ભાગ પાડીને પુનરાવર્તન કરો. દરેક વખતે સમાન પરિણામ મળશે. આથી, આપણને નીચેનું પ્રમેય મળો. તે પ્રમેય 6.1નું મર્યાદાપૂર્વક હોય છે.

પ્રમેય 6.2 : જો કોઈ રેખા નિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો તે રેખા ગ્રીલ બાજુને સમાંતર હોય છે.

આ પ્રમેય સાબિત કરવા કોઈ રેખા DE એવી લો જેથી

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{થાય. અને ધારો કે, DE એ ભૂજ BC ને સમાંતર નથી. (જુઓ આકૃતિ 6.12.)}$$



આકૃતિ 6.12

જો DE, BC ને સમાંતર ન હોય તો, D માંથી BC ને સમાંતર રેખા DE' દોરો.

$$\text{તેથી, } \frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C} \quad (\text{શા માટે ?})$$

$$\text{તેથી, } \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C} \quad (\text{શા માટે ?})$$

ઉપરના પરિણામમાં બંને બાજુ 1 ઉમેરતાં, જોઈ શકાય કે, E અને E' એક જ હોવા જોઈએ. (શા માટે ?)

હવે, જેમાં ઉપરના પ્રમેયોનો ઉપયોગ થતો હોય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ :

ઉદાહરણ 1 : જો કોઈ એક રેખા ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદ છે તથા BC ને સમાંતર છે, તો સાબિત કરો કે $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (જુઓ, આકૃતિ 6.13.)

ઉકેલ :

$$DE \parallel BC$$

(આપેલ છ.)

તેથી,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

(પ્રમેય 6.1)

અથવા

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

અથવા

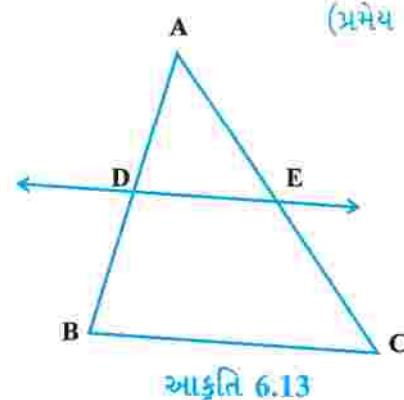
$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$

અથવા

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

તેથી,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



ઉદાહરણ 2 : સમલંબ ચતુર્ભુષણ ABCD માં $AB \parallel DC$ છે. બિંદુઓ E અને F અનુક્રમે તેની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ AD અને BC પર એવાં છે કે, જેથી EF, AB ને સમાંતર હોય. (જુઓ આકૃતિ 6.14.) સાબિત કરો $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

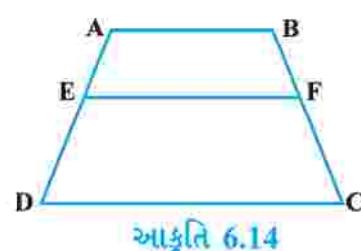
ઉકેલ : EF ને G માં છેદતી રેખા AC દીરો. (જુઓ આકૃતિ 6.15)

$AB \parallel DC$ અને $EF \parallel AB$ (આપેલ છ.)

તેથી, $EF \parallel DC$ (કોઈ એક રેખાને સમાંતર રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય.)

હવે, ΔADC માં,

$EG \parallel DC$ (કારણ ૩, $EF \parallel DC$)



તેથી, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (પ્રમેય 6.1)

(1)

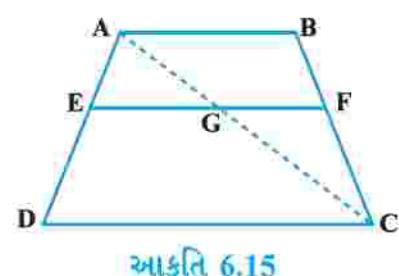
એ જ રીતે, ΔCAB પરથી,

$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

એટલે ૩,

$$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$$

(2)



ગણિત

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.16 માં, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ અને $\angle PST = \angle PRQ$ તો, સાબિત કરો કે $\triangle PQR$ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

ઉક્તા : અહીં આપેલ છે કે $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

તેથી, $ST \parallel QR$ (પ્રમય 6.2)

તેથી, $\angle PST = \angle PQR$ (અનુકોણો) (1)

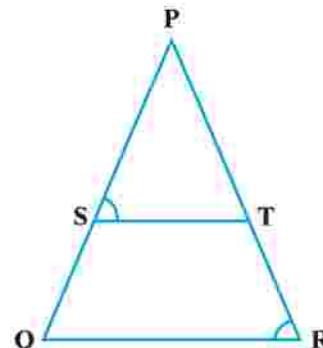
એવું પણ આપેલ છે કે

$\angle PST = \angle PRQ$ (2)

તેથી, $\angle PRQ = \angle PQR$ ((1) અને (2) પરથી)

તેથી, $PQ = PR$ (સમાન ખૂણાની સામેની બાજુ)

એટલે કે, $\triangle PQR$ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



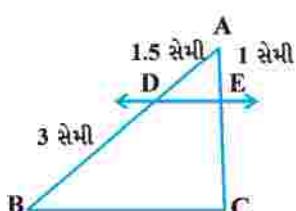
આકૃતિ 6.16

((1) અને (2) પરથી)

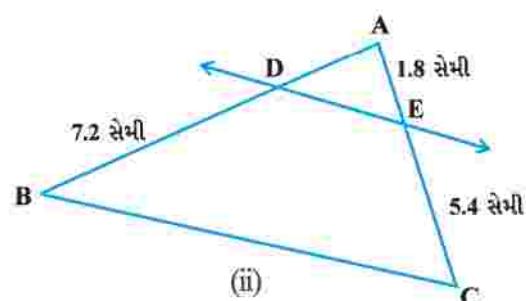
(સમાન ખૂણાની સામેની બાજુ)

સ્વાધ્યાય 6.2

1. આકૃતિ 6.17 (i) અને (ii) માં, $DE \parallel BC$. (i) માં EC શોધો. (ii) માં AD શોધો.



(i)



(ii)

આકૃતિ 6.17

2. બિંદુઓ E અને F એ ત્રિકોણ PQRની બાજુઓ અનુક્રમે PQ અને PR પર આવેલાં છે. નીચેના દરેક વિકલ્યમાં $EF \parallel QR$ છે કે કેમ તે જણાવો :

(i) $PE = 3.9$ સેમી, $EQ = 3$ સેમી, $PF = 3.6$ સેમી અને $FR = 2.4$ સેમી

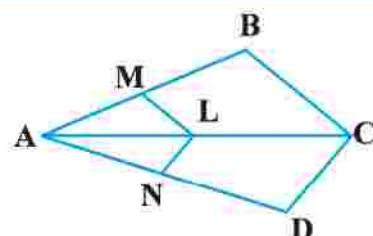
(ii) $PE = 4$ સેમી, $QE = 4.5$ સેમી, $PF = 8$ સેમી અને $RF = 9$ સેમી

(iii) $PQ = 1.28$ સેમી, $PR = 2.56$ સેમી, $PE = 0.18$ સેમી

અને $PF = 0.36$ સેમી

3. આકૃતિ 6.18 માં, જો $LM \parallel CB$ અને $LN \parallel CD$ હોય, તો

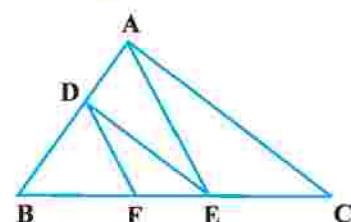
સાબિત કરો કે, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$.



આકૃતિ 6.18

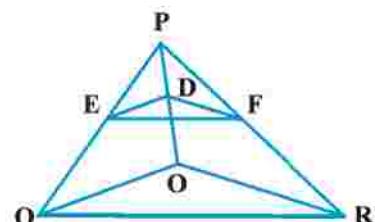
4. આકૃતિ 6.19 માં, જો $DE \parallel AC$ અને $DF \parallel AE$ હોય, તો

સાબિત કરો કે, $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$.



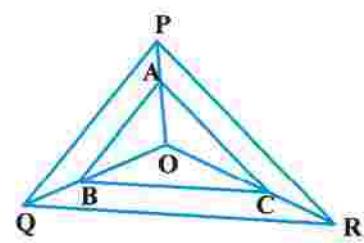
આકૃતિ 6.19

5. આકૃતિ 6.20 માં, $DE \parallel OQ$ અને $DF \parallel OR$. સાબિત કરો $EF \parallel QR$.



આકૃતિ 6.20

6. આકૃતિ 6.21 માં $AB \parallel PQ$ અને $AC \parallel PR$ બને તે શેતે બિંદુઓ A, B અને C અનુક્રમે OP, OQ અને OR પર આવેલાં છે. તો સાબિત કરો કે, $BC \parallel QR$.



આકૃતિ 6.21

7. પ્રમેય 6.1 નો ઉપયોગ કરીને, સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની એકબાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર રેખા, ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે. (યાદ કરો, તમે ધોરણ IX માં આ પરિણામ સાબિત કર્યું છો.)

8. પ્રમેય 6.2 નો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની બે બાજુઓના મધ્યબિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે. (યાદ કરો તમે ધોરણ IXમાં આ પરિણામ સાબિત કર્યું છો.)

9. સમલંબ ચતુર્ભુષણ ABCD માં $AB \parallel DC$ અને તેના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદ છે. સાબિત કરો કે,

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

10. ચતુર્ભુષણ ABCD ના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદ છે અને તેથી $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ થાય છે, તો સાબિત કરો કે, ABCD સમલંબ ચતુર્ભુષણ છે.

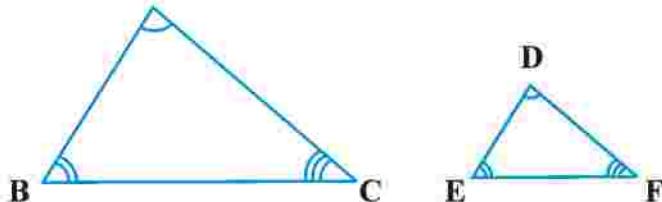
6.4 ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો સિદ્ધાંત

અગાઉના વિભાગમાં, આપણો જોયું છે કે જો (i) બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

એટલે કે, $\triangle ABC$ અને $\triangle DEF$ માં

જો (i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ અને

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, તો $\triangle ABC$ અને $\triangle DEF$ ત્રિકોણો સમરૂપ છે. (જુઓ આફ્ટિ 6.22.)



આફ્ટિ 6.22

અહીં, તમે જોશો કે A ને સંગત D, B ને સંગત E અને C ને સંગત F છે. સંકેતમાં આ બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાને ' $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ' એમ લખીશું અને તેને 'ત્રિકોણ ABC સમરૂપ ત્રિકોણ DEF' એમ વાંચીશું. સંકેત - નો અર્થ છે 'ને સમરૂપ છે.' યાદ કરો ધોરણ IX માં સંકેત \cong નો ઉપયોગ 'ને એકરૂપ છે.' તેવું દર્શાવવા કરેલો.

એ નોંધવું પડશે કે જેમ બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા દર્શાવી છે એમ બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાને તેના શિરોબિંદુઓની સાચી સંગતતાના સંકેતમાં દર્શાવીને અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, આફ્ટિ 6.22 ના ત્રિકોણો ABC અને DEF માટે આપણે $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ કે $\triangle ABC \sim \triangle FED$ લખી શકતા નથી. તેમ છતાં આપણે $\triangle BAC \sim \triangle EDF$ લખી શકીએ.

હવે સ્વાભાવિક રીતે એક પ્રશ્ન થાય.

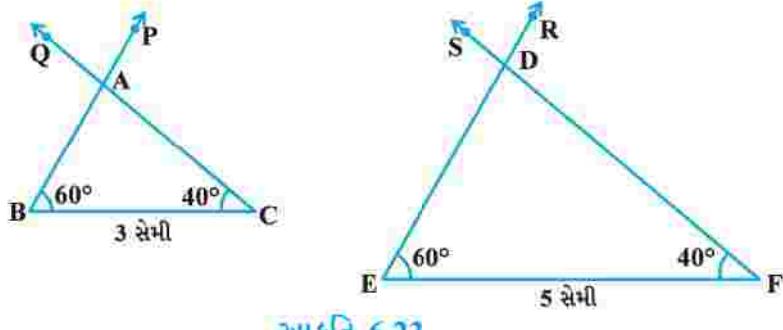
બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા ચકાસવા, કહો કે, ABC અને DEF માટે તેમના બધી જ અનુરૂપ ખૂણાઓની સમાનતાનો સંબંધ ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$) અને બધી જ અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરોની સમાનતાનો સંબંધ ($\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$) હંમેશાં ચકાસવો જરૂરી છે ?

ચાલો વિચાર કરીએ. તમને યાદ હશે કે ધોરણ IX માં તમે બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા માટેના કેટલાક સિદ્ધાંત મેળવ્યા હતા, જેમાં બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ બાગો (કે ઘટકો)ની ફક્ત ગ્રાન્ડ જોડ સમાયેલી હતી. અહીં આપણે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે સમાયેલા સિદ્ધાંત માટે ઘટકોની છ જોડના બદલે ઓછી સંખ્યામાં અનુરૂપ ઘટકોની જોડના સંબંધમાં ચોક્કસ સિદ્ધાંત મેળવીએ. હવે, આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 4 : બે જુદી-જુદી લંબાઈના રેખાખંડો BC અને EF અનુક્રમે 3 સેમી અને 5 સેમી લંબાઈના દોરો. ત્યારબાદ અનુક્રમે બિંદુ B અને C પર 60° અને 40° માપના ખૂણાઓ PBC અને QCB ર્યો. ઉપરાંત, બિંદુઓ E અને F પર અનુક્રમે 60° અને 40° ના ખૂણાઓ REF અને SFE ર્યો. (જુઓ આફ્ટિ 6.23.)



M6Q5E9



આકૃતિ 6.23

ધોરો કે કિરણો BP અને CQ એકબીજાને A માં છેટે છે. અને કિરણો ER અને FS એકબીજાને D માં છેટે છે.

ત્રિકોણો ABC અને DEF માં, તમે જોશો કે, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ અને $\angle A = \angle D$. એટલે કે, આ બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. તેમની અનુરૂપ બાજુઓ માટે શું કહી શકાય ?

તમારું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો. $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$. $\frac{AB}{DE}$ અને $\frac{CA}{FD}$ માટે શું કહી શકો ? AB, DE, CA અને FD માપીને તમે જોઈ શકશો કે, $\frac{AB}{DE}$ અને $\frac{CA}{FD}$ પણ 0.6 થાય છે. (અથવા જો માપવામાં કોઈ ક્ષતિ હોય તો 0.6ની નજીક છે.)

$$\text{આમ, } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

તમે, અનુરૂપ ખૂણાઓની જોડિઓ સમાન હોય તેવા બીજા ત્રિકોણો રચીને આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી શકો. દરેક સમયે તમે જોશો કે તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન છે. (અથવા સમપ્રમાણમાં છે.)

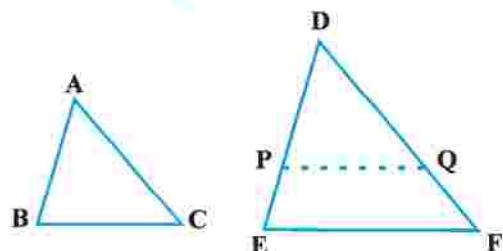
આ પ્રવૃત્તિથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે નીચેની શરત મળે છે.

પ્રમેય 6.3 : જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓની જોડના ગુણોત્તર સમાન હોય (અથવા બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય) અને તેથી તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

આ શરત બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેની ખૂખૂખૂ (ખૂણો-ખૂણો-ખૂણો) શરત તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમેયને ત્રિકોણો ABC અને DEF માં, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ લઈ સાબિત કરી શકાય છે (જુઓ આકૃતિ 6.24.).

DP = AB અને DQ = AC દીરો અને PQ જોડો.



આકૃતિ 6.24

તેથી, $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$

(ક્રમ ?)

આના પરથી, $\angle B = \angle P = \angle E$ અને તેથી, $PQ \parallel EF$

(કેવી રીતે ?)

તેથી, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$

(ક્રમ ?)

એટલે કે, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

(ક્રમ ?)

એ જ હોતે, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ અને તેથી, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

નોંધ : જો કોઈ એક ત્રિકોણના બે ખૂલ્લાઓ અનુકમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂલ્લાઓને સમાન હોય, તો ત્રિકોણના ખૂલ્લાઓના સરવાળાના ગુણવર્ધ્મ પ્રમાણે તેમનો ત્રીજો ખૂલ્લો પણ સમાન થાય. તેથી ખૂખૂખૂ સમરૂપતાની શરતને આમ લખી શકાય.

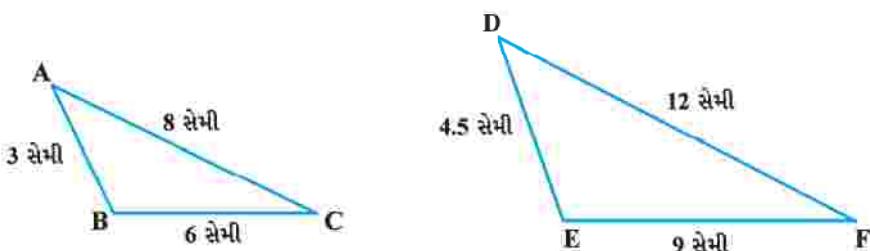
જો કોઈ એક ત્રિકોણના બે ખૂલ્લાઓ અનુકમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂલ્લાઓને સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. આ શરતને બે ત્રિકોણો માટેની સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

તમે જોયું હશે કે, જો કોઈ એક ત્રિકોણના ત્રણોય ખૂલ્લાઓ અનુકમે બીજા ત્રિકોણના ત્રણોય ખૂલ્લાઓને સમાન હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય (ગુણોત્તરો સમાન હોય છે.) આના પ્રતીપ વિધાન માટે શું કહી શકાય ? શું પ્રતીપ સાચું છે ?

બીજા શબ્દોમાં, જો કોઈ એક ત્રિકોણની બાજુઓ અનુકમે બીજા ત્રિકોણની બાજુઓને સમપ્રમાણમાં હોય, તો તેના અનુરૂપ ખૂલ્લાઓ પણ એકરૂપ હોય છે તે સાચું છે ?

તે એક પ્રવૃત્તિ દ્વારા જોઈએ.

પ્રવૃત્તિ 5 : બે ત્રિકોણો ABC અને DEF એવાં દોરો કે જેમાં, AB = 3 સેમી, BC = 6 સેમી, CA = 8 સેમી, DE = 4.5 સેમી, EF = 9 સેમી અને FD = 12 સેમી (જુઓ આકૃતિ 6.25.)



આકૃતિ 6.25

તેથી, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ થશે. (દરેક $\frac{2}{3}$ ને સમાન છે.)

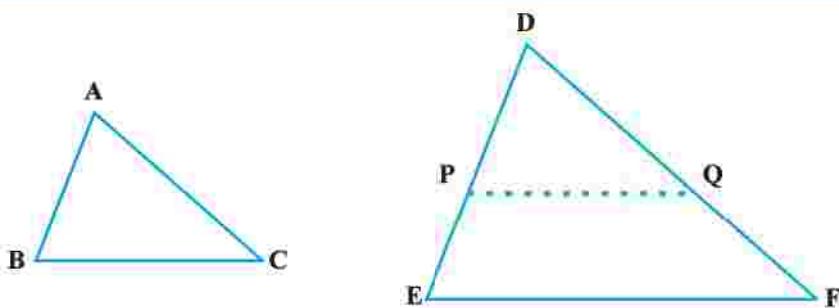
હવે, $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ અને $\angle F$ માપો અને તમે જોઈ શકશો કે,

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ એટલે કે, બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂલ્લાઓ સમાન છે.

બીજા આવા કેટલાક ત્રિકોણો (જેની બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય) લઈને આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી જુઓ. દરેક વખતે જોઈ શકશો તેમના અનુરૂપ ખૂલ્લાઓ સમાન છે. તેના પરથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની નીચેની શરત મળે છે.

પ્રમેય 6.4 : જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણની બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના સમપ્રમાણમાં હોય (એટલે કે, ગુણોત્તરો સમાન હોય), તો તેમના અનુરૂપ ખૂલ્લાઓ સમાન હોય અને તેથી બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય. આ શરત બે ત્રિકોણો માટે બાબાબા (બાજુ-બાજુ-બાજુ) શરત તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમેય બે ત્રિકોણો ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} (< 1)$ (જુઓ આકૃતિ 6.26) લઈને સિદ્ધ કરી શકાય.



આકૃતિ 6.26

DP = AB અને DQ = AC દોરો અને PQ જોડો.

સ્વય છે કે, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ અને તેથી, $PQ \parallel EF$ (કેવી રીતે ?)

તેથી, $\angle P = \angle E$ અને $\angle Q = \angle F$

તેથી, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

તેથી, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (કેમ ?)

તેથી, $BC = PQ$ (કેમ ?)

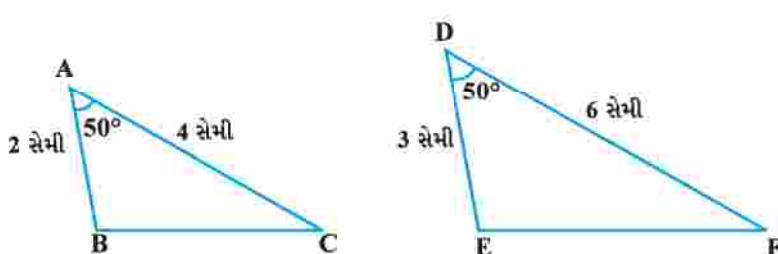
આમ, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (કેમ ?)

તેથી, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ (કેવી રીતે ?)

નોંધ : તમને યાદ હશે કે બે બહુકોણો સમરૂપ છે તે માટે બે શરતો પેકી કોઈ એક (i) અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. (ii) અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન છે તે પર્યામ નથી. તેમ છતાં પ્રમેય 6.3 અને 6.4ના આધારે તમે હવે કહી શકશો કે બે નિકોણોની સમરૂપતા દર્શાવવા માટે બંને શરતો ચકાસવી જરૂરી નથી. તેમાં એક શરત પરથી બીજી શરત સિદ્ધ થાય.

હવે આપણે ધોરણ IX માં જેનો અભ્યાસ કર્યો હતો, બે નિકોણોની એકરૂપતા વિશેની જુદી-જુદી શરતો યાદ કરીએ. તમે કદાચ બાબાબા સમરૂપતાની બાબાબા એકરૂપતા સાથે સરખામણી કરી હશે. આ પરિણામ આપણને નિકોણોની સમરૂપતાને નિકોણોની એકરૂપતા સાથે સરખાવવા સૂચવે છે. આના માટે એક પ્રવૃત્તિ કરીએ.

પ્રવૃત્તિ 6 : જેમાં, $AB = 2$ સેમી, $\angle A = 50^\circ$, $AC = 4$ સેમી, $DE = 3$ સેમી, $\angle D = 50^\circ$ અને $DF = 6$ સેમી હોય તેવા બે નિકોણો ABC અને DEF દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.27.)



આકૃતિ 6.27

અહીં, તમે જોયું હશે કે $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (દરેક $\frac{2}{3}$ ને સમાન છે.) અને $\angle A$ (બાજુઓ AB અને ACનો અંતર્ગત ખૂણો છે) = $\angle D$ (બાજુઓ DE અને DFનો અંતર્ગત ખૂણો છે.) એટલે કે, કોઈ એક નિકોણનો એક ખૂણો

ગણિત

બીજા ત્રિકોણના એક ખૂબાને સમાન છે અને જે બાજુઓને અંતર્ગત આ ખૂબાઓ છે તેમનો ગુણોત્તર સમાન છે. (એટલે કે તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય.)

હવે, આપણે $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ અને $\angle F$ માપીએ, તમે જોશો કે, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$. એટલે કે, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$. તેથી ખૂબુખૂ સમરૂપતા પરથી, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

તમે જેમાં કોઈ એક ત્રિકોણનો એક ખૂબો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂબાને સમાન હોય અને જે ત્રિકોણની બાજુઓને આપેલા ખૂબા અંતર્ગત હોય તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય એવા બીજા ત્રિકોણો દોરીને પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી શકો.

દરેક સમયે, તમે જોશો કે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. તેથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની નીચેની શરત આ પ્રમાણે મળે છે.

પ્રમેય 6.5 : જે કોઈ ત્રિકોણનો એક ખૂબો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂબાને સમાન હોય અને આ ખૂબાઓ જે બાજુઓને અંતર્ગત હોય તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

આ શરત બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેના બાખુબા (બાજુ-ખૂબો-બાજુ) નિયમ તરીકે ઓળખાય છે.

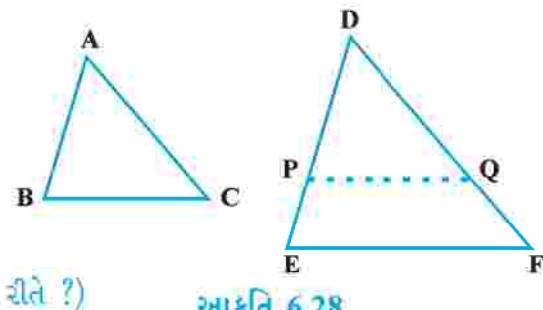
અગાઉની જેમ, આ પ્રમેય બે ત્રિકોણો ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) અને $\angle A = \angle D$ લઈને સાબિત કરી શકાય. (જુઓ આંકૃતિ 6.28.)

$DP = AB$ અને $DQ = AC$ દોરો અને PQ જોડો.

હવે, $PQ \parallel EF$ અને $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (કેવી રીતે ?)

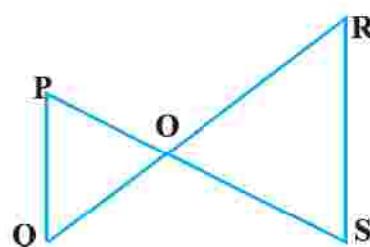
તેથી, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ અને $\angle C = \angle Q$

તેથી, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (કેમ ?)



હવે, આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : આંકૃતિ 6.29 માં, જો $PQ \parallel RS$ તો સાબિત કરો કે $\Delta POQ \sim \Delta SOR$



આંકૃતિ 6.29

ઉકેલ : $PQ \parallel RS$

તેથી, $\angle P = \angle S$

અને $\angle Q = \angle R$

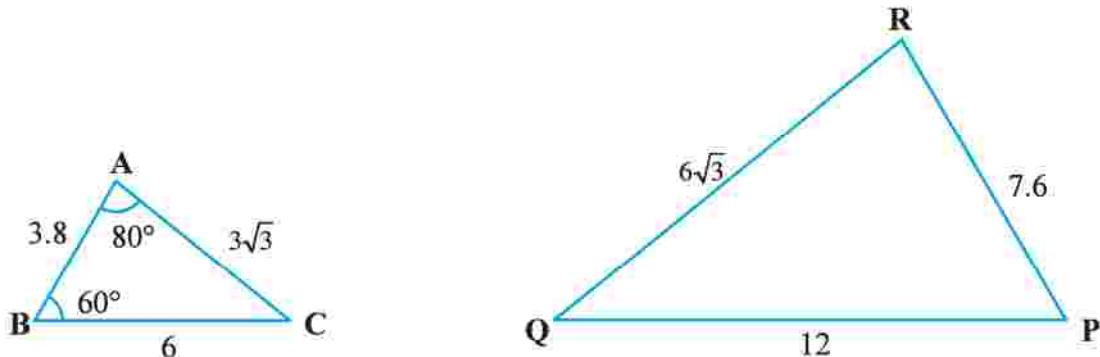
(આપેલ છે.)

(યુગમકોણો)

तेमજ, $\angle POQ = \angle SOR$ (अभिकोणो)

तेथी, $\triangle POQ \sim \triangle SOR$ (भूभूभू समरूपता)

उदाहरण 5 : आकृति 6.30 नुं निरीक्षण करो अने $\angle P$ शोधो.



आकृति 6.30

उत्तर : $\triangle ABC$ अने $\triangle PQR$ मां,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad \text{अने} \quad \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{7.6} = \frac{1}{2}$$

अेटले के, $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

तेथी, $\triangle ABC \sim \triangle RQP$ (बाबाबा समरूपता)

$$\therefore \angle C = \angle P \quad (\text{समरूप त्रिकोणाना अनुरूप भूषाणां})$$

परंतु,

$$\begin{aligned} \angle C &= 180^\circ - \angle A - \angle B \\ &= 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ \\ &= 40^\circ \end{aligned}$$

तेथी, $\angle P = 40^\circ$

उदाहरण 6 : आकृति 6.31 मां, $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, तो साबित करो के, $\angle A = \angle C$ अने $\angle B = \angle D$

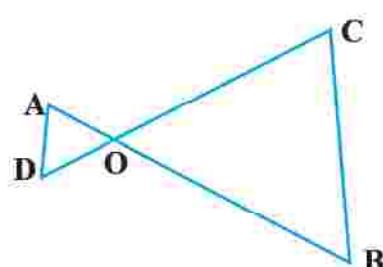
उत्तर : $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (आपेक्ष ठ.)

तेथी, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

वजी, अे जुओ, $\angle AOD = \angle COB$ (अभिकोणो) (2)

तेथी, (1) अने (2) परंतु, $\triangle AOD \sim \triangle COB$ (बाबूबा समरूपता)

तेथी, $\angle A = \angle C$ अने $\angle D = \angle B$ (समरूप त्रिकोणाना अनुरूप भूषाणां)



आकृति 6.31

ગણિત

ઉદાહરણ 7 : 90 સેમી ઊંચાઈવાળી એક છોકરી વીજળીના થાંબલાના તળીયેથી 1.2 મી/સેની ઝડપથી દૂર જઈ રહી છે. જો વીજળીનો ગોળો જમીનના સમતલથી 3.6 મીટર ઉચ્ચે હોય તો ચાર સેકન્ડ પછી તેના પડછાયાની લંબાઈ શોધો.

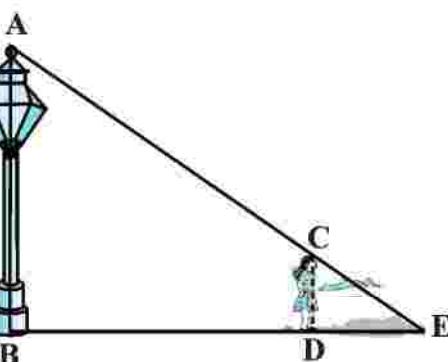
ઉકેલ : ધારો કે AB એ વીજ થાંબલો છે અને CD વીજ થાંબલાથી 4 સેકન્ડ ચાલ્યા પછીની પરિસ્થિતિમાં છોકરીનું સ્થાન દર્શાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.32.)

આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય કે DE છોકરીનો પડછાયો છે. ધારો કે, DE એ x મીટર છે.

$$\text{હવે, } BD = 1.2 \times 4 = 4.8 \text{ મીટર}$$

જુઓ કે, ΔABE અને ΔCDE માં,

$$\angle B = \angle D$$



આકૃતિ 6.32

(દરેક 90° નો છે. કારણ કે લાઈટનો થાંબલો અને છોકરી જમીન પર શિરોલંબ છે.)

અને

$$\angle E = \angle E$$

(એક જ ખૂંઝો)

તેથી,

$$\Delta ABE \sim \Delta CDE$$

(ખૂંઝું સમરૂપતા)

તેથી,

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$$

એટલે કે,

$$\frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$$

$$(90 \text{ સેમી} = \frac{90}{100} \text{ મી} = 0.9 \text{ મી})$$

એટલે કે,

$$4.8 + x = 4x$$

એટલે કે,

$$3x = 4.8$$

એટલે કે,

$$x = 1.6$$

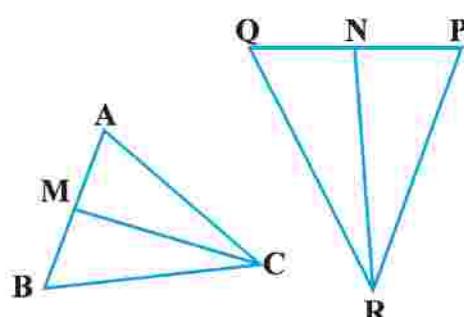
તેથી 4 સેકન્ડ ચાલ્યા પછી છોકરીનો પડછાયો 1.6 મીટર લાંબો હોય.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 6.33માં, CM અને RN અનુક્રમે ΔABC અને ΔPQR ની મધ્યગાળો છે. જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



આકૃતિ 6.33

ઉક્તા : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

તેથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

અને $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ અને $\angle C = \angle R$ (2)

પરંતુ, $AB = 2 AM$ અને $PQ = 2PN$

(ક્રમ કે, CM અને RN મધ્યગાળો છે.)

તેથી, (1) પરથી, $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

એટલે કે, $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

પરંતુ, $\angle MAC = \angle NPR$ [(2) પરથી] (4)

તેથી, (3) અને (4) પરથી,

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (બાખૂબા સમરૂપતા) (5)

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ [(5) પરથી] (6)

પરંતુ, $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [(1) પરથી] (7)

તેથી, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) અને (7) પરથી] (8)

(iii) ફરીથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) પરથી]

તેથી, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8) પરથી] (9)

પરંતુ, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2BM}{2QN}$

એટલે કે, $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

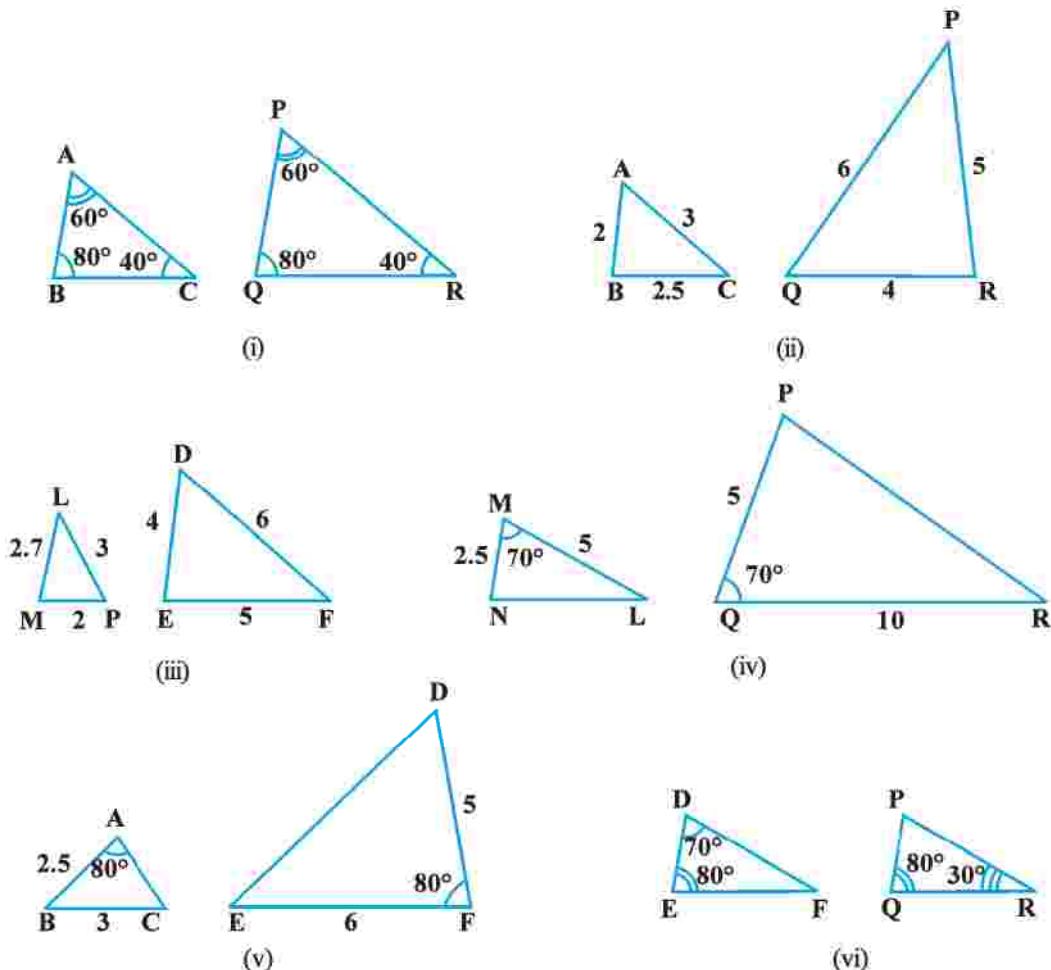
એટલે કે, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) અને (10) પરથી]

તેથી, $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (બાબાબા સમરૂપતા)

[નોંધ : ભાગ (i) સાબિત કરવા પૈકી ઉપયોગમાં લીધેલ રીતનો ઉપયોગ કરીને પડ્યા ભાગ (iii) સાબિત કરી શકાય.]

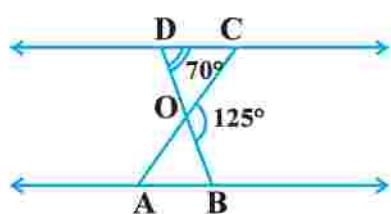
સ્વાધ્યાય 6.3

1. આકૃતિ 6.34 માં આપેલ ત્રિકોણો પૈકી કઈ જોડિના ત્રિકોણો સમરૂપ છે તે જણાવો. પ્રશ્નનો જવાબ આપવા કઈ સમરૂપતાની શરતનો ઉપયોગ કર્યો તે લખો. અને સમરૂપ ત્રિકોણની જોડિઓને સંકેતમાં લખો :

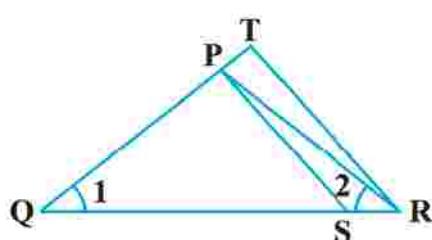


આકૃતિ 6.34

2. આકૃતિ 6.35માં, $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ અને $\angle CDO = 70^\circ$ હોય, તો $\angle DOC$, $\angle DCO$ અને $\angle OAB$ શોધો.
3. સમલંબ ચતુર્ભુંધા ABCD માં $AB \parallel DC$ છે. વિકલ્પો AC અને BD એકબીજાને બિંદુ O માં છેટે છે. હવે ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$
4. આકૃતિ 6.36 માં, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ અને $\angle 1 = \angle 2$. સાબિત કરો કે $\triangle PQS \sim \triangle TQR$.



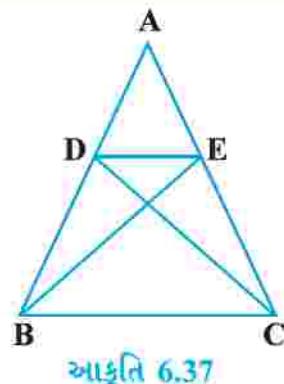
આકૃતિ 6.35



આકૃતિ 6.36

5. આકૃતિ 6.37 માં, જે તે, જેથી, $\angle P = \angle RTS$. સાબિત કરો કે, $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

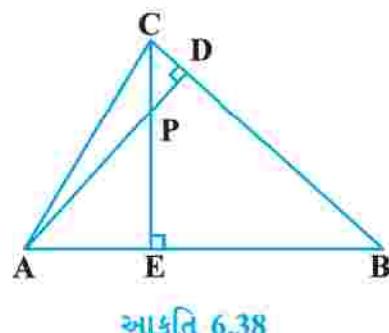
6. આકૃતિ 6.37 માં, જો $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



7. આકૃતિ 6.38 માં, ΔABC ના વેધ AD અને CE એકભીજાને પરિંદુ માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

- (i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
- (ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
- (iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
- (iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

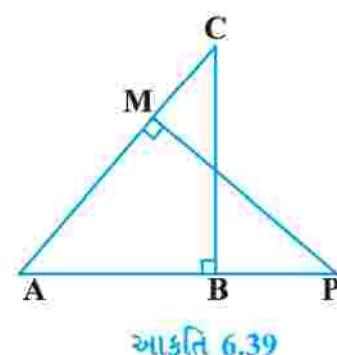
8. બિંદુ E એ સમાંતરબાજુ ચતુર્ભુગળ $ABCD$ ની લંબાવેલ બાજુ AD પરનું બિંદુ છે. BE એ CD ને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.



9. આકૃતિ 6.39 માં, નિકોણ ABC અને AMP કાટકોણ નિકોણ છે અને તેમાં ખૂણા B અને M કાટખૂણા છે. સાબિત કરો કે,

- (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$
- (ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

10. ΔABC ના $\angle ACB$ -નો દિભાજક CD , બાજુ AB ને D માં તથા ΔEFG ના $\angle EGF$ -નો દિભાજક GH , બાજુ FE ને H માં છેદે છે. જો $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

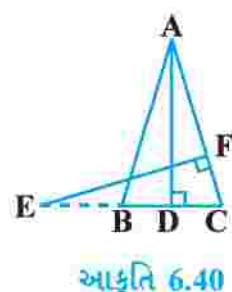


$$(i) \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$$

- (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$
- (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

11. આકૃતિ 6.40 માં E એ સમદિભાજુ નિકોણ ABC ની લંબાવેલ બાજુ CB પર આવેલ બિંદુ છે તથા $AB = AC$. જો $AD \perp BC$ અને $EF \perp AC$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

$\Delta ABD \sim \Delta ECF$.



ગણિત

12. $\triangle ABC$ ની બાજુઓ AB અને BC તથા મધ્યગા AD અનુક્રમે $\triangle PQR$ -ની બાજુઓ PQ અને PR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે (જુઓ, આકૃતિ 6.41) સાબિત કરો કે, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

13. બિંદુ D એ તું ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે, $\angle ADC = \angle BAC$. સાબિત કરો કે $CA^2 = CB \cdot CD$

14. $\triangle ABC$ ની બાજુઓ AB અને AC તથા મધ્યગા AD એ અનુક્રમે $\triangle PQR$ -ની બાજુઓ PQ અને PR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે. સાબિત કરો કે, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

15. એક 6 મીટર ઊંચા શિરોલંબ વાંસનો જમીન પર પડતો પડછાયો 4 મીટર લાંબો છે. એ જ વખતે એક મિનારનો પડછાયો 28 મીટર લાંબો છે. મિનારની ઊંચાઈ શોધો.

16. જો $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ તથા AD અને PM અનુક્રમે $\triangle ABC$ અને $\triangle PQR$ ની મધ્યગા હોય, તો સાબિત કરો

$$\text{કે}, \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$$

6.5 સમરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળ

તમે જાણો છો કે, બે સમરૂપ ત્રિકોણોની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય છે. તેમનાં ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તર અને અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર વચ્ચેના સંબંધ વિશે તમે શું કલ્પના કરી શકો છો ? તમે જાણો છો કે, ક્ષેત્રફળ ચોરસ એકમમાં માપવામાં આવે છે. તેથી, તમે કદાચ એવી કલ્પના કરી હશે કે, આ ગુણોત્તર અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હશે. આ ખરેખર સત્ય છે અને તે હવે આપણે પછીના પ્રમેયમાં સાબિત કરીશું.



પ્રમેય 6.6 : બે સમરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હોય છે.

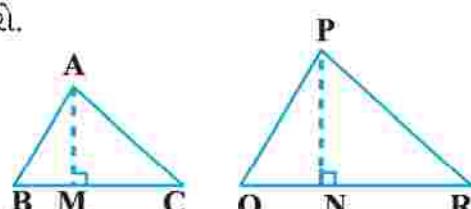
સાબિતી : અહીં બે ત્રિકોણો $\triangle ABC$ અને $\triangle PQR$ આચા છે અને $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (જુઓ આકૃતિ 6.42.)

$$\text{અહીં એ સાબિત કરવું છે કે}, \frac{ABC}{PQR} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, ત્રિકોણોના વેધ AM અને PN દોરો.

$$\text{હવે}, \quad ABC = \frac{1}{2} BC \times AM$$

$$\text{અને} \quad PQR = \frac{1}{2} QR \times PN$$



આકૃતિ 6.42

$$\text{તેથી}, \quad \frac{ABC}{PQR} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AM}{\frac{1}{2} QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad (1)$$

હવે, $\triangle ABM$ અને $\triangle PQN$ માં,

$$\angle B = \angle Q$$

(કારણ કે $\triangle ABC \sim \triangle PQR$)

$$\text{અને} \quad \angle M = \angle N$$

(કાટખૂલ્લા છે.)

तेथी, $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ (भूभू समरूपता)

$$\text{तेथी, } \frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \quad (2)$$

वर्णी, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (आपेल छ.)

$$\text{तेथी, } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \quad (3)$$

तेथी, $\frac{ABC}{PQR} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN}$ [(1) अने (3) परथी]

$$= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ} \quad [(2) \text{ परथी}]$$

$$= \left(\frac{AB}{PQ} \right)^2$$

हवे, (3) नो उपयोग करतां,

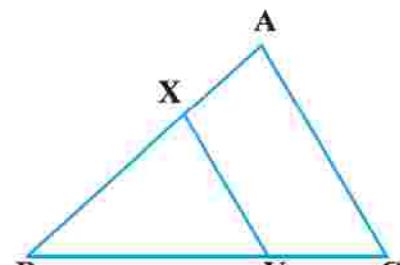
$$\frac{ABC}{PQR} = \left(\frac{AB}{PQ} \right)^2 = \left(\frac{BC}{QR} \right)^2 = \left(\frac{CA}{RP} \right)^2 \blacksquare$$

जेमां आ प्रमेयनो उपयोग थाय तेवां उदाहरण लઈअे.

उदाहरण 9 : आकृति 6.43 मां रेखांचं XY आे ΔABC नी बाजु AC ने समांतर छे अने ते त्रिकोणानु समान क्षेत्रफलना भागोमां विभाजन करे छे. गुणोत्तर $\frac{AX}{AB}$ शोधो.

उत्तेज : अही $XY \parallel AC$ (आपेल छ.)

तेथी, $\angle BXY = \angle A$ अने $\angle BYX = \angle C$ (अनुकोणो)



आकृति 6.43

तेथी, $\Delta ABC \sim \Delta XBY$ (भूभू समरूपता)

$$\text{तेथी, } \frac{ABC}{XBY} = \left(\frac{AB}{XB} \right)^2 \quad (\text{प्रमेय 6.6}) \quad (1)$$

वर्णी, $ABC = 2XBY$ (आपेल छ.)

$$\text{तेथी, } \frac{ABC}{XBY} = \frac{2}{1} \quad (2)$$

तेथी, (1) अने (2) परथी,

$$\left(\frac{AB}{XB} \right)^2 = \frac{2}{1}, \text{ एटले } 3, \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

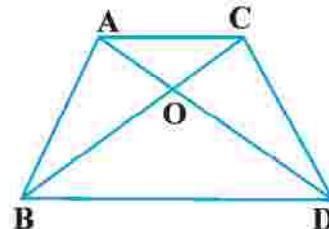
$$\text{अथवा} \quad 1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{અથવા} \quad \frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{એટલે કે, } \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

स्वाध्याय 6.4

- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ છે. તેમનાં ક્ષેત્રફળો અનુક્રમે 64 સેમી^2 અને 121 સેમી^2 છે. જો $EF = 15.4 \text{ સેમી}$ હોય, તો BC શોધો.
 - સમલંબ ચતુર્ભુસ $ABCD$ માં $AB \parallel CD$ છે. તેના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદ છે. જો $AB = 2CD$ હોય, તો ΔAOB અને ΔCOD નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.
 - આકૃતિ 6.44માં, ABC અને DBC એક જ પાયા BC પરના બે ત્રિકોણો છે. જો AD એ BC ને O માં છેદે, તો સાબિત કરો કે $\frac{ABC}{DBC} = \frac{AO}{DO}$.
 - જો બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળો સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે એકરૂપ છે. આકૃતિ 6.44
 - D, E અને F અનુક્રમે ΔABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. ΔDEF અને ΔABC નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.
 - સાબિત કરો કે, બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ મધ્યગાના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હોય છે.
 - સાબિત કરો કે, ચોરસની કોઈ એક બાજુ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, તે ચોરસના વિકર્ણ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળથી અહિં હોય છે.
 - સાચા જવાબ પર (\checkmark) નિશાની કરો અને ચકાસણી કરો.
 - જેમાં D એ BC નું મધ્યબિંદુ છે, એવા બે સમબાજુ ત્રિકોણો ABC અને BDE છે. ત્રિકોણો ABC અને



આકૃતિ 6.44

- સાચા જવાબ પર (✓) નિશાની કરો અને ચકાસણી કરો.

 - 8.** જેમાં D એ BC નું મધ્યબિંદુ છે, એવા બે સમભાજુ ત્રિકોણો ABC અને BDE છે. ત્રિકોણો ABC અને BDE નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

(A) 2 : 1	(B) 1 : 2	(C) 4 : 1	(D) 1 : 4
-----------	-----------	-----------	-----------

 - 9.** બે સમરૂપ ત્રિકોણોની બાજુઓનો ગુણોત્તર 4:9 છે. આ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

(A) 2 : 3	(B) 4 : 9	(C) 81 : 16	(D) 16 : 81
-----------	-----------	-------------	-------------

6.6 પાયथાગોરસ પ્રમેય



A7C7U6

તમે અગાઉના ધોરણથી પાયથાગોરસ પ્રમેયથી પરિચિત છો. તમે કેટલીક પ્રવૃત્તિઓથી આ પ્રમેયને ચકાસ્યો છે અને કેટલાક મશ્શો ઉકેલવા તેનો ઉપયોગ કર્યો છે. તમે ધોરણ IX માં આ પ્રમેયની સાબિતી જોઈ ગયાં છો. હવે આપણે આ પ્રમેયને બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની સંકલ્યનાના ઉપયોગથી સાબિત કરીશું. આ સાબિત કરવા માટે કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પર તેની સામેના શિરોબિંદુથી ર્ચયાતા વેધથી બનતા બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા પર આધારિત પરિણામનો ઉપયોગ કરીશું.

હવે, કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લઈએ. તેમાં ખૂબો B કાટખૂબો છે. BD એ કર્ણ AC પરનો વેધ છે. (જુઓ, આદૃતિ 6.45.)

$\triangle ADB$ અને $\triangle ABC$ માં તમે જોઈ શકશો

$$\angle A = \angle A$$

$$\text{અને} \quad \angle ADB = \angle ABC \quad (\text{ક્રમ } ?)$$

$$\text{તેથી,} \quad \triangle ADB \sim \triangle ABC \quad (\text{ક્રમ } ?) (1)$$

$$\text{એ જ રીતે,} \quad \triangle BDC \sim \triangle ABC \quad (\text{ક્રીં રીતે } ?) (2)$$

તેથી, (1) અને (2) પરથી, વેખ BD ની બંને બાજુ પરના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ છે.

તેથી $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ અને $\triangle BDC \sim \triangle ABC$

હોવાથી, $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ (વિભાગ 6.2ની નોંધ પરથી)

ઉપરની ચર્ચા પરથી નીચેનો પ્રમેય મળે છે :

પ્રમેય 6.7 : જો કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂબો બનાવતા શિરોબિંદુથી કર્ણ પર વેખ દોરેલ હોય, તો વેખની બંને તરફના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય છે અને એકબીજાને સમરૂપ હોય છે.

હવે પાયથાગોરસનો પ્રમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રમેય 6.8 : કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

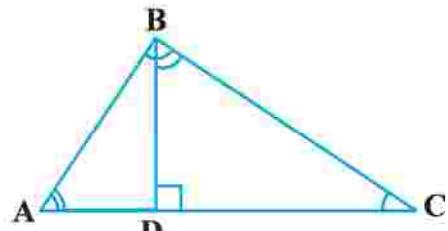
સાબિતી : $\triangle ABC$ માં $\angle B$ કાટખૂબો છે એમ આખ્યું છે.

એ સાબિત કરવું છે કે, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

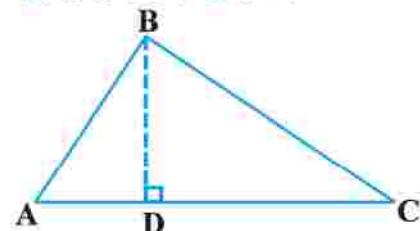
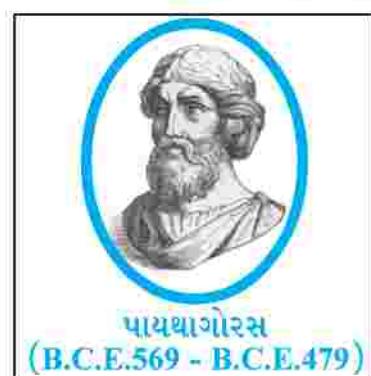
અહીં, $BD \perp AC$ દોરો. (જુઓ આદૃતિ 6.46.)

હવે, $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (બાજુઓ સમપ્રમાણમાં છે.)



આદૃતિ 6.45



આદૃતિ 6.46

અથવા, $AD \cdot AC = AB^2$ (1)

તેમજ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$

અથવા $CD \cdot AC = BC^2$ (2)

(1) અને (2) નો સરવાળો લેતાં,

$$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$$

અથવા $AC(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ■

ઉપરનું પ્રમેય અગાઉ માચીન ભારતીય ગણિતશ બોધાયને (લગભગ B.C.E. 800) નીચેના સ્વરૂપમાં આપ્યું હતું.

લંબચોરસના વિકર્ષણથી બનતા ચોરસનું કોન્ટ્રક્ષણ અને તેની બાજુઓથી બનતા (જેમ કે, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ) ચોરસોના કોન્ટ્રક્ષણોનો સરવાળો સમાન હોય છે.

આ કારણે, આ પ્રમેયને કેટલીક વાર બોધાયન પ્રમેય તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

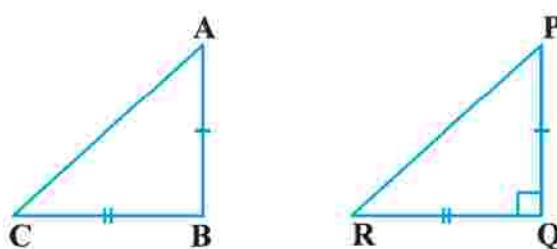
પાયથાગોરસના પ્રતીપ વિશે શું કહી શકો ? તમે અગાઉના ધોરણમાં ચકાસ્યું છે કે, તે સત્ય છે. તેને પ્રમેયના સ્વરૂપમાં સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 6.9 : ત્રિકોણમાં જો કોઈ એક બાજુનો વર્ગ, બાકીનો બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય તો, પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય.

સાબિતી : અહીં, ત્રિકોણ ABC માં, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ આપેલ છે.

એ સાબિત કરવું છે કે, $\angle B = 90^\circ$

સાબિત કરવા, જેમાં એક ખૂણો Q કાટખૂણો હોય તેવો ΔPQR એવો રચીએ કે જેથી, $PQ = AB$ અને $QR = BC$. (જુઓ આકૃતિ 6.47.)



આકૃતિ 6.47

હવે, $\triangle PQR$ પરથી,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \quad (\text{પાયथાગોરસ પ્રમેય, જેમાં } \angle Q = 90^\circ)$$

અથવા $PR^2 = AB^2 + BC^2 \quad (\text{રચના પરથી}) \quad (1)$

પરંતુ, $AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad (\text{આપેલ છુ.)} \quad (2)$

તેથી, $AC = PR \quad [(1) \text{ અને } (2) \text{ પરથી}] \quad (3)$

હવે, $\triangle ABC$ અને $\triangle PQR$ માં,

$$AB = PQ \quad (\text{રચના પરથી})$$

$$BC = QR \quad (\text{રચના પરથી})$$

$$AC = PR \quad (\text{ઉપર } (3) \text{માં સાબિત કર્યુ.)$$

તેથી, $\triangle ABC \cong \triangle PQR \quad (\text{બાબાબા એકરૂપતા})$

તેથી, $\angle B = \angle Q \quad (\text{એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો})$

પરંતુ, $\angle Q = 90^\circ \quad (\text{રચના પરથી})$

તેથી, $\angle B = 90^\circ \quad ■$

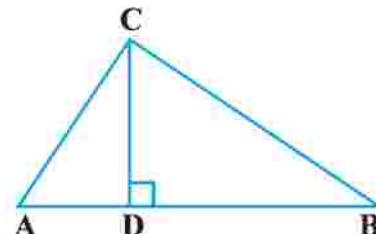
નોંધ : આ પ્રમેયની બીજી સાબિતી માટે પરિશાસ 1 પણ જુઓ.

હવે આપણે આ પ્રમેયનો ઉપયોગ સમજવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : આકૃતિ 6.48 માં, $\angle ACB = 90^\circ$ અને

$$CD \perp AB. \text{ સાબિત કરો કે, } \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}.$$

ઉકેલ : $\triangle ACD \sim \triangle ABC \quad (\text{પ્રમેય 6.7})$



તેથી, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

આકૃતિ 6.48

અથવા $AC^2 = AB \cdot AD \quad (1)$

એ જ રીતે, $\triangle BCD \sim \triangle BAC \quad (\text{પ્રમેય 6.7})$

તેથી, $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

અથવા $BC^2 = BA \cdot BD \quad (2)$

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

ગણિત

ઉદાહરણ 11 : એક નિસરણી દીવાલને અઢેલીને એવી રીતે ગોઠવી છે કે જેથી તેનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 2.5 મીટર દૂર રહે અને તેનો ઉપરનો છેડો જમીનથી 6 મીટર ઊંચે એક બારીને અડકે. નિસરણીની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, AB નિસરણી છે અને CA દીવાલ છે. અને A બારી છે. (જુઓ આકૃતિ 6.49.)

$$BC = 2.5 \text{ મીટર} \text{ અને } CA = 6 \text{ મીટર}$$

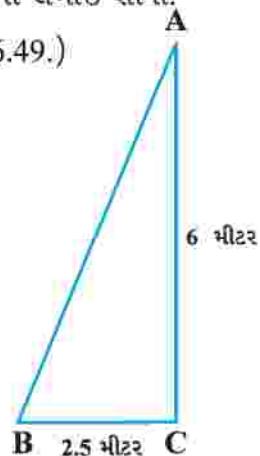
પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી,

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + CA^2 \\ &= (2.5)^2 + (6)^2 \\ &= 42.25 \end{aligned}$$

તેથી,

$$AB = 6.5$$

આમ, નિસરણીની લંબાઈ 6.5 મી છે.



આકૃતિ 6.49

ઉદાહરણ 12 : આકૃતિ 6.50 માં, જો $AD \perp BC$ તો સાબિત

કરો કે, $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

ઉકેલ : ΔADC પરથી,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad (\text{પાયથાગોરસ પ્રમેય}) \quad (1)$$

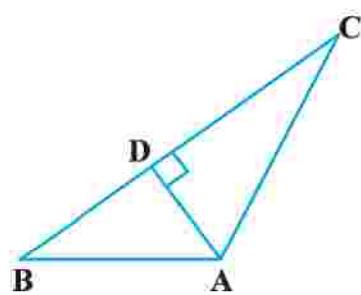
ΔADB પરથી,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad (\text{પાયથાગોરસ પ્રમેય}) \quad (2)$$

(2) માંથી (1) બાદ કરતાં,

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

$$\text{અથવા } AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$



આકૃતિ 6.50

ઉદાહરણ 13 : ખૂણો A કાટખૂણો હોય તેવા ત્રિકોણ ABC માં BL અને CM મધ્યગાળો છે. સાબિત કરો કે,
 $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$

ઉકેલ : BL અને CM એ ΔABC ની મધ્યગાળો છે તથા
 $\angle A = 90^\circ$ (જુઓ આકૃતિ 6.51.)

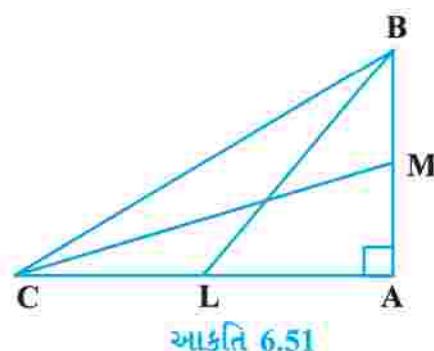
ΔABC પરથી,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{પાયથાગોરસ પ્રમેય})$$

ΔABL પરથી,

$$BL^2 = AL^2 + AB^2 \quad (\text{પાયથાગોરસ પ્રમેય})$$

$$\text{અથવા } BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2 \quad (L એ AC નું મધ્યબિંદુ છે.)$$



આકૃતિ 6.51

अथवा $BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

अथवा $4 BL^2 = AC^2 + 4 AB^2 \quad (2)$

ΔCMA परथी

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

अथवा $CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad (M \text{ ए } AB \text{ ने मध्यांतर है})$

अथवा $CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$

अथवा $4 CM^2 = 4 AC^2 + AB^2 \quad (3)$

(2) अने (3)नो सरवाणो लेतां, $4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$
 $4(BL^2 + CM^2) = 5 BC^2 \quad [(1) \text{ परथी}]$

ઉदाहरण 14 : O ए लंबयोरस ABCD ना अंदरना भागनु कोई बिंदु होय (जुओ, आकृति 6.52), तो साबित करो कि,
 $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$

ઉक्त : P ए AB पर अने Q ए DC पर आवे ते शीते O माथी $PQ \parallel BC$ धोरो.

हवे, $PQ \parallel BC$

तेथी, $PQ \perp AB$ अने $PQ \perp DC$ ($\angle B = 90^\circ$ अने $\angle C = 90^\circ$)

तेथी, $\angle BPQ = 90^\circ$ अने $\angle CQP = 90^\circ$

तेथी, $BPQC$ अने $APQD$ बने लंबयोरसो छे.

हवे, ΔOPB परथी,

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad (1)$$

ए ज शीते, ΔOQD परथी,

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad (2)$$

ΔOQC परथी,

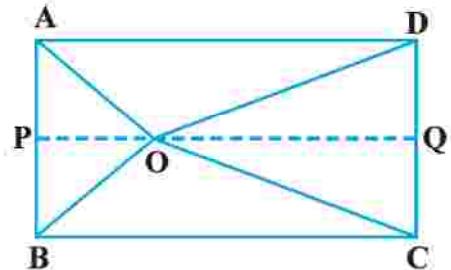
$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad (3)$$

अने ΔOAP परथी,

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (4)$$

(1) अने (2) नो सरवाणो लेतां,

$$\begin{aligned} OB^2 + OD^2 &= BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2 \\ &= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \quad (\text{कारण ३, } BP = CQ \text{ अने } DQ = AP) \\ &= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2 \\ &= OC^2 + OA^2 \quad [(3) \text{ अने (4) परथी}] \end{aligned}$$



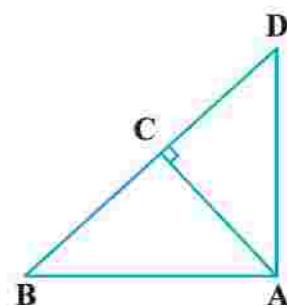
आकृति 6.52

સ્વાધ્યાય 6.5

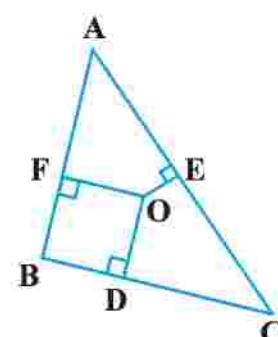
- નીચે ત્રિકોણની બાજુઓ આપેલી છે. તે પૈકી ક્યા ત્રિકોણો કાટકોણ ત્રિકોણ છે તે નક્કી કરો. જે કાટકોણ ત્રિકોણ હોય, તેના ક્રૂણી લંબાઈ શોધો.
 - 7 સેમી, 24 સેમી, 25 સેમી
 - 3 સેમી, 8 સેમી, 6 સેમી
 - 50 સેમી, 80 સેમી, 100 સેમી
 - 13 સેમી, 12 સેમી, 5 સેમી
- ત્રિકોણ PQR માં $\angle P$ કાટખૂણો છે અને M એ QR પરનું અવું બિંદુ છે કે જેથી $PM \perp QR$. સાબિત કરો કે $PM^2 = QM \cdot MR$.
- આકૃતિ 6.53 માં, ત્રિકોણ ABD માં $\angle A$ કાટખૂણો છે અને $AC \perp BD$. સાબિત કરો કે
 - $AB^2 = BC \cdot BD$
 - $AC^2 = BC \cdot DC$
 - $AD^2 = BD \cdot CD$
- સમદિવાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે. સાબિત કરો કે $AB^2 = 2AC^2$
- સમદિવાજુ ત્રિકોણ ABC માં $AC = BC$. જે $AB^2 = 2AC^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે, ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.
- સમબાજુ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ $2a$ છે. તેના દરેક વેદ્ધ શોધો.
- સાબિત કરો કે, સમબાજુ ચતુર્ભોગની બાજુઓના વર્ગોનો સરવાળો તેના વિકર્ણોના વર્ગોના સરવાળા જેટલો થાય છે.
- આકૃતિ 6.54 માં, O ત્રિકોણ ABC ની અંદરનું બિંદુ છે. $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ અને $OF \perp AB$

સાબિત કરો કે,

 - $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$,
 - $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$,
- 10 મીટર લાંબી એક નિસરણી જમીનથી 8 મીટર ઊચે આવેલી એક બારીને અડકે છે. નિસરણીના નીચેના છેડાનું દીવાલના તળિયેથી અંતર શોધો.
- 18 મીટર ઊચા શિરોલંબ થાંભલાના ઉપરના છેડાથી 24 મીટર લાંબા તારનો એક છેડો જોડાયેલો છે. તે તારનો બીજો એક ખીલા સાથે જોડાયેલો છે. થાંભલાના આધારથી કેટલા અંતરે ખીલો લગાડવામાં આવે તો તાર તંગ રહે ?
- એક વિમાન એક વિમાન મથકની ઉત્તર દિશામાં 1000 કિમી/કલાકની ઝડપથી ઉડે છે. એ જ સમયે, બીજું એક વિમાન એ જ વિમાનમથકની પદ્ધિમ દિશામાં 1200 કિમી/કલાકની ઝડપે ઉડે છે. $1\frac{1}{2}$ કલાક પછી આ વિમાનો એકબીજાથી કેટલા દૂર હશે ?



આકૃતિ 6.53



આકૃતિ 6.54

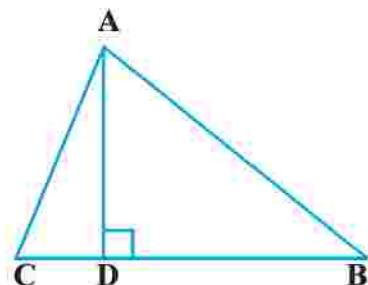
12. 6 મીટર અને 11 મીટર ઊંચાઈના બે થાંબલા સમતલ જમીન પર આવેલા છે. જો થાંબલાના નીચેના છેડા વચ્ચેનું અંતર 12 મીટર હોય તો તેમના ઉપરના છેડા વચ્ચેનું અંતર શોધો.

13. ABC માં $\angle C$ કાટખૂંઝો છે અને D અને E અનુક્રમે તેની બાજુઓ CA અને CB પરનાં બિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે,

$$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$$

14. A માંથી $\triangle ABC$ ની બાજુ BC પર દોરેલો લંબ BC ને D માં એવી રીતે છેદે છે કે $DB = 3CD$ (જુઓ આફ્ટિ 6.55.) સાબિત કરો કે,

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$



આફ્ટિ 6.55

15. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC પર D એવું બિંદુ છે કે જેથી, $BD = \frac{1}{3} BC$. સાબિત કરો કે,

$$9AD^2 = 7AB^2$$

16. સમબાજુ ત્રિકોણમાં સાબિત કરો કે, કોઈ પણ બાજુના વર્ગના 3 ગણા એ તેના કોઈ પણ વેધના વર્ગના 4 ગણા બરાબર છે.

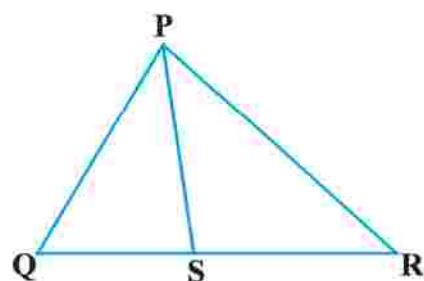
17. સાચા જવાબ પર (✓) નિશાની કરો અને ચકાસો.

$\triangle ABC$ માં, $AB = 6\sqrt{3}$ સેમી, $AC = 12$ સેમી અને $BC = 6$ સેમી હોય, તો ખૂંઝો B :

- (A) 120° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

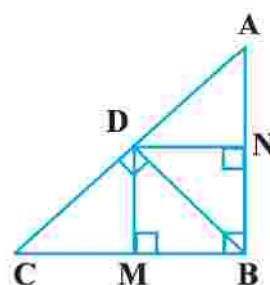
સ્વાધ્યાય 6.6 (વૈકલ્પિક)*

1. આફ્ટિ 6.56 માં, PS એ ત્રિકોણ PQR ના $\angle QPR$ નો દ્વિભાજક છે. સાબિત કરો કે $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$.



આફ્ટિ 6.56

2. આફ્ટિ 6.57 માં, $\triangle ABC$ માં $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ અને $DN \perp AB$ થાય તેવું બિંદુ D કર્ણી AC પર છે, સાબિત કરો કે,
(i) $DM^2 = DN \cdot MC$
(ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

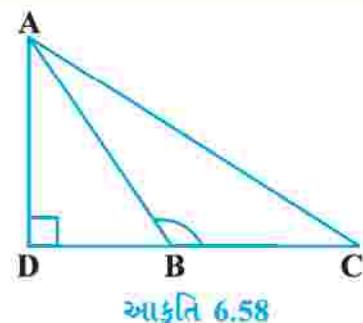


આફ્ટિ 6.57

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના દર્શિકોણથી નથી.

3. આકૃતિ 6.58માં, ત્રિકોણ ABC માં, $\angle ABC > 90^\circ$ અને $AD \perp$ લંબાવેલ CB, સાબિત કરો કે,

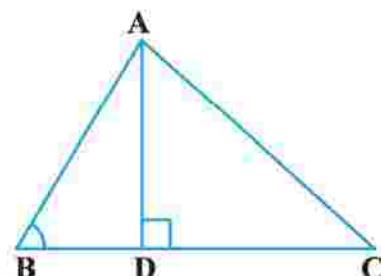
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$$



આકૃતિ 6.58

4. આકૃતિ 6.59માં, ત્રિકોણ ABC માં, $\angle ABC < 90^\circ$ અને $AD \perp BC$ છે. સાબિત કરો કે,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$$



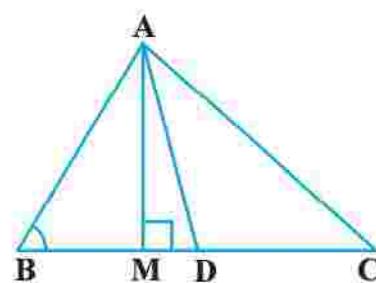
આકૃતિ 6.59

5. આકૃતિ 6.60 માં, AD એ ત્રિકોણ ABC ની મધ્યગાળે અને $AM \perp BC$. સાબિત કરો કે,

$$(i) \quad AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$(ii) \quad AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$(iii) \quad AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$$



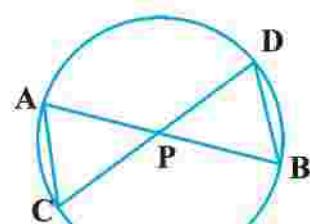
આકૃતિ 6.60

6. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુર્ભુંષણના વિકર્ણોના વર્ગોનો સરવાળો તેની બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

7. આકૃતિ 6.61માં, બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજાને બિંદુ P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

$$(i) \quad \Delta APC \sim \Delta DPB$$

$$(ii) \quad AP \cdot PB = CP \cdot DP$$

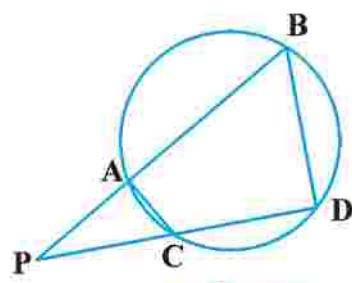


આકૃતિ 6.61

8. આકૃતિ 6.62માં, એક વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD (લંબાવીએ તો) વર્તુળના બહારના ભાગમાં એકબીજાને P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

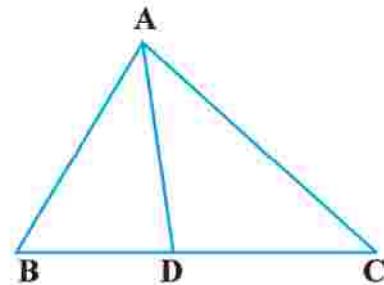
$$(i) \quad \Delta PAC \sim \Delta PDB$$

$$(ii) \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



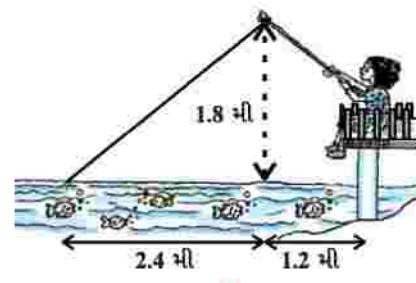
આકૃતિ 6.62

9. આકૃતિ 6.63માં, D એ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે જેથી $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. સાબિત કરો કે AD એ $\angle BAC$ નો દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ 6.63

10. નાઝીમા પાણીના પ્રવાહમાં માછલીઓ મકડી રહી છે. તેનો માછલી પકડવાના સણિયાનો છેડો પાણીની સપાટીથી 1.8 મીટર ઊચે છે અને દોરીના નીચેના છેડા પરનો આંકડો પાણીની સપાટી પર એવી રીતે સ્થિર છે કે, નાઝીમાથી તેનું અંતર 3.6 મીટર છે અને સણિયાના છેડાનું પાણીની સપાટીથી અંતર 2.4 મીટર છે. એવું માની લઈએ કે, (સણિયાના છેડાથી આંકડા સુધી) તેની દોરી તંગ છે તો, તેણે કેટલી દોરી બહાર આઢી છે? (આકૃતિ 6.64 જુઓ.) જો તે દોરીને 5 સેમી/સે ના દરથી અંદર ખેંચે, તો 12 સેકન્ડ પછી નાઝીમાનું આંકડાથી સમક્ષિતિજ અંતર કેટલું હશે?



આકૃતિ 6.64

6.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો છો :

1. સમાન આકાર ધરાવતી પરંતુ જેના માટે સમાન કદ હોય તે જરૂરી નથી તેવી બે આકૃતિઓને સમરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.
2. બધી અકરૂપ આકૃતિઓ સમરૂપ છે પરંતુ પ્રતીપ સાચું નથી.
3. જો (i) કોઈ બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય, (એટલે કે, સમપ્રમાણમાં હોય) તો સમાન સંખ્યામાં બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ છે.
4. જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા, બાકીની બે બાજુઓને બિસ્ત બિંદુઓમાં છેદ, તો આ બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન થાય છે.
5. જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય.
6. જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરો સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય (ખૂખૂ-સમરૂપતા).
7. જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે (ખૂખૂ સમરૂપતા).
8. જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય, તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને તેથી ત્રિકોણો સમરૂપ છે, (બાબાબા સમરૂપતા).

9. જો કોઈ ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને આ ખૂણાઓ જે બાજુઓને અંતર્ગત હોય તે સમપ્રમાણમાં હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે (બાખૂબા સમરૂપતા)
10. બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ જેટલો હોય છે.
11. જો કાટકોણ ત્રિકોણના કાટખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર વેધ દોરવામાં આવે, તો વેધની બંને તરફના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને તેમજ એકબીજાને સમરૂપ હોય છે.
12. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો હોય છે (પાયથાગોરસ પ્રમેય).
13. જો ત્રિકોણમાં કોઈ એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય.

વાચકને નોંધ

જો બે કાટકોણ ત્રિકોણોમાં, કોઈ એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને કોઈ એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને કોઈ એક બાજુને સમપ્રમાણમાં હોય તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. આને કાકબા સમરૂપતા તરીકે ઓળખી શકીએ. તમે પ્રકરણ ઈના ઉદાહરણ 2 માં આ સમરૂપતાનો ઉપયોગ કર્યો હોત, તો સાબિતી સરળ બની હોત.



T6H8D6



Y4S5Q6

યામ ભૂમિતિ

7

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે શીખ્યાં કે, સમતલમાં કોઈ બિંદુનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણને પરસ્પર લંબ યામાક્ષોની જોડની જરૂર પડે છે. y -અક્ષથી કોઈ બિંદુના અંતરને x -યામ અથવા કોઈ કહે છે. x -અક્ષથી કોઈ બિંદુના અંતરને y -યામ અથવા કુજ કહે છે. x -અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(x, 0)$ સ્વરૂપમાં અને y -અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(0, y)$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

આપણે એક રમત રમીએ આલેખપત્ર પર પરસ્પર લંબ હોય તેવા અક્ષોની જોડી લો. હવે નીચે દર્શાવેલાં બિંદુઓનું નિરૂપણ કરો અને સૂચના પ્રમાણે જોડો : બિંદુ A(4, 8), B(3, 9), C(3, 8), D(1, 6), E(1, 5), F(3, 3), G(6, 3), H(8, 5), I(8, 6), J(6, 8), K(6, 9), L(5, 8) ને ક્રમશઃ જોડી L ને A સાથે જોડો. હવે બિંદુઓ P(3.5, 7), Q(3, 6) અને R(4, 6) ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી એક ત્રિકોણ રચાશે. વળી બિંદુઓ X(5.5, 7), Y(5, 6) અને Z(6, 6) ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી એક ત્રિકોણ બનશે. હવે S(4, 5), T(4.5, 4) અને U(5, 5)ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી ત્રિકોણ બનશે. અંતમાં S ને બિંદુઓ (0, 5) અને (0, 6) સાથે તથા U ને બિંદુઓ (9, 5) અને (9, 6) સાથે જોડો. તમને કેવું ચિત્ર મળશે ?

વળી, તમે જોયું છો કે, $ax + by + c = 0$ (a, b બંને એક સાથે શૂન્ય નથી.) સ્વરૂપના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરતાં એક રેખા મળે છે. વધુમાં મકરણ 2 માં આપણે $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) નો પરવલય સ્વરૂપનો આલેખ જોયો હતો. ખરેખર તો યામભૂમિતિનો વિકાસ આકૃતિઓની ભૂમિતિ સમજવા માટે એક બીજગાણિતીય ઉપકરણ તરીકે કરવામાં આવ્યો છે. તે આપણને બીજગાણિતનો ઉપયોગ કરીને ભૂમિતિનો અભ્યાસ કરવા અને ભૂમિતિની મદદથી બીજગાણિત સમજવામાં મદદરૂપ થાય છે. આ કારણે યામભૂમિતિ, ભौતિકશાસ્ત્ર, ઈજનેરી, નૌકાશાસ્ત્ર, બૂક્પણશાસ્ત્ર, કલા જેવાં વિવિધ ક્ષેત્રોમાં વ્યાપક રીતે વપરાય છે.

આ પ્રકરણમાં, આપણે જેમના યામ આપેલા હોય એવાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધતાં શીખીશું અને આપેલાં ત્રણ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું. આપણે આપેલાં બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ કેવી રીતે શોધી શકાય તેનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

7.2 અંતરસૂચ

ચાલો, આપણે નીચેની પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

એક શહેર A થી શહેર B પૂર્વમાં 36 કિમી અને ઉત્તરમાં 15 કિમી અંતરે આવેલા છે. ખરેખર માઘા વગર તમે શહેર A અને શહેર B વચ્ચેનું અંતર કેવી રીતે શોધી શકો? ચાલો આપણે જોઈએ. આ પરિસ્થિતિને આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આલોભમાં દર્શાવી શકાય. તમે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી અંતરની ગણતરી કરી શકો.

હવે, ધારો કે બે બિંદુઓ x -અક્ષ પર આવેલાં હોય, તો આપણે તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ? ઉદાહરણ તરીકે બે બિંદુઓ A (4, 0) અને B (6, 0) લો. આકૃતિ 7.2 માં બિંદુઓ A અને B x -અક્ષ પર આવેલાં છે.

આકૃતિ પરથી તમે જોઈ શકો કે, $OA = 4$ એકમ અને $OB = 6$ એકમ છે.

આથી, B થી A સુધીનું અંતર,

$$AB = OB - OA = 6 - 4 = 2 \text{ એકમ}$$

માટે, જો બે બિંદુઓ x -અક્ષ પર આવેલાં હોય, તો આપણે સરળતાથી તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ.

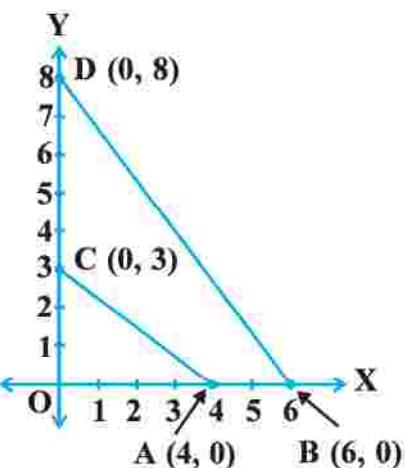
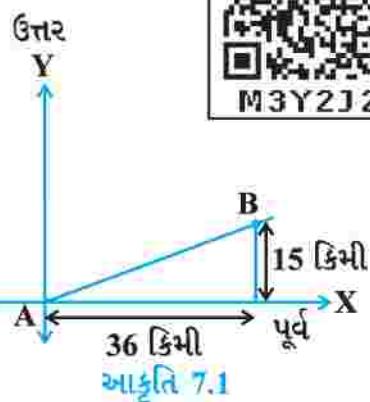
હવે, ધારો કે આપણે બે બિંદુઓ y -અક્ષ પર લઈએ. શું આપણે તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ? ધારો કે, બિંદુઓ C (0, 3) અને D (0, 8) y -અક્ષ પર આવેલાં છે. તે જ રીતે આપણે મેળવી શકીએ કે,

$$CD = 8 - 3 = 5 \text{ એકમ} \quad (\text{જુઓ આકૃતિ 7.2.)}$$

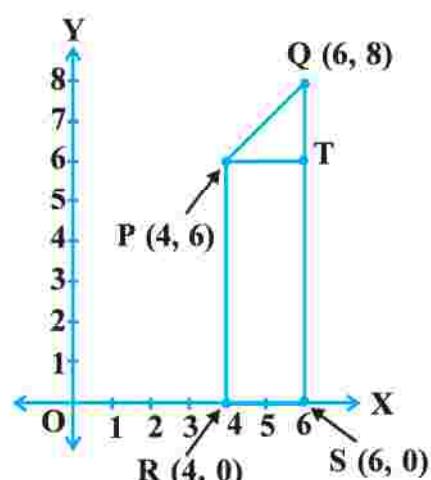
હવે, તમે A થી C નું અંતર શોધી શકો? (આકૃતિ 7.2માં) $OA = 4$ એકમ અને $OC = 3$ એકમ હોવાથી, A થી C સુધીનું અંતર $AC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ એકમ. આ જ પ્રમાણે તમે B થી D સુધીનું અંતર $BD = 10$ એકમ મેળવી શકો.

હવે, જો આપણે અક્ષો પર ન હોય તેવાં બે બિંદુઓ વિચારીએ તો, શું આપણે તે બંને વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ? હા! આપણે તે મેળવવા માટે પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શકીએ. ચાલો, આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

આકૃતિ 7.3 માં બિંદુઓ P (4, 6) અને Q (6, 8) પ્રથમ ચરણમાં આવેલાં છે. આ બંને વચ્ચેનું અંતર શોધવા માટે આપણે કેવી રીતે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું? ચાલો, આપણે P અને Q માંથી x -અક્ષ પરના લંબ અનુક્રમે PR અને QS દોરીએ. વળી, P માંથી QS ને T માં છેદતો QS પરનો લંબ દોરીએ. આથી, R અને S ના યામ અનુક્રમે (4, 0) અને (6, 0) થાય. માટે, $RS = 2$ એકમ. વળી, $QS = 8$ એકમ અને $TS = PR = 6$ એકમ.



આકૃતિ 7.2



આકૃતિ 7.3

આથી, $QT = 2$ એકમ અને $PT = RS = 2$ એકમ.

હવે, પાયथાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં

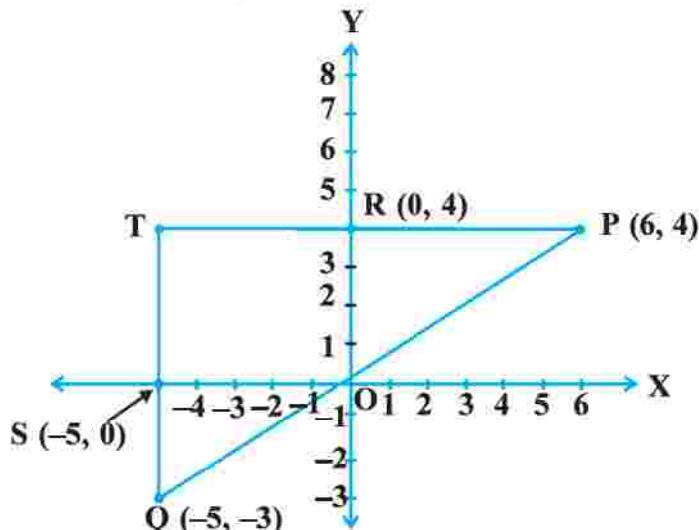
$$\text{આપણને } PQ^2 = PT^2 + QT^2 \\ = 2^2 + 2^2 = 8$$

આથી, $PQ = 2\sqrt{2}$ એકમ મળે.

અલગ-અલગ ચરણમાં રહેલાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર આપણે કેવી રીતે મેળવીશું ?

બે બિંદુઓ $P(6, 4)$ અને $Q(-5, -3)$ નો વિચાર કરો. (જુઓ આકૃતિ 7.4.)

x -અક્ષ પરનો લંબ QS દોરો. બિંદુ P માંથી QS પર (લંબાવતાં...) લંબ PT પડા દોરો. તે y -અક્ષ ને R બિંદુએ છિદે છે.



આકૃતિ 7.4

આથી $PT = 11$ એકમ અને $QT = 7$ એકમ

(શા માટે ?)

કાટકોણ ત્રિકોણ PTQ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં આપણને $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ એકમ મળે.

ચાલો, હવે આપણે કોઈ પડા બે બિંદુઓ $P(x_1, y_1)$ અને $Q(x_2, y_2)$ વચ્ચેનું અંતર શોધીએ. x -અક્ષ પરના લંબ PR અને QS દોરીએ. બિંદુ P માંથી QS પરનો લંબ દોરતાં તે QS ને બિંદુ T માં મળે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.5.)

તેથી $OR = x_1$, $OS = x_2$ આથી, $RS = x_2 - x_1 = PT$

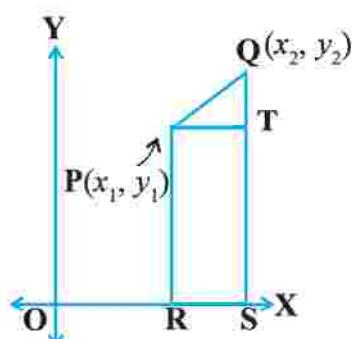
વળી, $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$ આથી, $QT = y_2 - y_1$

હવે, ΔPTQ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2 \text{ મળે.}$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\text{આથી, } PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



આકૃતિ 7.5

નોંધ કરો કે અંતર હેમેશાં અનુષ્ઠા હોય. આથી આપણે માત્ર ધન વર્ગમૂળ જ લઈશું. માટે બિંદુઓ $P(x_1, y_1)$ અને $Q(x_2, y_2)$ વચ્ચેનું અંતર,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

આને અંતરસૂત્ર કહે છે.

નોંધ :

- ખાસ કરીને, બિંદુ $P(x, y)$ નું ઉગમબિંદુ $O(0, 0)$ થી અંતર $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ દર્શાવી શકાય.
- આપણે, $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ પણ લખી શકીએ (શા માટે ?)

3. આ સાબિતી આપણે P તથા Q ને પ્રથમ ચરણમાં લઈને આપી છે, પરંતુ તેમની કોઈ પણ સ્થિતિ માટે સૂત્ર યથાર્થ છે.

ઉદાહરણ 1 : બિંદુઓ $(3, 2), (-2, -3)$ અને $(2, 3)$ એક ત્રિકોણ બનાવશે? જો હા, તો રચાયેલ ત્રિકોણનો પ્રકાર જણાવો. **ઉકેલ :** આપેલ બિંદુઓ $P(3, 2), Q(-2, -3)$ અને $R(2, 3)$ માટે અંતર PQ, QR અને PR શોધવા માટે અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ.

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (આશરે)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (આશરે)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (આશરે)}$$

કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધારે હોવાથી બિંદુઓ P, Q અને R ત્રિકોણ રચશે.

વળી, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ હોવાથી પાયથાગોરસના પ્રતિપ્રમેયના વિધાન પરથી કહી શકાય કે, $\angle P = 90^\circ$. માટે ત્રિકોણ PQR એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

ઉદાહરણ 2 : બિંદુઓ $A(1, 7), B(4, 2), C(-1, -1)$ અને $D(-4, 4)$ એ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : $A(1, 7), B(4, 2), C(-1, -1)$ અને $D(-4, 4)$ એ આપેલાં બિંદુઓ છે. $ABCD$ ચોરસ છે તે દર્શાવવા માટેનો એક રસ્તો એ છે કે ચોરસની બધી બાજુઓ સમાન હોય તથા તેના વિકર્ણો પણ સમાન હોય એ ગુણધર્મનોનો ઉપયોગ કરીએ. હવે,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

$AB = BC = CD = DA$ અને $AC = BD$ હોવાથી ચતુર્ભુણ $ABCD$ ની ચારેય બાજુઓ સમાન છે અને તેના વિકર્ણો AC અને BD પણ સમાન છે. આથી, $ABCD$ એ એક ચોરસ છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ : આપણે ચારેય બાજુઓ તથા એક વિકર્ષ અને પ્રમાણે શોધીએ. આથી,
 $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. આથી પાયથાગોરસના પ્રમેયના પ્રતીપ અનુસાર $\angle D = 90^\circ$ થાય. એક
 ચતુર્ભુજની જેની ચારેય બાજુઓ સમાન હોય તથા જેનો એક ખૂણો 90° હોય તે ચોરસ છે. માટે ABCD એક ચોરસ છે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 7.6 એક વર્ગખંડમાં પાટલીઓની ગોઠવણી દર્શાવે છે. અસીમા, ભારતી અને કેમેલિયા અનુકૂમે A (3, 1), B (6, 4) અને C (8, 6) સ્થાન પર બેઠેલાં છે.
 તમે કલ્યી શકો છો કે, તે એક જ રેખામાં બેઠેલાં છે? તમારા ઉત્તર માટેનું કારણ દર્શાવો.

ઉકેલ : અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણી પાસે ...

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

હોવાથી, આપણે કહી શકીએ કે, બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ છે. આથી, અસીમા, ભારતી અને કેમેલિયા એક જ હરોળમાં બેઠા છે.

ઉદાહરણ 4 : બિંદુ (x, y) એ બિંદુઓ $(7, 1)$ અને $(3, 5)$ થી સમાન અંતરે છે તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે P (x, y) એ બિંદુઓ A $(7, 1)$ અને B $(3, 5)$ થી સમાન અંતરે છે.

આપણને $AP = BP$ આપેલ છે.

આથી, $AP^2 = BP^2$ થાય.

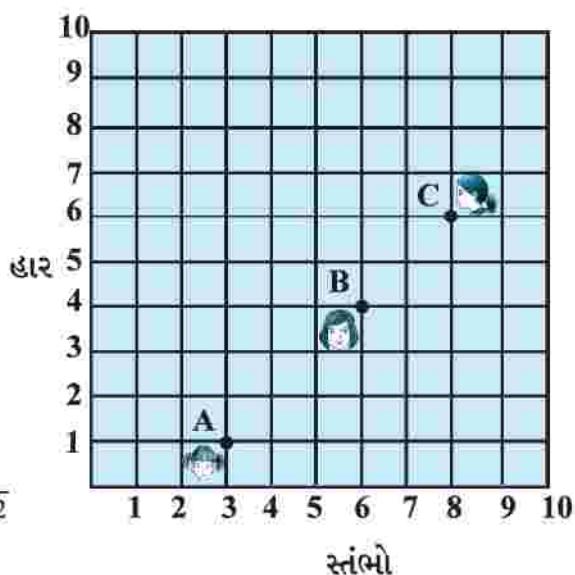
$$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

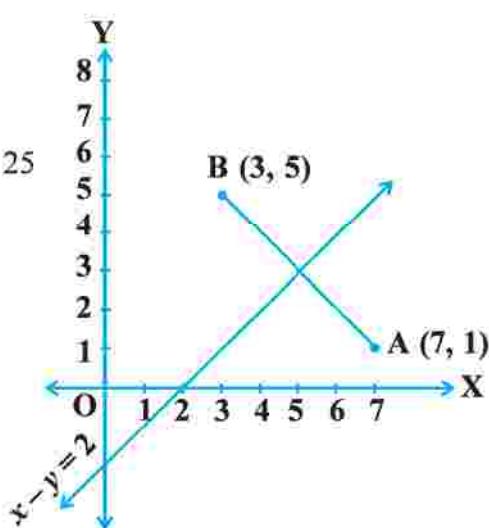
$$\therefore x - y = 2$$

એ માંગેલ સંબંધ છે.

નોંધ : આપણે નોંધીએ કે, સમીકરણ $x - y = 2$ નો આલેખ રેખા છે. તમારા ભૂમિતિના અગાઉના અભ્યાસ પરથી, તમે જાણો છો કે, બિંદુ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુ AB ના લંબદિભાજક પરનું બિંદુ હોય. આથી, $x - y = 2$ નો આલેખ એ AB નો લંબદિભાજક છે. (જુઓ આકૃતિ 7.7.)



આકૃતિ 7.6



આકૃતિ 7.7

ઉદાહરણ 5 : બિંદુઓ A (6, 5) અને B (-4, 3) થી સમાન અંતરે આવેલ હોય તેવું y-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

ઉકેલ : આપણો જાણીએ છીએ કે, y-અક્ષ પરનું કોઈ પણ બિંદુ (0, y) સ્વરૂપમાં હોય. આથી, ધારો કે P (0, y) એ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલ છે. તેથી

$$\begin{aligned} (6-0)^2 + (5-y)^2 &= (-4-0)^2 + (3-y)^2 \\ \therefore 36 + 25 - 10y + y^2 &= 16 + 9 - 6y + y^2 \\ \therefore 4y &= 36 \\ \therefore y &= 9 \end{aligned}$$

આથી, માંગેલ બિંદુ (0, 9) છે.

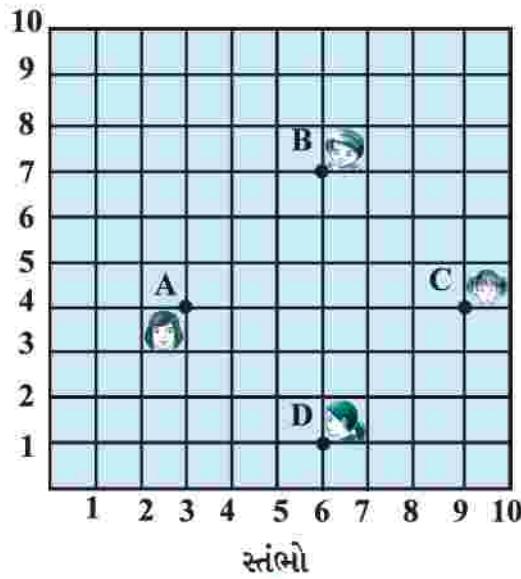
ચાલો, આપણે ઉકેલ ચકાસીએ : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

નોંધ : ઉપરની નોંધનો અભ્યાસ કરતાં જણાશે કે, (0, 9) એ AB ના લંબદિભાજક અને y-અક્ષનું છેદબિંદુ છે.

સ્વાક્ષર્ય 7.1

- નીચે આપેલ બિંદુઓની જોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો :
 - (2, 3), (4, 1)
 - (-5, 7), (-1, 3)
 - (a, b), (-a, -b)
- બિંદુઓ (0, 0) અને (36, 15) વચ્ચેનું અંતર શોધો. હવે, તમે વિભાગ 7.2 માં જેની ચર્ચા કરેલ તે બે શહેરો A અને B વચ્ચેનું અંતર શોધી શકો.
- બિંદુઓ (1, 5), (2, 3) અને (-2, -11) અસમરેખ છે તેમ પ્રસ્તાવિત કરો.
- ચકાસો કે, (5, -2), (6, 4) અને (7, -2) એ સમદિભાજુ ટ્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
- એક વર્ગખંડમાં ચાર ભિત્રો આકૃતિ 7.8માં દર્શાવેલ બિંદુઓ A, B, C અને D દ્વારા દર્શાવેલ સ્થાન પર બેઠા છે. ચંપા અને ચમેલી વર્ગમાં આવી અને થોડી ભિનિટોના અવલોકન બાદ ચંપાએ ચમેલીને પૂછ્યું કે “શું તું એવું માને છે કે, ABCD ચોરસ છે ?” હારું ચમેલી અસહમત થાય છે. અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરી કોણ સાચું છે તે શોધો.
- નીચે દર્શાવેલાં બિંદુઓથી જો ચતુર્ભોણ રચાતો હોય તો તેનો પ્રકાર જવાબો અને તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :
 - (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)
 - (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)
 - (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)
- જે (2, -5) અને (-2, 9) થી સમાન અંતરે હોય તેવું x-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.



આકૃતિ 7.8

8. બિંદુઓ $P(2, -3)$ અને $Q(10, y)$ વચ્ચેનું અંતર 10 એકમ હોય તો, y ની કિમત શોધો.
9. જો $Q(0, 1)$ એ $P(5, -3)$ અને $R(x, 6)$ થી સમાન અંતરે હોય તો, x ની કિમત શોધો. અંતર QR અને PR પણ શોધો.
10. બિંદુ (x, y) એ બિંદુઓ $(3, 6)$ અને $(-3, 4)$ થી સમાન અંતરે હોય, તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

7.3 વિભાજન સૂત્ર



R8T6T4

ચાલો, વિભાગ 7.2 ની પરિસ્થિતિ યાદ કરીએ. ધારો કે એક ટેલિફોન કંપની પોતાના પ્રસારણ ટાવર P ને A અને B ની વચ્ચે એવી રીતે સ્થાપવા માંગે છે કે, જેથી ટાવર P થી B નું અંતર એ P થી A ના અંતર કરતાં બમણું હોય. જો P એ AB પર આવેલ હોય, તો તે AB ને 1:2 ગુણોત્તરમાં વિભાગે. (જુઓ આડૃતી 7.9). જો આપણો A ને ઊગમબિંદુ O તરીકે લઈએ અને બંને અક્ષો પર 1 એકમને 1 તિમી તરીકે લઈએ. B ના યામ $(36, 15)$ થાય. ટાવરનું સ્થાન જાણવા માટે આપણે P ના યામ જાણવા જ પડે. આ યામ આપણે કેવી રીતે શોધી શકીએ ?

ધારો કે, P ના યામ (x, y) છે. P અને B માંથી x -અક્ષ પર દોરેલા લંબ તેને અનુકૂળે D અને E માં મળે છે. P માંથી BE ને લંબ PC દોરો. બાદમાં, પ્રકરણ 6માં બહારી ગયા છો તે સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત પ્રમાણે ΔPOD અને ΔBPC સમરૂપ થશે.

$$\text{માટે, } \frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2} \text{ અને } \frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{તેથી, } \frac{x}{36-x} = \frac{1}{2} \text{ અને } \frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$$

આ સમીકરણો પરથી $x = 12$ અને $y = 5$ મળે.

તમે ચકાસી શકો કે, $P(12, 5)$ હોય, તો $OP : PB = 1 : 2$ ની સ્થિતિ બને.

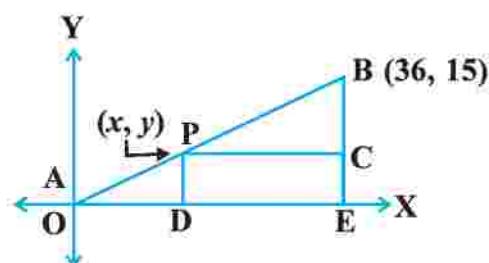
હવે, આ ઉદાહરણ દ્વારા વ્યાપક સૂત્ર મેળવવા માટેની જે સમજ તમે વિકસાવી છો તેનો ઉપયોગ કરીશું.

કોઈ પણ બે બિંદુઓ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ નો વિચાર કરો અને ધારો કે, $P(x, y)$ એ AB નું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે.

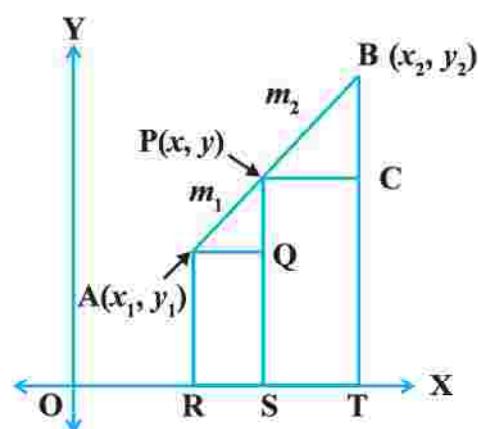
$$\text{તેથી } \frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \quad (\text{જુઓ આડૃતી 7.10.})$$

x -અક્ષ પર લંબ AR, PS અને BT દોરો. AQ અને PC એ x -અક્ષને સમાંતર દોરો. બાદમાં સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત મુજબ,

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$



આડૃતી 7.9



આડૃતી 7.10

$$\text{માટે, } \frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad (1)$$

$$\text{હવે, } AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

આ કિમતોને પરિષામ (1)માં મુક્તાં, આપણાને,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \text{ મળે.}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ લેતાં, આપણાને } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \text{ મળે.}$$

$$\text{આ જ પ્રમાણે } \frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \text{ લેતાં, આપણાને } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \text{ મળે.}$$

આથી, બિંદુઓ A (x₁, y₁) અને B (x₂, y₂)ને જોડતા રેખાખંડનું m₁ : m₂ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ P (x, y) ના યામ,

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right) \text{ મળે.} \quad (2)$$

આ સૂત્ર વિભાજન સૂત્ર તરીકે ઓળખાય છે.

y-અખ પર A, P અને B માંથી લંબ ઠોરાને પણ આ સૂત્ર ઉપરની પ્રક્રિયા અનુસાર મેળવી શકાય.

જો P એ AB તું k : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો P ના યામ

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \right) \text{ થાય.}$$

એક અગત્યનું તારણું : રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ રેખાખંડનું 1:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. માટે, A (x₁, y₁) અને B (x₂, y₂) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ P ના યામ

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1} \right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

ચાલો આપણે વિભાજન સૂત્ર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણો ગણીએ.

ઉદાહરણ 6 : બિંદુઓ (4, -3) અને (8, 5) ને જોડતા રેખાખંડનું 3:1 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, P (x, y) એ માંગેલ બિંદુ છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણાને,

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = 3 \text{ મળે.}$$

માટે, (7, 3) એ માંગેલ બિંદુ છે.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુ (- 4, 6) એ બિંદુઓ A (- 6, 10) અને B (3, - 8) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે ?

ઉકેલ : ધારો કે, (- 4, 6) એ AB નું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, આપણાને,

$$(- 4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (1)$$

ધારું કરો કે, જો $(x, y) = (a, b)$ તો $x = a$ અને $y = b$

$$\text{આથી, } -4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ અને } 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{હવે, } -4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ પરથી,}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

$$7m_1 = 2m_2$$

$$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

તમે ચકાસી શકો છો કે, આ ગુણોત્તર y-યામનું પણ સમાધાન કરે છે.

$$\text{હવે, } \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8 \frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \quad (m_2 \text{ વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં)$$

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

માટે, બિંદુ (- 4, 6) એ બિંદુઓ A (- 6, 10) અને B (3, - 8) ને જોડતા રેખાખંડનું 2 : 7 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

વૈકલ્પિક રીતે : ગુણોત્તર $m_1 : m_2$ ને $\frac{m_1}{m_2} : 1$ અથવા $k : 1$ પણ લખી શકાય. ધારો કે, (- 4, 6) એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણાને,

$$(- 4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1} \right) \text{ મળે.} \quad (2)$$

$$\text{આથી, } -4 = \frac{3k - 6}{k + 1}$$

$$\therefore -4k - 4 = 3k - 6$$

$$\therefore 7k = 2$$

$$\therefore k : 1 = 2 : 7$$

તમે y-યામ માટે પણ આ પરિણામ ચકાસી શકો.

આથી, બિંદુ $(-4, 6)$ એ બિંદુઓ $A(-6, 10)$ અને $B(3, -8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું $2 : 7$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

નોંધ : જો A, P અને B સમરેખ છે તેમ આપેલું હોય તો તમે અંતર PA અને PB શોધી PA અને PB નો ગુણોત્તર મેળવી આ ગુણોત્તર પણ શોધી શકો, જો કે વિભાજન માટે સમરેખતા આવશ્યક છે.

ઉદાહરણ 8 : બિંદુઓ $A(2, -2)$ અને $B(-7, 4)$ ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓ (અહીં, બિંદુઓ રેખાખંડનું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.) ના યામ શોધો.



ઉકેલ : ધારો કે, P અને Q એ AB ને ત્રિભાગતાં બિંદુઓ છે.

આકૃતિ 7.11

જેથી, $AP = PQ = QB$ (જુઓ આકૃતિ 7.11.)

માટે, P એ AB નું $1:2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. આથી, વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતા બિંદુ P ના યામ,

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2} \right) = (-1, 0)$$

હવે, Q એ AB નું $2:1$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે. માટે, Q ના યામ,

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1} \right) = (-4, 2)$$

આથી, A અને B ને જોડતા રેખાખંડના ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ $(-1, 0)$ અને $(-4, 2)$ થાય.

નોંધ : આપણે Q ને PB ના મધ્યબિંદુ તરીકે લઈને પણ તેના યામ મેળવી શકીએ. આ માટે આપણે મધ્યબિંદુના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તેના યામ મેળવી શકીએ.

ઉદાહરણ 9 : y -અક્ષ એ બિંદુઓ $(5, -6)$ અને $(-1, -4)$ ને જોડતા રેખાખંડનું ક્યા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે, તે શોધો અને આ છેદબિંદુ પણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $k : 1$ માંગેલ ગુણોત્તર છે. આથી, વિભાજનસૂત્રની મદદથી AB નું $k : 1$ માં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ,

$$\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1} \right) થાય.$$

આ બિંદુ y -અક્ષ પર આવેલું છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે, y -અક્ષ પરના બિંદુનો x -યામ 0 હોય.

$$\text{માટે, } \frac{-k+5}{k+1} = 0$$

$$\text{આથી, } k = 5$$

આમ, માંગેલ ગુણોત્તર $5 : 1$ થશે. કિમત $k=5\left(\frac{-4k-6}{k+1}\right)$ માં મૂક્તાં આપણાને છેદબિંદુ $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ મળશે.

ઉદાહરણ 10 : જો બિંદુઓ $A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4)$ અને $D(p, 3)$ એ આ જ ક્રમમાં સમાંતરભાજુ ચતુર્ભોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો p ની કિમત શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાંતરભાજુ ચતુર્ભોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

આથી, AC ના મધ્યબિંદુના યામ = BD ના મધ્યબિંદુના યામ

$$\therefore \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

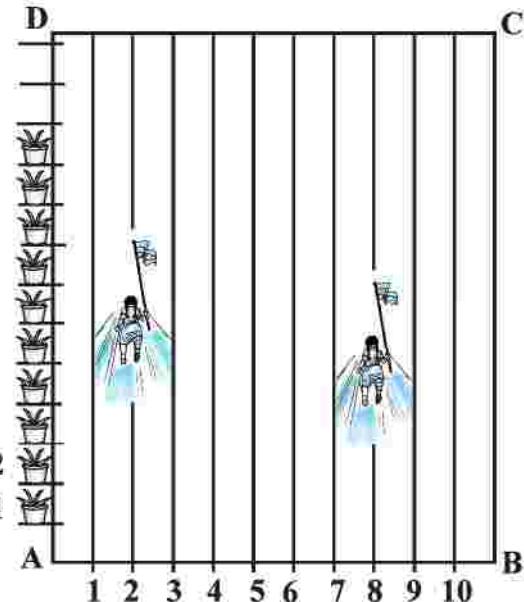
$$\therefore p = 7$$

સ્વાધ્યાય 7.2

- બિંદુઓ $(-1, 7)$ અને $(4, -3)$ ને જોડતા રેખાખંડનું $2 : 3$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.
- બિંદુઓ $(4, -1)$ અને $(-2, -3)$ ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ મેળવો.

- તમારી શાળાના લંબચોરસ આકારના મેદાન $ABCD$ માં રમતગમત ટિવસની પ્રવૃત્તિઓ યોજેલ છે. ચોક પાઉડરની મદદથી એક એક મીટરના અંતરે રેખાઓ દોરેલી છે. આકૃતિ 7.12 માં દર્શાવ્યા અનુસાર AD પર પ્રત્યેક 1 મીટરના અંતરે હોય તેવા 100 ફુલના કુંડાં મૂક્યા છે.

નિહારીકા બીજી હરોળમાં દોડે છે અને તેણે AD નું $\frac{1}{4}$ ભાગનું અંતર કાઢ્યું છે અને ત્યાં લિલો ધ્વજ ફરકાવે છે. પ્રિત આઠમી હરોળમાં દોડે છે અને તેણે AD નું $\frac{1}{5}$ ભાગ અંતર કાઢ્યું છે અને ત્યાં લાલ ધ્વજ ફરકાવે છે. આ બંને ધ્વજ વચ્ચેનું અંતર કેટલું થશે? જો રશ્મિમે આ બંને ધ્વજને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ પર વાદળી ધ્વજ ફરકાવવાનો હોય તો તે ધ્વજને ક્યાં ફરકાવશે?



આકૃતિ 7.12

- બિંદુ $(-1, 6)$ એ બિંદુઓ $(-3, 10)$ અને $(6, -8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું ક્યા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે?
- x -અક્ષ બિંદુઓ $A (1, -5)$ અને $B (-4, 5)$ ને જોડતા રેખાખંડનું ક્યા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો. વિભાજન બિંદુના યામ પડા શોધો.
- જો $(1, 2), (4, y), (x, 6)$ અને $(3, 5)$ એ એક સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોજનાં કંબિક શિરોબિંદુઓ હોય તો x અને y શોધો.
- અનુસારી વિભાજનનો વ્યાસ છે. વર્તુળનું કેન્દ્ર $(2, -3)$ છે અને $B (1, 4)$ છે. તો બિંદુ A ના યામ શોધો.
- જો A અને B અનુક્રમે $(-2, -2)$ અને $(2, -4)$ હોય, જેથી $AP = \frac{3}{7} AB$ થાય અને બિંદુ P રેખાખંડ AB પર આવેલ હોય, તેવા બિંદુ P ના યામ શોધો.
- $A (-2, 2)$ અને $B (2, 8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું ચાર સમાન ભાગમાં વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ શોધો.
- સમબાજુ ચતુર્ભોજનાં કંબિક શિરોબિંદુઓ $(3, 0), (4, 5), (-1, 4)$ અને $(-2, -1)$ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

[સુચના : સમબાજુ ચતુર્ભોજનનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ (તેના વિક્ષોણોનો ગુણકાર)]

7.4 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

અગાઉના ધોરણમાં તમે ત્રિકોણનો પાયો અને તેના પરનો વેદ્ય આપેલ હોય ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધતાં શીખ્યા છો. તમે આ માટે નીચેનું સૂત્ર વાપર્યું છો :

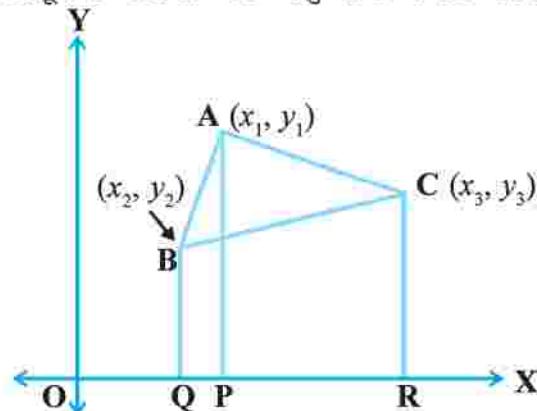
$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેદ્ય}$$



ધોરણ IX માં તમે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે હેરોનું સૂત્ર પડા શીખ્યાં છો. હવે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુના યામ આપેલાં હોય તો તમે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? સારું, તમે અંતરસૂત્રની મદદથી ત્રણ બાજુઓની લંબાઈ શોધી શકો અને ત્યાર બાદ હેરોના સૂત્રની મદદથી ક્ષેત્રફળ શોધી શકો. પરંતુ, ખાસ કરીને જો બાજુઓના માપ અસંમેય સંખ્યા મળે તો આ કંટાળાજનક છે. ચાલો, આપણે જોઈએ કે કોઈ સરળ માર્ગ છે ?

ધારો કે, જેનાં શિરોબિંદુઓ A (x_1, y_1) B (x_2, y_2) C (x_3, y_3) હોય તેવો કોઈ ત્રિકોણ ABC છે. A, B અને C માંથી x-અક્ષ પર લંબ અનુકૂળે AP, BQ અને CR દોરો. સ્પષ્ટપણે ABQP, APRC અને BQRC બધા સમલંબ ચતુર્ભોગ થશે. (જુઓ આકૃતિ 7.13.)

હવે, આકૃતિ 7.13 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,



આકૃતિ 7.13

તમે આ પણ જાણો છો કે,

$$\text{સમલંબ ચતુર્ભોગનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} (\text{સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો}) (\text{તેમની વર્ણેનું અંતર})$$

આથી,

$$\begin{aligned}\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2} (BQ + AP) QP + \frac{1}{2} (AP + CR) PR - \frac{1}{2} (BQ + CR) QR \\ &= \frac{1}{2} (y_2 + y_1) (x_1 - x_2) + \frac{1}{2} (y_1 + y_3) (x_3 - x_1) - \frac{1}{2} (y_2 + y_3) (x_3 - x_2) \\ &= \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]\end{aligned}$$

આમ, ΔABC નું ક્ષેત્રફળ આ સૂત્રથી મળતાં મૂલ્યની સંખ્યાત્મક ડિમત થાય.

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$ નું સંખ્યાત્મક મૂલ્ય ચાલો, આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી કેટલાંક ઉદાહરણો સમજાએ.

ઉદાહરણ 11 : જેનાં શિરોબિંદુઓ $(1, -1)$, $(-4, 6)$ અને $(-3, -5)$ હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : A $(1, -1)$, B $(-4, 6)$ અને C $(-3, -5)$ શિરોબિંદુઓ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોખવા માટે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$= \frac{1}{2} [1(6+5) + (-4)(-5+1) + (-3)(-1-6)]$$

$$= \frac{1}{2} (11 + 16 + 21) = 24$$

આથી, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 24 ચોરસ એકમ થાય.

ઉદાહરણ 12 : બિંદુઓ A $(5, 2)$, B $(4, 7)$ અને C $(7, -4)$ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : શિરોબિંદુઓ A $(5, 2)$, B $(4, 7)$ અને C $(7, -4)$ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$= \frac{1}{2} [5(7+4) + 4(-4-2) + 7(2-7)]$$

$$= \frac{1}{2} [55 - 24 - 35] = \frac{-4}{2} = -2$$

ક્ષેત્રફળ એ માપ હોવાથી તે ઋક્ષા ન હોઈ શકે. આથી, આપણો -2 ની સંખ્યાત્મક કિમત 2 લઈશું.

માટે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = 2 ચોરસ એકમ.

ઉદાહરણ 13 : બિંદુઓ P $(-1.5, 3)$, Q $(6, -2)$ અને R $(-3, 4)$ થી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2} [-1.5(-2-4) + 6(4-3) + (-3)(3+2)]$$

$$= \frac{1}{2} (9 + 6 - 15) = 0$$

શું આપણી પાસે 0 ચોરસ એકમ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ હોઈ શકે ? આનો અર્થ શું થાય ?

જો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 0 ચોરસ એકમ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ સમરેખ હોય.

ઉદાહરણ 14 : બિંદુઓ A $(2, 3)$, B $(4, k)$ અને C $(6, -3)$ સમરેખ હોય, તો k ની કિમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 0 જ થાય.

$$\therefore \frac{1}{2} [2(k+3) + 4(-3-3) + 6(3-k)] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} [-4k] = 0$$

$$\therefore k = 0$$

ચાલો, માટે આપણો આપણો ઉત્તર ચકાસીએ.

$$\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} [2(0+3) + 4(-3-3) + 6(3-0)] = 0$$

ઉદાહરણ 15 : જો A (-5, 7), B (-4, -5), C (-1, -6) અને D (4, 5) કમમાં એ એક ચતુર્ભુણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો ચતુર્ભુણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : B થી D ને જોડવાથી, તમને ΔABD અને ΔBCD એમ બે ત્રિકોણો મળશે.

$$\text{હવે, } \Delta ABD \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} [-5(-5-5) + (-4)(5-7) + 4(7+5)] \\ = \frac{1}{2} (50 + 8 + 48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ ચોરસ એકમ}$$

$$\text{તથા, } \Delta BCD \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} [-4(-6-5) - 1(5+5) + 4(-5+6)] \\ = \frac{1}{2} [44 - 10 + 4] = 19 \text{ ચોરસ એકમ}$$

આથી, ચતુર્ભુણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ = $53 + 19 = 72$ ચોરસ એકમ

નોંધ : બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, આપણે જેમાં સામાન્ય ક્ષેત્રફળ ન હોય તેવા ત્રિકોણીય પ્રદેશોમાં વિભાજન કરીએ અને તેનું ક્ષેત્રફળ આ પ્રદેશોનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે.

સ્વાધ્યાય 7.3

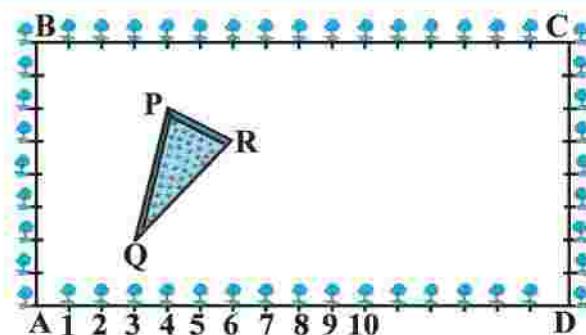
1. જેનાં શિરોબિંદુઓ નીચે પ્રમાણે છે તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો :
 - (i) (2, 3), (-1, 0), (2, -4)
 - (ii) (-5, -1), (3, -5), (5, 2)
2. નીચે આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ હોય તો પ્રત્યેકમાં 'k' ની કિમત શોધો :
 - (i) (7, -2), (5, 1), (3, k)
 - (ii) (8, 1), (k, -4), (2, -5)
3. જેનાં શિરોબિંદુઓ (0, -1), (2, 1) અને (0, 3) હોય તેવા ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અને આપેલ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.
4. એક ચતુર્ભુણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ (-4, -2), (-3, -5), (3, -2) અને (2, 3) હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
5. તમે ધોરણ IX (પ્રકરણ 9, પ્રશ્ન નં.3)માં શીખ્યા છો કે ત્રિકોણની મધ્યગા ત્રિકોણનું બે સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છો. જેનાં શિરોબિંદુઓ A (4, -6), B (3, -2) અને C (5, 2) હોય, તેવા ΔABC માટે આ પરિણામ ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 7.4 (વૈકલ્પિક)*

1. રેખા $2x + y - 4 = 0$ બિંદુઓ A (2, -2) અને B (3, 7) ને જોડતા રેખાખંડનું ક્યા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે તે નક્કી કરો.
2. જો બિંદુઓ (x, y) , (1, 2) અને (7, 0) સમરેખ હોય, તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.
3. બિંદુઓ (6, -6), (3, -7) અને (3, 3)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું કેન્દ્ર શોધો.
4. ચોરસનાં બે સામસામેનાં શિરોબિંદુઓ (-1, 2) અને (3, 2) છે, તો બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના ડેટુથી બનાવેલ નથી.

5. કૃષિનગરની માધ્યમિક શાળાના ધોરણ ખાતે એક લંબચોરસ મેદાન ફાળવવામાં આવ્યું છે. તેની ફરતી બાજુઓ ગુલમહોરના રોપા એક-એક મીટરના અંતરે વાવેલા છે. આકૃતિ 7.14માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આ મેદાનમાં ઘાસની એક ત્રિકોણીય લોન છે. વિદ્યાર્થીઓને બાકીના ભાગ પર ફૂલોના છોડનાં બીજ વાવવાનાં છે.



આકૃતિ 7.14

- (i) A ને ઉગમબિંદુ લઈ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.
(ii) જો C ઉગમબિંદુ હોય, તો $\triangle PQR$ ના શિરોબિંદુઓના યામ શું થાય? આ બંને ડિસ્સાઓમાં ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. તમે શું અવલોકન કર્યું?
6. $\triangle ABC$ ના શિરોબિંદુઓ A (4, 6), B (1, 5) અને C (7, 2) છે. બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે એક રેખા D અને E માં એવી રીતે છેદ છે જેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$. તો $\triangle ADE$ નું ક્ષેત્રફળ મેળવો અને $\triangle ABC$ ના ક્ષેત્રફળ સાથે તેની તુલના કરો. (પ્રમેય 6.2 અને પ્રમેય 6.6 યાદ કરો.)
7. A (4, 2), B (6, 5) અને C (1, 4) એ $\triangle ABC$ ના શિરોબિંદુઓ છે.
- (i) A માંથી દોરેલ મધ્યગા BC ને D માં મળે છે. બિંદુ D ના યામ શોધો.
(ii) AP : PD = 2 : 1 થાય એવું બિંદુ P એ AD પર છે તો P ના યામ શોધો.
(iii) BQ : QE = 2 : 1 અને CR : RF = 2 : 1 હોય તેવાં બિંદુઓ Q અને R અનુક્રમે મધ્યગા BE અને CF પર છે, તો Q અને R ના યામ શોધો.
(iv) તમે શું અવલોકન કર્યું?
(v) જો A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) અને C (x_3, y_3) એ $\triangle ABC$ ના શિરોબિંદુઓ હોય તો આપેલ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના યામ શોધો.
- [નોંધ : તરીકે ય મધ્યગાઓના છેદબિંદુને મધ્યકેન્દ્ર કહે છે અને તે દરેક મધ્યગાનું 2 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.]
8. બિંદુઓ A (-1, -1), B (-1, 4), C (5, 4) અને D (5, -1) થી લંબચોરસ ABCD ર્યાય છે. P, Q, R અનુક્રમે AB, BC, CD અને DA ના મધ્યબિંદુઓ છે. ચતુર્ભોજ PQRS ચોરસ છે? લંબચોરસ છે? કે સમબાજુ ચતુર્ભોજ છે? તમારો જવાબ ચકાસો.

7.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો છો :

- P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ છે.
- બિંદુ P (x, y) નું ઉગમબિંદુથી અંતર $\sqrt{x^2 + y^2}$ છે.

3. A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતવિભાજન કરતા બિંદુ P (x, y) ના યામ $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \right)$ થાય.
4. બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$ છે.
5. બિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) થી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ
 $\frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ ની સંખ્યાત્મક ક્રમત છે.

વાયકને નોંધ

વિભાગ 7.3 માં A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતવિભાજન કરતા બિંદુ P ના યામ (x, y) કેવી રીતે મળે તેની ચર્ચા કરી છે.

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

PA : PB = $m_1 : m_2$ છે તેની નોંધ કરો.

પરંતુ જો, P, A અને B ની વચ્ચે ન હોય પરંતુ રેખા AB પર રેખાખંડ AB ની બહાર હોય તો આપણે કહીએ છીએ કે P એ A અને B ને જોડતા રેખાખંડનું બહિવિભાજન કરે છે. આવા વિકલ્યમાં વિભાજન સૂત્રનો આપણે ઉચ્ચ વર્ગમાં અભ્યાસ કરીશું.



W2Q4B7



S4C2A8

ત्रिकोणमितिनો પરિચય

8

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

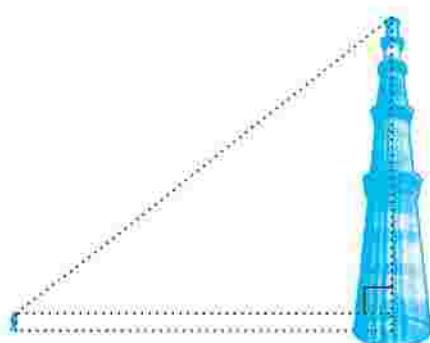
—J.F. Herbart (1890)

8.1 પ્રાસ્તાવિક

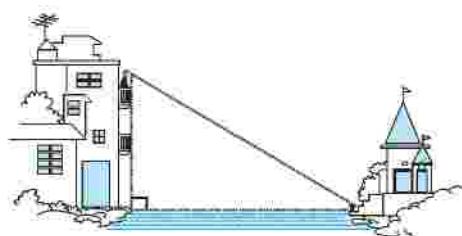
તમે અગાઉના ધોરણમાં ત્રિકોણ અને વિશિષ્ટ વિકલ્પમાં કાટકોણ ત્રિકોણનો અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છો. હવે આપણી આસપાસમાંથી જ જેમાં કાટકોણ ત્રિકોણ બનતો હોય તેવી કલ્પના કરી શકાય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે :

- ધારો કે, એક શાળાના વિદ્યાર્થીનો કુતુખભિનારની મુલાકાત લઈ રહ્યા છે. હવે જો કોઈ એક વિદ્યાર્થી ભિનારની ટોચ તરફ જુઓ તો અહીં આકૃતિ 8.1માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના કરી શકાય. શું આ ભિનારની ઊંચાઈ વાસ્તવિક રીતે માયા વગર વિદ્યાર્થી શોધી શકશો ?
- ધારો કે, એક છોકરી નદીના ડિનારા પર રહેલા તેના ઘરની અગાસીમાં બેઠી છે. તે નદીના બીજા ડિનારા પર આવેલા મંદિરનાં પગથિયાં પર રહેલા ફૂલોનાં કુંડાને જુઓ છે. આ પરિસ્થિતિમાં પણ આકૃતિ 8.2માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણ બનતો હોય તેવી કલ્પના કરી શકાય છે. જો તમે જાણતા હો કે, નિરીક્ષણ કરનાર બક્ઝિત કેટલી ઊંચાઈ પર બેઠી છે, તો શું તમે નદીની પહોળાઈ શોધી શકશો ?

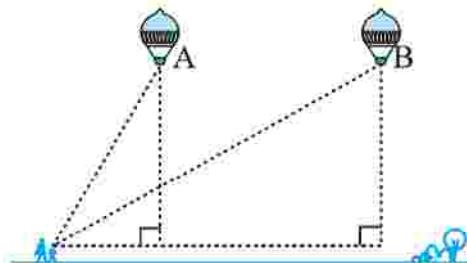


આકૃતિ 8.1



આકૃતિ 8.2

3. ધારો કે, ગરમ હવાવાળું એક બલૂન હવામાં ઉડી રહ્યું છે. આકાશમાં રહેલા આ બલૂનને એક છોકરી જુએ છે અને તેની જાણ કરવા તે પોતાની માતા પાસે દોડાને જાય છે. આ બલૂનને જોવા તેની માતા પણ તરત જ ઘરની બહાર આવે છે. હવે ધારો કે, છોકરીએ જ્યારે આ બલૂનને પ્રથમવાર જોયું ત્યારે તે બિંદુ A પર હતું અને હવે જ્યારે માતા અને પુત્રી બંને સાથે બલૂનને જુએ છે ત્યારે બલૂન બિંદુ B સુધી પહોંચી ગયું છે. શું તમે બિંદુ B નું જમીનથી શિરોલંબઅંતર શોધી શકશો ?



આકૃતિ 8.3

ઉપર્યુક્ત બધી જ પરિસ્થિતિઓમાં ગણિતશાસ્ત્રની એક શાખામાં આવતી ગાણિતિક પદ્ધતિઓના ઉપયોગથી અંતર અને ઊંચાઈ શોધી શકાય છે આ શાખાને ત્રિકોણમિતિ કહે છે. અંગ્રેજ શબ્દ ‘Trigonometry’ ત્રણ ગ્રીક શબ્દો, ‘Tri’ (એટલે કે, ત્રણ), ‘Gon’ (એટલે કે, બાજુ) અને ‘metron’ (એટલે કે, માપ)ના સંયોજનથી બનેલ છે. ખરેખર તો ત્રિકોણમિતિ, ત્રિકોણની બાજુઓ તથા ખૂણાઓ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ છે. પ્રાચીન સમયમાં ત્રિકોણમિતિ પર થયેલ કાર્યનો ઉલ્લેખ ઈજિત અને બેબિલોનમાં મળે છે. પ્રાચીન સમયમાં ખગોળશાસ્ત્રીઓ ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ પૃથ્વીથી તારાઓ અને ગ્રહોનું અંતર શોધવા માટે કરતા હતા. આજે પણ યંત્રશાસ્ત્ર અને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં વપરાતી મૌદ્યોગિકીની નવીન પદ્ધતિઓ ત્રિકોણમિતિની સંકલ્પનાઓ પર આધારિત છે.

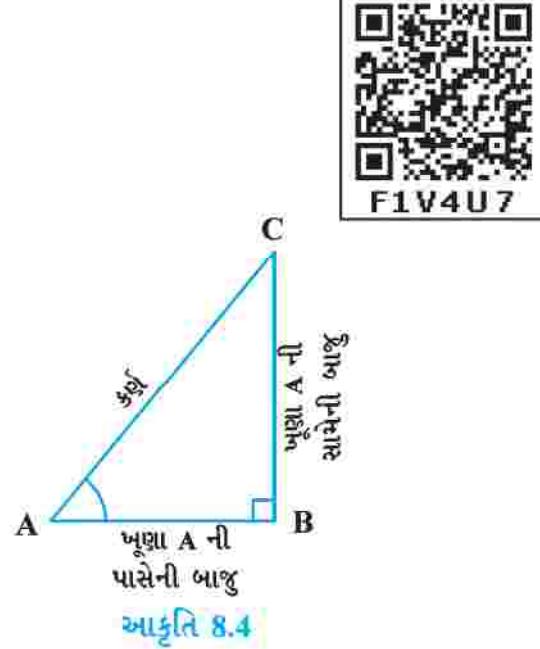
આ પ્રકરણમાં આપણે કાટકોણ ત્રિકોણમાં રહેલા લઘુકોણોની સાપેક્ષમાં તેની બાજુઓના ગુણોત્તરો વિશે ચર્ચા કરીશું. આપણે તેને ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર કહીશું. આ ગુણોત્તરનો વિસ્તાર બીજા ખૂણાઓ માટે પણ કરી શકાય છે. છતાં પણ આપણે અહીં આપણી ચર્ચા ફક્ત લઘુકોણ સુધી જ સીમિત રાખીશું. આપણે અહીં 0° અને 90° માપના ખૂણાઓના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પણ વ્યાખ્યાયિત કરીશું, તેમજ કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો મેળવીશું તથા આ ગુણોત્તરોને સંબંધિત કેટલાક નિત્યસમ સ્થાપિત કરીશું. તેમને આપણે ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ કહીશું.

8.2 ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

વિભાગ 8.1માં તમે વિભિન્ન પરિસ્થિતિઓમાં કાલ્યનિક રીતે બનતા કાટકોણ ત્રિકોણ વિશે જોયું.

ચાલો, આકૃતિ 8.4 માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લો.

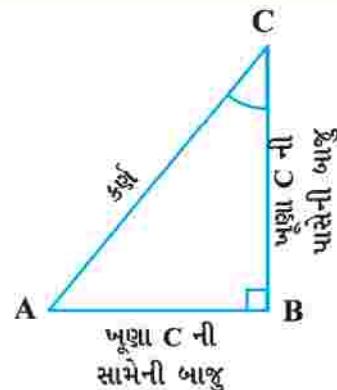
અહીં, $\angle CAB$ (દૂરમાં $\angle A$) લઘુકોણ છે. ખૂણા A ને સાપેક્ષ બાજુ BC ની સ્થિતિ વિશે ધ્યાન આપો. તે ખૂણા A ની સામે છે. આપણે તેને ખૂણા A ની સામેની બાજુ (Opposite side) કહીશું. બાજુ AC કાટકોણ ત્રિકોણનો કર્ણ (Hypotenuse) છે અને બાજુ AB, $\angle A$ નો ભાગ છે તેથી, તેને ખૂણા A ની પાસેની બાજુ (Adjacent side) કહીશું.



ધ્યાન આપો, અહીં ખૂબા A ની જગ્યાએ ખૂબા C લઈએ તો બાજુઓની સ્થિતિ બદલાઈ જાય છે. (જુઓ આફુતિ 8.5.)

અગાઉના ધોરણમાં તમે 'ગુણોત્તર'ની સંકલ્પના વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. હવે આપણે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ સંબંધિત કેટલાક ગુણોત્તરોને વાખ્યાયિત કરીશું અને તે ગુણોત્તરોને આપણે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો કહીશું.

કાટકોણ ત્રિકોણ ABCમાં (જુઓ આફુતિ 8.4.) ખૂબા A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો નીચે પ્રમાણે વાખ્યાયિત કરી શકાય છે :



આફુતિ 8.5

$$\angle A \text{ નો } \sin = \frac{\text{ખૂબા } A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ નો } \cos = \frac{\text{ખૂબા } A \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ નો } \tan = \frac{\text{ખૂબા } A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{ખૂબા } A \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ નો } \cosec = \frac{1}{\angle A \text{ નો } \sin} = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{ખૂબા } A \text{ ની સામેની બાજુ}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ નો } \sec = \frac{1}{\angle A \text{ નો } \cos} = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{ખૂબા } A \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ નો } \cot = \frac{1}{\angle A \text{ નો } \tan} = \frac{\text{ખૂબા } A \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{ખૂબા } A \text{ ની સામેની બાજુ}} = \frac{AB}{BC}$$

ઉપર્યુક્ત વાખ્યાયિત ગુણોત્તરોને ટૂંકમાં અનુક્રમે $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\cosec A$, $\sec A$ અને $\cot A$ રૂપે લખાય છે. ધ્યાન આપો, અહીં ગુણોત્તરો $\cosec A$, $\sec A$ અને $\cot A$ અનુક્રમે $\sin A$, $\cos A$ અને $\tan A$ ના વસ્તુ ગુણોત્તરો છે.

અહીં તમે એ પણ જોઈ શકો છો કે,

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \text{અને} \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

આમ, કાટકોણ ત્રિકોણમાં રહેલા લઘુકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો, ત્રિકોણના ખૂબાઓ તથા બાજુઓની લંબાઈ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

તમે કાટકોણ ત્રિકોણના ખૂણા C માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કરવાનો પ્રયત્ન કરી શકશો ? (જુઓ, આફુતિ 8.5.)

The first use of the idea of ‘*sine*’ in the way we use it today was in the work *Aryabhatiyam* by *Aryabhata*, in C.E. 500. *Aryabhata* used the word *ardha-jya* for the half-chord, which was shortened to *jya* or *jiva* in due course. When the *Aryabhatiyam* was translated into Arabic, the word *jiva* was retained as it is. The word *jiva* was translated into *sinus*, which means curve, when the Arabic version was translated into Latin. Soon the word *sinus*, also used as *sine*, became common in mathematical texts throughout Europe. An English Professor of astronomy *Edmund Gunter* (C.E.1581– C.E.1626), first used the abbreviated notation ‘*sin*’.

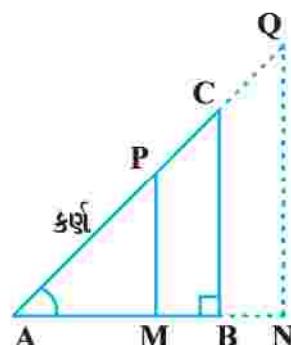


Aryabhata
C.E. 476 – 550

The origin of the terms ‘*cosine*’ and ‘*tangent*’ was much later. The *cosine* function arose from the need to compute the *sine* of the complementary angle. *Aryabhata* called it *kotijya*. The name *cosinus* originated with *Edmund Gunter*. In C.E.1674, the English Mathematician *Sir Jonas Moore* first used the abbreviated notation ‘*cos*’.

નોંધ : ધ્યાન આપો, અહીં $\sin A$ નો ઉપયોગ ‘ખૂણા A ના *sine*’ ના સંક્ષિમતૃપે કરવામાં આવેલ છે. $\sin A$ એ \sin અને A નો ગુણાકાર નથી. \sin ને A થી અલગ કરીએ તો તેનો કોઈ જ અર્થ નથી. તે જ પ્રમાણે $\cos A$ એ \cos અને A નો ગુણાકાર નથી. તેવી જ રીતે બીજા ગુણોત્તરો માટે પણ આવું જ અર્થઘટન કરી શકાય.

હવે જો આપણે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ના ક્રૂણી AC પર બિંદુ P લઈએ અથવા લંબાવેલ બાજુ AC પર એક બિંદુ Q લઈએ અને AB પર લંબ PM દોરીએ અથવા લંબાવેલ બાજુ AB પર લંબ QN દોરીએ (જુઓ, આફુતિ 8.6) તો ΔPAM માં $\angle A$ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અને ΔCAB માં $\angle A$ માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અથવા ΔQAN માં $\angle A$ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોમાં શું અંતર હોય ?



આફુતિ 8.6

આનો ઉત્તર મેળવવા સૌપ્રથમ આ ત્રિકોણોનું નિરીક્ષણ કરો. શું ΔPAM અને ΔCAB સમરૂપ છે ? પ્રકરણ-6માં આપેલ સમરૂપતાની શરત (ખૂખૂ) યાદ કરો. આ સિદ્ધાંત પ્રમાણે તમે જોઈ શકો છો કે, ત્રિકોણ PAM અને ત્રિકોણ CAB સમરૂપ છે.

આમ, સમરૂપ ત્રિકોણના ગુણધર્મ પ્રમાણે અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણ હોય છે.

$$\text{આમ, આપણી પાસે } \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC} \text{ છે.}$$

તેના પરથી આપણાને $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$ મળશે.

તે જ પ્રમાણે $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A, \frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ વગેરે મળશે.

આ દર્શાવે છે કે, $\triangle PAM$ માં $\angle A$ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અને $\triangle CAB$ માં $\angle A$ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો એક જ છે.

આ જ પ્રમાણે તમે ચકાસી શકો છો કે, $\triangle QAN$ માં પણ $\sin A$ (તથા અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો)નું મૂલ્ય સમાન જ મળે છે.

આપણા આ અવલોકનથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, જો ખૂબાનું માપ સમાન રહે તો તે ખૂબા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યોમાં ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ સાથે કોઈ પરિવર્તન થતું નથી.

નોંધ : આપણી સુવિધા માટે આપણે $(\sin A)^2, (\cos A)^2$ વગેરેને બદલે અનુક્રમે $\sin^2 A, \cos^2 A$ વગેરે લખીશું. પરંતુ $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (જેને \sin ઈનવર્સ A વંચાય છે.) $\sin^{-1} A$ નો અર્થ જુદો થાય છે. તેની ચર્ચા આપણે પછીના ધોરણમાં કરીશું. આ જ પ્રમાણે ઉપર્યુક્ત વિધાનો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો માટે પડ્યા લાગુ પડશે. કેટલીકવાર ખૂબાનું દર્શાવવા ગ્રીક અક્ષર θ (થીટા) પડ્યા ઉપયોગમાં લેવાય છે.

આપણે લઘુકોણ માટેના છ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કર્યા. જો આપણે કોઈ એક ગુણોત્તર જાણતા હોઈએ તો શું બીજા ગુણોત્તરો શોધી શકીશું ? ચાલો, જોઈએ.

જો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\sin A = \frac{1}{3}$ હોય, તો આનો

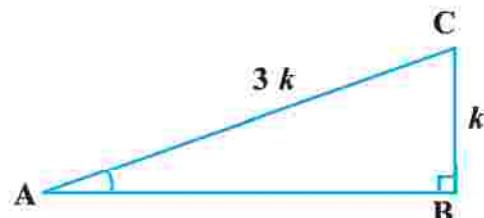
અર્થ એ થાય કે $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, એટલે કે, ત્રિકોણની બાજુઓ BC અને AC ની લંબાઈનો ગુણોત્તર $1:3$ છે. (જુઓ આફ્રતિ 8.7.) તેથી કોઈ એક ધન સંખ્યા k માટે જો BC બરાબર k લઈએ તો AC બરાબર $3k$ થાય. ખૂબાનું A માટેના બીજા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવા માટે આપણે ત્રીજી બાજુ AB ની લંબાઈ શોધવી પડે. તમને પાયથાગોરસનું પ્રમેય યાદ છે? ચાલો તેના ઉપયોગથી આપણે AB ની લંબાઈ શોધીએ.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2} k)^2$$

માટે, $AB = \pm 2\sqrt{2} k$

તેથી આપણાને $AB = 2\sqrt{2} k$ મળે

આફ્રતિ 8.7



$$\text{હવે, } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

આ જ પ્રમાણે તમે ખૂબા A માટેના અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પડા શોધી શકશો.

નોંધ : કાટકોણ ત્રિકોણમાં, લાંબામાં લાંબી બાજુ કર્ણ હોવાથી $\sin A$ અને $\cos A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 થી ઓછું હશે. (કોઈ વિશેષ સ્થિતિમાં જ તે 1 હશે.)

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : જો $\tan A = \frac{4}{3}$ હોય, તો $\angle A$ ના અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ કાટકોણ $\triangle ABC$ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 8.8).

$$\text{હવે, આપણે જાણીએ છીએ કે, } \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$$

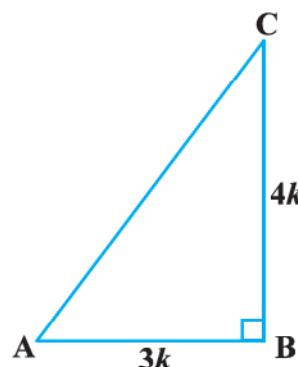
માટે, જો કોઈ ધન સંખ્યા k માટે $BC = 4k$ હોય, તો $AB = 3k$

હવે, પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

તેથી, $AC = 5k$ મળે.

હવે, આપણે તેમની વાખ્યાને આધારે બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો લખીએ.



આકૃતિ 8.8

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$$\text{માટે, } \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}, \cosec A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4} \text{ અને } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$$

ઉદાહરણ 2 : લઘુકોણ B તથા Q માટે $\sin B = \sin Q$ છે. સાબિત કરો કે $\angle B = \angle Q$

ઉકેલ : ચાલો, આપણે જેમાં $\sin B = \sin Q$ હોય, એવા બે કાટકોણ $\triangle ABC$ અને $\triangle PQR$ લઈએ.

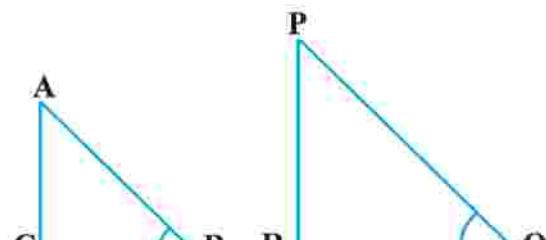
(જુઓ આકૃતિ 8.9.)

$$\text{અહીં, } \sin B = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{અને } \sin Q = \frac{PR}{PQ}$$

$$\text{તેથી, } \frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

$$\text{માટે, } \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \quad (\text{ધારો})$$



આકૃતિ 8.9

હવે, પાયથાગોરસના પ્રમેણનો ઉપયોગ કરતાં,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

અને $QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$

$$\begin{aligned} \text{તેથી, } \frac{BC}{QR} &= \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} \\ &= \frac{\sqrt{k^2 PQ^2 - k^2 PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} \\ &= \frac{k \sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \end{aligned} \quad (2)$$

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

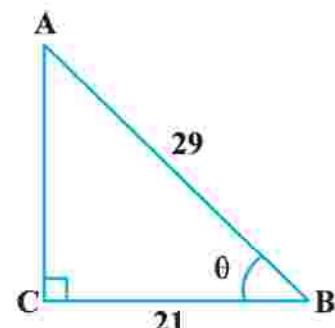
આમ, પ્રમેણ 6.4 પ્રમાણે $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$. તેથી, $\angle B = \angle Q$

ઉદાહરણ 3 : જેમાં $\angle C$ કાટખૂણો હોય, તેવો કોઈ ΔACB લો. $AB = 29$ એકમ, $BC = 21$ એકમ અને $\angle ABC = \theta$ (જુઓ આકૃતિ 8.10) હોય, તો નિમ્નલિખિત મૂલ્ય શોધો :

- (i) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$,
- (ii) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.

ઉકેલ : ΔACB માં,

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} \\ &= \sqrt{(29)^2 - (21)^2} \\ &= \sqrt{(29-21)(29+21)} \\ &= \sqrt{(8)(50)} \\ &= \sqrt{400} \\ &= 20 \text{ એકમ} \end{aligned}$$



આકૃતિ 8.10

તેથી, $\sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}, \quad \cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$

હવે, (i) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{21^2 + 20^2}{29^2} = \frac{441 + 400}{841} = 1$

અને (ii) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

ગણિત

ઉદાહરણ 4 : કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂબી બુધુષો B કાટખૂષો છે. જો $\tan A = 1$ તો ચકાસો કે $2 \sin A \cos A = 1$

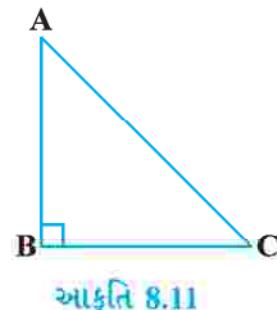
ઉકેલ : ΔABC માં,

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = 1 \text{ (જુઓ આફુતિ 8.11.)}$$

એટલે કે $BC = AB$

ધારો કે કોઈ ધન સંખ્યા k માટે $AB = BC = k$,

$$\text{હવે, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$



$$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$$

$$\text{માટે, } \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ અને } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{તેથી, } 2 \sin A \cos A = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 \text{ સિદ્ધ થાય છે.}$$

ઉદાહરણ 5 : ΔOPQ માં, P કાટખૂષો છે, $OP = 7$ સેમી અને $OQ - PQ = 1$ સેમી (જુઓ આફુતિ 8.12), $\sin Q$ અને $\cos Q$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ΔOPQ માં,

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

$$\therefore (1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2 \quad (\text{કિમાં ?})$$

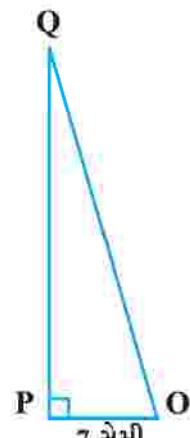
$$\therefore 1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$$

$$\therefore 1 + 2PQ = 7^2 \quad (\text{કિમાં ?})$$

$$\therefore PQ = 24 \text{ સેમી અને } OQ = 1 + PQ = 25 \text{ સેમી}$$

$$\text{તેથી, } \sin Q = \frac{7}{25} \text{ અને } \cos Q = \frac{24}{25}$$

સ્વાધ્યાય 8.1



1. ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂષો છે. $AB = 24$ સેમી, $BC = 7$ સેમી હોય, તો નીચેના ગુણોત્તરોનું મૂલ્ય શોધો :

(i) $\sin A, \cos A$

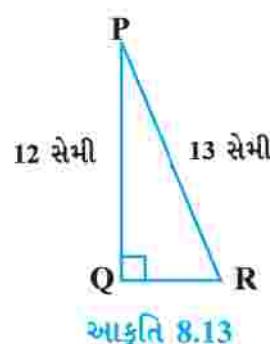
(ii) $\sin C, \cos C$

2. આફુતિ 8.13 માં, $\tan P - \cot R$ શોધો.

3. જો $\sin A = \frac{3}{4}$ હોય, તો $\cos A$ અને $\tan A$ ની ગણતરી કરો.

4. જો $15 \cot A = 8$ હોય, તો $\sin A$ અને $\sec A$ શોધો.

5. જો $\sec \theta = \frac{13}{12}$ હોય, તો બાકીના બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધો.



6. $\angle A$ અને $\angle B$ એવા લઘુકોણો છે કે, જેથી $\cos A = \cos B$. સાબિત કરો કે $\angle A = \angle B$
7. જો $\cot \theta = \frac{7}{8}$ હોય તો, (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2 \theta$ શોધો.
8. જો $3 \cot A = 4$ હોય, તો નક્કી કરો કે $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ છે કે નહિ.
9. ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. જો $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો નિમ્નલિખિત મૂલ્ય શોધો.
 - (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$
 - (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$
10. ΔPQR માં $\angle Q$ કાટખૂણો છે અને $PR + QR = 25$ સેમી અને $PQ = 5$ સેમી હોય, તો $\sin P, \cos P$ અને $\tan P$ શોધો.
11. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે નહિ તે કારણ આપી જાણાવો :
 - (i) $\tan A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 કરતાં ઓછું હોય છે.
 - (ii) A માપવાળા કોઈક ખૂણા માટે $\sec A = \frac{12}{5}$ સત્ય છે.
 - (iii) ખૂણા A ના cosecant ને સંક્ષિપ્તમાં $\cos A$ તરીકે લખાય છે.
 - (iv) \cot અને A નો ગુણકાર $\cot A$ છે.
 - (v) θ માપવાળા કોઈ એક ખૂણા માટે $\sin \theta = \frac{4}{3}$ શક્ય છે.

8.3 વિશિષ્ટ માપના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો



A8P8S8

ભૂમિતિમાં તમે $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ અને 90° માપના ખૂણાઓની ર્યનાથી પરિચિત છો. આ વિભાગમાં આપણે આ ખૂણાઓ અને 0° માપના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોના મૂલ્ય મેળવીશું.

45° ના ખૂણા માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

ΔABC માં ખૂણા B કાટખૂણો છે. હવે જો કોઈ એક ખૂણા 45° હોય તો બીજો લઘુકોણ પણ 45° નો થાય.

અર્થાત્, $\angle A = \angle C = 45^\circ$

(જુઓ આડૃતિ 8.14.)

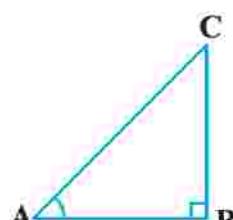
માટે, $BC = AB$

(કુમ્ભ ?)

ધારો કે, $BC = AB = a$

પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

માટે, $AC = a\sqrt{2}$



આડૃતિ 8.14

ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યાઓનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$\sin 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ ખૂણાની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ ખૂણાની સામેની બાજુ}}{45^\circ \text{ ખૂણાની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

અને $cosec 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}, \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2},$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1 \text{ મળે.}$$

30° અને 60° ના ખૂણા માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

હવે આપણે 30° અને 60° ના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો મેળવીએ. કોઈ એક સમબાજુ ત્રિકોણ ABC લો. સમબાજુ ત્રિકોણમાં દરેક ખૂણો 60° નો હોવાથી,

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

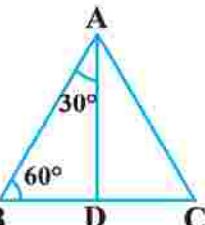
બિંદુ A માંથી બાજુ BC પર લંબ AD દોરો (જુઓ આકૃતિ 8.15.)

હવે, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(કેમ ?)

માટે, $BD = DC$

અને $\angle BAD = \angle CAD$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ)



આકૃતિ 8.15

હવે તમે જોઈ શકો છો કે,

ΔABD જેમાં ખૂણો D કાટખૂણો હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $\angle BAD = 30^\circ$ તથા $\angle ABD = 60^\circ$ (જુઓ આકૃતિ 8.15.)

તમે જાણો છો કે, ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવા માટે, આપણે ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ શોધવી પડશે. તેથી, ધારો કે, $AB = 2a$

માટે, $BD = \frac{1}{2} BC = a$

અને $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2,$

માટે, $AD = a\sqrt{3}$

હવે, આપણને

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ મળે.}$$

અને $cosec 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2, \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

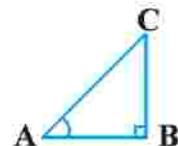
$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

તે જ પ્રમાણે, $\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3},$

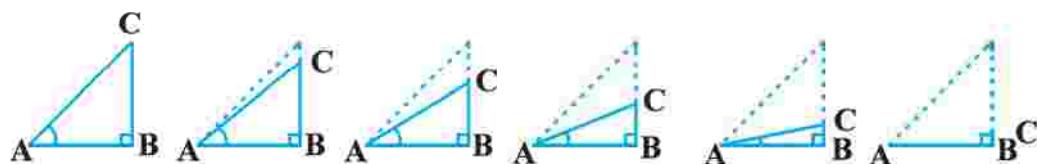
$$cosec 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2 \text{ અને } \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

૦° અને ૯૦° માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

હવે આપણે જોઈએ કે જો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂબા A નું માપ શૂન્ય થાય ત્યાં સુધી ક્રમશ: ઓછું કરીએ, (જુઓ આકૃતિ 8.16.) તો ખૂબા A ના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પર શું પ્રભાવ પડે. જેમ જેમ $\angle A$ નું માપ નાનું થતું જશે તેમ-તેમ બાજુ BC ની લંબાઈ ઘટતી જશે. બિંદુ C, બિંદુ B ની નજીક આવતું જશે અને જ્યારે $\angle A$ નું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે ત્યારે AC એ AB ને લગભગ સમાન થઈ જશે (જુઓ આકૃતિ 8.17.)



આકૃતિ 8.16



આકૃતિ 8.17

જ્યારે $\angle A$ નું માપ શૂન્યની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે BC ની લંબાઈ પણ શૂન્યની નજીક હશે. ત્યારે $\sin A = \frac{BC}{AC}$ નું મૂલ્ય પણ શૂન્યની નજીક હશે. અને જ્યારે $\angle A$ નું માપ શૂન્યની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે લગભગ AC અને AB સમાન હશે તેથી, $\cos A = \frac{AB}{AC}$ નું મૂલ્ય 1 ની એકદમ નજીક હશે.

આની મદદથી આપણે જ્યારે $A = 0^\circ$ હોય, ત્યારે $\sin A$ અને $\cos A$ નાં મૂલ્યોને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીશું. અહીં $\sin 0^\circ = 0$ અને $\cos 0^\circ = 1$ વ્યાખ્યાયિત થાય છે. આના ઉપયોગથી આપણને

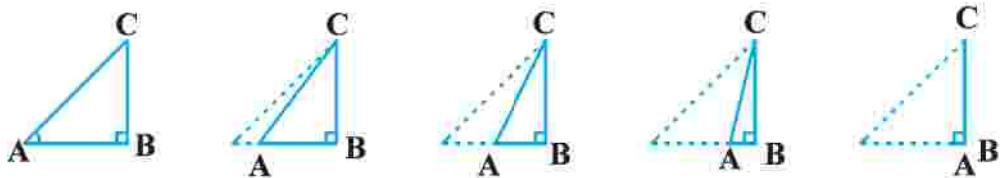
$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0, \cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \text{અવ્યાખ્યાયિત}$$

(કેમ ?)

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1 \text{ અને } cosec 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} \text{ પુનઃ અવ્યાખ્યાયિત છે.}$$

(કેમ ?)

ચાલો, હવે આપણે જોઈએ કે જો કાર્ટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂબાં A નું માપ 90° થાય ત્યાં સુધી કમશાં વધારતા જઈએ તો આ સ્થિતિમાં ખૂબાં A ના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પર શું પ્રભાવ પડે. જેમ-જેમ $\angle A$ નું માપ મોટું થશે તેમ-તેમ $\angle C$ નાનો થતો જરૂરી. માટે ઉપર્યુક્ત પરિસ્થિતિ પ્રમાણે બાજુ AB ની લંબાઈ ઘટશે. બિંદુ A બિંદુ B ની નજીક આવશે અને જ્યારે $\angle A$ નું માપ 90° ની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે $\angle C$ નું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે અને બાજુ AC બાજુ BC ને લગભગ સંપાતી થશે. (જુઓ આંકૃતિક 8.18.)



આંકૃતિક 8.18

જ્યારે $\angle C$ નું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે $\angle A$ નું માપ 90° ની અત્યંત નજીક હશે. બાજુ AC અને બાજુ BC ની લંબાઈ લગભગ સમાન થશે અને તેથી $\sin A$ નું મૂલ્ય 1ની અત્યંત નજીક હશે. અને જ્યારે $\angle A$ નું માપ 90° ની અત્યંત નજીક હશે, ત્યારે $\angle C$ નું માપ 0° ની અત્યંત નજીક હશે અને બાજુ AB નું માપ લગભગ શૂન્ય થશે તેથી $\cos A$ નું મૂલ્ય શૂન્યની એકદમ નજીક હશે.

આમ, આપણે $\sin 90^\circ = 1$ અને $\cos 90^\circ = 0$ વાય્યાખ્યાયિત કરીશું.

હવે, તમે 90° માટેના બીજા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવાનો પ્રયત્ન કેમ નથી કરતા ?

હવે, આપણે જરૂરી સંદર્ભ માટે $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ અને 90° માપના બધા જ ગુણોત્તરોના મૂલ્ય કોણક 8.1 માં દર્શાવીશું.

કોણક 8.1

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત
$\operatorname{cosec} A$	અવ્યાખ્યાયિત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયિત
$\cot A$	અવ્યાખ્યાયિત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

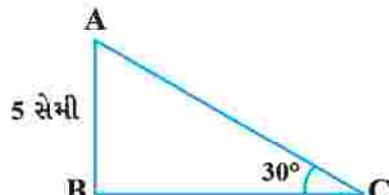
નોંધ : ઉપર્યુક્ત કોષ્ટકમાં તમે જોઈ શકો છો કે જેમ-જેમ $\angle A$ નું માપ 0° થી વધીને 90° થાય છે તેમને $\sin A$ નું માપ 0 થી વધીને 1 થાય છે તथા $\cos A$ નું માપ 1 થી ઘટીને 0 થાય છે.

ચાલો આપણે ઉપર્યુક્ત કોષ્ટકની કિમતોનો ઉપયોગ કેટલાંક ઉદાહરણમાં કરીએ :

ઉદાહરણ 6 : ΔABC માં B કાટખૂણો છે, AB = 5 સેમી અને $\angle ACB = 30^\circ$

(જુઓ આકૃતિ 8.19). તો બાજુ BC અને AC ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : બાજુ BC ની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે બાજુ BC અને બાજુ AB ને સમાવતા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર પસંદ કરીશું. અહીં, ખૂણા C માટે બાજુ BC પાસેની બાજુ છે તથા AB ખૂણા C ની સામેની બાજુ છે.



આકૃતિ 8.19

$$\text{માટે, } \frac{AB}{BC} = \tan C \text{ એટલે કે } \frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{આથી, } BC = 5\sqrt{3} \text{ સેમી મળશે.}$$

$$\text{બાજુ AC ની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે } \sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \text{ લઈશું. } \quad (\text{કેમ ?})$$

$$\text{એટલે કે, } \frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$\therefore AC = 10 \text{ સેમી}$$

જુઓ કે, ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં ત્રીજી બાજુની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે બીજા વિકલ્પ તરીકે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

$$\text{એટલે કે, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} \text{ સેમી} = 10 \text{ સેમી}$$

ઉદાહરણ 7 : ΔPQR માં, Q કાટખૂણો છે (જુઓ આકૃતિ 8.20).

PQ = 3 સેમી અને PR = 6 સેમી હોય, તો $\angle QPR$ અને $\angle PRQ$ શોધો.

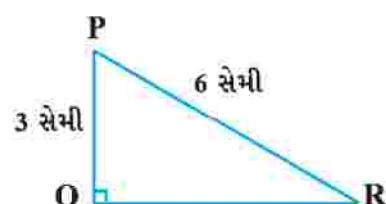
ઉકેલ : PQ = 3 સેમી અને PR = 6 સેમી આપેલ છે.

$$\text{હવે } \frac{PQ}{PR} = \sin R$$

$$\therefore \sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{તેથી } \angle PRQ = 30^\circ$$

$$\text{માટે, } \angle QPR = 60^\circ$$



આકૃતિ 8.20

તમે અહીં જોઈ શકો છો કે, કાટકોણ ત્રિકોણમાં જો કોઈ એક બાજુ અને અન્ય કોઈ એક ભાગ (કોઈ એક લઘુકોણ અથવા તો કોઈ એક બાજુ) આપેલ હોય, તો ત્રિકોણની બાકીની બાજુ અને ખૂણાઓનાં માપ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 8 : જો $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$, $A > B$, તો A અને B શોધો.

ઉકેલ : $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ હોવાથી $A - B = 30^\circ$ (ક્રમ ?) (1)

અને $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ હોવાથી $A + B = 60^\circ$ (ક્રમ ?) (2)

(1) અને (2) નો ઉકેલ શોધતાં,

આપણને $A = 45^\circ$ અને $B = 15^\circ$ મળે.

સ્વાધ્યાય 8.2

1. ક્રમત શોધો :

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ (ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \cosec 30^\circ}$ (iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \cosec 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તેની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $\frac{2\tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \dots\dots\dots$

- (A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

(ii) $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \dots\dots\dots$

- (A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0°

(iii) જ્યારે $A = \dots\dots\dots$ હોય, ત્યારે $\sin 2A = 2 \sin A$ સત્ય હોય.

- (A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\frac{2\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \dots\dots\dots$

- (A) $\cos 60^\circ$ (B) $\sin 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

3. જો $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ અને $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$, $A > B$, તો A અને B શોધો.

4. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$.

(ii) જેમ-જેમ θ નું મૂલ્ય વધે, તેમ તેમ $\sin \theta$ નું મૂલ્ય વધે છે.

(iii) જેમ-જેમ θ નું મૂલ્ય વધે, તેમ તેમ $\cos \theta$ નું મૂલ્ય વધે છે.

(iv) θ ના દરેક મૂલ્ય માટે $\sin \theta = \cos \theta$ થાય.

(v) $A = 0^\circ$ માટે $\cot A$ અવ્યાખ્યાયિત છે.

8.4 કોટિકોણના નિકોણમિતીય ગુણોત્તરો



$$\sin A = \frac{BC}{AC}, \quad \cos A = \frac{AB}{AC}, \quad \tan A = \frac{BC}{AB} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

$$\csc A = \frac{AC}{BC}, \quad \sec A = \frac{AC}{AB}, \quad \cot A = \frac{AB}{BC} \quad \left. \right\}$$

હવે, આપણે $\angle C = 90^\circ - \angle A$ માટેના નિકોણમિતીય ગુણોત્તરો લખીએ.

આપણી સુવિધા માટે આપણે $90^\circ - \angle A$ ને $90^\circ - A$ તરીકે લખીશું.

ખૂણા $90^\circ - A$ માટે સામેની બાજુ અને પાસેની બાજુ કઈ હશે ?

તમે જોઈ શકો છો કે, ખૂણા $90^\circ - A$ માટે, સામેની બાજુ AB છે અને પાસેની બાજુ BC છે.

માટે,

$$\begin{aligned} \sin (90^\circ - A) &= \frac{AB}{AC}, \quad \cos (90^\circ - A) = \frac{BC}{AC}, \quad \tan (90^\circ - A) = \frac{AB}{BC} \\ \csc (90^\circ - A) &= \frac{AC}{AB}, \quad \sec (90^\circ - A) = \frac{AC}{BC}, \quad \cot (90^\circ - A) = \frac{BC}{AB} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2)$$

હવે (1) અને (2) માં દર્શાવેલ ગુણોત્તરોની સરખામણી કરતાં આપણે જોઈશું કે :

$$\sin (90^\circ - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \quad \text{અને} \quad \cos (90^\circ - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

$$\text{અને} \quad \tan (90^\circ - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A \quad \text{અને} \quad \cot (90^\circ - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

$$\sec (90^\circ - A) = \frac{AC}{BC} = \csc A \quad \text{અને} \quad \csc (90^\circ - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

આમ, 0° અને 90° ની વચ્ચે આવેલા ખૂણા A ના દરેક મૂલ્ય માટે,

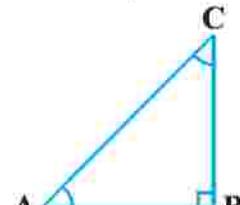
$$\sin (90^\circ - A) = \cos A, \quad \cos (90^\circ - A) = \sin A,$$

$$\tan (90^\circ - A) = \cot A, \quad \cot (90^\circ - A) = \tan A,$$

$$\sec (90^\circ - A) = \csc A, \quad \csc (90^\circ - A) = \sec A,$$

હવે, $A = 0^\circ$ અને $A = 90^\circ$ માટે આ સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસો.

નોંધ : $\tan 0^\circ = 0 = \cot 90^\circ, \sec 0^\circ = 1 = \csc 90^\circ$ અને $\sec 90^\circ, \csc 0^\circ, \tan 90^\circ$ તથા $\cot 0^\circ$ અવ્યાખ્યાયિત છે.



આકૃતિ 8.21

હવે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈશું.

ઉદાહરણ 9 : કિમત શોધો : $\frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ}$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\cot A = \tan (90^\circ - A)$$

$$\text{માટે} \quad \cot 25^\circ = \tan (90^\circ - 25^\circ) = \tan 65^\circ$$

$$\text{એટલે કે, } \frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ} = \frac{\tan 65^\circ}{\tan 65^\circ} = 1$$

ઉદાહરણ 10 : જો $3A$ એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $\sin 3A = \cos (A - 26^\circ)$ હોય, તો A ની કિમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપણે $\sin 3A = \cos (A - 26^\circ)$ આપેલ છે. (1)

હવે, $\sin 3A = \cos (90^\circ - 3A)$ હોવાથી આપણે પરિણામ (1) ને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ.

$$\cos (90^\circ - 3A) = \cos (A - 26^\circ)$$

હવે, $90^\circ - 3A$ અને $A - 26^\circ$ બંને લઘુકોણ હોવાથી,

$$90^\circ - 3A = A - 26^\circ$$

તેથી, $A = 29^\circ$ મળે.

ઉદાહરણ 11 : $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ$ ને 0° અને 45° વિચિત્રના માપવાળા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરીને દર્શાવો.

ઉકેલ : $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ = \cot (90^\circ - 5^\circ) + \cos (90^\circ - 15^\circ)$

$$= \tan 5^\circ + \sin 15^\circ$$

સ્વાધ્યાય 8.3

1. કિમત શોધો :

$$(i) \frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} \quad (ii) \frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} \quad (iii) \cos 48^\circ - \sin 42^\circ \quad (iv) \operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$$

2. સાબિત કરો :

$$(i) \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$$

$$(ii) \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$$

3. જો $2A$ એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $\tan 2A = \cot (A - 18^\circ)$ હોય, તો A ની કિમત શોધો.

4. જો $\tan A = \cot B$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $A + B = 90^\circ$

5. જો $4A$ એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20^\circ)$ હોય, તો A ની કિમત શોધો.

6. જો A, B અને C એ ΔABC ના ભૂષણ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\sin \left(\frac{B+C}{2} \right) = \cos \frac{A}{2}$

7. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ ને 0° અને 45° વિચિત્રના માપવાળા ભૂષણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવો.

8.5 નિકોણમિતીય નિત્યસમો



K9Q4B8

તમને યાદ હશે કે, જો સમીકરણમાં આવતા ચલના દરેક મૂલ્ય માટે સમીકરણ સત્ય હોય, તો સમીકરણને નિત્યસમ કહી શકાય. તે જુદી પ્રમાણે, જ્યારે નિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને સમાવતા સમીકરણમાં આવતા ખૂબાઓના પ્રત્યેક મૂલ્ય માટે સમીકરણ સત્ય હોય, ત્યારે તે સમીકરણને નિકોણમિતીય નિત્યસમ કહેવાય.

આ વિભાગમાં આપણે એક નિકોણમિતીય નિત્યસમ સાબિત કરીશું અને તેનો ઉપયોગ બીજા કેટલાંક ઉપયોગી નિકોણમિતીય નિત્યસમ સાબિત કરવા કરીશું.

$\triangle ABC$ માં $\angle B$ કાટખૂંધો છે (જુદો આકૃતિ 8.22.) અહીં

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad (1)$$

પરિષામ (1)ના દરેક પદને AC^2 વડે ભાગતાં, આપણાને

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \text{ મળે.}$$

$$\text{માટે, } \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

$$\therefore (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

$$\therefore \cos^2 A + \sin^2 A = 1 \quad (2)$$

આ, $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$ માં આપેલ દરેક A માટે સત્ય છે. તેથી, તે નિકોણમિતીય નિત્યસમ છે.

હવે, પરિષામ (1) ને AB^2 વડે ભાગતાં આપણાને,

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2} \text{ મળે.}$$

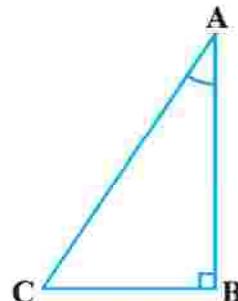
$$\therefore \left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\therefore 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \quad (3)$$

શું આ સમીકરણ $A = 0^\circ$ માટે સત્ય છે? હા, છે. જો $A = 90^\circ$ હોય તો? $A = 90^\circ$ માટે $\tan A$ અને $\sec A$ વ્યાખ્યાયિત નથી. આમ, પરિષામ (3) જ્યાં $0^\circ \leq A < 90^\circ$ માં આવેલ પ્રત્યેક A માટે સત્ય છે.

હવે જોઈએ કે, પરિષામ (1) ને BC^2 વડે ભાગીએ તો શું મળે.

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$



આકૃતિ 8.22

$$\therefore \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\therefore \cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A \quad (4)$$

આપણે નોંધીએ કે, $A = 0^\circ$ માટે $\operatorname{cosec} A$ અને $\cot A$ વ્યાખ્યાયિત નથી. આમ, પરિણામ (4) એ $0^\circ < A \leq 90^\circ$ માં આવેલ પ્રત્યેક A માટે સત્ય છે.

આ નિત્યસમોના ઉપયોગથી દરેક ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરને અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરના સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય, એટલે કે જો કોઈ એક ગુણોત્તરની કિમત જ્ઞાત હોય તો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની કિમત શોધી શકાય.

હવે આપણે જોઈશું કે નિત્યસમના ઉપયોગથી આ કેવી રીતે શોધી શકાય. ધારો કે, આપણાને $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

આપેલ છે. માટે, $\cot A = \sqrt{3}$

$$\text{હવે, } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \text{ આથી, } \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ અને } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{અને } \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}. \text{ માટે, } \operatorname{cosec} A = 2$$

ઉદાહરણ 12 : ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો $\cos A$, $\tan A$ અને $\sec A$ ને $\sin A$ ના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ હોવાથી,

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \text{ એટલે કે,$$

$$\cos A = \pm \sqrt{1-\sin^2 A}$$

$$\text{માટે, } \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} \text{ મળે} \quad (\text{કણ ?})$$

$$\text{આમ, } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

$$\text{અને, } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે $\sec A (1 - \sin A) (\sec A + \tan A) = 1$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } \text{L.H.S.} &= \sec A (1 - \sin A) (\sec A + \tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right) (1 - \sin A) \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right) \\ &= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} \\ &= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે, $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\cosec A - 1}{\cosec A + 1}$

$$\begin{aligned}\text{ઉક્તા : } \text{L.H.S.} &= \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A} \\ &= \frac{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} + 1 \right)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1 \right)} \\ &= \frac{\cosec A - 1}{\cosec A + 1} = \text{R.H.S.}\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 15 : નિત્યસમ $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ નો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, $\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$

ઉક્તા : અહીં $\tan \theta$ અને $\sec \theta$ ને સમાવતા નિત્યસમનો ઉપયોગ કરવાનો હોવાથી, સૌપ્રથમ આપણે ડા.બા.ના (આપણે જેને સાબિત કરવા માગીએ છીએ તે નિત્યસમની) અંશ અને છેદમાં રહેલા દરેક પદને $\cos \theta$ વડે ભાગીશું અને ડા.બા.નું $\sec \theta$ અને $\tan \theta$ ના સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરીશું.

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} \\ &= \frac{\tan \theta - 1 + \sec \theta}{\tan \theta + 1 - \sec \theta} \\ &= \frac{(\tan \theta + \sec \theta) - 1}{(\tan \theta - \sec \theta) + 1} \\ &= \frac{\{(tan \theta + sec \theta) - 1\} (tan \theta - sec \theta)}{\{(tan \theta - sec \theta) + 1\} (tan \theta - sec \theta)} \\ &= \frac{(tan^2 \theta - sec^2 \theta) - (tan \theta - sec \theta)}{\{(tan \theta - sec \theta) + 1\} (tan \theta - sec \theta)} \\ &= \frac{-1 - tan \theta + sec \theta}{(tan \theta - sec \theta + 1) (tan \theta - sec \theta)} \\ &= \frac{-1}{tan \theta - sec \theta} \\ &= \frac{1}{sec \theta - tan \theta}\end{aligned}$$

આ તો આપણે જે નિત્યસમ સાબિત કરવા માંગતા હતા તેની જ.બા. છે.

$$(vii) \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$$

$$(viii) (\sin A + \cosec A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$(ix) (\cosec A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

[સૂચન : ડા.બા. અને જ.બા. નું અલગ-અલગ સાદું રૂપ આપો.]

$$(x) \left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

8.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યાં :

- જેમાં કાટમૂશો B હોય તેવા, કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં,

$$\sin A = \frac{\text{ખૂણા } A \text{ ની સામેની બાજુ}{\text{કષ્ણ}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ખૂણા } A \text{ ની પાસેની બાજુ}{\text{કષ્ણ}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ખૂણા } A \text{ ની સામેની બાજુ}{\text{ખૂણા } A \text{ ની પાસેની બાજુ}$$

- $\cosec A = \frac{1}{\sin A}, \sec A = \frac{1}{\cos A}, \tan A = \frac{1}{\cot A}, \cot A = \frac{\sin A}{\cos A}$

- જો આપણે લઘુકોણના કોઈ એક ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનું મૂલ્ય જાહેતાં હોઈએ, તો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્ય સરળતાથી શોધી શકાય છે.

- $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ અને 90° માપના ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્ય

- $\sin A$ અને $\cos A$ નું મૂલ્ય ક્યારેય 1 થી વધારે ન હોય અને $\sec A$ અને $\cosec A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 અથવા 1 થી વધારે જ હોય.

- $\sin (90^\circ - A) = \cos A, \cos (90^\circ - A) = \sin A$

$$\tan (90^\circ - A) = \cot A, \cot (90^\circ - A) = \tan A$$

$$\sec (90^\circ - A) = \cosec A, \cosec (90^\circ - A) = \sec A.$$

- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$0^\circ \leq A < 90^\circ \text{ હોય તેવા પ્રત્યેક } A \text{ માટે } \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$0^\circ < A \leq 90^\circ \text{ હોય તેવા પ્રત્યેક } A \text{ માટે } \cosec^2 A - \cot^2 A = 1$$



J4 P7 P6





V3H9G7

ત्रिकोणमितિના ઉપયોગો

9

9.1 માસ્તાવિક

આગળના પ્રકરણમાં તમે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વિશે અભ્યાસ કર્યો. તમે તમારી આસપાસના વ્યવહારમાં ત્રિકોણમિતિ કેવી રીતે ઉપયોગી બને છે તેનો આ પ્રકરણમાં અભ્યાસ કરશો. જેનો અભ્યાસ સમગ્ર વિશ્વના વિલાનો દ્વારા કરવામાં આવ્યો હોય તેવા અત્યંત પ્રાચીન વિષયોમાંનો એક વિષય ત્રિકોણમિતિ છે. પ્રકરણ VIII માં આપણે ચર્ચા કરી ચૂક્યાં છીએ કે, ત્રિકોણમિતિની શોધ તેની ખગોળશાસ્ક્રિપ્ટ તેનો ઉપયોગ પૃથ્વીથી ગ્રહોનું તેમજ તારાઓનું અંતર શોધવામાં કરતા આવ્યા છે. ત્રિકોણમિતિ ભૂગોળ તથા નૌકાયનમાં પણ ઉપયોગી છે. ત્રિકોણમિતીય શાનનો ઉપયોગ ભૌગોલિક નકશા બનાવવા તથા રેખાંશ અને અક્ષાંશને સાપેક્ષ કોઈ એક દ્વીપની સ્થિતિ જાણવા કરવામાં આવે છે.

Surveyors have used trigonometry for centuries. One such large surveying project of the nineteenth century was the '*Great Trigonometric Survey*' of British India for which the two largest-ever theodolites were built. During the survey in 1852, the highest mountain in the world was discovered. From a distance of over 160 km, the peak was observed from six different stations. In 1856, this peak was named after *Sir George Everest*, who had commissioned and first used the giant theodolites (see the figure alongside). The theodolites are now on display in the *Museum of the Survey of India in Dehradun*.



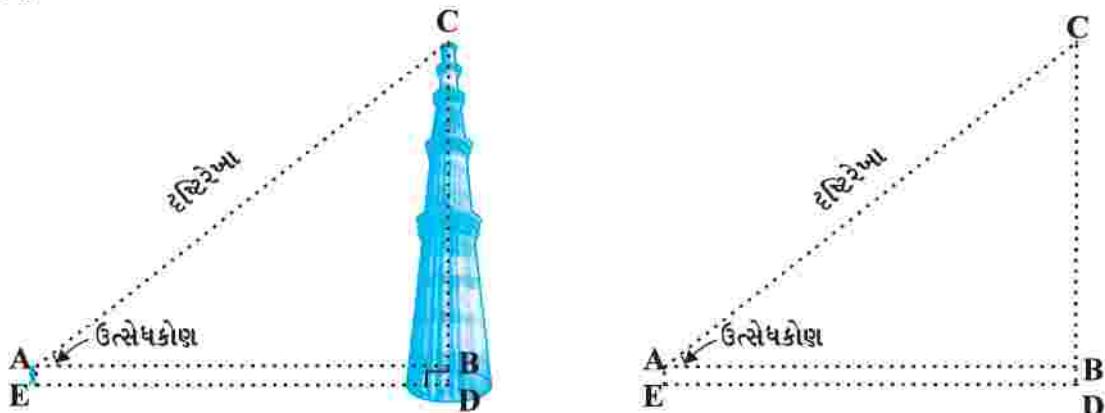
A Theodolite

(Surveying instrument, which is based on the Principles of trigonometry, is used for measuring angles with a rotating telescope)

આપણે આ પ્રકરણમાં ગ્રત્યક્ષ માપન વિના વિભિન્ન વસ્તુઓની ઊંચાઈ તથા તેમની વચ્ચેના અંતર કેવી રીતે શોધી શકાય તેની ચર્ચા કરીશું.

9.2 ઊંચાઈ અને અંતર

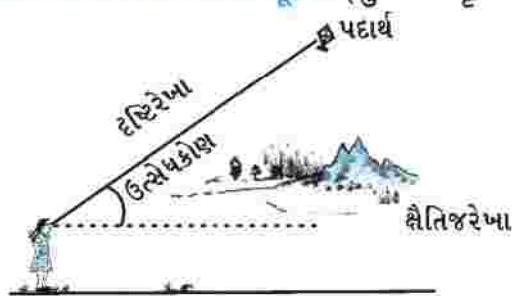
ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.1 તરીકે પુનઃ દર્શાવેલ આગળના પ્રકરણની આકૃતિ 8.1 ની ચર્ચા કરીએ.



આકૃતિ 9.1

આ આકૃતિમાં, વિદ્યાર્થીની આંખથી મિનારાની ટોચ સુધી લંબાવેલ રેખા AC ને દર્શિરેખા કહે છે. વિદ્યાર્થી મિનારાની ટોચનું નિરીક્ષણ કરે છે. આથી, દર્શિરેખાએ ક્ષેત્રજરેખા સાથે બનાવેલ ખૂણા BAC ને, વિદ્યાર્થીની આંખ આગળનો મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ (angle of elevation) કહે છે.

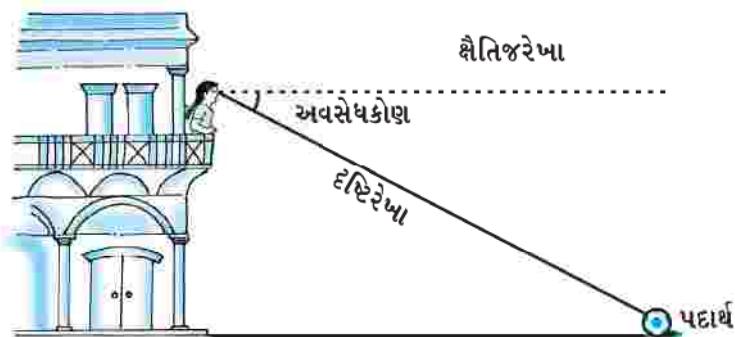
આમ, દર્શિરેખા એ નિરીક્ષણની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે. નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો નિરીક્ષણ બિંદુને સાપેક્ષ ઉત્સેધકોણ એટલે, દર્શિરેખા અને ક્ષેત્રજરેખાથી બનતો ખૂણો જેમાં નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષેત્રજરેખાથી ઉપર હોય અર્થાત, એવી સ્થિતિ કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને જીંયું કરવું પડે ત્યારે દર્શિરેખા અને ક્ષેત્રજરેખા વચ્ચે બનતો ખૂણો. (જુઓ આકૃતિ 9.2.)



આકૃતિ 9.2

ચાલો, હવે આપણે આકૃતિ 8.2 માં આપેલ સ્થિતિની ચર્ચા કરીએ. બાલકનીમાં બેઠેલી છોકરી મંદિરનાં પગથિયાં પર રાખેલ ઝૂંડાનું નિરીક્ષણ કરે છે. આ સ્થિતિમાં દર્શિરેખા, ક્ષેત્રજરેખાથી નીચે છે. દર્શિરેખાએ ક્ષેત્રજરેખા સાથે બનાવેલ આ પ્રકારના ખૂણાને અવસેધકોણ (angle of depression) કહે છે.

આમ, નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો નિરીક્ષણ બિંદુ આગળનો અવસેધકોણ એટલે જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષેત્રજરેખાથી નીચે હોય, ત્યારે દર્શિરેખા અને ક્ષેત્રજરેખાથી બનતો ખૂણો. અર્થાત, એવી સ્થિતિ કે જેમાં આપણે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે આપણું મસ્તક નીચે નમાવવું પડે, ત્યારે દર્શિરેખા અને ક્ષેત્રજરેખા વચ્ચે બનતો ખૂણો. (જુઓ આકૃતિ 9.3.)



આકૃતિ 9.3

હવે, તમે આકૃતિ 9.3માં બનેલી દૃષ્ટિરેખા અને આ પ્રકારે બનેલા ખૂણાને ઓળખી શકશો ? આ ખૂણો ઉત્સેધકોણ છે કે અવસેધકોણ ?

ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.1 ને ફરીથી જોઈએ. જો તમે મિનારા CD ની ઊંચાઈ, પ્રત્યક્ષ માપન વિના શોધવા માગતા હો, તો તમારા માટે કઈ માહિતી આવશ્યક હશે ? આ માટે નીચે દર્શાવેલ તથ્યોનું જ્ઞાન આવશ્યક હશે :

- અંતર DE, વિદ્યાર્થી અને મિનારાના પાયા વચ્ચેનું અંતર
- મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ, $\angle BAC$
- વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ, AE

હવે, જો ઉપરોક્ત ત્રણેય માહિતીથી આપણે પરિચિત હોઈએ, તો મિનારાની ઊંચાઈ કેવી રીતે શોધી શકાય ?

આકૃતિમાં $CD = CB + BD$. અહીં, $BD = AE$ વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ છે.

BC શોધવા માટે આપણે $\angle BAC$ અથવા $\angle A$ ના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીશું.

$\triangle ABC$ માં, $\angle A$ ની સામેની બાજુ BC છે. હવે, અહીં કયા-કયા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરી શકાય ? જેમાં બે મૂલ્યોનો ઉપયોગ થતો હોય, એક આપેલ હોય અને બીજું શોધવાનું હોય એવા ગુણોત્તર ઉપયોગી થાય. આપણી જરૂરિયાત $\tan A$ અથવા $\cot A$ નો ઉપયોગ કરવાથી પૂરી થઈ શકે, કારણ કે, આ બંને ગુણોત્તરમાં AB અને BC નો સમાવેશ થયેલ છે.

માટે, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ અથવા $\cot A = \frac{AB}{BC}$ નો ઉકેલ મેળવતાં આપણાને BC નું મૂલ્ય મળશે. હવે BC અને AE નો સરવાળો કરતાં મિનારાની ઊંચાઈ મળશે.

હવે, કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ દ્વારા આપણે હમણાં જ જેની ચર્ચા કરી હતી તે પદ્ધતિની સમજૂતી મેળવીએ.

ઉદાહરણ 1 : જમીન પર એક ટાવર શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. તેના પાયાથી 15 મીટર દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ સમસ્યાને દર્શાવતી એક સરળ આકૃતિ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 9.4.) અહીં AB ટાવર દર્શાવે છે,

CB એ બિંદુ C નું ટાવરથી અંતર છે અને $\angle ACB$ ઉત્સેધકોણ છે. આપણે અહીં ટાવરની ઊંચાઈ શોધવાની છે, અર્થાતું AB શોધવું છે. અહીં ત્રિકોણ ACBમાં ખૂબો B કાટકોણ છે. સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર $\tan 60^\circ$ (અથવા $\cot 60^\circ$) પસંદ કરીશું કારણ કે, તે ગુણોત્તરમાં AB અને BC બંને રહેલા છે.

$$\text{હવે, } \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{AB}{15}$$

$$\therefore AB = 15\sqrt{3}$$

\therefore ટાવરની ઊંચાઈ $15\sqrt{3}$ મીટર છે.

ઉદાહરણ 2 : એક ઇલેક્ટ્રિશિયનને 5 મી ઊંચાઈવાળા થાંબલા પર 'ફોલ્ટ'નું સમારકામ કરવાનું છે. આ માટે તેણે ટોચથી 1.3 મી નીચે સુધી પહોંચીને સમારકામ કરવાનું છે. (જુઓ આદૃતિ 9.5.) આ માટે તે સમક્ષિતિજ રેખા સાથે 60° માપનો ખૂબો રહે તે રીતે એક નિસરણી થાંબલા સાથે નાસી ટેકવે છે અને હાચ્છિત જગ્યાએ પહોંચે છે, તો નિસરણીની લંબાઈ કેટલી હશે? તહુપરાંત નિસરણીને થાંબલાના પાયાથી કેટલે દૂર રાખવી પડશે? (અહીં, $\sqrt{3} = 1.73$ લઈ શકાય.)

ઉકેલ : આદૃતિ 9.5 માં, ઇલેક્ટ્રિશિયનને થાંબલા AD પરના બિંદુ B સુધી પહોંચવું પડે.

$$\text{આથી, } BD = AD - AB = (5 - 1.3) \text{ મી} = 3.7 \text{ મી}$$

અહીં, BC નિસરણી દર્શાવે છે અને તેની લંબાઈ શોધવાની છે. અર્થાતું કાટકોણ ત્રિકોણ BDCના કર્ણની લંબાઈ શોધવાની છે.

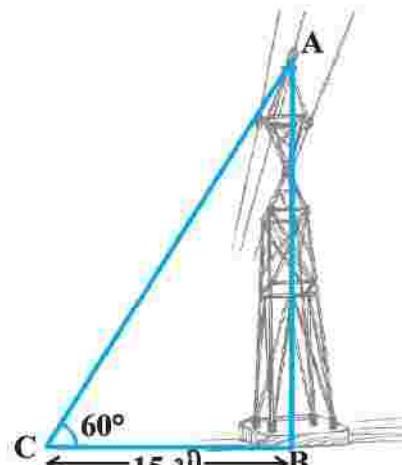
હવે, તમે કહી શકો કે આપણે કયા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરીશું?

તે ગુણોત્તર $\sin 60^\circ$ હોવો જોઈએ.

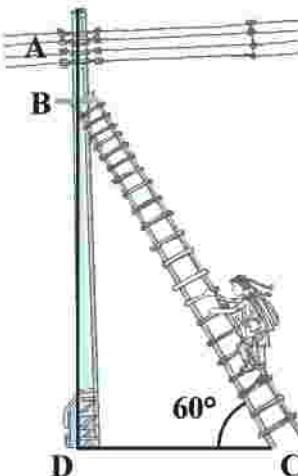
$$\text{માટે, } \frac{BD}{BC} = \sin 60^\circ \text{ અથવા } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28 \text{ મી (આસન મૂલ્ય)}$$

આમ, નિસરણીની લંબાઈ 4.28 મી હોવી જોઈએ.



આદૃતિ 9.4



આદૃતિ 9.5

$$\text{હવે, } \frac{DC}{BD} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14 \text{ મી (આસત મૂલ્ય)}$$

આથી, તેને નિસરણીના નીચેના છેડાને થાંભલાથી 2.14 મી દૂર રાખવો પડે.

ઉદાહરણ 3 : 1.5 મી ઊંચાઈવાળી એક નિરીક્ષક એક ચીમનીથી 28.5 મી દૂર ઉલ્લેખ છે. તેની આંખથી ચીમનીની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45° છે. ચીમનીની ઊંચાઈ કેટલી હશે ?

ઉકેલ : અહીં, AB ચીમની છે. CD નિરીક્ષક અને $\angle ADE$ ઉત્સેધકોણ છે. (જુઓ આકૃતિ 9.6.) અહીં, જેમાં ખૂણો E કાટકોણ હોય તેવો એક ત્રિકોણ ADE છે અને આપણે અહીં ચીમનીની ઊંચાઈ શોધવા માગીએ છીએ.

$$\text{આપણી પાસે, } AB = AE + BE = AE + 1.5$$

$$\text{અને } DE = CB = 28.5 \text{ મી છે.}$$

AE શોધવા માટે આપણે એવો ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર પસંદ કરીશું, જેમાં AE અને DE બંને હોય. ચાલો ઉત્સેધકોણનો tangent પસંદ કરીએ.

$$\text{હવે, } \tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$$

$$\therefore 1 = \frac{AE}{28.5}$$

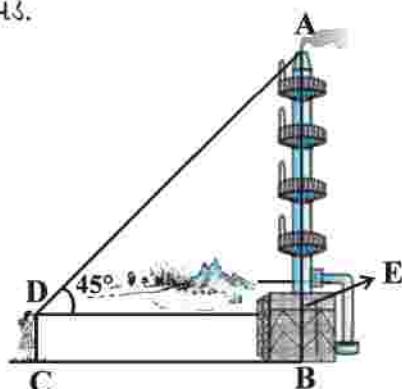
$$\therefore AE = 28.5$$

$$\text{તેથી, ચીમનીની ઊંચાઈ } AB = (28.5 + 1.5) \text{ મી} = 30 \text{ મી}$$

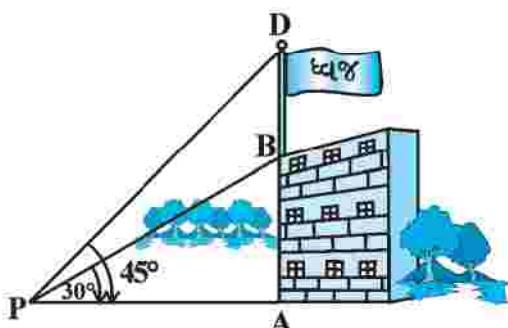
ઉદાહરણ 4 : જમીન પરના બિંદુ P થી એક 10 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° છે. ઈમારતની ટોચ પર ધ્વજ ફરકાવવામાં આવ્યો છે અને બિંદુ P થી આ ધ્વજસંભની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 45° છે, તો ધ્વજસંભની લંબાઈ તથા ઈમારતનું બિંદુ P થી અંતર શોધો. ($\sqrt{3} = 1.732$ લઈ શકાય.)

ઉકેલ : આકૃતિ 9.7 માં, AB ઈમારતની ઊંચાઈ દર્શાવે છે BD ધ્વજસંભ દર્શાવે છે અને P એ જમીન પરનું બિંદુ દર્શાવે છે. ધ્વજસંભની લંબાઈ અર્થાત् DB અને ઈમારતનું બિંદુ P થી અંતર અર્થાત् AP શોધવાનું છે.

આપણે ઈમારતની ઊંચાઈ AB જાણીએ છીએ તેથી સૌપ્રથમ આપણે કાટકોણ ΔPAB નો વિચાર કરીશું.



આકૃતિ 9.6



આકૃતિ 9.7

$$\text{અહીં, } \tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$$

$$\therefore AP = 10\sqrt{3}$$

અર્થાત્, ઈમારતનું બિંદુ P થી અંતર $10\sqrt{3}$ મી = 17.32 મી છે.

હવે, ધારો કે $DB = x$ મી છે, તેથી $AD = (10 + x)$ મી થાય.

હવે, કાટકોણ આંગાડી માં,

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

$$\text{માટે, } 1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

$$\text{અર્થાત્, } x = 10(\sqrt{3}-1) = 7.32$$

આમ, ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ 7.32 મી છે.

ઉદાહરણ 5 : સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° થી ઘટીને 30° થતાં, સમતલ જમીન પર ઊભેલ ટાવરના પડછાયાની લંબાઈમાં 40 મીટર જેટલો વધારો થાય છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.8 માં, AB ટાવર તથા સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° હોય, ત્યારે ટાવરનો પડછાયો BC અને સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° હોય, ત્યારે ટાવરનો પડછાયો DB છે.

ધારો કે, AB ની ઊંચાઈ 'h' મી અને BC 'x' મી છે, પ્રશ્નમાં જણાવ્યા પ્રમાણે DB, BC કરતાં 40 મી વધારે છે.

$$\text{આથી, } DB = (40 + x) \text{ મી}$$

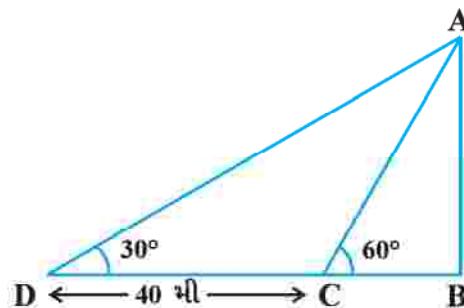
હવે, આપણી પાસે બે કાટકોણ નિકોણ ABC અને ABD છે.

$$\Delta ABC \text{ માં, } \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad (1)$$

$$\Delta ABD \text{ માં, } \tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40} \quad (2)$$



આકૃતિ 9.8

હવે, (1) પરથી, $h = x\sqrt{3}$

h ના આ મૂલ્યને (2) માં મુકૃતાં આપણાને $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40$, એટલે કે, $3x = x + 40$

$$\therefore x = 20$$

$$\text{તેથી, } h = 20\sqrt{3}$$

((1) પરથી)

આમ, ટાવરની ઊંચાઈ $20\sqrt{3}$ મી છે.

ઉદાહરણ 6 : એક બહુમાળી ઈમારતની ટોચ પરથી અવલોકન કરતાં એક 8 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચ અને તળિયાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 45° માલૂમ પડે છે, તો બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ અને બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.9 માં, PC એ બહુમાળી ઈમારત દર્શાવે છે તથા AB એ 8 મી ઊંચી ઈમારત દર્શાવે છે. આપણાને અહીં બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ અર્થાત् PC અને બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર અર્થાત् AC શોધવામાં રસ છે.

ધ્યાનથી આકૃતિનું અવલોકન કરો. તમે જોઈ શકો છો કે, બે સમાંતર રેખા PQ અને BD ની છેદિકા PB છે. આથી, $\angle QPB$ અને $\angle PBD$ પુંજકોણ થાય. તેથી તે સમાન છે. એટલે કે, $\angle PBD = 30^\circ$. આ જ રીતે, $\angle PAC = 45^\circ$ થાય.

કાટકોણ ΔPBD માં,

$$\tan 30^\circ = \frac{PD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ અથવા } BD = PD\sqrt{3}$$

કાટકોણ ΔPAC માં,

$$\tan 45^\circ = \frac{PC}{AC} = 1$$

$$\therefore PC = AC$$

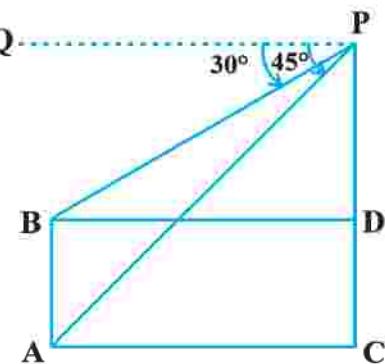
$$\text{પરંતુ, } PC = PD + DC. \text{ માટે } PD + DC = AC$$

$$\text{અહીં, } AC = BD \text{ અને } DC = AB = 8 \text{ મી હોવાથી, આપણાને } PD + 8 = BD = PD\sqrt{3} \text{ મળે. } (\text{કમ?})$$

$$\therefore PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1) \text{ મી}$$

આમ, બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}$ મી = $4(3+\sqrt{3})$ મી

અને બંને ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર પણ $4(3+\sqrt{3})$ મી હશે.



આકૃતિ 9.9

ઉદાહરણ 7 : નદી પર રહેલા પુલના એક બિંદુથી નદીના બંને કિનારાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 45° માલૂમ પડે છે. જો નદીની સપાટીથી પુલની ઊંચાઈ તમારી હોય તો નદીની પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.10 માં, બિંદુઓ A અને B નદીના સામસામેના બે કિનારા દર્શાવે છે. આથી નદીની પહોળાઈ AB થાય. નદીની સપાટીથી 3 મી ઊંચાઈએ આવેલા પુલ પરનું એક બિંદુ P છે, અર્થાત् $DP = 3$ મી.

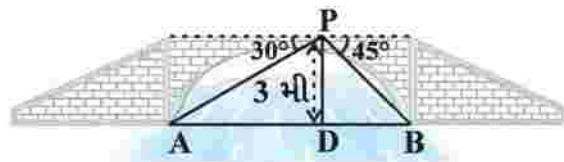
અહીં, નદીની પહોળાઈ એટલે કે, $\triangle APB$ ની એક બાજુ AB ની લંબાઈ, શોધવાની છે.

હવે,

$$AB = AD + DB$$

કાટકોણ ત્રિકોણ APD માં, $\angle A = 30^\circ$

આકૃતિ 9.10



$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{PD}{AD}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD} \text{ અથવા } AD = 3\sqrt{3} \text{ મી}$$

અને કાટકોણ $\triangle PBD$ માં, $\angle B = 45^\circ$. આથી, $BD = PD = 3$ મી

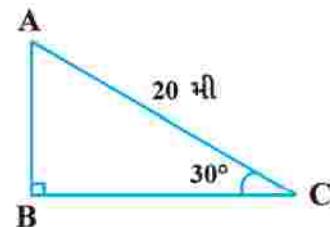
હવે,

$$AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3}) \text{ મી}$$

આમ, નદીની પહોળાઈ $3(\sqrt{3} + 1)$ મી છે.

સ્વાધ્યાય 9.1

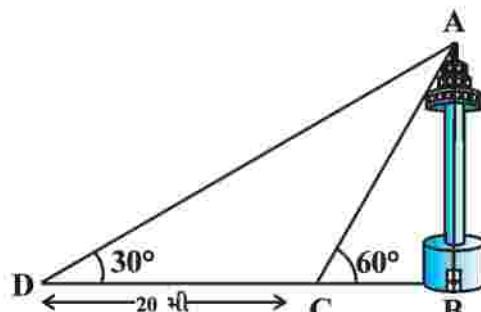
- સર્કસના તંબુમાં, જમીન સાથે શિરોલંબ સ્થિતિમાં રહેલા થાંબલાની ટોચથી જમીન સાથે ખેંચીને ભાંધેલા 20 મી લંબા દોરડા પર એક કલાકાર ચઢી રહ્યો છે. જો દોરડું જમીન સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે તો થાંબલાની ઊંચાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 9.11.)
- વાવાઝોડાને કારણે એક ઝડ એવી રીતે બાંગીને વળી જાય છે, જેથી તેની ટોચ, જમીન સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે તે રીતે જમીનને સ્પર્શ છે. ઝડની જમીનને સ્પર્શતી ટોચ અને ઝડના થડ વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય, તો ઝડની ઊંચાઈ શોધો.
- એક ઠેકેદારે બાળકોને રમવા માટે, બગીચામાં બે લપસણી લગાવવાની છે. આ માટે તે 5 વર્ષથી ઓછી ઉંમરનાં બાળકો માટે, જમીનથી ઉપરનો છેડો 1.5 મી રહે અને જમીન સાથે 30° નો ખૂણો બનાવે તેવી અને તેનાથી વધારે ઉંમરનાં બાળકો માટે 3 મીની ઊંચાઈથી સીધો ટાળ હોય તથા જમીન સાથે 60° નો ખૂણો બનાવતી હોય તેવી લપસણીઓ પસંદ કરે છે. તો બંને લપસણીઓની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 9.11

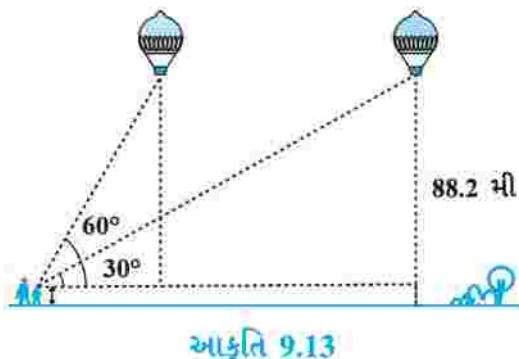
ગણિત

4. ટાવરના પાયાથી 30 મી દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
5. એક પતંગ જમીનથી 60 મી ની ઊંચાઈ પર ઉડી રહેલ છે. આ પતંગની દોરીનો એક છેડો ક્ષણાભર માટે જમીન પરના એક બિંદુ સાથે બાંધેલ છે. આ સ્થિતિમાં દોરીનો જમીન સાથેનો ખૂઝો 60° છે. જો દોરીમાં કોઈ ઢીલ નથી તેવું માની લેવામાં આવે તો દોરીની લંબાઈ શોધો.
6. 1.5 મી ઊંચો એક છોકરો એક 30 મી ઊંચી ઈમારતથી કોઈક અંતરે ઉભેલ છે. હવે જ્યારે તે ઈમારત તરફ ચાલવાનું શરૂ કરે છે ત્યારે કેટલાક સમય પછી તેની આંખથી ઈમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° થી વર્ધિને 60° થાય છે. તો તે ઈમારત તરફ કેટલું અંતર ચાલ્યો હશે ?
7. જમીન પર આવેલ એક બિંદુથી એક 20 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચ પર રહેલ એક સંચાર ટાવરના તળિયા અને ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુકૂલે 45° અને 60° છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
8. એક ઊંચી બેઠક પર 1.6 મી ઊંચી એક પ્રતિમા ગોઠવેલ છે. જમીન પરના એક બિંદુએથી પ્રતિમાની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° અને બેઠકની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45° છે. તો બેઠકની ઊંચાઈ શોધો.
9. એક ટાવરના તળિયાથી એક ઈમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે અને ઈમારતના તળિયાથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° છે. જો ટાવરની ઊંચાઈ 50 મી હોય તો ઈમારતની ઊંચાઈ શોધો.
10. એક 80 મી પહોળા ભાર્જની બંને બાજુઓ સમાન ઊંચાઈના બે સંભાં શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. ભાર્જ પર વચ્ચે આવેલ કોઈ એક બિંદુએથી બંને સંભાંની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ 60° અને 30° જણાય છે. તો દરેક સંભાં ઊંચાઈ શોધો તથા બંને સંભાંનું નિરીક્ષણ બિંદુથી અંતર શોધો.
11. નહેરના એક ડિનારા પર ટીવીનો ટાવર શિરોલંબ ઊભો કરવામાં આવેલ છે. ટાવરની સામેના બીજા ડિનારા પર રહેલા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે. ટાવરના તળિયા અને નિરીક્ષણ બિંદુને જોડતી રેખા પર આવેલ અને નિરીક્ષણ બિંદુથી 20 મી દૂર બીજા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. (જુઓ આંકૃતિક 9.12.) તો ટાવરની ઊંચાઈ અને નહેરની પહોળાઈ શોધો.
12. 7 મી ઊંચી ઈમારત પરથી એક 'કેબલ' ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° અને ટાવરના તળિયાનો અવસેધકોણ 45° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
13. દરિયાની સપાટીથી 75 મી ઊંચી દીવાદંડી પરથી અવલોકન કરતાં, દરિયામાં રહેલા બે વહાણના અવસેધકોણનાં માપ 30° અને 45° માલૂમ પડે છે. જો એક વહાણ બીજાની બરાબર પાછળ હોય અને બંને વહાણ દીવાદંડીની એક જ બાજુ પર આવેલ હોય તો બંને વહાણ વચ્ચેનું અંતર શોધો.



આંકૃતિક 9.12

14. 1.2 મી ઊંચાઈવાળી એક છોકરીને, જમીનથી 88.2 મી ઊંચાઈ પર રહેલું એક બલૂન જોવા મળે છે. પવનને કારણે તે સમક્ષિતિજ રેખામાં ગતિ કરે છે. કોઈ એક સમયે છોકરીને તેના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° મળે છે. થોડા સમય બાદ બલૂનના ઉત્સેધકોણનું માપ ઘટીને 30° થાય છે (જુઓ આફૂતિ 9.13), તો આ સમય દરમિયાન બલૂને કાપેલું અંતર શોધો.



આફૂતિ 9.13

15. એક સુરેખ માર્ગ ટાવર તરફ જાય છે. ટાવરની ટોચ પર રહેલ એક વ્યક્તિ, ટાવર તરફ અચળ ઝડપથી આવતી એક મોટરકારના અવસેધકોણનું માપ 30° નોંધે છે. 6 સેકન્ડ પછી આ કારના અવસેધકોણનું માપ 60° થાય છે, તો હવે કારને ટાવર સુધી પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે ?
16. ટાવરના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા પર તળિયાથી 4 મી અને 9 મી દૂર આવેલાં બે બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ ક્રોટિકોણનાં માપ છે. સાબિત કરો કે, ટાવરની ઊંચાઈ 6 મી છે.

9.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

- (i) દિશિરેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે.
(ii) નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો ઉત્સેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ ક્ષેત્રિજરેખાથી નીચે હોય અર્થात् એવી સ્થિતિમાં હોય કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને ઊંચું કરવું પડે ત્યારે દિશિરેખા અને ક્ષેત્રિજરેખા વડે બનતો ખૂણો.
(iii) નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો અવસેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ ક્ષેત્રિજરેખાથી નીચે હોય, અર્થात् એવી સ્થિતિમાં હોય કે, જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને નીચે નમાવવું પડે ત્યારે દિશિરેખા અને ક્ષેત્રિજરેખા વડે બનતો ખૂણો.
- પદાર્થની ઊંચાઈ અથવા લંબાઈ અથવા બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.





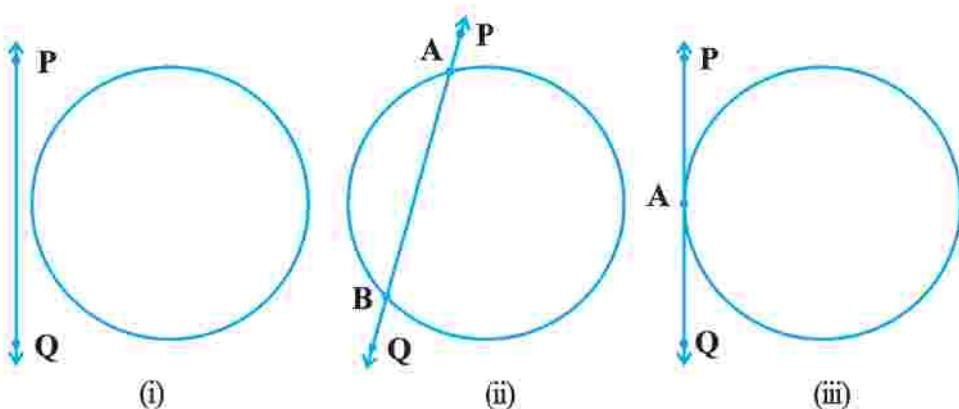
વર्तुળ

10

10.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે એ પ્રમાણે એક સમતલના એક ચોક્કસ બિંદુ (કેન્દ્ર)થી અચણ અંતરે (ત્રિજ્યા) આવેલાં બિંદુઓનો સમૂહ વર્તુળ છે. તમે વર્તુળ સંબંધિત જુદાં-જુદાં પદો જેવાં કે, જીવા, વૃત્તાંદ, વૃત્તાંશ, ચાપ વગેરે જેવાંનો પણ અભ્યાસ કર્યો છે. ચાલો, હવે જ્યારે કોઈ સમતલમાં વર્તુળ અને રેખા આપેલાં હોય, ત્યારે ઉભી થતી જુદી-જુદી પરિસ્થિતિઓ જોઈએ.

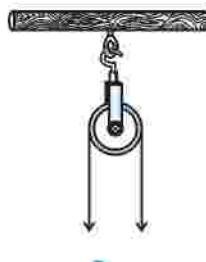
હવે, કોઈ એક વર્તુળ અને રેખા PQ નો વિચાર કરો. નીચે આકૃતિ 10.1 માં ત્રણ શક્યતા આપેલી છે :



આકૃતિ 10.1

આકૃતિ 10.1 (i) માં, રેખા PQ અને વર્તુળને કોઈ સામાન્ય બિંદુ નથી. આ ડિસ્સામાં રેખા PQ વર્તુળને છેદતી નથી એમ કહીશું. આકૃતિ 10.1 (ii) માં રેખા PQ અને વર્તુળને બે સામાન્ય બિંદુઓ A અને B છે. આ વિકલ્યમાં રેખા PQ ને વર્તુળની છેદક કહે છે. આકૃતિ 10.1 (iii) માં રેખા અને વર્તુળમાં ફક્ત એક જ બિંદુ સામાન્ય છે. આ વિકલ્યમાં રેખાને વર્તુળનો સ્પર્શક કહે છે.

કૂવામાંથી પાણી કાઢવા ઉપયોગમાં લેવામાં આવતી કૂવા પર લગાડેલી ગરગડી તમે કદાચ જોઈ હશે. આકૃતિ 10.2 જુઓ. અહીં, જો ગરગડીની બંને બાજુઓમાં રહેલી દોરીને કિરણ સમજવામાં આવે, તો તેમને ગરગડીને દર્શાવતાં વર્તુળના સ્પર્શક તરીકે ગણી શકાય.



આકૃતિ 10.2

ઉપર જે પ્રકારો આપ્યા છે તે સિવાય રેખાની કોઈ સ્થિતિ વર્તુળના સંદર્ભે હોય ? તમે જોશો કે, રેખાની અન્ય સ્થિતિ વર્તુળના સંદર્ભમાં ન હોય. આ પ્રકરણમાં આપણે, વર્તુળના સ્પર્શકના અસ્તિત્વ વિશે અભ્યાસ કરીશું અને તેના કેટલાક ગુણધર્મોનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

10.2 વર્તુળનો સ્પર્શક



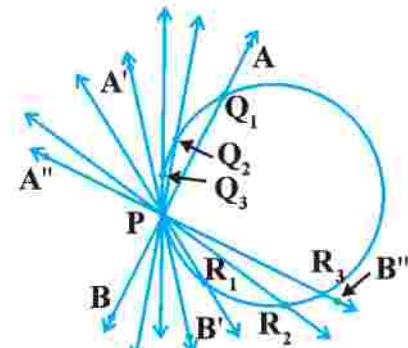
D3I2T4

અગાઉના વિભાગમાં, તમે જોયું કે, વર્તુળનો સ્પર્શક* (tangent) વર્તુળને ફક્ત એક જ બિંદુમાં છેદતી એક રેખા છે.

વર્તુળના કોઈ બિંદુએ સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ સમજવા માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક વર્તુળાકાર તાર લો. અને એક સીધો તાર AB વર્તુળાકાર તારના બિંદુ P પર એવી રીતે લગાડો કે, જેથી તેને સમતલમાં બિંદુ P ની આસપાસ ફેરવી શકાય. આ પ્રણાલીને ટેબલ પર મૂકો અને સીધા તારની અલગ-અલગ સ્થિતિ મેળવવા તાર AB ને બિંદુ P ની આસપાસ હળવેશી ફેરવો. (જુઓ આકૃતિ 10.3 (i).)

જુદી-જુદી પરિસ્થિતિમાં આ તાર વર્તુળાકાર તારને P અને બીજાં બિંદુઓ Q₁ કે Q₂ કે Q₃ વગેરે બિંદુઓમાં છેદશે. કોઈ એક સ્થિતિમાં, તમે જોશો કે, તે વર્તુળને ફક્ત એક બિંદુ P માં છેદશે. (AB ની A'B' સ્થિતિ જુઓ.) આ દર્શાવે છે કે, વર્તુળના બિંદુ P આગળ સ્પર્શક અસ્તિત્વ ધરાવે છે. AB ને વધુ ફેરવતાં તમે જોશો કે, AB ની બીજી બધી સ્થિતિમાં, તે વર્તુળને P અને બીજાં બિંદુઓ જેમ કે, R₁ કે R₂ કે R₃ વગેરેમાં છેદશે. તેથી તમે જોશો કે, વર્તુળના કોઈ એક બિંદુએ એક અને ફક્ત એક જ સ્પર્શક છે.



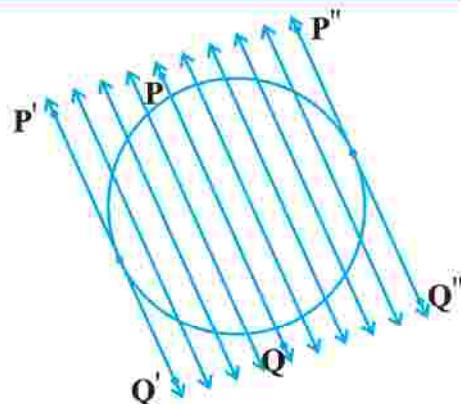
આકૃતિ 10.3 (i)

જ્યારે ઉપરની પ્રવૃત્તિ કરતા હોઈએ, ત્યારે તમે એ જોયું જ હશે કે જેમ સ્થિતિ AB એ સ્થિતિ A'B' તરફ પ્રસ્થાન કરે છે, તેમ રેખા AB અને વર્તુળનું સામાન્ય બિંદુ Q₁ ધીમે ધીમે સામાન્ય બિંદુ P ની નજીક અને નજીક આવે છે. છેવટે, તે AB ની સ્થિતિ A'B' થઈને બિંદુ P માં સંપાતિ થાય છે. ફરીથી નોંધો કે, જો A''B'' ને P ની આસપાસ જમણી તરફ ફેરવીએ તો શું થશે ? સામાન્ય બિંદુ R₃ ધીમે-ધીમે P ની નજીક અને નજીક આવશે. અને છેવટે તે P માં સંપાતિ થશે. આમ, આપણે શું જોયું ?

શેમાં બે અંત્યબિંદુઓ તેની અનુરૂપ જીવામાં સંપાતિ હોય છે એવી છેદિકાનો વિશિષ્ટ કિસ્સો એ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

* Tangent શબ્દ લેટિન શબ્દ Tangere પરથી આવ્યો છે. તેનો અર્થ સ્પર્શનું એવો થાય છે અને તે ઉનિશ ગણિતશાસ્ત્રી થોમસ કિનેકે C.E. 1583માં ટાબલ કર્યો હતો.

પ્રવૃત્તિ 2 : કાગળના સમતલ પર એક વર્તુળ અને વર્તુળની છેદિકા PQ દોરો. છેદિકાની બંને તરફ તેને સમાંતર રેખાઓ દોરો. તમે જોઈ શકશો કે, રેખાઓ દ્વારા કપાતી જીવાની લંબાઈ ધીમે-ધીમે ઘટતી જાય છે. એટલે કે, વર્તુળ અને રેખાનાં છેદબંદુ વધુ ને વધુ નજીક આવતા જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 10.3 (ii).) કોઈ એક વિકલ્યમાં, તે લંબાઈ છેદિકાની એક બાજુએ શૂન્ય બની જાય છે અને કોઈ બીજા વિકલ્યમાં તે છેદિકાની બીજી બાજુએ શૂન્ય બની જાય છે. આકૃતિ 10.3 (ii) માં છેદિકાની સ્થિતિ $P'Q'$ અને $P''Q''$ જુઓ. તે આપેલી વર્તુળના છેદિકા PQ ને સમાંતર સ્પર્શક છે. આ માહિતી તમને એ જોવામાં પડા ઉપયોગી છે કે, આપેલી છેદિકાને સમાંતર હોય તેવા બેથી વધારે સ્પર્શક ન હોય.

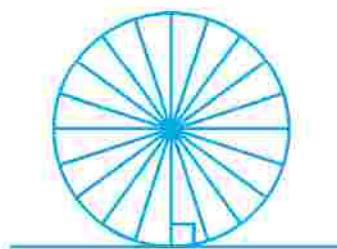


આકૃતિ 10.3 (ii)

તમે જોયું છે કે, જ્યારે તમે પ્રવૃત્તિ 1 કરતા હો ત્યારે આ પ્રવૃત્તિ એ પડા પ્રસ્થાપિત કરે છે કે, અનુરૂપ જીવાનાં બંને અંત્યબંદુઓ સંપાતી હોય ત્યારે છેદિકા એ સ્પર્શક બને છે.

વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને સ્પર્શબિંદુ કહે છે. (આકૃતિ 10.1 (iii) માં બિંદુ A) અને સ્પર્શક વર્તુળને તે બિંદુમાં સ્પર્શ છે તેમ કહેવાય.

હવે તમારી આસપાસ જુઓ. તમે સાઈકલ કે લારી ફરતી જોઈ છે ? તેનાં પૈડાં જુઓ. પૈડાના બધા સણિયા તેની ત્રિજ્યાના સ્થાને છે. હવે પૈડું જમીન પર ફરે છે તેની સ્થિતિ પર ધ્યાન આપો. તમે ક્યાંય કોઈ સ્પર્શક જોયો છે ? (જુઓ આકૃતિ 10.4.) ખરેખર તો પૈડું દર્શાવતા વર્તુળને સ્પર્શક હોય, તેવી રેખા પર પૈડું ફરે છે. અહીં એ પડા નોંધો કે, દરેક સ્થિતિમાં સ્પર્શબિંદુમાથી પસાર થતી ત્રિજ્યા જમીન પરના સ્પર્શક સાથે કાટખૂંઝો બનાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.4.) હવે, આપણે સ્પર્શકના આ ગુણધર્મને સાબિત કરીશું.



આકૃતિ 10.4

પ્રમેય 10.1 : વર્તુળના કોઈ બિંદુએ હોરેલ સ્પર્શક, સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ અને વર્તુળના બિંદુ P આગળ સ્પર્શક XY આપેલાં છે.

અહીં એવું સાબિત કરવાનું છે કે, OP એ XY ને લંબ છે.

XY પર P સિવાયનું કોઈ બિંદુ Q લો અને O તથા Q ને જોડતી રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 10.5.)

બિંદુ Q વર્તુળની બધારનું બિંદુ જ હોઈ શકે. (કેમ ?)

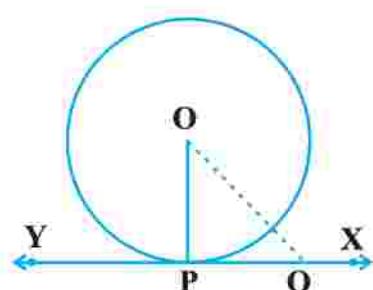
જો Q વર્તુળની અંદર હોય, તો XY છેદિકા બને અને વર્તુળનો સ્પર્શક ન બને.

તેથી, OQ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા OP કરતાં મોટી છે.

એટલે કે, $OQ > OP$

બિંદુ P સિવાય, રેખા XY નાં બધાં બિંદુઓ માટે આ બને છે. OP એ O થી XY પરના બિંદુઓથી બધાં અંતરો પૈકી ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર છે.

તેથી, OP એ XY ને લંબ છે. (પરિશિષ્ટ A1 ના પ્રમેય A 1.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે)



આકૃતિ 10.5

三

1. ઉપરના પ્રમેય પરથી, આપણે એ તારણ પણ કાઢીએ કે, વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુએ એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક છે.
 2. સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી અને ત્રિજ્યાને સમાવતી રેખાને તે સ્પર્શબિંદુ આગળનો વર્તુળનો અભિલંબ પણ કહે છે.

स्वाध्याय 10.1

- ## 1. વર્તુળને કેટલા સ્પર્શક હોય ?

૨. ખાલી જગ્યા પૂરો :

- સ્પર્શક વર્તુળને બિંદુ/બિંદુઓમાં છેટે.
 - વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદતી રેખાને કહે છે.
 - વર્તુળને વધુમાં વધુ સમાંતર સ્પર્શક હોય.
 - વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને કહે છે.

3. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કોઈ બિંદુ P આગળ દોરેલ એક સર્વાંગ PQ, કેન્દ્ર O માંથી પસાર થતી રેખાને Q બિંદુએ છેટે છ. $OQ = 12$ સેમી હોય, તો PQ ની લંબાઈ :

4. એક વર્તુળ અને આપેલ રેખાને સમાંતર હોય તેવી બે રેખાઓ દોરો, જે પૈકી એક વર્તુળનો સ્પર્શક અને બીજી વર્તુળની છેદિકા હોય.

10.3 समतलना कोઈ बिंदुमांथी वर्तणना स्पर्शकनी संभ्या



વર્તણ પરના બિંદમાંથી સ્પર્શકની સંખ્યાનો જ્યાલ મેળવવા, આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 3 : કાગળ પર એક વર્તુળ દોરો. તેની અંદર બિંદુ P લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકો? તમે જોશો કે આ બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદશે. તેથી વર્તુળની અંદરના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકાય તે શક્ય નથી (જ્ઞાનો આકાંક્ષા 10.6 (i)).

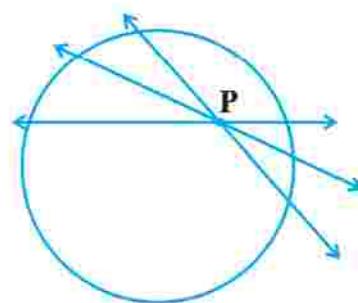
હવે વર્તુળ પર એક બિંદુ P લો. અને આ બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરો. તમે એ જોયું છે કે, આ બિંદુમાંથી વર્તુળને એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક મળે. (જુઓ આકૃતિ 10.6(ii).)

છેલ્લે વર્તુળની બહાર બિંદુ P લો. અને આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. તમે શું જોયું ? તમે જોયું હશે કે, આ બિંદુમાંથી તમે વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરી શકો. (જુઓ આકૃતિ 10.6 (iii).)

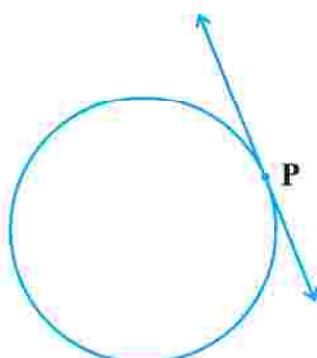
આ હકીકતનો સારાંશ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

વિકલ્પ 1 : વર્તણની અંદર આપેલા બિંદુમાંથી વર્તણને કોઈ સ્પર્શક ન મળે.

વિકલ્પ 2 : વર્તુળ પરના બિંદુએ વર્તુળનો એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક મળે



(i)

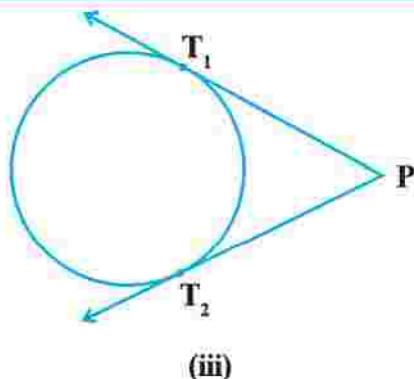


(ii)

વિકલ્પ 3 : વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો મળો.

આફૂતિ 10.6 (iii) માં, T_1 અને T_2 એ અનુક્રમે સ્પર્શકો PT_1 , અને PT_2 નાં સ્પર્શબિંદુઓ છે.

સ્પર્શકના બહારના બિંદુ P અને વર્તુળ સાથેના સ્પર્શબિંદુને જોડતા રેખાંડની લંબાઈને P થી વર્તુળ પરના સ્પર્શકની લંબાઈ કહે છે.



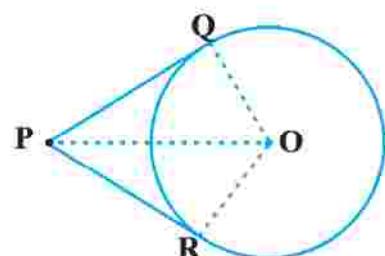
જુઓ કે, આફૂતિ 10.6 (iii) માં PT_1 , અને PT_2 , P થી વર્તુળ સુધીના સ્પર્શકની લંબાઈ છે. લંબાઈ PT_1 , અને PT_2 નો એક સામાન્ય ગુણધર્મ છે. તે તમે શોધી શકો ? PT_1 , અને PT_2 માપો. શું તે સમાન છે ? હકીકતમાં તે હમેશાં સમાન હોય છે. હવે આ હકીકતની સાબિતી નીચે દર્શાવેલા પ્રમેયમાં આપીએ :

આફૂતિ 10.6

પ્રમેય 10.2 : વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, વર્તુળની બહારનું બિંદુ P અને બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો PQ , PR આપેલાં છે (જુઓ આફૂતિ 10.7.) સાબિત કરવું છે કે $PQ = PR$.

આ માટે, OP , OQ અને OR જોડો. $\angle OQP$ અને $\angle ORP$ કાટખૂણા છે, કારણ કે, તે સ્પર્શકો અને સંગત ત્રિજ્યા વચ્ચેના ખૂણા છે, અને પ્રમેય 10.1 ના આધારે તેઓ કાટખૂણા છે. હવે કાટકોણ ત્રિકોણો OQP અને ORP માં,



આફૂતિ 10.7

$$OQ = OR \quad (\text{એક વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ})$$

$$OP = OP \quad (\text{સામાન્ય})$$

$$\text{તેથી, } \Delta OQP \cong \Delta ORP \quad (\text{કાકબા})$$

$$\text{આથી, } PQ = PR \quad (\text{એકરૂપ ત્રિકોણોના અનરૂપ ભાગ})$$

■

નોંધ :

1. આ પ્રમેયને પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને નીચે પ્રમાણે સાબિત કરી શકશો :

$$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2 \quad (\text{કેમ કે } OQ = OR)$$

$$\text{તેથી, } PQ = PR \text{ મળે.}$$

2. એ પણ ધ્યાન આપો કે, $\angle OPQ = \angle OPR$ તેથી, OP એ $\angle QPR$ નો કોણદ્વિભાજક છે.

હેઠળે કે, કેન્દ્ર બે સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાના દ્વિભાજક પર છે.

હવે, કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે, બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળોમાં મોટા વર્તુળની જ્વા નાના વર્તુળને સ્પર્શતી હોય, તો સ્પર્શબિંદુ તેને દુભાગે છે.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળાં બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળો C_1 અને C_2 આખાં છે અને મોટા વર્તુળ C_1 ની જ્વા AB નાના વર્તુળ C_2 ને બિંદુ P માં સ્પર્શ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.8.)

અહીં, એ સાબિત કરવાનું છે કે, $AP = BP$.

અહીં, OP જોડો. AB એ P બિંદુએ C_2 નો સ્પર્શક છે અને OP તેની ન્યૂઝાયા છે.

તેથી, પ્રમેય 10.1 પરથી,

$$OP \perp AB$$

હવે, AB એ વર્તુળ C_1 ની જ્વા છે અને $OP \perp AB$. તેથી, OP એ જ્વા AB નો દ્વિભાજક છે, કારણ કે, કેન્દ્રમાંથી જ્વાને દોરેલો લંબ જ્વાને દુભાગે છે.

એટલે કે, $AP = BP$

ઉદાહરણ 2 : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બહારના બિંદુ T માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો TP અને TQ દોરેલા છે. સાબિત કરો કે, $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$.

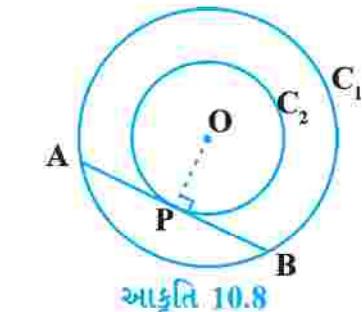
ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, તેની બહારનું બિંદુ T અને વર્તુળના બે સ્પર્શકો TP અને TQ આપેલા છે. P અને Q સ્પર્શબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.9.) અહીં, એ સાબિત કરવું છે કે,

$$\angle PTQ = 2 \angle OPQ$$

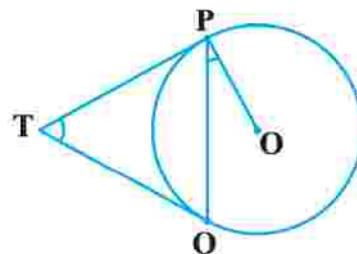
$$\text{ધારો કે, } \angle PTQ = \theta$$

હવે, પ્રમેય 10.2 પરથી $TP = TQ$

તેથી, ન્યૂઝાયા TPQ સમદ્વિભાજું ન્યૂઝાયા છે.



આકૃતિ 10.8



આકૃતિ 10.9

$$\text{તેથી, } \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$$

$$\text{તેમજ, પ્રમેય 10.1 પરથી } \angle OPT = 90^\circ$$

$$\text{તેથી, } \angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\angle PTQ$$

$$\text{તેથી } \angle PTQ = 2\angle OPQ$$

ગણિત

ઉદાહરણ 3 : PQ એ 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની 8 સેમી લંબાઈની છવા છે. P અને Q માંથી પસાર થતા સ્પર્શકો બંધુ T માં છેદ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.10.) TP ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : OT જોડો. ધારો કે તે PQ ને R માં છેદ છે.

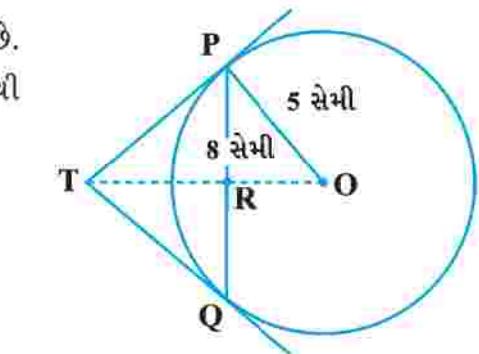
Δ TPQ સમદિભાજુ છે અને TO એ $\angle PTQ$ નો દિભાજક છે.

તેથી, $OT \perp PQ$ અને OT એ PQ ને દુખાગે છે. તેથી $PR = RQ = 4$ સેમી.

$$\text{તેમજ, } OR = \sqrt{OP^2 - PR^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 4^2} \text{ સેમી} \\ = 3 \text{ સેમી}$$

$$\text{હવે, } \angle TPR + \angle RPO = 90^\circ = \angle TPR + \angle PTR$$



(કેમ ?)

આકૃતિ 10.10

$$\text{તેથી, } \angle RPO = \angle PTR$$

તેથી, ખૂબૂ સમરૂપતા પરથી,

કાટકોણ ત્રિકોણ TRP એ કાટકોણ ત્રિકોણ PRO ને સમરૂપ છે.

$$\text{જેથી, } \frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$$

$$\text{એટલે કે, } \frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$$

$$\text{અથવા } TP = \frac{20}{3} \text{ સેમી}$$

નોંધ : પાયથાગોરસના પ્રમેયના ઉપયોગથી પણ TP નીચે પ્રમાણે મળી શકે :

$$\text{ધારો કે, } TP = x \text{ અને } TR = y$$

$$\text{તેથી, } x^2 = y^2 + 16$$

(કાટકોણ ΔPRT હેતુ) (1)

$$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$$

(કાટકોણ ΔOPT હેતુ) (2)

(2)માંથી (1) બાદ કરતાં

$$25 = 6y - 7$$

$$\therefore y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

$$\text{તેથી, } x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16$$

$$= \frac{16}{9} (16 + 9)$$

$$= \frac{16 \times 25}{9}$$

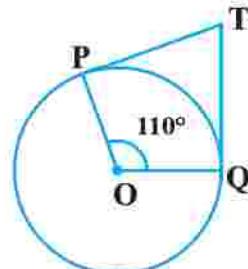
((1) પરથી)

$$x = \frac{20}{3}$$

સ્વાચ્છાય 10.2

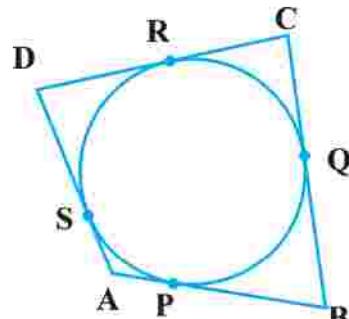
પ્રશ્ન 1 થી 3 માં સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તે માટે કારણ આપો :

- બિંદુ Q માંથી દોરેલા વર્તુળના સ્પર્શકની લંબાઈ 24 સેમી અને વર્તુળના કેન્દ્રથી તેનું અંતર 25 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.
 (A) 7 સેમી (B) 12 સેમી
 (C) 15 સેમી (D) 24.5 સેમી
- આકૃતિ 10.11 માં, જો TP અને TQ એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના $\angle POQ = 110^\circ$ બને એવા સ્પર્શકો છે. $\angle PTQ$ છે.
 (A) 60° (B) 70°
 (C) 80° (D) 90°
- જો O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને બિંદુ P માંથી દોરેલા સ્પર્શકો PA અને PB વચ્ચે 80° નો ખૂઝો રચાતો હોય, તો $\angle POA$ છે.
 (A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°
- સાબિત કરો કે, વર્તુળના વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓએ દોરેલા સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર હોય છે.
- સાબિત કરો કે, વર્તુળના સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે.
- વર્તુળના કેન્દ્રથી 5 સેમી અંતરે આવેલા બિંદુ A થી દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ 4 સેમી છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
- બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ 5 સેમી અને 3 સેમી છે. મોટા વર્તુળની જ્વા નાના વર્તુળને સ્પર્શ છે, તો તેની લંબાઈ શોધો.



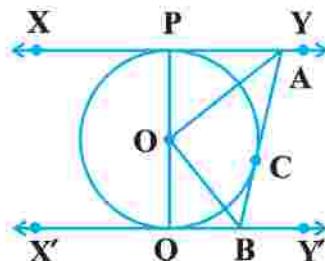
આકૃતિ 10.11

- ચતુર્ભોગ ABCD એક વર્તુળને પરિગત છે (જુઓ આકૃતિ 10.12) સાબિત કરો કે,
 $AB + CD = AD + BC$.



આકૃતિ 10.12

- આકૃતિ 10.13માં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બે સ્પર્શકો XY અને X'Y' સમાંતર છે અને વર્તુળ પરના સ્પર્શબિંદુ C આગળ દોરેલો જીજો સ્પર્શક AB, XYને A બિંદુએ અને X'Y' ને B બિંદુએ છોટ છે. સાબિત કરો કે $\angle AOB = 90^\circ$.



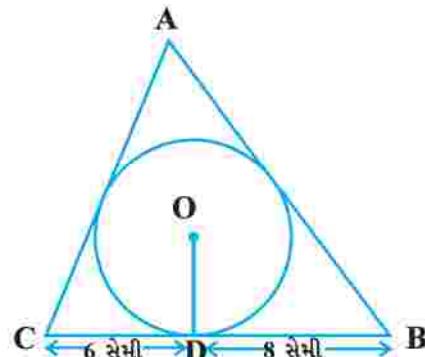
આકૃતિ 10.13

ગણિત

10. સાબિત કરો કે, વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો અને સ્પર્શબિંદુઓને કેન્દ્રને જોડતા રેખાખંડ વચ્ચેનો ખૂણો એકબીજાને પૂરક હોય છે.
11. સાબિત કરો કે, વર્તુળને પરિગત સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોજ સમબાજુ ચતુર્ભોજ છે.

12. ત્રિકોણ ABC એ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને પરિગત છે.

સ્પર્શબિંદુ D એ BCનું 8 સેમી અને 6 સેમી લંબાઈના રેખાખંડો અનુક્રમે BD અને DC માં વિભાજન કરે છે.



આંકૃતિ 10.14

13. સાબિત કરો કે વર્તુળને પરિગત ચતુર્ભોજની સામસામેની બાજુઓથી વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ રવાતા ખૂણાઓ પૂરક હોય છે.

10.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. વર્તુળના સ્પર્શકનો અર્થ
2. સ્પર્શબિંદુમાંથી વર્તુળની ત્રિજ્યાને દોરેલો સ્પર્શક ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.
3. વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.





U1A2E6

રચના

11

11.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં, સીધી પછી અને પરિકરની મદદથી તમે કેટલીક રચનાઓ કરી હતી તથા તેમની યથાર્થતાની ચર્ચા પણ કરી હતી. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે ખૂણાનો દિભાજક દોરવો, રેખાખંડનો લંબદિભાજક દોરવો, ત્રિકોણ પરની કેટલીક રચનાઓ કરી હતી. આ પ્રકરણમાં આપણે અગાઉ અભ્યાસ કરેલ રચનાઓના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી કેટલીક વધારે રચનાઓનો અભ્યાસ કરીશું. આવી રચનાઓ શું કાર્ય કરે છે તેની પાછળના ગાણિતિક તર્ક આપવાની અપેક્ષા પણ તમારી પાસે હશે.

11.2 રેખાખંડનું વિભાજન



W3E4S8

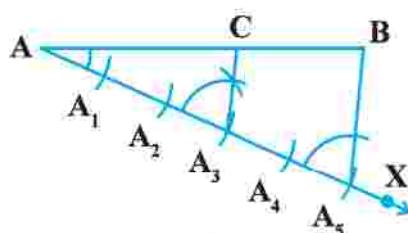
ધારો કે, એક રેખાખંડ આપો છે અને તમારે તેનું આપેલા ગુણોત્તર 3:2 માં વિભાજન કરવાનું છે. તમે તેની લંબાઈ માપી આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તેવા એક બિંદુનું સ્થાન તેના પર નક્કી કરી શકો. પરંતુ, ધારો કે તેનું ચોક્સાઈપૂર્વક માપ કાઢવા માટે તમારી પાસે કોઈ રસ્તો નથી, તો તમે આ બિંદુ કેવી રીતે શોધી શકશો? આપણે આવું બિંદુ શોધવાની બે રીત નીચે પ્રમાણે આપીશું :

રચના 11.1 : રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન

એક રેખાખંડ AB આપો છે. ધન પૂર્ણાંકો m, n માટે આપણે તેનું $m:n$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવા ઈચ્છીએ છીએ. તમને સમજવામાં સરળતા રહે તે માટે, આપણે $m = 3$ અને $n = 2$ લઈશું.

રચનાના મુદ્રા :

1. AB સાથે લઘુકોણ બનાવે તેવું કોઈ પણ ડિરણ AX દોરો.
2. AX પર $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ થાય તેવાં 5 ($= m + n$) બિંદુઓ A_1, A_2, A_3, A_4 અને A_5 નાં સ્થાન નક્કી કરો.
3. BA_5 જોડો.



આડૃતિ 11.1

4. બિંદુ A_3 ($m = 3$) માંથી AB ને C માં છેદતી A_5B ને સમાંતર હોય રેખા ($\angle A A_3 C$ એ $\angle A A_5 B$ ને સમાન ખૂણો બને તે રીતે) દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.1.) તેથી, $AC:CB = 3:2$ થશે.

આ રીતે માંગેલ વિભાજન કેવી રીતે મળે છે તે આપણે જોઈએ.

A_3C એ A_5B ને સમાંતર છે માટે,

$$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{CB}$$

(સપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેય દ્વારા)

રચના પરથી, $\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{2}$,

માટે, $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$.

આ સિદ્ધ કરે છે કે, બિંદુ C એ AB નું $3:2$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

વૈકલ્પિક રીત :

રચનાના મુદ્દા :

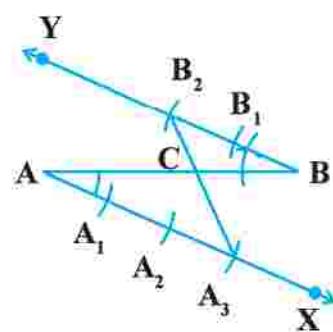
1. AB સાથે લઘુકોણ બનાવે તેવું કોઈક ડિરણ AX દોરો.
2. $\angle BAX$ ને સમાન $\angle ABY$ બને તે રીતે ડિરણ AX ને સમાંતર ડિરણ BY દોરો.
3. $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$ થાય તેવાં બિંદુઓ A_1, A_2, A_3 ($m = 3$) એ ડિરણ AX ઉપર અને B_1, B_2 ($n = 2$) એ ડિરણ BY ઉપર દર્શાવો.
4. A_3B_2 જોડો. ધારો કે તે AB ને બિંદુ C માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 11.2.)

$AC:CB = 3:2$ થશે.

આ રીત કેવી રીતે યથાર્થ છે? ચાલો, આપણે જોઈએ :

અહીં, ΔAA_3C એ ΔBB_2C ને સમરૂપ છે.

આકૃતિ 11.2



(શા માટે?)

તેથી, $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{CB}$ થશે.

રચના પરથી, $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}$. આથી, $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$

ખરેખર, રેખાખંડનું કોઈ પણ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવાનું કાર્ય ઉપર આપેલી રીતો દ્વારા થાય છે.

હવે, જેની બાજુઓ આપેલા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરમાં હોય એવા આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવામાં આપણે ઉપરની રચનાની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું.

રચના 11.2 : આપેલ સ્કેલમાપન પ્રમાણેના આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી.

આ રચના બે લિન્ઝ પરિસ્થિતિનો સમાવેશ કરે છે. એકમાં, રચેલ ત્રિકોણ આપેલા ત્રિકોણ કરતાં નાનો છે અને બીજામાં આપેલ ત્રિકોણ કરતાં મોટો છે. અહીં, સ્કેલમાપન (Scale factor) એટલે, રચિત ત્રિકોણની બાજુઓ અને આપેલ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર (પ્રકરણ 6માં પણ જુઓ). ચાલો, આપણે સમાવિષ્ટ રચના સમજવા માટે આગળનું ઉદાહરણ લઈએ. આ પદ્ધતિઓનું વ્યાપક રીતે પણ પ્રયોગન કરી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : જે ત્રિકોણની બાજુઓનો આપેલા ત્રિકોણ $\triangle ABC$ ની અનુરૂપ બાજુઓ સાથેનો ગુણોત્તર $\frac{3}{4}$ હોય તેવા

ત્રિકોણ $\triangle ABC$ ને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરો. (એટલે કે, સ્કેલ માપન $\frac{3}{4}$ હોય તેવા)

ઉકેલ : ત્રિકોણ $\triangle ABC$ આપેલો છે. આપણે જેની બાજુઓ ત્રિકોણ $\triangle ABC$ ની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{3}{4}$ ગણી હોય એવો બીજો ત્રિકોણ રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. BC ના જે અર્ધતલમાં A છે તેનાથી વિરુદ્ધ અર્ધતલમાં BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કોઈક તિરણ BX દોરો.
 2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ થાય તેવા ચાર ($\frac{3}{4}$ માં 3 અને 4 પૈકી જે સંખ્યા મોટી હોય તેટાં) બિંદુઓ B_1, B_2, B_3 અને B_4 એ BX પર લો.
 3. B_4C જોડો અને B_3 માંથી ($\frac{3}{4}$ માં 3 અને 4 પૈકી 3 નાનો છે, આથી ત્રીજું બિંદુ) B_4C ને સમાંતર હોય તેવી BC ને C' માં છેદતી રેખા દોરો.
 4. C' માંથી CA ને સમાંતર હોય તેવી BA ને A' માં છેદતી એક રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.3.) $\triangle A'BC'$ એ માંગેલ ત્રિકોણ છે.
- ચાલો, હવે આપણે જોઈએ કે આ રચના કેવી રીતે માંગેલ ત્રિકોણ રચે છે.

$$\text{રચના 11.1 પરથી, } \frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$$

$$\text{આથી, } \frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \text{ અર્થાત् } \frac{BC}{BC'} = \frac{3}{4}$$

વળી, $C'A'$ એ CA ને સમાંતર છે. આથી, $\triangle A'BC' \sim \triangle ABC$.

(શા માટે?)

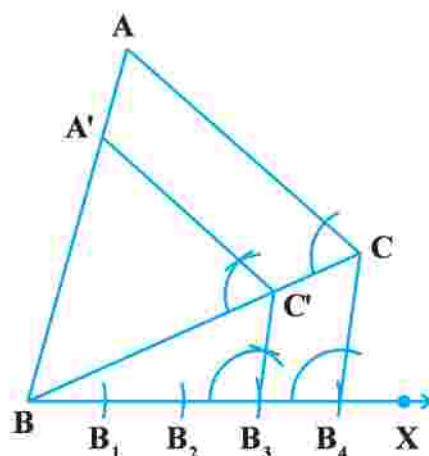
$$\text{તેથી, } \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$$

ઉદાહરણ 2 : જેની બાજુઓ ત્રિકોણ $\triangle ABC$ ની અનુરૂપ બાજુઓ સાથે $\frac{5}{3}$ ગુણોત્તર રચે એવો આપેલ ત્રિકોણ $\triangle ABC$ ને સમરૂપ ત્રિકોણ રચો. (એટલે કે સ્કેલમાપન $\frac{5}{3}$ લો.)

ઉકેલ : ત્રિકોણ $\triangle ABC$ આખો છે. આપણે જેની બાજુઓ ત્રિકોણ $\triangle ABC$ ની બાજુઓ કરતાં $\frac{5}{3}$ ગણી હોય એવા ત્રિકોણની રચના કરવી છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. BC ના જે અર્ધતલમાં A હોય તેનાથી વિરુદ્ધ અર્ધતલમાં BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું તિરણ BX દોરો.



આકૃતિ 11.3

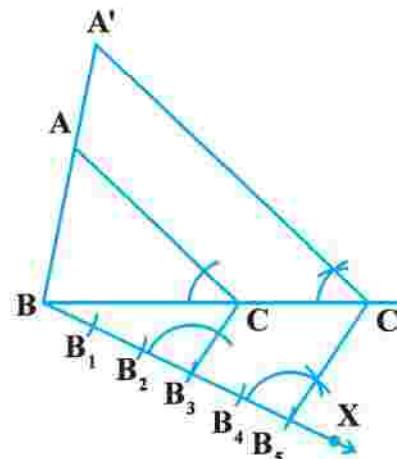
2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ થાય તેવાં 5 બિંદુઓ ($\frac{5}{3}$ માં 5 અને 3 પૈકી મોટી સંખ્યા) B_1, B_2, B_3, B_4 અને B_5 એ BX પર અંકિત કરો.
 3. B_3 ને ($\frac{5}{3}$ માં 3 અને 5 પૈકી 3 નાની છે, આથી ત્રીજું બિંદુ) C સાથે જોડો. B_5 માંથી B_3C ને સમાંતર BC ને C' માં છેદતી રેખા દોરો.
 4. લંબાવેલ રેખાખંડ BA ને A' માં છેદતી CA ને સમાંતર હોય તેવી C' માંથી રેખા દોરો.
(જુઓ આંકૃતિ 11.4.)
- $A'BC'$ એ માંગેલ ત્રિકોણ થશે.
- રચનાની યથાર્થતા માટે નોંધો કે, $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$.
- (આ માટે ?)

માટે, $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$

પરંતુ, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$

તેથી, $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$, અને તેથી, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$

નોંધ : ઉદાહરણ 1 અને 2 માં તમે AB અથવા AC સાથે લઘુકોણ બનાવતું ડિરણ લઈને પણ આ જ પ્રમાણે આગળ વધી શકો છો.



આંકૃતિ 11.4

સ્વાધ્યાય 11.1

નીચેના પૈકી પ્રત્યેકની રચના કરી તેની યથાર્થતા આપો :

1. 7.6 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ દોરી તેનું 5:8 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરો. બંને ભાગ માપો.
2. 4 સેમી, 5 સેમી અને 6 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ તે બાજુઓથી $\frac{2}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.
3. 5 સેમી, 6 સેમી અને 7 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓ, પ્રથમ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{7}{5}$ ગણી હોય.
4. 8 સેમી આધાર અને 4 સેમી વેધવાળા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો એવો ત્રિકોણ રચો કે જેની બાજુઓ, સમદ્વિબુજ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $1\frac{1}{2}$ ગણી હોય.
5. $BC = 6$ સેમી, $AB = 5$ સેમી અને $\angle ABC = 60^\circ$ હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. પછી ΔABC ની અનુરૂપ બાજુઓને $\frac{3}{4}$ પ્રમાણમાં હોય તેવી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.
6. $BC = 7$ સેમી, $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 105^\circ$ હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. પછી એવા ત્રિકોણની રચના કરો કે, જેની બાજુઓ, ΔABC ની અનુરૂપ બાજુઓથી $\frac{4}{3}$ ગણી હોય.

7. 4 સેમી અને 3 સેમી લંબાઈની (કર્ણ સિવાયની) બાજુવાળા કટકોણ ત્રિકોણની રચના કરો. પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ તે બાજુઓથી $\frac{5}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

11.3 વર્તુળના સ્પર્શકની રચના



તમે આગળના પ્રકરણમાં શીખી ગયાં છો કે, જો બિંદુ વર્તુળની અંદરના ભાગમાં આવેલું હોય, તો આ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ નથી. તેમ છતાં, જો બિંદુ વર્તુળ ઉપર આવેલું હોય, તો આ બિંદુએ વર્તુળને માત્ર એક સ્પર્શક હોય છે અને તે આ બિંદુ આગળની ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે. તેથી, જો વર્તુળના આ બિંદુએ તમે સ્પર્શક દોરવા ઈશ્યો, તો આ બિંદુએ માત્ર ત્રિજ્યા દોરો અને આ ત્રિજ્યાને આ બિંદુએ લંબરેખા દોરો, તે આ બિંદુએ માંગેલ સ્પર્શક થશે.

તમે એ પણ જોયું કે, જો બિંદુ વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલું હોય, તો આ બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શક મળશે. આ સ્પર્શક કેવી રીતે દોરવા તે હવે આપણે જોઈશું :

રચના 11.3 : વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની રચના

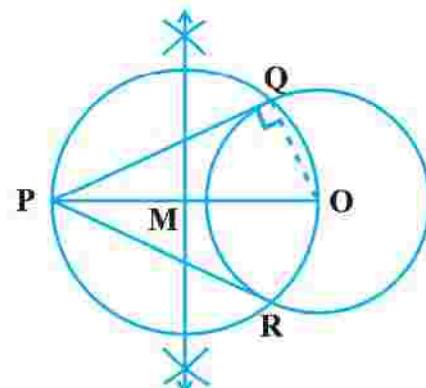
આપણને O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ અને તેની બહાર બિંદુ P આપ્યું છે. આપણે બિંદુ P માંથી વર્તુળના બે સ્પર્શકની રચના કરવી છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. PO જોડો અને તેને દુભાગો ધારો કે, PO નું મધ્યબિંદુ M છે.
2. M કેન્દ્ર અને MO ને ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો. ધારો કે, તે આપેલા વર્તુળને Q અને R માં છેદે છે.
3. PQ અને PR જોડો.

PQ અને PR એ માંગેલા બે સ્પર્શક છે. (જુઓ આકૃતિ 11.5.)

ચાલો, હવે આ રચના કેવી રીતે યથાર્થ છે તે આપણે જોઈએ.



આકૃતિ 11.5

OQ જોડો. $\angle P Q O$ એ અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો છે અને માટે $\angle P Q O = 90^\circ$

તમે જોઈ શકો છો કે, $PQ \perp OQ$?

આપેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા OQ હોવાથી, PQ એ વર્તુળનો સ્પર્શક બનશે.

આ જ પ્રમાણે PR એ પણ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

નોંધ : જો વર્તુળનું કેન્દ્ર આપ્યું ન હોય, તો પહેલાં સમાંતર ન હોય તેવી બે છલાઓ લઈ પછી તેમના લંબદિભાજકોનું છેદબિંદુ શોધીએ. આ છેદબિંદુ કેન્દ્ર થશે. પછી તમે ઉપર પ્રમાણે આગળ વધી શકો.

સ્થાય્ય 11.2

નીચેની પ્રત્યેક રચના કરી તેની યથાર્થતા પણ આપો :

1. 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રથી 10 સેમી દૂર આવેલા બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની જોડની રચના કરો અને તેમની લંબાઈ માપો.

ગણિત

2. 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને સમકેન્દ્રી બીજા 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી પ્રથમ વર્તુળના સ્પર્શકની રચના કરો અને તેની લંબાઈ માપો. વાસ્તવિક ગણતરીથી માપની ચકાસણી પણ કરો.
3. 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રથી લંબાવેલા બાસ પર દરેકનું કેન્દ્રથી અંતર 7 સેમી થાય તે રીતે બિંદુઓ P અને Q લો. બિંદુઓ P અને Q માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
4. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના જેમની વચ્ચેના ખૂલ્લાનું માપ 60° થાય તેવા સ્પર્શકો રચો.
5. 8 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ AB દોરો. A ને કેન્દ્ર લઈ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ દોરો. B ને કેન્દ્ર લઈ બીજું 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. પ્રત્યેક વર્તુળને બીજા વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી સ્પર્શકો દોરો.
6. $AB = 6$ સેમી, $BC = 8$ સેમી અને $\angle B = 90^\circ$ થાય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લો. B માંથી AC પરનો લંબ BD છે. B, C, D માંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરેલું છે. A માંથી આ વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
7. બંગડીની મદદ લઈ એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળની બહાર એક બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકોની જોડ દોરો.

11.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં નીચેની રચનાઓ કેવી રીતે કરવી તે તમે શીખ્યાં :

1. આપેલ ગુણોત્તરમાં રેખાખંડનું વિભાજન કરવું.
2. 1 કરતાં ઓછો અથવા 1 કરતાં વધારે હોય તેવા આપેલ સ્કેલમાપન પ્રમાણો આપેલા ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી.
3. વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શકોની જોડની રચના કરવી.

વાયક નોંધ

રચના 11.2ના ઉદાહરણ 1 અને 2માં જે મુદ્દા આયા છે તેમનો ઉપયોગ કરી આપેલા સ્કેલમાપન પ્રમાણો આપેલા ચતુર્ભુજોણ (અથવા બહુકોણ)ને સમરૂપ ચતુર્ભુજોણ (અથવા બહુકોણ)ની રચના કરો.



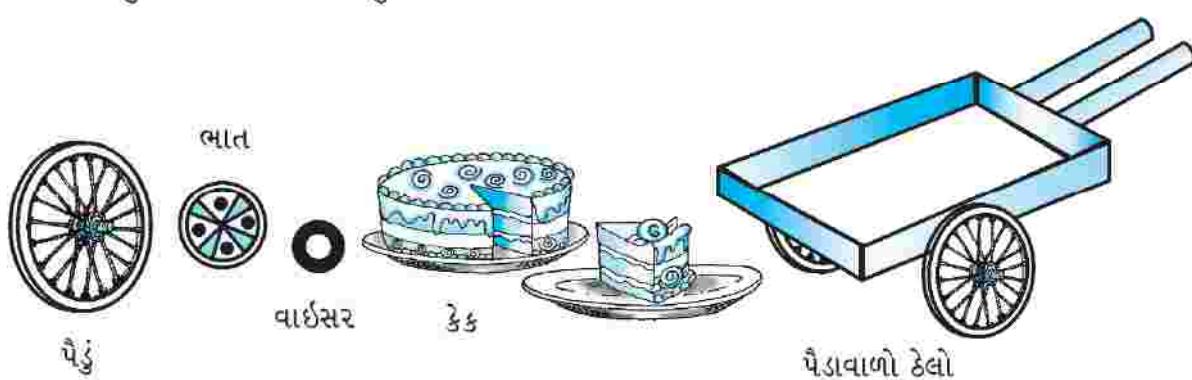


વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રકણ

12

12.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે તમારા અગાઉના વર્ગોમાંથી લંબચોરસ, ચોરસ, સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોણ, ત્રિકોણ અને વર્તુળના જેવી સરળ સમતલીય આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રકણ શોધવાની કેટલીક રીતો વિશે પહેલેથી જ પરિચિત છો. આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે એક અથવા બીજી રીતે વર્તુળના આકારને સંબંધિત ઘડી વસ્તુઓના પરિચયમાં આવીએ છીએ. સાઈકલનું પૈંડુ, પૈડાવાળો ઠેલો, તીરંદાળનું પાટિયું, ગોળાકાર કેક, પાપડ, ગટરનું ઢાંકણું, વિવિધ પ્રકારની ભાત, બંગડી, આંકડીવાળું ઘરેણું, વર્તુળાકાર રસ્તો, વાઈસર, ફૂલોની ક્યારી વગેરે આવી વસ્તુઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે (જુનો આકૃતિ 12.1.) આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રકણ શોધવાના ફૂટપ્રશ્નનું ખૂબ જ પ્રાયોગિક મહત્વ છે. આ પ્રકારણમાં આપણે આપણી ચર્ચાની શરૂઆત વર્તુળની પરિમિતિ (પરિધિ) અને ક્ષેત્રકણની કલ્પનાની સમાલોચનાથી કરીશું અને વૃત્તિમાં ક્ષેત્રના (અથવા ટૂંકમાં વર્તુળના) બે વિશિષ્ટ ‘ભાગ’ વૃત્તાંશ અને વૃત્તાંદના ક્ષેત્રકણ શોધવામાં આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરીશું. વર્તુળ અથવા તેના ભાગનો સમાવેશ થાય તેવી કેટલીક સંયુક્ત સમતલ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રકણ કેવી રીતે શોધવું તે પણ આપણે જોઈશું.



આકૃતિ 12.1

12.2 વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ – એક સમીક્ષા

યાદ કરીએ કે, વર્તુળ ઉપરની એક વખતની મુસાફરીથી કપાતા અંતરને તેની પરિમિતિ અથવા સામાન્ય ભાષામાં **પરિધિ** કહે છે. તમે તમારા આગળના વર્ગોમાંથી એ પણ જાણો છો કે, વર્તુળના પરિધિ અને તેના વ્યાસનો ગુણોત્તર અચળ છે. આ અચળ ગુણોત્તરને ગ્રીક અક્ષર π ('પાઈ' વાંચીશું)થી દર્શાવાય છે. બીજા શબ્દોમાં,



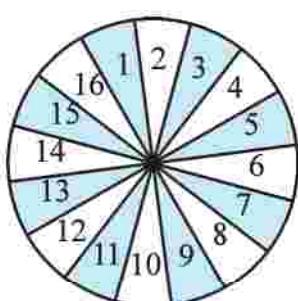
$$\frac{\text{પરિધિ}}{\text{વ્યાસ}} = \pi$$

$$\begin{aligned} \text{અથવા} \quad \text{પરિધિ} &= \pi \times \text{વ્યાસ} \\ &= \pi \times 2r \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

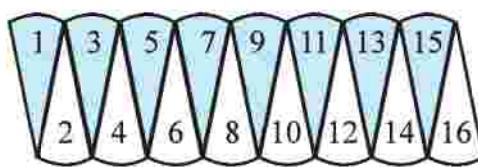
(r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.)

ભારતના મહાન ગણિતશાસ્કી આર્યભાત્ (C.E. 476-550) π નું લગભગ મૂલ્ય આપ્યું હતું. તેમણે $\pi = \frac{62832}{20000}$ નું આસત્ર મૂલ્ય 3.1416 જણાવ્યું છે. એ પણ નોંધવું રસપ્રદ છે કે, ભારતના મહાન પ્રતિભાશાળી ગણિતજ્ઞ શ્રીનિવાસ રામાનુજને (C.E.1887- C.E.1920) આપેલા નિત્યસમના ઉપયોગથી ગણિતશાસ્કીઓ પા ના આસત્ર મૂલ્યની ગણાતરી એક લાખ દશાંશસ્થળ સુધી કરી શક્યા. ધોરણ IX ના પ્રકરણ 1 પરથી તમે જાણો છો કે, π એ અસંમેય સંખ્યા છે અને તેનું દશાંશ વિસ્તરણ અનંત અને અનાવૃત છે. તેમ છતાં સામાન્ય રીતે વ્યાવહારિક હેતુ માટે આપણે તેનું મૂલ્ય $\frac{22}{7}$ અથવા લગભગ 3.14 લઈશું.

તમને એ પણ યાદ હશે કે, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે. યાદ કરો કે, તમે ધોરણ VII માં વર્તુળને અનેક વૃત્તાંશમાં કાપી અને તેમની આકૃતિ 12.2 પ્રમાણેની પુનઃ ગોઠવણી કરીને આ ચકાસ્યું છે.



(i)



(ii)

આકૃતિ 12.2

તમે જોઈ શક્યો કે, આકૃતિ 12.2 (ii)નો આકાર લગભગ $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ લંબાઈ અને r પછોળાઈવાળા લંબચોરસના જેટલો છે. આ સૂચવે છે કે, વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$. આપણે આગળના વર્ગોમાં કરેલી સંક્લયનાઓને એક ઉદાહરણ દ્વારા યાદ કરીએ.

ઉदाहरण 1 : એક વર्तुળ આકારના ખેતરને વાડ કરવાનો ખર્ચ મીટરના ₹ 24 પ્રમાણે ₹ 5280 થાય છે. ખેતરને ખેડવાનો ખર્ચ ચોરસ મીટરના ₹ 0.50 છે. ખેતર ખેડવાનો ખર્ચ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

$$\text{ઉકેલ : } \text{વાડની લંબાઈ (મીટરમાં) = \frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{\text{ભાવ}} = \frac{5280}{24} = 220 \text{ મી}$$

તેથી વર્તુળનો પરિધિ = 220 મી

તેથી, જો ખેતરની ત્રિજ્યા r મીટર હોય, તો

$$2\pi r = 220$$

$$\text{અથવા, } 2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

$$\text{અથવા, } r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$$

અર્થાત્, ખેતરની ત્રિજ્યા 35 મીટર છે.

$$\text{તેથી, } \text{ખેતરનું ક્ષેત્રફળ} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \text{ મી}^2 = 22 \times 5 \times 35 \text{ મી}^2$$

$$\text{હવે, } 1 \text{ મી}^2 \text{ ખેતર ખેડવાનો ખર્ચ} = ₹ 0.50$$

$$\text{આથી, } \text{ખેતર ખેડવાનો કુલ ખર્ચ} = ₹ 22 \times 5 \times 35 \times 0.50 = ₹ 1925$$

સ્વાધ્યાય 12.1

ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

- બે વર્તુળની ત્રિજ્યા 19 સેમી અને 9 સેમી છે. જે વર્તુળનો પરિધિ આ બે વર્તુળના પરિધિના સરવાળા જેટલો હોય, તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
- બે વર્તુળની ત્રિજ્યા 8 સેમી અને 6 સેમી છે. જે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ આ બે વર્તુળના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય, તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
- આકૃતિ 12.3 માં તીરદાળનું લક્ષ્ય, કેન્દ્રથી બહારના ભાગ તરફ સોનેરી, લાલ, ભૂરૂં કાળું અને સફેદ એમ પાંચ વિભાગમાં ગુણાલક્ષણ દર્શાવે છે. ગુણાની ગણતરી માટે સોનેરી રંગ દ્વારા દર્શાવાતા પ્રદેશનો વાસ 21 સેમી છે અને દરેક વિભાગની પહોળાઈ 10.5 સેમી છે. ગણતરી કરવાના પાંચ પ્રદેશ પૈકી પ્રત્યેકનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
- એક ગાડીના દરેક પેડાનો વાસ 80 સેમી છે. જો ગાડી 66 કિમી/કલાકની ઝડપે મુસાફરી કરે, તો દરેક પેડું 10 મિનિટમાં કેટલાં પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરશે?
- નીચેનામાંથી સાચા જવાબ પર નિશાન કરો અને તમારી પસંદગીની યથાર્થતા ચકાસો : આકૃતિ 12.3
જો વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ સમાન સંખ્યા હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા થાય.

- (A) 2 એકમ (B) π એકમ (C) 4 એકમ (D) 7 એકમ

12.3 વર્તુળના વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ

તમારા આગળનાં ધોરણોમાં તમે વર્તુળ વિષયક પદો વૃત્તાંશ (sector) અને વૃત્તખંડ (segment) થી પહેલેથી પરિચિત થયા છો. જ. યાદ કરો કે, વર્તુળાકાર પ્રદેશની બે ત્રિજ્યાઓ અને તેમને અનુરૂપ ચાપ વચ્ચે ધેરાયેલા પ્રદેશ (અથવા ભાગ)ને વર્તુળનો વૃત્તાંશ કહે છે અને જીવા તથા તેને અનુરૂપ ચાપની વચ્ચે ધેરાયેલા વર્તુળાકાર પ્રદેશના અંશ (અથવા ભાગ) ને વર્તુળનો વૃત્તખંડ કહે છે.



A3K7H7



આકૃતિ 12.3



આકૃતિ 12.4

આમ, આકૃતિ 12.4 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો રંગીન પ્રદેશ OAPB એ વૃત્તાંશ છે. $\angle AOB$ ને વૃત્તાંશનો ખૂબો કહે છે. આ આકૃતિમાં નોંધીશું કે, રંગીન ન હોય તેવો પ્રદેશ OAQB એ પણ વર્તુળનું વૃત્તાંશ છે. OAPB ને લઘુવૃત્તાંશ (minor sector) કહે છે અને OAQB ને ગુરુવૃત્તાંશ (major sector) કહે છે. આ વસ્તુ તરત સમજ શકાય તેમ છે. તમે એ પણ જોઈ શકશો કે, ગુરુવૃત્તાંશનો ખૂબો $360^\circ - \angle AOB$ છે.

હવે, આકૃતિ 12.5 તરફ જુઓ. તેમાં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જ્વા AB છે. આથી રંગીન પ્રદેશ APB વર્તુળનો વૃત્તાંશ (segment) છે. તમે એ પણ નોંધી શકશો કે, જ્વા AB થી વર્તુળનો ધાર્યાંકિત ન હોય તેવો બીજો વૃત્તાંશ AQB બને છે. દેખીતી રીતે APB ને લઘુવૃત્તાંશ (minor segment) કહે છે અને AQB ને ગુરુવૃત્તાંશ (major segment) કહે છે.

નોંધ : જો દર્શાવવામાં આવ્યું ન હોય, તો આપણે 'વૃત્તાંશ' અને 'વૃત્તાંશ' લખીએ, ત્યારે આપણે તેનો અર્થ અનુક્રમે 'લઘુવૃત્તાંશ' અને 'ગુરુવૃત્તાંશ' કરીશું.

હવે આ જ્ઞાન સાથે, ચાલો આપણે તેમના ક્ષેત્રફળની ગણતરી માટે કેટલાંક સંબંધ (સૂત્રો) શોધવાનો પ્રયાસ કરીએ.

ધારો કે, OAPB એ O કેન્દ્રવાળા અને r ત्रિજ્યાવાળા વર્તુળનું વૃત્તાંશ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.6.) ધારો કે, $\angle AOB$ નું અંશ માપ θ છે. તમે જાણો છો કે વર્તુળ (વર્તુળકાર પ્રદેશ અથવા તાસક) નું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે.

આપણે આ વર્તુળકાર પ્રદેશને કેન્દ્ર O આગળ 360° (અર્થાતું અંશમાપ 360)નો ખૂબો બનાવતા વૃત્તાંશ તરીકે લઈએ. હવે એકમ પદ્ધતિ અપનાવતાં, આપણે નીચે પ્રમાણે વૃત્તાંશ OAPB ના ક્ષેત્રફળ સુધી પહોંચી શકીશું :

જ્યારે કેન્દ્ર આગળ 360 અંશ માપવાળો ખૂબો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ = πr^2

આથી, જ્યારે કેન્દ્ર આગળ 1 અંશ માપવાળો ખૂબો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{\pi r^2}{360}$

તેથી, જ્યારે કેન્દ્ર આગળ θ અંશ માપવાળો ખૂબો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

આમ, આપણે વર્તુળના વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળ માટે નીચેનો સંબંધ (અથવા સૂત્ર) મળે છે :

$$\theta \text{ ખૂબોવાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

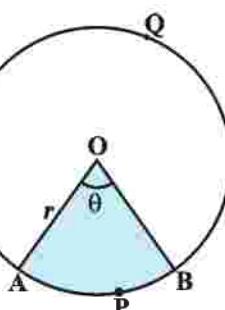
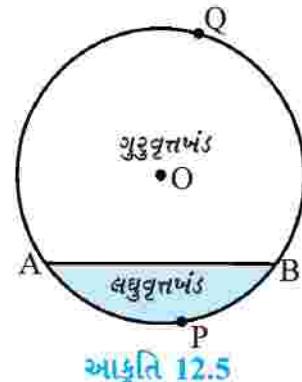
જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા અને θ એ અંશમાં વૃત્તાંશનો ખૂબો છે.

હવે, સ્વાભાવિક એક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે : શું આપણે આ વૃત્તાંશને અનુરૂપ ચાપ APB ની લંબાઈ શોધી શકીએ? હા, ફરીથી આપણે એકમની પદ્ધતિ અપનાવતાં અને વર્તુળની પૂરેપૂરી લંબાઈ (360° ના ખૂબાધી) $2\pi r$ લેતાં, આપણે જરૂરી ચાપ APB ની લંબાઈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ મેળવી શકીએ.

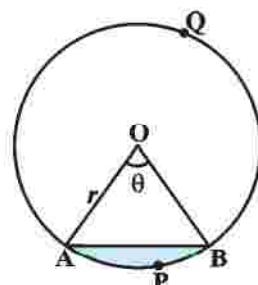
આથી, θ ખૂબોવાળા વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ચાલો, હવે આપણે O કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશ APB (જુઓ આકૃતિ 12.7) ના ક્ષેત્રફળનો વિકલ્પ લઈએ. તમે જોઈ શકશો કે,

વૃત્તાંશ APB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ - $\triangle OAB$ નું ક્ષેત્રફળ



આકૃતિ 12.6



આકૃતિ 12.7

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ नुँ क्षेत्रफल}$$

नोट : तर्मे अनुकमे आकृति 12.6 अने आकृति 12.7नु निरीक्षण करी शકશો કે,

$$\text{ગુરुવृत्तांश } OAQB \text{ नुँ क्षेत्रफल} = \pi r^2 - \text{लघुवृत्तांश } OAPB \text{ नुँ क्षेत्रफल}$$

$$\text{अने } \text{गુરुवृत्तांश } AQB \text{ नुँ क्षेत्रफल} = \pi r^2 - \text{लघुवृत्तांश } APB \text{ नुँ क्षेत्रफल}$$

यાલો, હવે આપણે આ સંકલ્પના સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ :

ઉદાહરણ 2 : 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અને કેન્દ્ર આગળ 30° નો ખૂંડો

બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક्षેત્રફળ શોધો. ગુરુવृત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : આપેલું વૃત્તાંશ $OAPB$ છે. (જુઓ આકृતિ 12.8.)

$$\text{વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ સેમી}^2 = 4.19 \text{ સેમી}^2 \text{ (આસન્ન મૂલ્ય)}$$

$$\text{અનુરૂપ ગુરુવृત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ} = \pi r^2 - \text{લઘુવृત્તાંશ } OAPB \text{ નું ક્ષેત્રફળ}$$

$$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ સેમી}^2$$

$$= 46.05 \text{ સેમી}^2 = 46.1 \text{ સેમી}^2 \text{ (આસન્ન મૂલ્ય)}$$

$$\text{વૈકલ્પિક રીતે, ગુરુવृત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$$

$$= \left(\frac{360 - 30}{360} \right) \times 3.14 \times 16 \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{ સેમી}^2 = 46.05 \text{ સેમી}^2$$

$$= 46.1 \text{ સેમી}^2 \text{ (આસન્ન મૂલ્ય)}$$

ઉદાહરણ 3 : જો વર્તુળની ત્રિજ્યા 21 સેમી અને $\angle AOB = 120^\circ$ હોય, તો

આકृતિ 12.9 માં દર્શાવેલ વૃત્તાંશ AYB નું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ : વૃત્તાંશ AYB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ $OAYB$ નું ક્ષેત્રફળ - ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ
(1)

હવે, વૃત્તાંશ $OAYB$ નું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ સેમી}^2$$

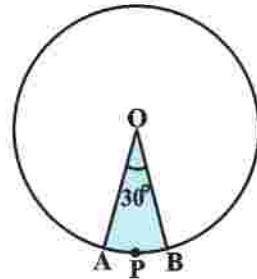
$$= 462 \text{ સેમી}^2$$

(2)

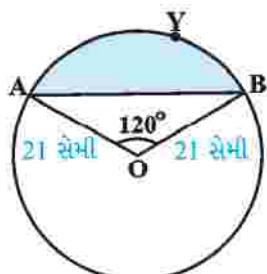
ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, આકृતિ 12.10 માં બતાવ્યા પ્રમાણે $OM \perp AB$ દોરો.

આપણે નોંધીએ કે, $OA = OB$. આથી, કાકબા એકરૂપતાને આપારે $\Delta AMO \cong \Delta BMO$

આથી, M એ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$



આકृતિ 12.8



આકृતિ 12.9

$OM = x$ સેમી હેતા,

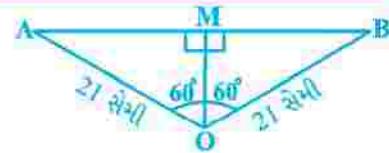
ΔOMA પરથી,

$$\frac{OM}{OA} = \cos 60^\circ$$

અથવા,

$$\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$$

$$(\cos 60^\circ = \frac{1}{2})$$



આકૃતિ 12.10

અથવા,

$$x = \frac{21}{2}$$

તેથી,

$$OM = \frac{21}{2} \text{ સેમી}$$

વળી,

$$\frac{AM}{OA} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

તેથી,

$$AM = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ સેમી}$$

માટે,

$$AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} \text{ સેમી} = 21\sqrt{3} \text{ સેમી}$$

તેથી,

$$\Delta OAB \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} AB \times OM$$

$$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{441}{4} \sqrt{3} \text{ સેમી}^2 \quad (3)$$

$$\text{માટે, વૃત્તખંડ } AYB \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = (462 - \frac{441}{4} \sqrt{3}) \text{ સેમી}^2$$

[(1), (2) અને (3) પરથી]

$$= \frac{21}{4} (88 - 21\sqrt{3}) \text{ સેમી}^2$$

સ્વાધ્યાય 12.2

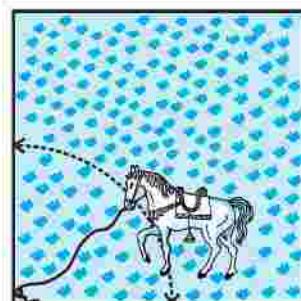
ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

- ઓ 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતો ખૂણો 60° હોય, તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
- 22 સેમી પરિધિવાળા વર્તુળના ચતુર્થાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
- એક ઘડિયાળના મિનિટકંટાની લંબાઈ 14 સેમી છે. મિનિટકંટો 5 મિનિટમાં પરિબ્રમણ કરીને જે ક્ષેત્રફળ રચે તે શોધો.
- 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ કાટખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ (i) લઘુવૃત્તખંડ (ii) ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)
- 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું એક ચાપ કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ (i) ચાપની લંબાઈ (ii) ચાપ વડે બનતા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ (iii) અનુરૂપ જીવા વડે બનતા વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
- 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ લઘુવૃત્તખંડ અને ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{3} = 1.73$ લો.)
- 12 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 120° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{3} = 1.73$ લો.)

8. 15 मी बाजुवाणा चोरस आकारना घासना खेतरना एक खूँडो घोडाने 5 मी लांबा दोरડाथी भीला साथे बांधेलो छे.

(जुओ आकृति 12.11.)

- (i) घोडो खेतरना जेटला भागमां यरी शके तेनु क्षेत्रफल शोधो.
(ii) दोस्रु 5 मी ने बदले 10 मी लांबु राष्ट्रु होत, तो यस्वाना क्षेत्रफलमां थतो वधारो शोधो. ($\pi = 3.14$ लो.)



आकृति 12.11

9. चांदीना तारथी 35 सेमी व्यासवाणु वर्तुण आकारनु एक बक्कल जेवु घरेणु बनायु छे. आकृति 12.12 मां बताव्या प्रमाणे वर्तुणने 10 समान वृत्तांशमां विभाजित करे तेवा 5 व्यास बनाववामां पछा तारनो उपयोग कर्यो छे.

- (i) जडीची चांदीना तारनी कुल लंबाई शोधो.
(ii) घरेणाना दरेक वृत्तांशनु क्षेत्रफल शोधो.



आकृति 12.12

10. एक छत्रीमां समान अंतरे 8 सणिया आवेलां छे. (जुओ आकृति 12.13.) छत्रीने 45 सेमी त्रिज्यावाणु समतलीय वर्तुण धारी, छत्रीना बे क्षमिक सणिया वय्येना भागनु क्षेत्रफल शोधो.



आकृति 12.13

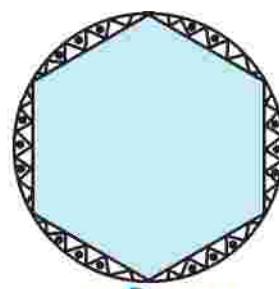
11. एक गाडीने एकबीज पर आच्छादित न थाय तेवां बे वाईपर छे. दरेक वाईपरने 115° ना खूँडा जेटली सफाई करती 25 सेमी लंबाईनी ब्लेड छे. प्रत्येक वर्खते वाईपरथी साफ थता विस्तारनु कुल क्षेत्रफल शोधो.

12. पाणीनी नीचेना खडको विशे जहाजने चेतवणी आपवा माटे, एक दीवादांडी 16.5 किमी अंतर सुधी 80° ना खूँडाना वृत्तांश पर लाल रंगनो प्रकाश पाथरे छे. समुद्रना जेटला क्षेत्रफल पर जहाजने चेतवणी अपाती होय ते शोधो. ($\pi = 3.14$ लो.)

13. आकृति 12.14 मां बताव्या प्रमाणे एक भेज पर 7 भातवाणु एक वर्तुणकार आवरण पाथरेलु छे. जो आवरणानी त्रिज्या 28 सेमी होय, तो ₹ 0.35 प्रति सेमी² ना दरे उझाईन बनाववानो खर्च शोधो. ($\sqrt{3} = 1.7$ लो.)

14. नीचेनामां साचा जवाब आगण निशानी करो :

R त्रिज्यावाणा वर्तुणनो वृत्तांश खूँडो p° होय, तो वृत्तांशनु क्षेत्रफल थाय.



आकृति 12.14

- (A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

12.4 સંયોજિત સમતલ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ

અત્યાર સુધી આપણે બિના-બિન આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળની પૃથક રીતે ગણતરી કરી, ચાલો, હવે આપણે કેટલીક સંયોજિત સમતલીય આકૃતિના ક્ષેત્રફળની ગણતરીનો પ્રયત્ન કરીએ. આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણે આ પ્રકારની આકૃતિઓ અને વિવિધ રસપ્રદ ભાત સ્વરૂપના સંપર્કમાં પણ આવીએ છીએ. કૂલોની ક્યારી, ગારનાં ડાંકણા, બારીની ભાત, ટેબલ પરના આવરણની ભાત એ કેટલાંક આવાં ઉદાહરણ છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા આ આકૃતિઓના ક્ષેત્રફળની ગણતરીની પ્રક્રિયા સમજશે.



U6E3P7

ઉદાહરણ 4 : 56 મી બાજુવાળી ચોરસ લોન ABCD ની બે સામસામેની બાજુઓ પર કૂલની બે વર્તુળાકાર ક્યારી આકૃતિ 12.15 માં બતાવી છે તે રીતે બનાવી છે. જો ચોરસ લોનના વિકણનું છેદબિંદુ O એ કૂલની વર્તુળાકાર ક્યારીનું કેન્દ્ર હોય, તો લોન અને કૂલની ક્યારીના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : ચોરસ લોન ABCD નું ક્ષેત્રફળ = 56×56 મી² (1)

$$\text{ધારો કે} \quad OA = OB = x \text{ મીટર}$$

$$\text{આથી,} \quad x^2 + x^2 = 56^2$$

$$\text{અથવા} \quad 2x^2 = 56 \times 56$$

$$\text{અથવા} \quad x^2 = 28 \times 56$$

$$\text{હવે, વૃત્તાંશ } OAB \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{90}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \pi r^2 \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 \text{ મી}^2 \quad [(2) \text{ પરથી}] \quad (3)$$

$$\text{વળી, } \Delta AOB \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \text{ મી}^2 \quad (\angle AOB = 90^\circ) \quad (4)$$

$$\text{તેથી, કૂલની ક્યારી AB \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \right) \text{ મી}^2$$

[(3) અને (4) પરથી]

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} - 2 \right) \text{ મી}^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \text{ મી}^2 \quad (5)$$

આ જ પ્રમાણે, બીજી કૂલની ક્યારીનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \text{ મી}^2 \quad (6)$$

$$\text{માટે,} \quad \text{કુલ ક્ષેત્રફળ} = \left(56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \right) \text{ મી}^2$$

[(1), (5) અને (6) પરથી]

$$= 28 \times 56 \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \right) \text{ મી}^2$$

$$= 28 \times 56 \times \frac{18}{7} \text{ મી}^2 = 4032 \text{ મી}^2$$

वैकल्पिक रीते ઉકेल :

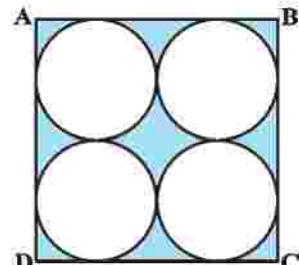
$$\begin{aligned}
 \text{कुल क्षेत्रफल} &= \text{वृत्तांश } OAB \text{ नું क्षेत्रफળ} + \text{वृत्तांश } ODC \text{नું क्षेत्रफળ} + \Delta OAD \text{नું क्षेत्रफળ} + \Delta OBC \text{नું क्षेत्रफળ} \\
 &= \left(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \right) \text{ मी}^2 \\
 &= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2 \right) \text{ मी}^2 \\
 &= \frac{7 \times 56}{7} (22 + 22 + 14 + 14) \text{ मी}^2 \\
 &= 56 \times 72 \text{ मी}^2 = 4032 \text{ मी}^2
 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 12.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના 14 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD માં આવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ચોરસ ABCD નું ક્ષેત્રફળ = 14×14 સેમી 2 = 196 સેમી 2

$$\text{પ્રત્યેક વર્તુળનો વ્યાસ} = \frac{14}{2} \text{ સેમી} = 7 \text{ સેમી}$$

આથી, પ્રત્યેક વર્તુળની ત્રિજ્યા = $\frac{7}{2}$ સેમી



આકૃતિ 12.16

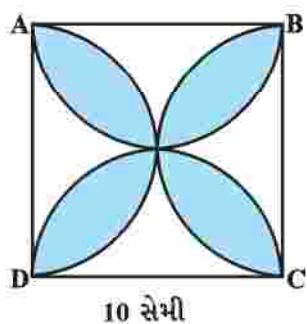
તેથી, એક વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ સેમી 2

$$= \frac{154}{4} \text{ સેમી}^2 = \frac{77}{2} \text{ સેમી}^2$$

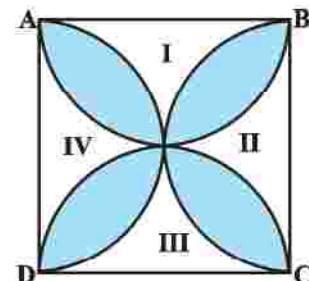
માટે, ચાર વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = $4 \times \frac{77}{2}$ સેમી 2 = 154 સેમી 2

આથી, રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = $(196 - 154)$ સેમી 2 = 42 સેમી 2

ઉદાહરણ 6 : 10 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD ની પ્રત્યેક બાજુ વ્યાસ હોય તેવાં અર્ધવર્તુળ આકૃતિ 12.17 માં દોરેલાં છે. આકૃતિમાં દર્શાવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 12.17



આકૃતિ 12.18

ઉકેલ : ચાલો, આપણે રંગીન પ્રદેશ ન હોય તેવા ચાર પ્રદેશને I, II, III અને IV થી અંકૃત કરીએ.
(જુઓ આકૃતિ 12.18.)

I નું ક્ષેત્રફળ + III નું ક્ષેત્રફળ

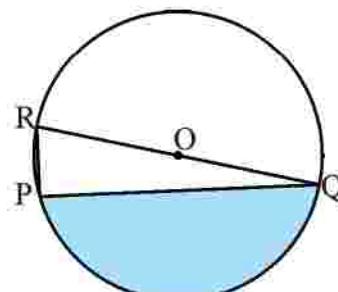
$$\begin{aligned}
 &= ABCD નું ક્ષેત્રફળ - પ્રત્યેક 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે અર્ધવર્તુળનું ક્ષેત્રફળ \\
 &= (10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2) \text{ સેમી}^2 \\
 &= (100 - 3.14 \times 25) \text{ સેમી}^2 \\
 &= (100 - 78.5) \text{ સેમી}^2 = 21.5 \text{ સેમી}^2
 \end{aligned}$$

આ જ પ્રમાણે, II નું ક્ષેત્રફળ + IV નું ક્ષેત્રફળ = 21.5 સેમી²

$$\begin{aligned}
 \text{આથી, રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ} &= ABCD નું ક્ષેત્રફળ - (I + II + III + IV) નું ક્ષેત્રફળ \\
 &= (100 - 2 \times 21.5) \text{ સેમી}^2 \\
 &= (100 - 43) \text{ સેમી}^2 = 57 \text{ સેમી}^2
 \end{aligned}$$

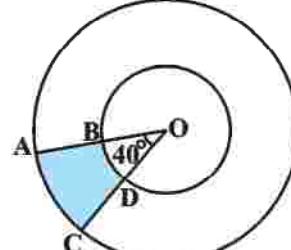
સ્વાધ્યાય 12.3

ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.



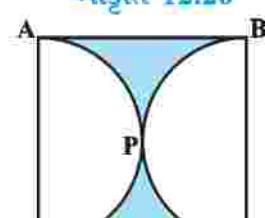
આકૃતિ 12.19

1. જો $PQ = 24$ સેમી, $PR = 7$ સેમી અને વર્તુળનું કેન્દ્ર O હોય, તો આકૃતિ 12.19 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



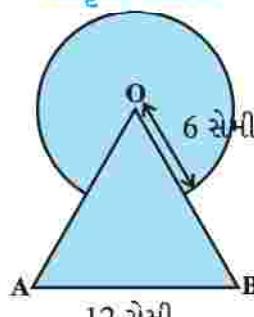
આકૃતિ 12.20

2. જો O કેન્દ્રવાળા બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 7 સેમી અને 14 સેમી તથા $\angle AOC = 40^\circ$ હોય, તો આકૃતિ 12.20 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.21

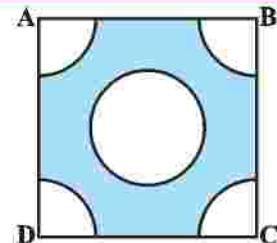
3. 14 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD માં જો અર્ધવર્તુળો APD અને BPC આવેલાં હોય, તો આકૃતિ 12.21 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.22

4. 12 સેમી બાજુવાળા સમભુજ ત્રિકોણ OAB ના શિરોનિંદુ O ને કેન્દ્ર તરીકે અને ત્રિજ્યા 6 સેમી લઈ, વર્તુળાકાર ચાપ ઢાર્યું છે. આકૃતિ 12.22 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. આકृતि 12.23 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 4 સેમી બાજુવાળા ચોરસના પ્રત્યેક ખૂણો 1 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો ચતુર્થીંશ ભાગ કપાયેલો છે તથા 2 સેમી વ્યાસવાળું એક વર્તુળ પણ કાપેલું છે. ચોરસના બાકીના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



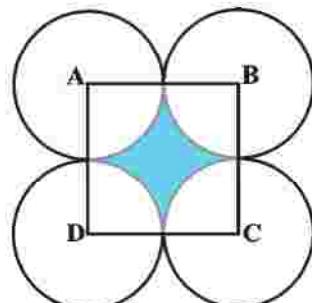
આકृતि 12.23

6. આકृતિ 12.24 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ટેબલના એક 32 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળકાર આવરણના વચ્ચેના ભાગમાં એક સમભૂજ ત્રિકોણ ABC છોડી બાકીના ભાગમાં ભાત બનાવી છે. આ ભાતનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકृતિ 12.24

7. આકृતિ 12.25 માં 14 સેમી બાજુવાળો ચોરસ ABCD છે. પ્રત્યેક વર્તુળ બાકીનાં ત્રણ વર્તુળોમાંથી બે વર્તુળને બહારથી સ્પર્શી તેમ A, B, C અને D કેન્દ્રવાળાં ચાર વર્તુળ દીર્ઘી છે. દર્શાવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



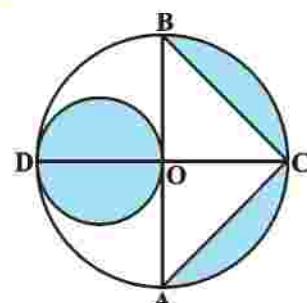
આકृતિ 12.25

8. આકृતિ 12.26 માં દોડમાર્ગનું નિરૂપણ કરેલું છે. તેના ડાબા અને જમણા છેડા અર્ધવર્તુળકાર છે. અંદરના બે સમાંતર રેખાખંડ વચ્ચેનું અંતર 60 મી છે અને તે પ્રત્યેકની લંਬાઈ 106 મી છે. જો માર્ગ 10 મી પહોળો હોય, તો (i) માર્ગની અંદરની ધારનું ચારેય તરફનું અંતર શોધો. (ii) માર્ગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકृતિ 12.26

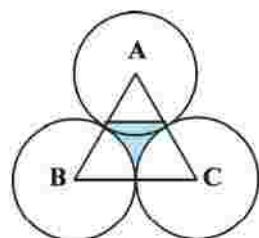
9. આકृતિ 12.27 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બે વ્યાસ AB અને CD પરસ્પર લંબ છે અને નાના વર્તુળનો વ્યાસ OD છે. જો $OA = 7$ સેમી હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકृતિ 12.27

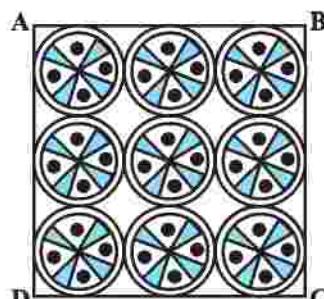
10. એક સમખૂજ ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ 17320.5 સેમી 2 છે. ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈથી અહીંથી ત્રિજ્યાવાળાં અને પ્રત્યેક શિરોબિંદુ કેન્દ્ર હોય તેવાં વર્તુળ દોર્યા છે. (જુઓ આકૃતિ 12.28.) દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{3} = 1.73205$ લો.)



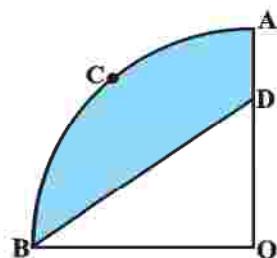
આકૃતિ 12.28

11. એક ચોરસ હાથરુમાલ પર 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળી નવ વર્તુળાકાર બાત બનાવી છે. (જુઓ આકૃતિ 12.29.) હાથરુમાલના બાકીના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



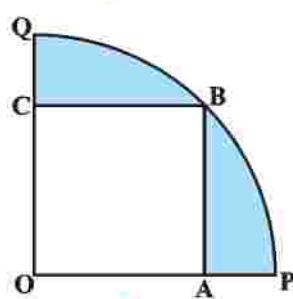
આકૃતિ 12.29

12. આકૃતિ 12.30 માં દર્શાવેલ, ચતુર્થાંશ $OACB$ નું કેન્દ્ર O છે અને ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે. જો $OD = 2$ સેમી હોય, તો (i) ચતુર્થાંશ $OACB$ નું ક્ષેત્રફળ શોધો. (ii) દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



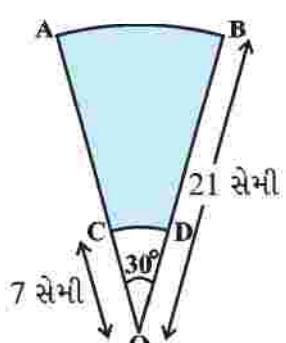
આકૃતિ 12.30

13. આકૃતિ 12.31 માં, એક વર્તુળના ચતુર્થાંશ $OPBQ$ ની અંતર્ગત ચોરસ $OABC$ છે. જો $OA = 20$ સેમી હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



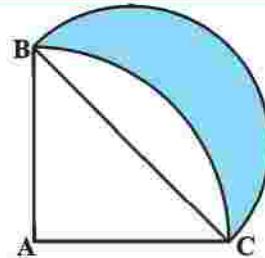
આકૃતિ 12.31

14. O કેન્દ્રવાળા, 21 સેમી અને 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે સમકેન્દ્રી વર્તુળનાં ચાપ અનુક્રમે AB અને CD છે. (જુઓ આકૃતિ 12.32.) જો $\angle AOB = 30^\circ$ હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

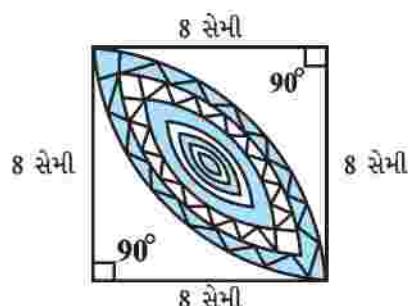


આકૃતિ 12.32

15. આકृતિ 12.33 માં, ABC એ 14 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો ચતુર્થાંશ છે. BC ને વ્યાસ તરીકે લઈ વર્તુળ દોરવામાં આવ્યું છે. તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



16. આકृતિ 12.34 માં, 8 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે વર્તુળના સામાન્ય ચતુર્થાંશની ભાતના પ્રદેશના ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરો.



આકृતિ 12.34

12.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. વર્તુળનો પરિધિ = $2\pi r$
2. વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = πr^2
3. r ત્રિજ્યાવાળા અને θ માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ છે.
4. r ત્રિજ્યાવાળા અને θ માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ છે.
5. વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ = અનુરૂપ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ - અનુરૂપ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ



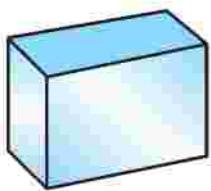


પૃષ્ઠકળ અને ઘનકળ

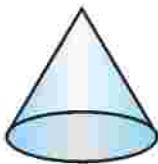
13

13.1 પ્રાસ્તાવિક

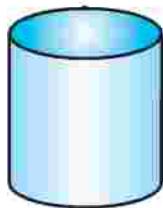
અગાઉ ધોરણ IX માં તમે કેટલાક નિયમિત આકારના ઘન પદાર્�ો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નણાકાર અને ગોલક વિશે પરિચિત થયાં છો. (જુઓ આકૃતિ 13.1.) તમે એ પણ જાણો છો કે, આપણો તેમનાં પૃષ્ઠકળ અને ઘનકળ કેવી રીતે શોધી શકીએ.



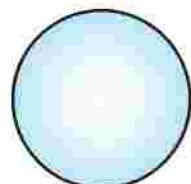
(i)



(ii)



(iii)

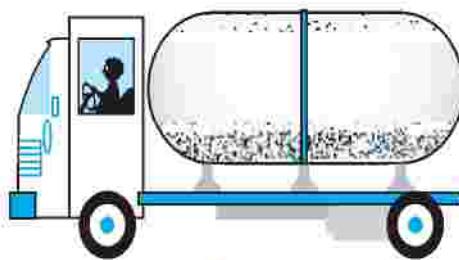


(iv)

આકૃતિ 13.1

આપણે હૈનિક જીવનમાં ઉપર દર્શાવેલ મૂળભૂત ઘન પદાર્થો પૈકી બે કે તેથી વધુ ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનેલા પદાર્થો જોઈએ છીએ.

તમે કોઈ ખટારાની પાછળ રાખેલું મોટું પાત્ર (container) અવશ્ય જોયું હશે. (જુઓ આકૃતિ 13.2), તેમાં એક જગ્યાએથી બીજી જગ્યાએ તેલ અથવા પાણી લઈ જવાય છે. શું ઉપરના ચાર મૂળભૂત ઘન આકારમાંથી કોઈ આકાર જોવા મળે છે? તમે કલ્યા શકો કે, તે નણાકાર અને બે અર્ધગોલકમાંથી બનેલો છે.



આકૃતિ 13.2

પુનઃ તમે આકૃતિ 13.3 માં બતાવ્યું છે તેવું કોઈ પાત્ર જોયું હશે. તમે તેનું નામ આપી શકશો ? તે એક કસનળી છે. સાચું છે ! તમે તેનો તમારી વિજ્ઞાનની પ્રયોગશાળામાં ઉપયોગ કર્યો હશે. આ કસનળી પણ એક નળાકાર અને અર્ધગોળાનું સંયોજન છે. તેવી જ રીતે મુસાફરી કરતી વખતે કેટલાંક મોટાં અને સુદર બિલ્ડિંગ અથવા સ્મારકો તમને ઉપર જણાવેલા જેવાં ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનેલાં જોવા મળે છે.



જો તમને આ પદાર્થોનું પૃષ્ઠકળ અથવા ઘનકળ અથવા તેની ક્ષમતા શોધવાની જરૂર પડે, તો તે કેવી રીતે શોધી શકશો ? આપણે આવા ઘનાકાર પદાર્થોનું અગાઉ શીખી ગયાં તેવા ઘનાકારોમાં વર્ગીકરણ કરી શકતા નથી.

આકૃતિ 13.3

આ પ્રકરણમાં તમે કેટલાક પદાર્થોનું પૃષ્ઠકળ અને ઘનકળ કેવી રીતે શોધી શકાય તે શીખશો.

13.2 સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું કુલ પૃષ્ઠકળ



V5U7W1

આવો આપણે આકૃતિ 13.2માં જોયેલા પાત્ર ઉપર વિચાર કરીએ. આ પ્રકારના ઘન પદાર્થોનું પૃષ્ઠકળ કેવી રીતે શોધાશું ? જ્યારે આપણી સમક્ષ કોઈ નવી સમસ્યા આવે છે, ત્યારે આપણે સૌખ્યમ તેને અગાઉ ઉકેલેલી નાની સમસ્યાઓમાં વિભાજિત કરીશું. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આ ઘન પદાર્થ નળાકારના બંને છેડા અર્ધગોલકથી બંધ કરીને બનાવવામાં આવ્યો છે. ટુકડાઓ એક સાથે ભેગા કરવાથી આ ઘન પદાર્થ કેવી રીતે બને છે તે આકૃતિ 13.4માં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 13.4

જો આપણે નવી બનેલી વસ્તુની સપાટી જોઈશું, તો આપણાને માત્ર બે અર્ધગોલકના વક્પૃષ્ઠ તથા નળાકારનું વક્પૃષ્ઠ દેખાશે.

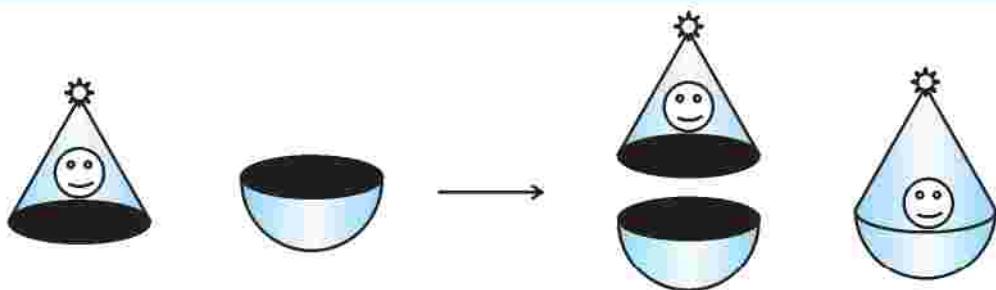
તેથી, નવા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠકળ એ ત્રણ સ્વતંત્ર વક્ત ક્ષેત્રફળોના સરવાળા બરાબર થશે. તેનાથી આપણાને નીચેનું સૂત્ર ગ્રાપ્ત થશે :

$$\text{નવા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠકળ (TSA) = એક અર્ધગોલકની વક્ત સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA) + નળાકારની વક્ત સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA) + બીજા અર્ધગોલકની વક્ત સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA)}$$

અહીં **TSA (Total surface area), CSA (Curved surface area)** નો અર્થ અનુક્રમે ‘કુલ પૃષ્ઠકળ’ અને ‘વક્ત સપાટીનું ક્ષેત્રફળ’ છે.

ચાલો, આપણે હવે બીજી પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ. ધારો કે, આપણે અર્ધગોલક અને શંકુ સાથે મૂકીને એક રમકડું બનાવીએ, તો તે કેવી રીતે થાય તેનાં સોપાન જોઈએ.

પહેલા આપણે શંકુ અને અર્ધગોલક લઈ તેમની સમતલીય સપાટી એક સાથે રાખીએ. અલબજ, આપણે રમકડાની સપાટી સરખી રહે તે માટે શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને અર્ધગોલકની ત્રિજ્યા સમાન લઈએ છીએ. તે બનાવવાના પગલાં આકૃતિ 13.5માં બતાવ્યા છે.



આકૃતિ 13.5

અંતમાં આપણને એક સુંદર અર્ધગોળાકાર આધારવાળું રમકડું મળશે. હવે, જો આપણે આ રમકડાની વક્ષસપાટીને રંગવા માંગતા હોઈએ, તો કેટલા જથ્થામાં રંગની જરૂર પડે તે માટે આપણી પાસે શું માહિતી હોવી જોઈએ? આપણને રમકડાના કુલ પૃષ્ઠકળની આવશ્યકતા પડશે. તે અર્ધગોલકની વક્ષસપાટીનું ક્ષેત્રકળ અને શંકુની વક્ષસપાટીનું ક્ષેત્રકળ બંનેનો સરવાળો કરવાથી મળશે.

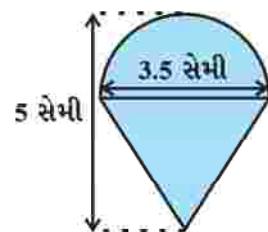
તેથી, આપણે કહીશું :

$$\text{રમકડાનું કુલ પૃષ્ઠકળ} = \text{અર્ધગોલકની વક્ષસપાટીનું ક્ષેત્રકળ} + \text{શંકુની વક્ષસપાટીનું ક્ષેત્રકળ}$$

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈશું.

ઉદાહરણ 1 : રદ્દીદેને તેના જન્મદિવસે બેટ સ્વરૂપે એક ભમરડો મળ્યો તે રંગેલો ન હતો. તે પોતાના કેયોન રંગોથી ભમરડાને રંગ કરવા માગતો હતો. આ ભમરડો એક શંકુ ઉપર અર્ધગોળા જેવા ભાગથી બનેલો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.6) ભમરડાની કુલ ઊંચાઈ 5 સેમી છે અને અર્ધગોળાનો વ્યાસ 3.5 સેમી છે તો

$$\text{ભમરડાને રંગ કરવાના સંપૂર્ણ ભાગનું કુલ પૃષ્ઠકળ શોધો. } (\pi = \frac{22}{7} \text{ લિ.)}$$



આકૃતિ 13.6

ઉકેલ : આપણે જેની ચર્ચા કરી છે તે ભમરડો આકૃતિ 13.6 માં દર્શાવ્યો છે. આપણે સરળતા ખાતર ગણતરી નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ.

$$\text{ભમરડાનું કુલ પૃષ્ઠકળ} = \text{અર્ધગોલકની વક્ષસપાટીનું ક્ષેત્રકળ} + \text{શંકુની વક્ષસપાટીનું ક્ષેત્રકળ}$$

$$\text{હવે, અર્ધગોલકની વક્ષસપાટીનું ક્ષેત્રકળ} = \frac{1}{2} (4\pi r^2) = 2\pi r^2$$

$$= (2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}) \text{ સેમી}^2$$

$$\text{વળી, શંકુની ઊંચાઈ} = \text{ભમરડાની ઊંચાઈ} - \text{અર્ધગોલકની ઊંચાઈ (ત્રિજ્યા)}$$

$$= (5 - \frac{3.5}{2}) \text{ સેમી} = 3.25 \text{ સેમી}$$

$$\text{તેથી, શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ (l) = } \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} \text{ સેમી} = 3.7 \text{ સેમી (આશરે)}$$

∴ શંકુની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\pi r l$

$$= \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7 \right) \text{ સેમી}^2$$

$$\therefore \text{ભમરડાનું પૃષ્ઠફળ} = \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2} \right) \text{ સેમી}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7 \right) \text{ સેમી}^2$$

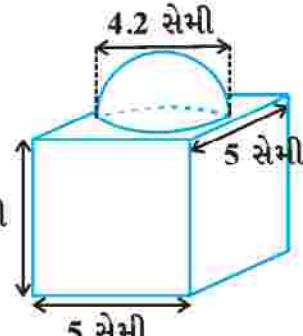
$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.5 + 3.7) \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ સેમી}^2$$

$$= 39.6 \text{ સેમી}^2 (\text{આશરે})$$

ચકાસો કે, 'ભમરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ' એ શંકુ અને અર્ધગોલકના કુલ પૃષ્ઠફળોના સરવાળા બરાબર નથી.

ઉદાહરણ 2 : બાજુની આકૃતિ 13.7 માં બતાવેલ એક શો-પીસ એ સમઘન અને અર્ધગોલકનો બનેલો છે. આ શો-પીસનો પાયો સમઘન છે, અને તેની પ્રત્યેક ધાર 5 સેમી છે અને 4.2 સેમી વ્યાસવાળો અર્ધગોલક તેની ઉપર બેસાડેલો છે. આ શો-પીસનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



ઉકેલ : સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $6 \times (\text{બાજુનું માપ})^2 = 6 \times 5 \times 5 \text{ સેમી}^2$
 $= 150 \text{ સેમી}^2$

આકૃતિ 13.7

અહીં, અર્ધગોલકના પાયાના ક્ષેત્રફળનો સમઘનના કુલ પૃષ્ઠફળમાં સમાવેશ થઈ જાય છે.

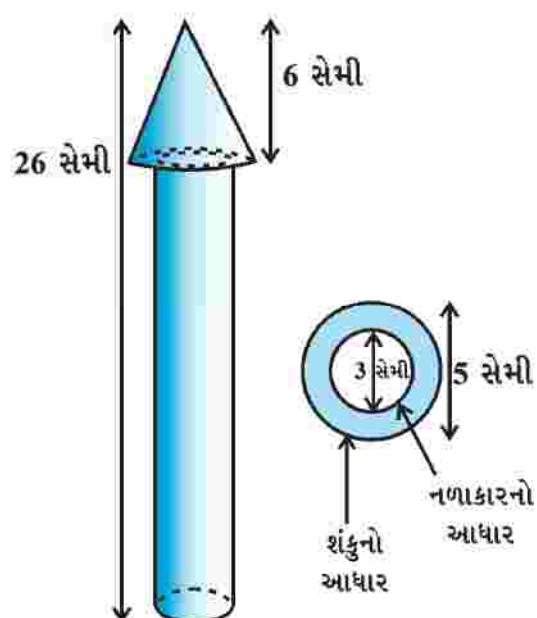
તેથી, શો-પીસનું પૃષ્ઠફળ = સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ - અર્ધગોલકના વર્તુળાકાર આધારનું ક્ષેત્રફળ

$$\begin{aligned} &+ \text{અર્ધગોલકની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ \\ &= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 \text{ સેમી}^2 \\ &= (150 + \pi r^2) \text{ સેમી}^2 \\ &= 150 \text{ સેમી}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2} \right) \text{ સેમી}^2 \\ &= (150 + 13.86) \text{ સેમી}^2 = 163.86 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

ગણિત

ઉદાહરણ 3 : બાજુમાં આકૃતિ 13.8 માં બતાવેલ એક લાકડાનું રોકેટ એક નળાકાર ઉપર શંકુ મૂકી બનાવેલું છે. રોકેટની કુલ ઊંચાઈ 26 સેમી છે, જ્યારે શંકુની ઊંચાઈ 6 સેમી છે. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 5 સેમી અને નળાકાર ભાગનો વ્યાસ 3 સેમી છે. જો શંકુ આકાર ભાગને નારંગી રંગ કરવો હોય અને નળાકાર ભાગને પીળો રંગ કરવો હોય, તો રંગ પ્રમાણે રોકેટના પ્રત્યેક ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : શંકુની ત્રિજ્યાને r વડે, શંકુની તિર્યક ઊંચાઈને l વડે, શંકુની ઊંચાઈને h વડે, નળાકારની ત્રિજ્યાને r' વડે, નળાકારની ઊંચાઈને h' વડે દર્શાવ્યાં છે. $r = 2.5$ સેમી, $h = 6$ સેમી, $r' = 1.5$ સેમી, $h' = 26 - 6 = 20$ સેમી તથા



આકૃતિ 13.8

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ સેમી} = 6.5 \text{ સેમી}$$

અહીં, શંકુનો પાયાનો ભાગ નળાકારની વર્તુળાકાર સપાટી ઉપર મુકાયેલો છે, પરંતુ શંકુના પાયાનો ભાગ નળાકારના વર્તુળાકાર ભાગ કરતાં વધારે છે. તેથી શંકુના આધારની વધારાની સપાટીને પણ રંગવાની છે.

તેથી નારંગી રંગના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = શંકુની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુના આધારનું ક્ષેત્રફળ

– નળાકારના આધારનું ક્ષેત્રફળ

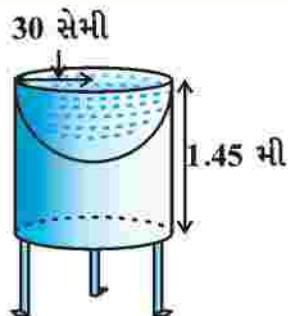
$$\begin{aligned} &= \pi r l + \pi r^2 - \pi(r')^2 \\ &= \pi [(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ સેમી}^2 \\ &= \pi [20.25] \text{ સેમી}^2 \\ &= 3.14 \times 20.25 \text{ સેમી}^2 \\ &= 63.585 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

હવે, પીળા રંગના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = નળાકારની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ + નળાકારના પાયાનું ક્ષેત્રફળ

$$\begin{aligned} &= 2\pi r' h' + \pi(r')^2 \\ &= \pi r' (2h' + r') \\ &= (3.14 \times 1.5) (2 \times 20 + 1.5) \text{ સેમી}^2 \\ &= 4.71 \times 41.5 \text{ સેમી}^2 \\ &= 195.465 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 4 : મયંકે તેના બગીચામાં પક્ષીઓને પાડી પીવા માટે નળાકારના એક છેડે અર્ધગોળાકાર હોય તેવું પક્ષીકુંડ બનાવ્યું છે. (જુઓ આકૃતિ 13.9.) જો નળાકારની ઊંચાઈ 1.45 મીટર અને તેની ત્રિજ્યા 30 સેમી હોય, તો પક્ષીઓ માટે પાડી પીવાના આ પાત્રનું કુલ પૃષ્ઠકળ શોધો.

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ લો.})$$



આકૃતિ 13.9

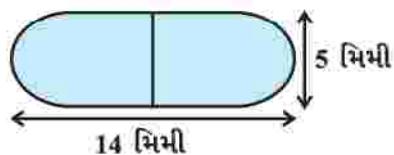
ઉદાહરણ 5 : ધારો કે નળાકારની ઊંચાઈ h છે અને નળાકાર અને અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા r સમાન છે.

$$\begin{aligned} \text{તેથી, પક્ષીઓને પાડી પીવાના પાત્રનું કુલ પૃષ્ઠકળ} &= \text{નળાકારની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રકળ} + \text{અર્ધગોળાની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રકળ} \\ &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r(h+r) \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 (145 + 30) \text{ સેમી}^2 \\ &= 33000 \text{ સેમી}^2 \\ &= 3.3 \text{ મીટર}^2 \end{aligned}$$

સ્વાધ્યાય 13.1

$$(જો \pi નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો \pi = \frac{22}{7} \text{ લો.})$$

- બે ઘન પૈકી ગ્રત્યેકનું ઘનકળ 64 સેમી³ હોય તેવા બે ઘનને જોડવાથી બનતા લંબઘનનું પૃષ્ઠકળ શોધો.
- એક પોલા અર્ધગોલક ઉપર એક પોલો નળાકાર બેસાડેલો હોય તેવું એક પાત્ર છે. અર્ધગોલકનો વ્યાસ 14 સેમી છે અને વાસણાની કુલ ઊંચાઈ 13 સેમી છે વાસણાની અંદરની સપાટીનું પૃષ્ઠકળ શોધો.
- અર્ધગોલકની ઉપર શંકુ લગાવેલો હોય તેવું એક રમકડું છે. તે બંનેની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે. રમકડાની કુલ ઊંચાઈ 15.5 સેમી હોય, તો રમકડાનું કુલ પૃષ્ઠકળ શોધો.
- 7 સેમી બાજુના માપવાળા સમધનની ઉપર અર્ધગોલક મૂકેલો છે. તો અર્ધગોલકનો મહત્તમ વ્યાસ શું હોઈ શકે ? આ રીતે બનેલા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠકળ શોધો.
- એક સમધન લાકડાના ટુકડાના એક પૃષ્ઠમાંથી એક અર્ધગોલક કાપવામાં આવે છે. અર્ધગોલકનો વ્યાસ 1 એ સમધનની બાજુના માપ બરાબર છે, બાકી પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠકળ શોધો.
- દવાની એક કેપ્સ્યુલનો આકાર નળાકારની બંને બાજુએ અર્ધગોલક લગાડેલો હોય તે રીતનો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.10.) કેપ્સ્યુલની લંબાઈ 14 મિલી છે અને તેનો વ્યાસ 5 મિલી છે. તો કેપ્સ્યુલનું પૃષ્ઠકળ શોધો.
- એક તંબુનો આકાર નળાકાર ઉપર શંકુ મૂકવામાં આવેલ હોય તેવો છે. જો નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ અને વ્યાસ અનુક્રમે 2.1 મીટર અને 4 મીટર હોય તથા ઉપરના ભાગની તર્ફક ઊંચાઈ 2.8 મીટર હોય, તો આ તંબુ

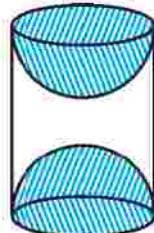


આકૃતિ 13.10

ગણિત

બનાવવા વપરાતા કેનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો અને જો કેનવાસનો ભાવ ₹ 500 પ્રતિ મીટર² હોય, તો તેમાં વપરાતા કેનવાસની ડિમ્યુન્ડ પણ શોધો. (તંબુના તળિયાને કેનવાસથી ઢાંકવામાં આવતો નથી તે ધ્યાનમાં લેવું.)

8. નળાકાર પદાર્થની ઉંચાઈ 2.4 સેમી અને વ્યાસ 1.4 સેમી છે. તેમાંથી તેટલી જ ઉંચાઈ અને વ્યાસવાળો શંકુ કાપો લેવામાં આવે તો વધેલા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ નજીકના સેમી² માં શોધો.
9. બાજુમાં આકૃતિ 13.11 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લાકડાના નળાકારમાંથી બંને બાજુએથી અર્ધગોલક કાઢી એક લાકડાનો શો-પીસ બનાવ્યો છે. જો નળાકારની ઉંચાઈ 10 સેમી હોય અને પાયાની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી હોય તો શો-પીસનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.



આકૃતિ 13.11

13.3 સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ

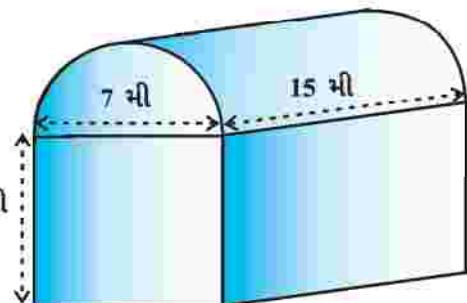
પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપણે બે જાહીતા ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનતા ઘન પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ કેવી રીતે મેળવવું તે જોઈ ગયા. અહીં આપણે આવા ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ શોધતાં શીખીશું. આપણે જોઈશું કે પૃષ્ઠફળની ગણતરીમાં આપણે બે ઘટક પદાર્થોના પૃષ્ઠફળને ઉમેરી શકતા નથી, કારણ કે તેમનો કેટલોક ભાગ બે ઘન પદાર્થોને જોડવાથી દૂર થાય છે. પરંતુ ઘનફળ શોધવામાં આવું નહિ થાય. બે મૂળભૂત ઘન પદાર્થોને જોડવાથી મળતા ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ એ આપેલા બંને ઘન પદાર્થોના ઘનફળના સરવાળા બરાબર થશે. હવે આપણે નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આ સત્ય જોઈશું.



B7X3M8

ઉદાહરણ 5 : શાંતા શેડમાં એક ઉદ્યોગ ચલાવે છે. આ શેડનો આકાર લંબઘન ઉપર અર્ધનળાકારથી બંધ છે. (જુઓ આકૃતિ 13.12.) તે શેડના પાયાનું માપ 7 મી × 15 મી અને લંબઘનકારની ઉંચાઈ 8 મીટર હોય, તો આ શેડમાં સમાતી હવાનું ઘનફળ શોધો. ઉપરાંત શેડમાં મશીનરીના 8 મી ભાગનું કુલ ઘનફળ 300 મી³ અને 20 કારીગરો પૈકી મ્રયેક કારીગરે રોકેલી જગ્યાનું ઘનફળ 0.08 મીટર³ છે. તો શેડમાં કેટલી હવા હશે?

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ લો.})$$



આકૃતિ 13.12

ઉકેલ : શેડની હવાનું ઘનફળ (જગ્યારે શેડમાં કારીગરો અને મશીનરી ન હોય) એ લંબઘન અને અર્ધનળાકારની અંદર રહેલી હવાના ઘનફળના સરવાળા જેટલું છે.

હવે, લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઉંચાઈ અનુક્રમે 15 મીટર, 7 મીટર અને 8 મીટર છે.

તથા અર્ધનળાકારનો વ્યાસ 7 મીટર અને તેની ઉંચાઈ 15 મીટર છે.

$$\text{તેથી માંગેલ ઘનફળ} = \text{લંબઘનનું ઘનફળ} + \frac{1}{2} \text{ નળાકારનું ઘનફળ}$$

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15 \right] \text{મીટર}^3$$

$$= 1128.75 \text{ મીટર}^3$$

હવે, મશીનરીએ રોકેલી જગ્યાનું ઘનકળ = 300 મીટર³

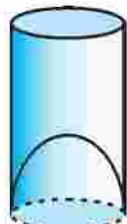
અને કારીગરોએ રોકેલી જગ્યાનું કુલ ઘનકળ = 20×0.08 મીટર³ = 1.6 મીટર³

તેથી, મશીનરી અને કારીગરોની સાથે શેડમાં રહેલી હવાનું ઘનકળ

$$= [1128.75 - (300.00 + 1.60)] \text{ મીટર}^3$$

$$= 827.15 \text{ મીટર}^3$$

ઉદાહરણ 6 : એક જ્યૂસ વેચવાવાળો તેના ગ્રાહકોને આકૃતિ 13.13 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના ખાલામાં જ્યૂસ આપતો હતો. નણાકાર ખાલાનો અંદરનો વાસ 5 સેમી છે, પરંતુ ખાલાના પાયામાં અર્ધગોલક ભાગ ઉપસી આવેલો હતો. જેથી, ખાલાની ક્ષમતા ઓછી થતી હતી. જો ખાલાની ઊંચાઈ 10 સેમી હોય, તો તેની આભાસી ક્ષમતા તથા તેની વાસ્તવિક ક્ષમતા શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 13.13

ઉકેલ : ખાલાની અંદરનો વાસ = 5 સેમી અને ઊંચાઈ = 10 સેમી છે,

જેથી ખાલાની આભાસી ક્ષમતા = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{ સેમી}^3$$

$$= 196.25 \text{ સેમી}^3$$

પણ ખાલાની વાસ્તવિક ક્ષમતા એ ખાલાના ઉપસી આવેલા અર્ધગોલકના કદ જેટલી ઓછી થાય છે.

એટલે કે, $\frac{2}{3} \pi r^3$ જેટલી ઓછી છે તેનું મૂલ્ય = $\frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 \text{ સેમી}^3$

$$= 32.71 \text{ સેમી}^3$$

તેથી, ખાલાની વાસ્તવિક ક્ષમતા = ખાલાની આભાસી ક્ષમતા - ખાલામાં સમાવિષ્ટ અર્ધગોલકનું ઘનકળ

$$= (196.25 - 32.71) \text{ સેમી}^3$$

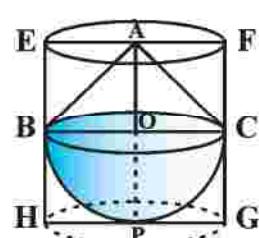
$$= 163.54 \text{ સેમી}^3$$

ઉદાહરણ 7 : એક નક્કર રમકડું એ અર્ધગોલકની ઉપર શંકુ લગાવ્યો હોય તેવા સ્વરૂપે છે. શંકુની ઊંચાઈ 2 સેમી અને પાયાનો વાસ 4 સેમી છે, તો રમકડાનું ઘનકળ શોધો. જો એક લંબવૃત્તિય નણાકાર રમકડાને પરિગત હોય, તો નણાકારના અને રમકડાના ઘનકળનો તકાવત શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : ધારો કે, BPC અર્ધગોલક અને ABC એ અર્ધગોલકના પાયા ઉપર રાખેલો શંકુ છે. (જુઓ આકૃતિ 13.14) અર્ધગોલકની ત્રિજ્યા OB (= શંકુની ત્રિજ્યા) છે.

તે $\frac{1}{2} \times 4$ સેમી = 2 સેમી છે.

તેથી, રમકડાનું ઘનકળ = $\frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2 h$



આકૃતિ 13.14

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2 \right] \text{ સેમી}^3 = 25.12 \text{ સેમી}^3$$

હવે, ધારો કે, લંબવૃત્તીય નળાકાર EFGH એ રમકડાને પરિગત છે.

તે લંબવૃત્તીય નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા = HP = BO = 2 સેમી અને

તેની ઊંચાઈ EH = AO + OP = (2 + 2) સેમી = 4 સેમી

તેથી, માંગેલું ઘનકળ = લંબવૃત્તીય નળાકારનું ઘનકળ - રમકડાનું ઘનકળ

$$= [3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12] \text{ સેમી}^3$$

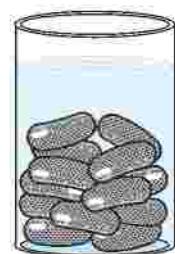
$$= 25.12 \text{ સેમી}^3$$

તેથી, માંગેલા બે ઘનકળોનો તફાવત = 25.12 સેમી³

સ્વાધ્યાય 13.2

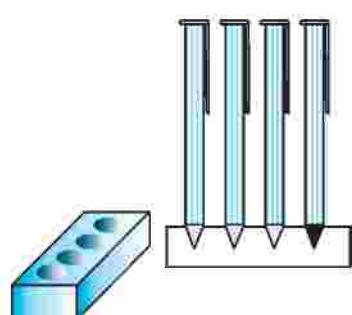
(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

- એક ઘન પદાર્થ એ 1 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા અર્ધગોલક ઉપર તેટલી જ ત્રિજ્યાવાળો શંકુ ગોઠવીને બનાવાયો છે. શંકુની ઊંચાઈ એ તેની ત્રિજ્યા જેટલી હોય, તો આ ઘન પદાર્થનું ઘનકળ પાણી ના ગુણિતમાં શોધો.
- એન્જિનિયરિંગના વિદ્યાર્થી રશેલને નળાકારના બંને છેડે પાતળી એલ્યુમિનિયમની શીટમાંથી બનેલો શંકુ બેસાડી એક નમૂનો તૈયાર કરવાનું કહેવામાં આવ્યું. નમૂનાનો વ્યાસ 3 સેમી અને લંબાઈ 12 સેમી છે. જો શંકુની ઊંચાઈ 2 સેમી હોય, તો રશેલે બનાવેલ નમૂનામાં કેટલી હવા સમાશે તે શોધો. (ધારી લો કે નમૂનાના બહારનાં અને અંદરનાં માપો લગભગ સમાન છે.)
- ગુલાબજાંબુમાં તેના કટના 30 % જેટલી ખાંડની ચાસણી છે. દરેક ગુલાબજાંબુનો આકાર નળાકારના બંને છેડે અર્ધગોલક લગાવ્યા હોય તેવો છે. તેની કુલ લંબાઈ 5 સેમી અને વ્યાસ 2.8 સેમી છે. તો આવાં 45 ગુલાબજાંબુમાં આશરે કેટલી ખાંડની ચાસણી હશે તે શોધો. (જુઓ આકૃતિ 13.15.)



આકૃતિ 13.15

- એક લાકડાનું લંબઘન પેન-સ્ટેન્ડ ચાર શંકુ આકારના છિદ્રવાળું બનાવેલું છે. લંબઘનનાં માપ $15 \text{ સેમી} \times 10 \text{ સેમી} \times 3.5 \text{ સેમી}$ છે. છિદ્રવાળા દરેક ભાગની ત્રિજ્યા 0.5 સેમી અને ઊંચાઈ 1.4 સેમી છે, તો લાકડાના આ સ્ટેન્ડનું ઘનકળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 13.16.)
- એક વાસણાનું સ્વરૂપ ઊંધા શંકુ જેવું છે. તેની ઊંચાઈ 8 સેમી અને ઉપરના ખૂલ્લા ભાગની ત્રિજ્યા 5 સેમી છે. તે ઉપરની ધાર સુધી પાણીઓ ભરેલું છે. જ્યારે વાસણામાં 0.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ધાતુની ગોળીઓ નાખવામાં આવે છે, ત્યારે એક ચતુર્ભાંશ જેટલું પાણી બહાર નીકળે છે તો વાસણામાં નાખેલી ધાતુની ગોળીઓની સંખ્યા શોધો.



આકૃતિ 13.16

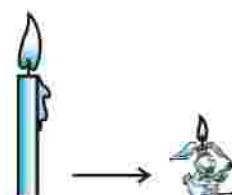
6. એક લોખડના નળાકાર સ્વરૂપના નક્કર થાંબલાની ઊંચાઈ 220 સેમી છે અને પાયાનો વ્યાસ 24 સેમી છે. તેની ઉપર 60 સેમી ઊંચાઈ અને 8 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બીજા નળાકારને મૂકવામાં આવે છે, તો થાંબલાનું દળ શોધો. 1 સેમી³ લોખડનું દળ આશરે 8 ગ્રામ છે. ($\pi = 3.14$ લો.)
7. 60 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોલક પર સ્થિત લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 120 સેમી અને ત્રિજ્યા 60 સેમી છે. તેને પાણીથી સંપૂર્ણ ભરેલા એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં તેના તળિયાને સ્પર્શ તે રીતે ઉલ્લો મૂક્યો છે. જો નળાકારની ત્રિજ્યા 60 સેમી અને ઊંચાઈ 180 સેમી હોય, તો નળાકારમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનકળ શોધો.
8. એક ગોળાકાર કાચના વાસણની ઉપરનો ભાગ નળાકાર છે. તે નળાકારની ઊંચાઈ 8 સેમી છે અને વ્યાસ 2 સેમી છે. ગોળાકાર ભાગનો વ્યાસ 8.5 સેમી છે. એક બાળક માહિતી પ્રાપ્ત કરે છે કે તેમાં ભરેલા પાણીનું ઘનકળ 345 સેમી³ છે. બાળકનો જવાબ સાચો છે કે નહિ તે ચકાસો. ઉપરનાં માપો તેના અંદરના ભાગના છે. $\pi = 3.14$ લો.

13.4 એક ઘનાકારનું બીજા ઘનાકારમાં રૂપાંતર



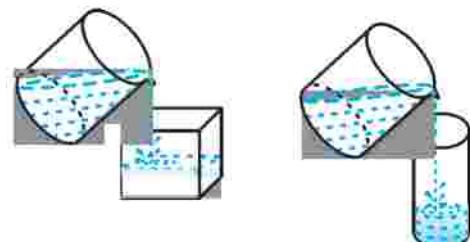
B6K2P6

નિશ્ચિત રીતે તમે મીણબત્તી જોઈ હશે.
સામાન્ય રીતે તે નળાકાર સ્વરૂપે હોય છે.
તમે કેટલીક મીણબત્તી પ્રાણીઓના આકારની
પણ જોઈ હશે. (જુઓ આકૃતિ 13.17.)



આકૃતિ 13.17

એ કેવી રીતે બનાવી હશે ? જો તમે મીણબત્તી બીજા વિશિષ્ટ આકારમાં બનાવવા માંગતા હો તો તમારે ધ્યાનના વાસણમાં તે સંપૂર્ણપણે પીગળી ન જાય ત્યાં સુધી મીણ ગરમ કરવું પડશે. પછી મીણને તમે જે આકારમાં ઢાળવા માગતા હો તે આકારના વાસણમાં રેડવું પડશે. આથી તમને જોઈતા આકારની મીણબત્તી મળશે. ઉદાહરણ તરીકે, એક નળાકાર આકારની મીણબત્તી લો, તેને પૂર્ણ રીતે પીગળી તથા પીગળેલું સંપૂર્ણ મીણ સસલા આકારના પાત્રમાં નાખો. હંડું કરવાથી સસલા આકારની મીણબત્તી તૈયાર થઈ જશે. નવી મીણબત્તીનું ઘનકળ પહેલાની મીણબત્તીના ઘનકળનું જેટલું જ થશે. કોઈ પદાર્થને એક આકારમાંથી બીજા આકારમાં પરિવર્તિત કરતાં હોઈએ અથવા જ્યારે કોઈ એક આકારના પાત્રમાંથી પ્રવાહીને બીજા આકારના પાત્રમાં ભરતાં હોઈએ છીએ, ત્યારે આ વાત યાદ રાખવી જોઈએ. તે તમે આકૃતિ 13.18 માં આ વસ્તુ જોઈ શકો છો.



આકૃતિ 13.18

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા સમજવા માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 8 : નમૂના બનાવવાની માટીમાંથી 24 સેમી ઊંચાઈ અને 6 સેમી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો એક શંકુ બનાવેલો છે. એક બાળકે તેને ગોળાકાર સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી નાખ્યો છે, તો ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : શંકુનું ઘનકળ = $\frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ સેમી³

જો ગોળાની ત્રિજ્યા r હોય, તો તેનું ઘનકળ $\frac{4}{3}\pi r^3$ છે.

શંકુની અને ગોળાની માટીનું ઘનકળ સમાન છે.

$$\text{એટલે કે } \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$\text{અર્થાત્}, \quad r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$$

$$\text{તેથી, } r = 3 \times 2 = 6$$

એટલે કે, ગોળાની ત્રિજ્યા 6 સેમી છે.

ઉદાહરણ 9 : સેલ્વીના ઘરની છત ઉપર નળાકાર આકારની એક ટાંકી છે. આમાં બોંયતળિયાની લંબઘન ટાંકીમાંથી પંપ દ્વારા પાણી ભરવામાં આવે છે. આ ભૂગર્ભની ટાંકી ઘનાકાર છે. ટાંકીનાં માપ 1.57 મીટર \times 1.44 મીટર \times 95 સેમી છે. છત ઉપરની ટાંકીની ત્રિજ્યા 60 સેમી છે અને ઊંચાઈ 95 સેમી છે. જો બોંયતળિયાની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલી હોય, તો તેમાંથી છત ઉપરની ટાંકીને પૂરેપૂરી ભરી લીધા પછી બોંયતળિયાની ટાંકીમાં પાણીની ઊંચાઈ કેટલી બાકી રહેશે? છતની ટાંકીની ક્ષમતાની સાથે બોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતાની સરખામણી કરો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : છતની ટાંકીનું ઘનફળ = ભૂગર્ભની ટાંકીમાંથી નીકળેલા પાણીનું ઘનફળ

$$\text{હવે, છતની ટાંકી (નળાકાર)નું ઘનફળ} = \pi r^2 h$$

$$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \text{ મીટર}^3$$

$$\text{પાણીથી પૂર્ણ ભરેલી બોંયતળિયાની ટાંકીનું ઘનફળ} = l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95 \text{ મીટર}^3$$

છતની ટાંકી પાણીથી પૂરી ભરાયા બાદ બોંયતળિયાની ટાંકીમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ

$$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)] \text{ મીટર}^3 = (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2) \text{ મીટર}^3$$

$$\text{એટલે કે, ભૂગર્ભની ટાંકીમાં બાકી રહેલા પાણીની ઊંચાઈ} = \frac{\text{બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ}}{l \times b}$$

$$= \frac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57 \times 1.44} \text{ મીટર}$$

$$= 0.475 \text{ મીટર} = 47.5 \text{ સેમી}$$

$$\frac{\text{છતની ટાંકીની ક્ષમતા}}{\text{બોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતા}} = \frac{3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95}{1.57 \times 1.44 \times 0.95} = \frac{1}{2}$$

તેથી, છતની ટાંકીની ક્ષમતા બોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતા કરતાં અડધી છે.

ઉદાહરણ 10 : 1 સેમી વ્યાસ અને 8 સેમી લંબાઈવાળો એક તાંબાનો સળિયો છે. તેમાંથી 18 મીટર લંબાઈનો એકસરખી જાડાઈવાળો તાર બનાવવો છે, તો તારની જાડાઈ શોધો.

$$\text{ઉકેલ : સળિયાનું ઘનફળ} = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8 \text{ સેમી}^3$$

$$= 2\pi \text{ સેમી}^3$$

$$\text{સમાન ઘનફળવાળા નવા તારની લંબાઈ} = 18 \text{ મીટર} = 1800 \text{ સેમી}$$

જો તારના આડહેદની ત્રિજ્યા r સેમી હોય, તો તારનું ઘનક્ષળ = $\pi \times r^2 \times 1800$ સેમી³

તેથી, $\pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

$$r^2 = \frac{1}{900}$$

$$r = \frac{1}{30}$$

તેથી, આડહેદનો વ્યાસ એટલે કે તારની જાડાઈ $\frac{1}{15}$ સેમી છે. એટલે કે, 0.67 મિમી (લગભગ)

ઉદાહરણ 11 : પાણીથી પૂર્ણ ભરેલી એક અર્ધગોળાકાર ટાંકી છે. તેને પાઈપ દ્વારા $3\frac{4}{7}$ લિટર/સેકન્ડના દરથી ખાલી કરવામાં આવે છે. જો ટાંકીનો વ્યાસ 3 મીટર હોય, તો તેને અધી ખાલી કરવા માટે કેટલો સમય જોઈએ ?

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ લો.})$$

ઉકેલ : અર્ધગોળાકાર ટાંકીની ત્રિજ્યા = $\frac{3}{2}$ મીટર

$$\begin{aligned} \text{ટાંકીનું ઘનક્ષળ} &= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ મીટર}^3 \\ &= \frac{99}{14} \text{ મીટર}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{તેથી, ખાલી કરેલા પાણીનું ઘનક્ષળ} &= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14} \text{ મીટર}^3 = \frac{99}{28} \times 1000 \text{ લિટર} \\ &= \frac{99000}{28} \text{ લિટર} \end{aligned}$$

$\frac{25}{7}$ લિટર પાણી ખાલી કરવા લાગતો સમય 1 સેકન્ડ છે.

તો, $\frac{99000}{28}$ લિટર પાણી ખાલી કરવા માટે $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ સેકન્ડની જરૂર પડે અથવા 16.5 મિનિટમાં પાણી ખાલી થાય.

સ્વાચ્છાય 13.3

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. 4.2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના ગોલકને ઓગાળીને 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા નણાકાર સ્વરૂપમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. નણાકારની ઊંચાઈ શોધો.
2. 6 સેમી, 8 સેમી અને 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના ગોળાઓને ઓગાળીને એક મોટો નક્કર ગોળો બનાવવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો.

ગણિત

3. એક કૂવો 7 મીટર વ્યાસવાળા વર્તુળ પર 20 મીટર સુધી ખોદવામાં આવે છે, અને તે ખોદવાથી નીકળેલી માટીને એક સરખી રીતે પાથરી 22 મીટર \times 14 મીટરની એક વ્યાસપીઠ બનાવવામાં આવે છે, તો વ્યાસપીઠની ઊંચાઈ શોધો.
4. 3 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળ પર એક કૂવો 14 મીટર સુધી ખોદવામાં આવે છે. તેમાંથી નીકળેલી માટીને કૂવાની આસપાસ 4 મીટર પહોળા વર્તુળાકાર વલયમાં સમાન રીતે પાથરીને ઓટલો બનાવ્યો છે. તો ઓટલાની ઊંચાઈ શોધો.
5. 12 સેમી વ્યાસ અને 15 સેમી ઊંચાઈવાળા એક પાત્રનો આકાર લંબવૃત્તીય નળાકાર છે. તે આઈસકીમથી સંપૂર્ણ ભરેલો છે. તેમાંથી 12 સેમી ઊંચાઈ અને 6 સેમી વ્યાસવાળા શંકુ આકારના કોન પર અર્ધગોળાકાર સ્વરૂપમાં આઈસકીમ ભરવામાં આવે છે. તો આ આઈસકીમ દ્વારા કેટલા કોન ભરી શકાય તે શોધો.
6. $5.5 \text{ સેમી} \times 10 \text{ સેમી} \times 3.5 \text{ સેમી}$ ના માપનો લંબધન બનાવવા 1.75 સેમી વ્યાસ અને 2 મિમી ઊંચાઈવાળા ચાંદીના કેટલા સિક્કા ઓગાળવા પડે ?
7. 32 સેમી ઊંચાઈ અને પાયાની ત્રિજ્યા 18 સેમી હોય તેવી એક નળાકાર ડોલ રેતીથી ભરેલી છે, આ ડોલને જમીન પર ખાલી કરી શંકુ આકારનો ઢગલો બનાવ્યો છે. જો શંકુ આકારના ઢગલાની ઊંચાઈ 24 સેમી હોય, તો ઢગલાની ત્રિજ્યા અને તિર્યક ઊંચાઈ શોધો.
8. 6 મીટર પહોળી અને 1.5 મીટર ઊંડી એક પાણીની નહેરમાં પાણી 10 કિલી/કલાકની ઝડપે વહે છે. 30 મિનિટમાં આ નહેરમાંથી કેટલા ક્ષેત્રફળની સિંચાઈ કરી શકાશે. સિંચાઈ માટે 8 સેમી પાણીની ઊંચાઈ આવશ્યક છે.
9. એક ખેડૂત પોતાના ખેતરમાં 10 મીટર વ્યાસવાળી અને 2 મીટર ઊંડી એક નળાકાર ટાંકીને અંદરથી 20 સેમી વ્યાસવાળી એક પાઈપ દ્વારા એક નહેર સાથે જોડે છે. જો પાઈપમાં પાણીનો પ્રવાહ 3 કિલી/કલાકની ઝડપે વહેતો હોય છે, તો કેટલા સમયમાં ટાંકી પાણીથી પૂર્ણ રીતે ભરાઈ જશે ?

13.5 શંકુનો આડહેદ



વિભાગ 13.2 માં આપણે બે જાહીતા ઘન પદાર્થોને એક સાથે જોડતાં મળતા ઘન પદાર્થો જોયા છે. અહીં આપણે કાંઈક વિશેષ કરીશું. આપણે એક ઊંભો શંકુ લઈશું અને તેનો થોડોક ભાગ કાઢી નાખીશું. આ કાર્ય આપણે ઘણી બધી રીતે કરી શકીએ છીએ. પરંતુ અહીં આપણે તેમાંનો એક વિશિષ્ટ પ્રકાર લઈશું તેમાં પાયાને સમાંતર સમતલ વહે નાનો શંકુ કાપી નાખવાનો છે. તમે સામાન્ય રીતે પાણી પીવાના ઘાલા વગેરે જોયા છે. તે આવા આકારના હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.19.)

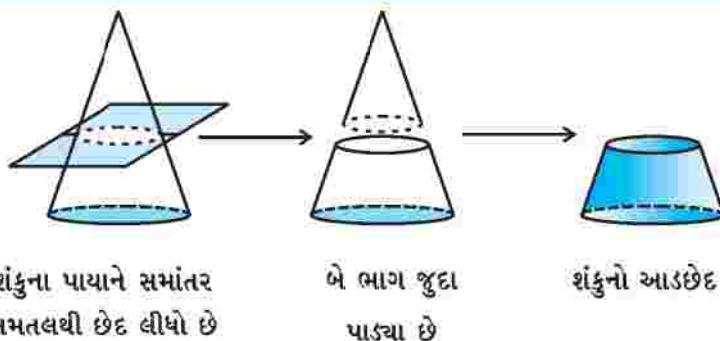
પ્રવૃત્તિ 1 : થોડી ભીની મસણેલી માટી લો અથવા બીજો કોઈ પદાર્થ (ખાસ્ટિક જેવો વગેરે) લો અને શંકુ આકાર બનાવો. તેને પાયાને સમાંતર એક છરી વહે કાપો. ઉપરનો નાનો શંકુ દૂર કરો. કયો ભાગ બાકી વધ્યો? બાકી વધેલા ભાગને શંકુનો આડહેદ કહે છે. તમારી પાસે શંકુનો આડહેદ કહેવાતો ઘન પદાર્થ વધશે. તમે જોઈ શકશો કે, તેને બિન્ન ત્રિજ્યાવાળા બે વર્તુળાકાર છેડા છે.

જો શંકુ આપેલો હોય અને તેને પાયાને સમાંતર સમતલ વહે કાપીએ તથા સમતલની એક બાજુ બનતા શંકુને દૂર કરીએ તો સમતલની બીજી બાજુએ શંકુનો આડહેદ* (Frustum) કહેવાતો ભાગ બયે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.20.)



આકૃતિ 13.19

* 'Frustum' એક લેટિન શબ્દ છે, તેના અર્થ 'કાપેલા ટુકડા' અને તેનું બહુવિનાન 'Frusta' છે.



આપણે શંકુના આડછેદની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને ઘનકળ કેવી રીતે શોધી શકીએ તે માટે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 12 : શંકુના આડછેદના બે છેડાની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 28 સેમી અને 7 સેમી છે અને તેની ઊંચાઈ 45 સેમી છે. (જુઓ આદૃતિ 13.21.) તેનું ઘનકળ, વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ લા.})$$

ઉકેલ : શંકુનો આડછેદ એ ઉલ્લબા બે શંકુઓ OAB અને OCD નો તફાવત છે. (જુઓ આદૃતિ 13.21.)

ધારો કે શંકુ OAB ની ઊંચાઈ (સેમીમાં) h_1 અને તિર્યક ઊંચાઈ l_1 છે. તેથી $OP = h_1$ અને $OA = OB = l_1$. ધારો કે શંકુ OCD ની ઊંચાઈ h_2 અને તિર્યક ઊંચાઈ l_2 છે.

અહીં, આપણે $r_1 = 28$ સેમી, $r_2 = 7$ સેમી અને આડછેદની ઊંચાઈ $h = 45$ સેમી છે.

$$\text{તેથી } h_1 = 45 + h_2 \quad (1)$$

સૌથી પહેલાં શંકુઓ OAB અને OCD ની ઊંચાઈઓ અનુક્રમે h_1 અને h_2 નિશ્ચિત કરવી આવશ્યક છે.

બંને ત્રિકોણો OPB અને OQD સમરૂપ છે.

(શા માટે ?)

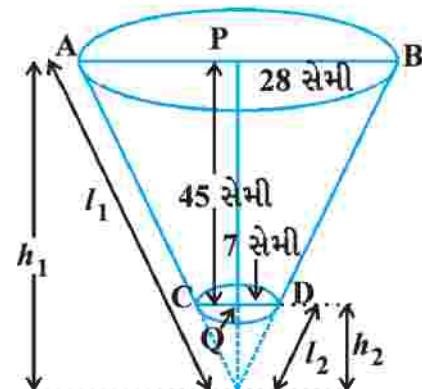
$$\text{તેથી, } \frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1} \quad (2)$$

(1) અને (2) ઉપરથી, આપણાને $h_2 = 15$ અને $h_1 = 60$ મળશે.

હવે, શંકુના આડછેદનું ઘનકળ = શંકુ OABનું ઘનકળ - શંકુ OCD નું ઘનકળ

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot (28)^2 \cdot (60) - \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot (7)^2 \cdot (15) \right] \text{ સેમી}^3 \\ &= 48510 \text{ સેમી}^3 \end{aligned}$$

શંકુઓ OCD અને OAB ની તિર્યક ઊંચાઈઓ અનુક્રમે l_2 અને l_1 છે.



આદૃતિ 13.21

$$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55 \text{ સેમી (લગભગ)}$$

$$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20 \text{ સેમી}$$

$$\text{શંકુના આડછેદની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$$

$$= \frac{22}{7} (28) (66.20) - \frac{22}{7} (7) (16.55)$$

$$= 5461.5 \text{ સેમી}^2$$

$$\text{શંકુના આડછેદનું કુલ ક્ષેત્રફળ} = \text{વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ} + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= 5461.5 \text{ સેમી}^2 + \frac{22}{7} (28)^2 \text{ સેમી}^2 + \frac{22}{7} (7)^2 \text{ સેમી}^2$$

$$= 5461.5 \text{ સેમી}^2 + 2464 \text{ સેમી}^2 + 154 \text{ સેમી}^2$$

$$= 8079.5 \text{ સેમી}^2$$

વાપક રીતે, ધારો કે શંકુના આડછેદની ઊંચાઈ h , તિર્યક ઊંચાઈ l , છેડાની ત્રિજ્યાઓ r_1 અને r_2 હોય. ($r_1 > r_2$) તો આપણે શંકુના આડછેદનું ઘનફળ, વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળ નીચે આપેલ સૂત્રો દ્વારા મેળવીશું.

$$(i) \text{ શંકુના આડછેદનું ઘનફળ} = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$(ii) \text{ શંકુના આડછેદની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = \pi (r_1 + r_2) l$$

$$\text{જ્યાં } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$(iii) \text{ શંકુના આડછેદની કુલસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = \pi l (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\text{જ્યાં } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

આ સૂત્રો ત્રિકોણની સમરૂપતાના પ્રાલ પરથી મેળવી શકાય પરંતુ આપણે તેને અહીં તારવીશું નહિ.

ચાલો, આપણે ઉદાહરણ 12 ને સૂત્રોના ઉપયોગથી ગણીશું.

$$(i) \text{ શંકુના આડછેદનું ઘનફળ} = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 45 [(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)] \text{ સેમી}^3$$

$$= 48510 \text{ સેમી}^3$$

$$(ii) \text{ આપણી પાસે } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$= \sqrt{(45)^2 + (28-7)^2} \text{ સેમી}$$

$$= 3 \sqrt{(15)^2 + (7)^2} \text{ સેમી}$$

$$= 49.65 \text{ સેમી}$$

તેથી શંકુના આડછેદની વક્સસપાટીનું કોન્ટ્રફળ

$$= \pi (r_1 + r_2) l$$

$$= \frac{22}{7} (28 + 7) (49.65)$$

$$= 5461.5 \text{ સેમી}^2$$

$$(iii) \text{ શંકુના આડછેદની કુલ સપાટીનું કોન્ટ્રફળ} = \pi (r_1 + r_2) l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= [5461.5 + \frac{22}{7} (28)^2 + \frac{22}{7} (7)^2] \text{ સેમી}^2$$

$$= 8079.5 \text{ સેમી}^2$$

આલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોમાં આ સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીએ.

ઉદાહરણ 13 : હનુમાયા અને તેની પત્ની ગંગામા શેરડીના રસમાંથી ગોળ બનાવે છે. તેમણે શેરડીના રસને ગરમ કરી રાબ બનાવેલી છે. તેને શંકુના આડછેદ આકારના નમૂનામાં નાખવામાં આવી છે. તેમાં અનુકૂળ બે વર્તુળાકાર સપાટીના વાસ 30 સેમી અને 35 સેમી અને નમૂનાની વિશેલંબ ઊંચાઈ 14 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.22) જો 1 સેમી³ રાબનું દળ 1.2 ગ્રામ હોય, તો પ્રત્યેક નમૂનામાં ભરી શકાય તેટલી રાબનું દ્રવ્યમાન શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.22

ઉકેલ : આપેલ નમૂનાનો આકાર શંકુના આડછેદ જેવો છે. તેથી તેમાં ભરી શકાય તેટલી

$$\text{રાબનું ઘનફળ} = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

જ્યાં r_1 મોટા પાયાની ત્રિજ્યા અને r_2 એ નાના પાયાની ત્રિજ્યા છે.

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \left[\left(\frac{35}{2} \right)^2 + \left(\frac{30}{2} \right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2} \right) \right] \text{ સેમી}^3$$

$$= 11641.7 \text{ સેમી}^3$$

અહીં આપેલ છે કે, 1 સેમી³ રાબનું દ્રવ્યમાન 1.2 ગ્રામ છે,

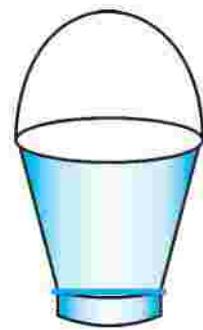
તેથી, પ્રત્યેક નમૂનામાં ભરેલી રાબનું દ્રવ્યમાન = (11641.7×1.2) ગ્રામ

$$= 13970.04 \text{ ગ્રામ}$$

$$= 13.97 \text{ કિલોગ્રામ}$$

$$= 14 \text{ કિલોગ્રામ (લગભગ)}$$

ઉદાહરણ 14 : એક ધાતુની ખૂલ્લી ડેલ શંકુના આડછેદના આકારની છે, અને તે એક ધાતુના ખૂલ્લા નળાકારના આધાર પર છે. (જુઓ આકૃતિ 13.23) આ ડેલના બંને વર્તુળાકાર છેડાના વ્યાસ 45 સેમી અને 25 સેમી છે અને ડેલની કુલ શિરોલંબ ઊંચાઈ 40 સેમી છે. ખૂલ્લી ડેલના પાયાના નળાકારની ઊંચાઈ 6 સેમી છે. આ ડેલ બનાવવા માટે કેટલા ક્ષેત્રફળવાળી ધાતુની શીટ જોઈએ તે શોધો. ડેલના હેન્ડલની ગણતરી કરવામાં આવી નથી તથા તે ડેલમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ કેટલું હશે તે પણ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.23

ઉકેલ : ડેલની કુલ ઊંચાઈ 40 સેમી છે. તેમાં પાયાની ઊંચાઈનો સમાવેશ થાય છે. તેથી શંકુના આડછેદની ઊંચાઈ (40 - 6) સેમી = 34 સેમી છે.

$$\text{તેથી, શંકુના આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$\text{જ્યાં } r_1 = 22.5 \text{ સેમી}, r_2 = 12.5 \text{ સેમી \ અને } h = 34 \text{ સેમી.}$$

$$\text{તેથી, } l = \sqrt{(34)^2 + (22.5 - 12.5)^2} \text{ સેમી}$$

$$= \sqrt{(34)^2 + (10)^2} \text{ સેમી}$$

$$= 35.44 \text{ સેમી}$$

$$\begin{aligned} \text{અહીં વપરાયેલ ધાતુની શીટનું ક્ષેત્રફળ} &= \text{શંકુના આડછેદની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ} + \text{આડછેદના વર્તુળાકાર પાયાનું ક્ષેત્રફળ} \\ &\quad + \text{નળાકારની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ} \\ &= [\pi \times 35.44 (22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\pi \times 12.5 \times 6] \text{ સેમી}^2 \\ &= \frac{22}{7} [1240.4 + 156.25 + 150] \text{ સેમી}^2 \\ &= 4860.9 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

હવે, ડેલમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ (જેને ડેલની ક્ષમતા પણ કહે છે.)

$$= \frac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5] \text{ સેમી}^3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75$$

$$= 33615.48 \text{ સેમી}^3$$

$$= 33.62 \text{ લિટર (લગભગ)}$$

સ્વાધ્યાય 13.4

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

- 14 સેમી ઊંચાઈવાળા પીવાના પાણીનો ખાલો શંકુના આડહેદના આકારનો છે. બંને વર્તુળકાર છેડાના વાસ 4 સેમી અને 2 સેમી હોય, તો આ ખાલાની ક્ષમતા શોધો.
- એક શંકુના આડહેદની તિર્યક ઊંચાઈ 4 સેમી છે તથા તેના વર્તુળકાર છેડાની પરિમિતિ (પરિધિ) 18 સેમી અને 6 સેમી છે. તો શંકુના આડહેદની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
- એક તુર્કી ટોપીનો આકાર શંકુના આડહેદ જેવો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.24.) જો તેની ખુલ્લી બાજુની ત્રિજ્યા 10 સેમી અને ઉપરની બાજુના વર્તુળની ત્રિજ્યા 4 સેમી હોય અને તિર્યક ઊંચાઈ 15 સેમી હોય, તો તેને બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
- એક વાસણ એક ધાતુની શીટમાંથી બનાવવામાં આવ્યું છે. તે ઉપરથી ખુલ્લું છે અને શંકુના આડહેદ જેવા આકારનું છે. તેની ઊંચાઈ 16 સેમી તથા બંને અંત્ય વર્તુળોની નીચેની અને ઉપરની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 8 સેમી અને 20 સેમી છે. દૂધથી સંપૂર્ણ ભરેલા વાસણમાં ₹ 20 પ્રતિ લિટર કિમતવાળા આ વાસણમાં સમાઈ શકતા દૂધની કિમત શોધો. આ વાસણ બનાવવા માટે વપરાયેલ ધાતુની શીટની કિમત ₹ 8 પ્રતિ 100 સેમી² ના દરે શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)
- ધાતુના લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 20 સેમી તથા શિરકોણ 60° છે. પાયાને સમાંતર સમતલથી તેના ઊંચાઈના બે સમાન ભાગ થાય તે રીતે કાપવામાં આવ્યો છે. જો આડહેદનું $\frac{1}{16}$ સેમી વાસવાળા તાર સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરવામાં આવે તો તારની લંબાઈ શોધો.



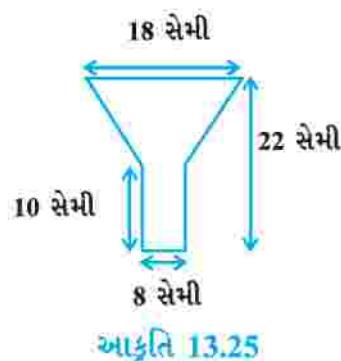
આકૃતિ 13.24

સ્વાધ્યાય 13.5 (વૈકલ્પિક)*

- 3 મિની વાસવાળા તાંબાના તારને 12 સેમી ઊંચાઈ અને 10 સેમી વાસવાળા નળાકાર પર એવી રીતે વીટવામાં આવે છે કે નળાકારની વક્સપાટી સંપૂર્ણપણે ઢંકાઈ જાય છે. તો તારની લંબાઈ અને દળ શોધો. તાંબાની ઘનતા 8.88 ગ્રામ/સેમી³ સ્વીકારવામાં આવી છે.
- એક કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ 3 સેમી અને 4 સેમી (કર્ણ સિવાયની બાજુઓ) છે. તેને તેના કર્ણ આસપાસ પરિભ્રમણ કરાવવામાં આવે છે. તેનાથી પ્રાપ્ત પ્રત્યેક કર્ણની ક્ષેત્રફળ અને તેમની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (પ્રત્યેક કર્ણની ક્ષેત્રફળ અનુકૂળ પસંદ કરો.)
- એક ટાંકીનાં આંતરિક માપ 150 સેમી \times 120 સેમી \times 110 સેમી છે. તેમાં 129600 સેમી³ પાણી છે. ટાંકી પૂરેપૂરી ભરાય ન જાય ત્યાં સુધી તે પાણીમાં છિદ્રવાળી ઈંટો નાખવામાં આવે છે. પ્રત્યેક ઈંટ તેના $\frac{1}{17}$ ઘનકણ જેટલું પાણી શોધી લે છે. પ્રત્યેક ઈંટનું માપ 22.5 સેમી \times 7.5 સેમી \times 6.5 સેમી છે, તો પાણી બહાર ન આવે તે રીતે તે ટાંકીમાં કેટલી ઈંટો નાખી શકાય ?
- આપેલા મહિનાના કોઈ એક પખવાડિયામાં એક નદીની ધાટીમાં 10 સેમી વરસાદ પડ્યો છે. જો તે ધાટીનું * આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.

ક્ષેત્રફળ 97280 કિમી² હોય, તો બતાવો કે, કુલ વરસાદ લગભગ નાંડા નદીઓના સામાન્ય પાણીના સરવાળા બરાબર હતો. પ્રત્યેક નદી 1072 કિમી લાંબી, 75 મીટર પછોળી અને 3 મીટર ઊંડી છે.

5. પતરાની એક ચીમની 10 સેમી લાંબા નળાકારના છેડે શંકુના આડછેદ્ધી બનેલી છે. જો તેની કુલ ઊંચાઈ 22 સેમી હોય તથા નળાકાર ભાગનો વ્યાસ 8 સેમી અને ચીમનીના ઉપરના ભાગનો વ્યાસ 18 સેમી હોય, તો ચીમની બનાવવામાં વપરાતા પતરાનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (જુઓ આહૃતિ 13.25.)



આહૃતિ 13.25

6. વિભાગ 13.5 માં આપવામાં આવેલા સંકેતોની મદદથી શંકુના આડછેદની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળનું સૂત્ર તારવો.

7. વિભાગ 13.5 માં આપેલા સંકેતોની મદદથી શંકુના આડછેદનું ઘનફળ શોધવાનું સૂત્ર તારવો.

13.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

- બે જાહીતા પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોલક અને અર્ધગોલકના સંયોજનથી બનતા પદાર્થનું પૃષ્ઠફળ શોધવું.
- કોઈપણ બે પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોલક અને અર્ધગોલકના સંયોજનથી બનતા પદાર્થનું ઘનફળ શોધવું.
- આપેલા શંકુના પાયાને સમાંતર સમતલ દ્વારા કાપીએ તથા સમતલની એક બાજુના શંકુને દૂર કરવાથી મળતા ઘનાકારને શંકુનો આડછેદ કહેવાય છે.
- શંકુના આડછેદ સંબંધી સૂત્રો નીચે પ્રમાણે છે :

$$(i) \text{ શંકુના આડછેદનું ઘનફળ} = \frac{1}{3}\pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$(ii) \text{ શંકુના આડછેદની વક્સપાટીના પૃષ્ઠફળનું ક્ષેત્રફળ} = \pi l (r_1 + r_2)$$

$$\text{જ્યાં } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$(iii) \text{ શંકુના આડછેદનું કુલ પૃષ્ઠફળ} = \pi l (r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

ઉપરના સૂત્રોમાં h = આડછેદની ઊંચાઈ, l = આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ તથા શંકુના આડછેદના બંને છેડાની ત્રિજ્યાઓ r_1 અને r_2 છે.



13A5S1



D7Y3M4

આંકડાશાસ્ત્ર

14

14.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ધોરણ IX ના અભ્યાસમાં આપેલ માહિતીનું અવગાર્કૃત તેમજ વર્ગાકૃત આવૃત્તિ-વિતરણોમાં વર્ગાકરણ કરવાનો અભ્યાસ કર્યો છે. તમે માહિતીને વિવિધ સચિત્ર આવેઝો જેવા કે, લંબાલેઝો, સંભાલેઝો (જેમની પહોળાઈ બદલાતી હોય તેવા સંભાલેઝો સહિત) અને આવૃત્તિ બહુકોષોને ચિત્રાત્મક રીતે દર્શાવવાનો અભ્યાસ પણ કર્યો છે. વાસ્તવમાં, તમે અવગાર્કૃત માહિતીના સંખ્યાત્મક પ્રતિનિધિ સ્વરૂપે મધ્યક (mean), મધ્યસ્થ (median) અને બહુલક (mode) જેવા મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપોનો અભ્યાસ કરીને એક ડગલું આગળ વધ્યા હતા. આ પ્રકરણમાં આપણે આ માપો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકનો અભ્યાસ અવગાર્કૃત માહિતી પરથી વર્ગાકૃત માહિતી સુધી વિસ્તૃત કરીશું. આપણે સંચયી આવૃત્તિ અને સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણાની સંકલ્પનાની પણ ચર્ચા કરીશું. વળી, સંચયી આવૃત્તિ વક્ષો (Ogives) કેવી રીતે દોરવા, તે શીખીશું.

14.2 વર્ગાકૃત માહિતીનો મધ્યક



R2C4K1

આપણે જાણીએ છીએ તેમ અવલોકનોનો મધ્યક એ તમામ અવલોકનોના સરવાળાનું અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગફળ છે. ધોરણ IX ના અભ્યાસમાંથી, યાદ કરો કે, જો અવલોકનો x_1, x_2, \dots, x_n હોય અને તેમને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ f_1, f_2, \dots, f_n હોય, તો એનો અર્થ, અવલોકન x_1 એ f_1 વખત આવે છે, x_2 એ f_2 વખત આવે છે અને આ જ રીતે આગળ પણ અર્થઘટન કરી શકાય.

હવે, તમામ અવલોકનોનો સરવાળો = $f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n$ અને

અવલોકનોની સંખ્યા = $f_1 + f_2 + \dots + f_n$

તેથી, માહિતીનો મધ્યક \bar{x} , નીચેના સૂત્રથી આપવામાં આવે છે :

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

યાદ કરો કે, જેનો અર્થ સરવાળો છે તેવા ગ્રોક અક્ષર Σ (sigma)નો ઉપયોગ કરીને આપણો આ સૂત્રને સંક્ષિમ સ્વરૂપમાં લખી શકીએ. એટલે કે,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

જો એ સ્પષ્ટ હોય કે, i એ 1 થી n સુધી કિમતો લે છે, તો આ સૂત્રને સંક્ષિમમાં, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ તરીકે પણ લખી શકાય.

ચાલો, આપણો આ સૂત્રનો ઉપયોગ નીચેના ઉદાહરણમાં મધ્યક શોધવા માટે કરીએ :

ઉદાહરણ 1 : એક શાળામાં ધોરણ X ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતના 100 ગુણના પ્રશ્નપત્રમાં મેળવેલા ગુણ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલા છે. વિદ્યાર્થીએ મેળવેલા ગુણનો મધ્યક શોધો :

મેળવેલ ગુણ (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

ઉકેલ : યાદ કરો કે, ગુણનો મધ્યક શોધવા માટે, આપણાને પ્રત્યેક x_i ના તેને અનુરૂપ આવૃત્તિ f_i સાથેના ગુણાકારની આવશ્યકતા છે. તેથી, ચાલો, આપણો કોષ્ટક 14.1માં બતાવ્યા પ્રમાણો તે સંખ્યાઓને સ્તંભમાં મૂકીએ.

કોષ્ટક 14.1

મેળવેલ ગુણ (x_i)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
કુલ	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

$$\text{હવે, } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

તેથી, મેળવેલ ગુણનો મધ્યક 59.3 છે.

આપણા જીવનની ભોગ ભાગની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિઓમાં, નિયમિત માહિતી એટલી વિશાળ હોય છે કે, તેના અર્થપૂર્વી અભ્યાસ માટે વર્ગિકૃત માહિતીનું સંક્ષેપન અનિવાર્ય હોય છે. તેથી, આપેલ અવગાંકૃત માહિતીને વર્ગિકૃત માહિતીમાં પરિવર્તિત કરવાની આવશ્યકતા રહે છે અને તેનો મધ્યક શોધવા માટે કોઈક રીતની પ્રાપ્તિ આવશ્યક છે.

ચાલો, આપણે ઉદાહરણ 1ની અવગાંકૃત માહિતીમાં પરિવર્તિત કરીએ. તે માટે વર્ગ-અંતરાલોની લંબાઈ, કહો કે 15 ની લઈએ. યાદ રાખો, પ્રત્યેક વર્ગ-અંતરાલને આવૃત્તિની ફાળવણી કરતી વખતે, વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કોઈ પણ ઉધ્વર વર્ગ-સીમા જેટલી હોય, તો તેમને તે પણીના વર્ગમાં ગણવામાં આવશે. ઉદાહરણ તરીકે, જે 4 વિદ્યાર્થીઓએ 40 ગુણ મેળવ્યા છે, તે 4 વિદ્યાર્થીઓને વર્ગ-અંતરાલ 40-55 માં ગણવામાં આવશે અને 25-40 માં નહિ. હવે આપણે આ રૂઢિ ધ્યાનમાં રાખીને વર્ગિકૃત આવૃત્તિ વિતરણનું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ. (જુઓ કોષ્ટક 14.2.)

કોષ્ટક 14.2

વર્ગ-અંતરાલ	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	7	6	6	6

હવે, પ્રત્યેક વર્ગ-અંતરાલ માટે, જેને સમગ્ર વર્ગના પ્રતિનિધિ તરીકે ઉપયોગમાં લઈ શકાય એવી એક સંખ્યાની આપણાને જરૂર છે. આપણે એવું માની લઈએ છીએ કે, દરેક વર્ગ-અંતરાલની આવૃત્તિ તેની મધ્યકિમતની આસપાસ કેન્દ્રિત થાય છે. તેથી, પ્રત્યેક વર્ગની મધ્યકિમતને વર્ગમાં આવતાં અવલોકનોને દર્શાવવા માટે પસંદ કરી શકાય. યાદ કરો કે, આપણે વર્ગની ઉધ્વરસીમા અને અધઃસીમાની સરેરાશ શોધીને તે વર્ગની મધ્યકિમત શોધીએ છીએ એટલે કે,

$$\text{કોઈપણ વર્ગની મધ્યકિમત} = \frac{\text{તે જ વર્ગની ઉધ્વરસીમા} + \text{તે જ વર્ગની અધઃસીમા}}{2}$$

કોષ્ટક 14.2ના સંદર્ભમાં વર્ગ 10-25 માટે, મધ્યકિમત $\frac{10+25}{2}$, એટલે કે, 17.5 છે. આ જ પ્રમાણે, બાકીના

વર્ગ-અંતરાલો માટે આપણે મધ્યકિમત શોધી શકીએ. આપણે તેમને કોષ્ટક 14.3 માં મૂકીએ. આ મધ્યકિમત આપણા માટે x_i જેવું કાર્ય કરે છે. હવે, વ્યાપક રીતે, i માં વર્ગ-અંતરાલ માટે, આપણી પાસે મધ્યકિમત x_i ને અનુરૂપ આવૃત્તિ f_i છે. હવે, આપણે મધ્યકની ગણતરી, ઉદાહરણ 1 ની રીતે જ કરીએ.

કોષ્ટક 14.3

વર્ગ-અંતરાલ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	મધ્યક્રમત (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
કુલ	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

ઇહેલા સંબન્ધની કિંમતોનો સરવાળો આપણાને $\sum f_i x_i$ આપે છે. તેથી, આપેલ માહિતીનો મધ્યક \bar{x} , નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે મળે છે :

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

મધ્યક શોધવાની આ નવી રીત પ્રત્યક્ષ રીત તરીકે ઓળખાય છે.

આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે કોષ્ટક 14.1 અને 14.3 માં મધ્યકની ગણતરી માટે એક જ માહિતીનો ઉપયોગ કરી રહ્યા છીએ અને ગણતરી માટે સમાન સૂત્રને લાગુ કરીએ છીએ. પરંતુ મળતાં પરિણામો બિન છે. આપ કલ્પી શક્ષણે કે, આવું કેમ બને છે અને કયું પરિણામ વધારે ચોક્કસ છે? બે કિંમતોમાં તફાવત, એ કોષ્ટક 14.3 માં મધ્યક્રમતની ધારણાને કારણો છે. 59.3 એ સાચો મધ્યક છે, જ્યારે 62 એ આસન્ન (અંદાજિત) મધ્યક છે.

કેટલીક વાર જ્યારે x_i અને f_i નાં સંખ્યાત્મક મૂલ્યો મોટાં હોય, ત્યારે x_i અને f_i નો ગુણાકાર શોધવાનું કંટાળાજનક થઈ જાય છે અને વધુ સમય માંગી લે છે. તેથી ચાલો, આ પ્રકારની પરિસ્થિતિમાં આપણે ગણતરીની સરળ રીતનો વિચાર કરીએ.

આપણે f_i ને કશું જ કરી શકતાં નથી, પરંતુ આપણી ગણતરી સરળ બને તે રીતે આપણે પ્રત્યેક x_i ને નાની સંખ્યામાં પરિવર્તિત કરી શકીએ, જેથી આપણી ગણતરી સરળ બને. આ આપણે કેવી રીતે કરી શકીશું? આ પ્રત્યેક x_i માંથી નિયત સંખ્યાને બાદ કરવા અંગે વિચારી શકીએ. ચાલો, આપણે આ રીતનો પ્રયત્ન કરીએ.

પ્રથમ પગલું એ છે કે, બધાં x_i માંથી એકને ધારી લીધેલ મધ્યક તરીકે પસંદ કરો અને તેને ‘ a ’ વડે દર્શાવો. વળી, આગળ ઉપર આપણું ગણતરીનું કાર્ય ઓછું કરવા, આપણે ‘ a ’ ને જે x_1, x_2, \dots, x_n ની મધ્ય રહેલો હોય એવો x_i લઈ શકીએ. તેથી, આપણે $a = 47.5$ અથવા $a = 62.5$ પસંદ કરી શકીએ. ચાલો, આપણે $a = 47.5$ પસંદ કરીએ.

(આ જરૂરી નથી. a કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોઈ શકે. આ માત્ર અનુકૂળતા માટે છે.)

પછીનું પગલું છે, a અને પ્રત્યેક x_i વચ્ચેનો તફાવત d_i શોધવાનું એટલે કે, પ્રત્યેક x_i થી a નું વિચલન શોધવાનું.

અર્થાત્, $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

ત્રીજું પગલું છે, d_i નો અનુરૂપ f_i સાથેનો ગુણાકાર શોધવાનો અને તમામ $f_i d_i$ નો સરવાળો કરવાનો છે. આ ગણતરીઓ કોષ્ટક 14.4 માં દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 14.4

વર્ગ-અંતરાલ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-60
25 - 40	3	32.5	-15	-45
40 - 55	7	47.5 = a	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
કુલ	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

તેથી, કોષ્ટક 14.4 પરથી, વિચલનનો મધ્યક, $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$.

હવે ચાલો, આપણે \bar{d} અને \bar{x} વચ્ચેનો સંબંધ શોધીએ. d_i મેળવવા માટે, આપણે પ્રત્યેક x_i માંથી ' a ' ની બાદબાકી કરી છે. તેથી, \bar{x} મેળવવા માટે, આપણને \bar{d} માં ' a ' ઉમેરવાની જરૂર છે. આ હકીકત, ગાણિતિક રીતે નીચે પ્રમાણે વર્ણવી શકાય :

$$\text{વિચલનનો મધ્યક}, \quad \bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

$$\begin{aligned} \text{તેથી,} \quad \bar{d} &= \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i} \\ &= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i} \\ &= \bar{x} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i} \\ &= \bar{x} - a \end{aligned}$$

$$\text{તેથી,} \quad \bar{x} = a + \bar{d}$$

$$\text{એટલે કે,} \quad \bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

અને $\sum f_i d_i$ અને $\sum f_i$ ની કિમતો કોષ્ટક 14.4 માંથી મૂકૃતાં, આપણને

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62 \text{ મળે છે. આમ, વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા મેળવેલા ગુણનો મધ્યક } 62 \text{ છે.}$$

ઉપર્યુક્ત વર્ણવેલ રીતને **ધારી લીધેલ મધ્યકની રીત (Assumed Mean Method)** કહે છે.

પ્રશ્ન 1 : કોષ્ટક 14.3 પરથી પ્રત્યેક x_i (એટલે કે, 17.5, 32.5, અને આમ આગળ)ને ' a ' તરીકે લઈને મધ્યક શોધો. તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો? તમે જોઈ શકશો કે, પ્રત્યેક ડિસ્સામાં પ્રાપ્ત થતો મધ્યક એક જ (સમાન) છે, એટલે કે, 62. (કેમ?)

નોંધ : ખરેખર તો ‘ a ’ તરીકે કોઈ પણ અનુકૂળ સંખ્યા લઈ શકાય. તેથી, આપણે કહી શકીએ કે મેળવેલા મધ્યકની ક્રમત, ‘ a ’ ની પસંદગી પર આધારિત નથી.

કોષ્ટક 14.4 માં નિરીક્ષણ કરો કે, સ્તંભ 4 ની બધી જ ક્રમતો 15 ની ગુણક છે. તેથી જો આપણે આખા સ્તંભ 4 ની બધી જ ક્રમતોનો 15 વડે ભાગાકાર કરીએ, તો આપણે f_i સાથે ગુણાકાર કરવા માટે નાની સંખ્યાઓ પ્રાપ્ત કરી શકીએ. (અહીં દરેક વર્ગઅંતરાલની વર્ગલંબાઈ 15 છે.)

તેથી, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ લો. અહીં a ધારી લીધેલ મધ્યક અને h એ વર્ગલંબાઈ છે.

હવે, આપણે આ પ્રમાણે u_i ની ગણતરી કરીએ અને ગણતરી આગળ પ્રમાણે ચાલુ રાખીએ (એટલે કે, $f_i u_i$ શોધીએ અને પછી $\sum f_i u_i$). ચાલો આપણે $h = 15$ લઈને કોષ્ટક 14.5 રચીએ.

કોષ્ટક 14.5

વર્ગ-અંતરાલ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-2	-4
25 - 40	3	32.5	-15	-1	-3
40 - 55	7	47.5 = a	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
	$\sum f_i = 30$				$\sum f_i u_i = 29$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{ લો.}$$

અહીં, ચાલો આપણે ફરીથી \bar{u} અને \bar{x} વચ્ચેનો સંબંધ શોધીએ.

આપજી પાસે, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ હૈ.

$$\begin{aligned}
 \text{તેથી, } \bar{u} &= \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i} = \frac{1}{h} \left[\frac{\sum f_i x_i - a \sum f_i}{\sum f_i} \right] \\
 &= \frac{1}{h} \left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i} \right] \\
 &= \frac{1}{h} [\bar{x} - a]
 \end{aligned}$$

તેથી,

$$h \bar{u} = \bar{x} - a$$

એટલે કે $\bar{x} = a + h\bar{u}$

$$\text{તેથી, } \bar{x} = a + h \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right)$$

હવે, $a, h, \sum f_i u_i$ અને $\sum f_i$ નાં મૂલ્યો કોઈક 14.5 માંથી મૂકતાં, આપણાને

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30} \right) \\ &= 47.5 + 14.5 = 62 \text{ મળે છે.}\end{aligned}$$

તેથી, વિદ્યાર્થી દ્વારા મેળવેલ ગુણનો મધ્યક 62 છે.

ઉપર્યુક્ત દર્શાવેલ રીતને **પદ-વિચલનની રીત (Step-deviation method)** કહેવાય છે.

આપણે નોંધ કરીએ :

- જો તમામ d_i માં સામાન્ય અવયવ હોય તો પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ અનુકૂળ રહેશે.
- ત્રણો ય રીતો દ્વારા મેળવેલ તમામ મધ્યક સમાન છે.
- ધારી લીધેલ મધ્યકની રીત અને પદ-વિચલનની રીત એ પ્રત્યક્ષ રીતનાં સહેલાઈથી સમજાય એવાં સ્વરૂપો માત્ર છે.
- જો a અને h ઉપર પ્રમાણે આપેલ ન હોય, પરંતુ, તે કોઈ પણ શુન્યેતર સંખ્યાઓ હોય કે જેથી,

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \text{ હોય, તો પણ સૂત્ર } \bar{x} = a + h\bar{u} \text{ સત્ય રહે છે.}$$

ચાલો, આપણે આ રીતનો અન્ય ઉદાહરણમાં ઉપયોગ કરીએ.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ કોઈક, ભારતનાં કેટલાંક રાજ્યોનાં ગ્રામીણ વિસ્તારો અને કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશો (Union Territories) ની પ્રાથમિક શાળાઓમાં થી શિક્ષકોનું ટકાવાર વિતરણ આપે છે. આ વિભાગમાં વર્ષાવેલ ત્રણો ય રીતો દ્વારા થી શિક્ષકોની સંખ્યાનો મધ્યક ટકામાં શોધો.

સ્થિ શિક્ષકોની ટકાવારી	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
રાજ્યો/કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા	6	11	7	4	4	2	1

સ્ત્રોત : NCERT દ્વારા હાથ ધરાયેલ સાતમું ઓલ ઇન્ડિયા શાળાશિક્ષણ સર્વેક્ષણ

ઉકેલ : ચાલો, આપણે પ્રત્યેક વર્ગ માટે મધ્યકિત ખાતે મધ્યકિત x_i શોધીએ, અને તેને સંલભમાં મૂકીએ. (જુઓ કોઈક 14.6.)

કોષ્ટક 14.6

શ્રી શિક્ષકોની ટકાવારી	રાજ્યો/કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા (f_i)	x_i
15-25	6	20
25-35	11	30
35-45	7	40
45-55	4	50
55-65	4	60
65-75	2	70
75-85	1	80

અહીં આપણે $a = 50$ તથા $h = 10$ લઈએ. આથી $d_i = x_i - 50$ અને $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ થશે. હવે, આપણે d_i અને u_i શોધીએ અને તેમને કોષ્ટક 14.7 માં મૂકીએ.

કોષ્ટક 14.7

શ્રી શિક્ષકોની ટકાવારી	રાજ્યો/કે.શા. પ્રદેશોની સંખ્યા (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 - 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 - 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 - 55	4	50 = a	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
કુલ	$\sum f_i = 35$				1390	-360	$\sum f_i u_i = -36$

ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણાને $\sum f_i = 35$, $\sum f_i x_i = 1390$ મળે. $\sum f_i d_i = -360$, $\sum f_i u_i = -36$ મળે છે.

$$\text{પ્રત્યક્ષ રીતનો ઉપયોગ કરતાં, } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$$

ધારી લીધેલ મધ્યકની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35} \right) \times 10 = 39.71$$

તેથી, ગ્રામીણ વિસ્તારોની પ્રાથમિક શાળાઓમાં ડી. શિક્ષકોની ટકાવારીનો મધ્યક 39.71 છે.

નોંધ : ગ્રણે રીતો દ્વારા મેળવેલ તમામ પરિણામ સમાન છે. તેથી ઉપયોગમાં લેવાની રીતની પસંદગી સંઘ્યાત્મક ડિમતો x_i અને f_i પર આધારિત છે. જો x_i અને f_i ની ડિમતો પર્યાપ્ત રીતે નાની હોય, તો પ્રત્યક્ષ રીત યોગ્ય પસંદગી છે. જો x_i અને f_i સંઘ્યાત્મક રીતે મોટી સંઘ્યાઓ હોય, તો આપણે ખારી લીધેલ મધ્યકની રીત અથવા પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ. જો વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય અને x_i સંઘ્યાત્મક રીતે મોટી સંઘ્યાઓ હોય, તો તેવા સંજોગોમાં તમામ h ને d_i ના યોગ્ય ભાજક તરીકે લઈને પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ વિતરણ એક-દિવસીય કિકેટ મેચોમાં બોલરો દ્વારા લેવાયેલી વિકેટોની સંખ્યા બતાવે છે. યોગ્ય રીત પસંદ કરીને વિકેટોની સંખ્યાનો મધ્યક શું સૂચવે છે ?

વિકેટોની સંખ્યા	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
બોલરોની સંખ્યા	7	5	16	12	2	3

ઉકેલ : અહીં, વર્ગલંબાઈ અચળ નથી અને x_i મોટા છે. ચાલો આપણે અહીં પણ $a = 200$ અને $h = 20$ લઈને પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરીએ. આપણને કોષ્ટક 14.8 દર્શાવ્યા પ્રમાણેની માહિતી મળે છે.

કોષ્ટક 14.8

લીધેલ વિકેટોની સંખ્યા	બોલરોની સંખ્યા (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$f_i u_i$
20 - 60	7	40	- 160	- 8	- 56
60 - 100	5	80	- 120	- 6	- 30
100 - 150	16	125	- 75	- 3.75	- 60
150 - 250	12	$a = 200$	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
કુલ	$\Sigma f_i = 45$				$\Sigma f_i u_i = - 106$

તેથી, $\bar{u} = \frac{-106}{45}$. આને કારણે, $\bar{x} = 200 + 20 \left(\frac{-106}{45} \right) = 200 - 47.11 = 152.89$

આ માહિતી આપણને કહે છે કે, આ 45 બોલરો દ્વારા એક દિવસીય કિકેટમાં, સરેરાશ 152.89 વિકેટો લેવામાં આવી છે.

હવે, આપણો જોઈએ કે, આ વિભાગમાં જેની ચર્ચા કરેલ તે સંકલ્પનાનો તમે કેટલી સારી રીતે ઉપયોગ કરી શકો છો !

પ્રવૃત્તિ 2 :

તમારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને ત્રણ સમૂહમાં વિભાજિત કરો અને પ્રત્યેક સમૂહને કહો કે, નીચે આપેલ પ્રવૃત્તિઓમાંથી કોઈ એક પ્રવૃત્તિ કરો.

1. તમારી શાળાએ તાજેતરમાં લીધેલ પરીક્ષામાં તમારા વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતમાં મેળવેલા ગુણ પ્રાપ્ત કરો. મેળવેલ માહિતી પરથી વર્ગિકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો.
2. તમારા શહેરમાં 30 દિવસોના ગાળા દરમિયાન દરરોજ નોંધાયેલ મહત્તમ તાપમાન મેળવો. આ માહિતીને વર્ગિકૃત આવૃત્તિકોષ્ટકના રૂપમાં પ્રસ્તુત કરો.
3. તમારા વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) માપો અને આ માહિતીનું વર્ગિકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક રચો.

તમામ સમૂહો દ્વારા માહિતી એકીઠી થાય અને વર્ગિકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકની રચના થાય તે પછી, સમૂહો માટે યોગ્ય લાગે તે રીતનો ઉપયોગ કરીને પ્રત્યેક ડિસ્સામાં મધ્યક શોધો.

સ્વાચ્છાય 14.1

1. વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહ દ્વારા તેમના પર્યાવરણ જ્ઞાગૃતિ કાર્યક્રમના ભાગરૂપે એક સર્વેક્ષણ હાથ ધરવામાં આવ્યું. તેમાં તેમણે એક વિસ્તારનાં 20 ધરોમાં વનસ્પતિના છોડની સંખ્યા વિશે નીચેની માહિતી એકીઠી કરી. ધર દીઠ છોડની સંખ્યાઓનો મધ્યક શોધો.

છોડની સંખ્યા	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
ધરોની સંખ્યા	1	2	1	5	6	2	3

મધ્યક શોધવા માટે કઈ રીતનો ઉપયોગ કરશો ? શા માટે ?

2. એક ફેક્ટરીમાં 50 કારીગરોના દૈનિક વેતનના નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણનો વિચાર કરો :

દૈનિક વેતન (₹ માં)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
કારીગરોની સંખ્યા	12	14	08	06	10

યોગ્ય રીતનો ઉપયોગ કરીને કારખાનાના કારીગરોના દૈનિક વેતનનો મધ્યક શોધો.

3. નીચેનું આવૃત્તિ વિતરણ વસ્તીનાં બાળકોનું દૈનિક બિસ્સાભથ્થું દર્શાવે છે. બિસ્સાભથ્થાનો મધ્યક ₹ 18 છે. ખૂટ્ટી આવૃત્તિ જ શોધો.

દૈનિક બિસ્સાભથ્થું (₹ માં)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
બાળકોની સંખ્યા	7	6	9	13	f	5	4

4. એક હોસ્પિટલમાં દાક્તરે ત્રીસ મહિલાઓની શારીરિક તપાસ કરી અને પ્રતિ મિનિટ હદ્યના ધબકારાની નોંધ કરી તથા નીચે પ્રમાણે સારાંશ તૈયાર કર્યો. યોગ્ય રીત પસંદ કરીને, આ મહિલાઓના પ્રતિ મિનિટ હદ્યના ધબકારાનો મધ્યક શોધો.

પ્રતિ મિનિટ હદ્યના ધબકારાની સંખ્યા	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
મહિલાઓની સંખ્યા	2	4	3	8	7	4	2

5. એક છૂટક વેચાણ બજારમાં, ફળ વેચનારાઓ બંધ ખોખાંઓમાં કેરીઓ વેચી રહ્યા હતા. આ ખોખાંઓમાં કેરીઓ જુદી-જુદી સંખ્યાઓમાં હતી. ખોખાંઓની સંખ્યાના પ્રમાણમાં કેરીઓનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે પ્રમાણે હતું :

કેરીઓની સંખ્યા	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
ખોખાંઓની સંખ્યા	15	110	135	115	25

બંધ ખોખામાં મૂકેલ કેરીઓની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો. મધ્યક શોધવા માટે તમે કઈ રીત પસંદ કરી હતી ?

6. નીચેનું કોષ્ટક એક વિસ્તારમાં 25 પરિવારના ખોરાકનો દૈનિક ઘરગઢું ખર્ચ બતાવે છે :

દૈનિક ખર્ચ (₹ માં)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
પરિવારોની સંખ્યા	4	5	12	2	2

પરિવારના ખોરાક પરના દૈનિક ઘરગઢું ખર્ચનો મધ્યક ખોરાક રીતનો ઉપયોગ કરીને શોધો.

7. એક ચોક્કસ શહેરમાં 30 વિસ્તારોમાં હવામાં SO_2 ની સાંક્રતા (ઘટકો પ્રતિ દસ લાખમાં, એટલે કે, ppm માં) શોધવા માટે નીચે દર્શાવેલ માહિતી એકનિત કરવામાં આવી હતી :

SO_2 ની સાંક્રતા (ppm માં)	આવૃત્તિ
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

હવામાં SO_2 ની સાંક્રતાનો મધ્યક શોધો.

8. એક વર્ગની સમગ્ર સત્રની 40 વિદ્યાર્થીઓની ગેરહાજરીની ખાદી વર્ગશિક્ષક પાસે છે. વિદ્યાર્થીઓની ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.

ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	11	10	7	4	4	3	1

9. નીચેનું કોષ્ટક 35 શહેરોમાં સાક્ષરતા દર (પ્રતિશતમાં) આપે છે. સાક્ષરતા દરનો મધ્યક શોધો.

સાક્ષરતા દર (ટકા માં)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
શહેરોની સંખ્યા	3	10	11	8	3

14.3 વર્ગાકૃત માહિતીનો બહુલક



યાદ કરો, ધોરણ IX માં અભ્યાસ દરમ્યાન આપેલ અવલોકનોમાં સૌથી વધુ વખત આવતું અવલોકન એ બહુલક છે તેમ તમે જોયું હતું. એટલે કે, જે અવલોકનની આવૃત્તિ મહત્તમ હોય તે બહુલક છે. વધુમાં, અવર્ગાકૃત માહિતીનો બહુલક શોધવાની રીતની આપણે ચર્ચા કરીશું. એવું શક્ય છે કે, એક

ગણિત

કરતાં વધારે મૂલ્યને સમાન મહત્વમાં આવૃત્તિ હોય. આવી પરિસ્થિતિઓમાં માહિતીને બહુ-બહુલક (multimodal) કહે છે. વર્ગીકૃત માહિતી બહુ-બહુલક માહિતી હોઈ શકે છે, છતાં આપણે આપણી જીતને જેમાં માત્ર એક બહુલક હોય તેવા કૂટમણ્ણો સુધી સીમિત રાખીશું.

ચાલો, આપણે નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા પહેલાં તો યાદ કરીએ કે આપણે કેવી રીતે અવર્ગીકૃત માહિતી માટે બહુલક શોધ્યો હતો.

ઉદાહરણ 4 : એક બોલર દ્વારા 10 કિકેટ મેચોમાં નીચે પ્રમાણે વિકેટો લેવામાં આવી છે :

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ઉકેલ : ચાલો આપણે આપેલ માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે તૈયાર કરીએ :

વિકેટોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5	6
મેચોની સંખ્યા	1	1	3	2	1	1	1

સ્પષ્ટ છે કે, સૌથી વધુ 3 મેચમાં 2 વિકેટ લીધી છે. તેથી આ માહિતીનો બહુલક 2 છે.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિની માહિતી જોતાં જ બહુલક શોધવો શક્ય નથી. અહીં, આપણે કેવળ મહત્વમાં આવૃત્તિવાળા વર્ગને ઓળખી શકીએ. તેને બહુલક વર્ગ (modal class) કહેવાય છે. બહુલક ઓ બહુલક વર્ગમાં આવેલું એક મૂલ્ય છે, અને તે,

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

સૂત્ર દ્વારા આપવામાં આવે છે :

જ્યાં, l = બહુલક વર્ગની અધઃસીમા

h = વર્ગ અંતરાલની લંબાઈ (બધા વર્ગની લંબાઈ સમાન છે એમ માનીને)

f_1 = બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ

f_0 = બહુલક વર્ગની આગણના વર્ગની આવૃત્તિ

f_2 = બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ

આ સૂત્રના ઉપયોગની સમજૂતી માટે ચાલો આપણે નીચેના ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહે એક વસ્તીમાં 20 પરિવારની સભ્યસંખ્યા પર સર્વેક્ષણ હાથ ધર્યો. તેનાથી પરિવારના સભ્યોની સંખ્યા માટે નીચેનું આવૃત્તિકોષ્ટક બનસ્યું.

પરિવારની સભ્યસંખ્યા	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
પરિવારોની સંખ્યા	7	8	2	2	1

આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, મહત્વમાં વર્ગઆવૃત્તિ 8 છે. આ આવૃત્તિને અનુરૂપ વર્ગ 3 - 5 છે. તેથી બહુલક વર્ગ 3 - 5 છે.

હવે બહુલક વર્ગ 3 - 5 છે. બહુલક વર્ગની અધઃસીમા (I) = 3, વર્ગ લંબાઈ (h) = 2

બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ (f_1) = 8

બહુલક વર્ગની આગળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_0) = 7

બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_2) = 2

હવે, ચાલો આપણે આ કિંમતો બહુલક શોધવાના સૂત્રમાં મૂકીએ :

$$\begin{aligned} \text{બહુલક} &= I + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 3 + \left(\frac{8-7}{2 \times 8-7-2} \right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286 \end{aligned}$$

આમ, આપેલ માહિતીનો બહુલક 3.286 છે.

ઉદાહરણ 6 : ગણિતની પરીક્ષામાં 30 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું વિતરણ ઉદાહરણ 1 ના કોષ્ટક 14.3 માં આપેલ છે. આ માહિતીનો બહુલક શોધો. વળી, તેને મધ્યક સાથે સરખાવો તથા બહુલક અને મધ્યકનું અર્થધટન કરો.

ઉકેલ : ઉદાહરણ 1ના કોષ્ટક 14.3ના સંદર્ભમાં, મહત્તમ સંખ્યામાં વિદ્યાર્થીઓએ (એટલે ૩, 7) અંતરાલ 40-55 માં ગુણ મેળવ્યાં હોવાથી, બહુલક વર્ગ 40-55 છે. આને કારણે,

બહુલક વર્ગની અધઃસીમા (I) = 40

વર્ગલંબાઈ (h) = 15

બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ (f_1) = 7

બહુલક વર્ગની આગળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_0) = 3

બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_2) = 6

હવે, સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\begin{aligned} \text{બહુલક} &= I + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ \text{આથી, બહુલક} &= 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3} \right) \times 15 = 52 \end{aligned}$$

તેથી, પ્રાપ્ત ગુણનો બહુલક 52 છે.

હવે, ઉદાહરણ 1 પરથી, આપ જાણો છો કે, ગુણનો મધ્યક 62 છે. તેથી, મહત્તમ સંખ્યામાં વિદ્યાર્થીઓએ 52 ગુણ મેળવ્યા છે. જ્યારે, સરેરાશની દાખિએ વિદ્યાર્થીઓ 62 ગુણ મેળવ્યા છે.

નોંધ :

- ઉદાહરણ 6 માં બહુલક એ મધ્યક કરતાં નાનો છે. પરંતુ કેટલાક અન્ય પ્રશ્નો માટે તે મધ્યક જેટલો અથવા તેના કરતાં મોટો પણ હોઈ શકે.
- આપણો રસ વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા સરેરાશ ગુણ શોધવામાં છે કે મોટા ભાગના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ શોધવામાં એ પરિસ્થિતિની જરૂરિયાત પર આધાર રાખે છે. પ્રથમ પરિસ્થિતિમાં મધ્યકની જરૂરિયાત છે અને બીજી પરિસ્થિતિમાં બહુલકની જરૂરિયાત છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : પ્રવૃત્તિ 2 માં રચેલા સમૂહોને અને સમૂહોને સોંપેલી સ્થિતિઓ સાથે જ આગળ વધો. પ્રત્યેક સમૂહને માહિતીનો બહુલક શોધવાનું કહો. વળી, તેમણે બહુલકની સરખામણી મધ્યક સાથે કરવી જોઈએ અને બંનેનું અર્થઘટન કરવું જોઈએ.

નોંધ : અસમાન વર્ગલંબાઈવાળી વર્ગાકૃત માહિતી માટે પણ બહુલકની ગણતરી કરી શકાય. પરંતુ આપણો તેની ચર્ચા કરીશું નહિ.

સ્વાધ્યાય 14.2

- નીચેનું કોષ્ટક એક વર્ષ દરમિયાન એક દવાખાનામાં દાખલ થયેલા દર્દીઓની ઉમર દર્શાવે છે :

ઉમર (વર્ષમાં)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
દર્દીઓની સંખ્યા	6	11	21	23	14	5

ઉપર આપેલ માહિતી માટે બહુલક અને મધ્યક શોધો. કેન્દ્રિય મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં આ બે માપોની સરખામણી અને અર્થઘટન કરો.

- નીચેની માહિતી 225 વીજાઉપકરણોના આયુષ્ણની (કલાકોમાં) પ્રાપ્ત માહિતી દર્શાવે છે.

આયુષ્ણ (કલાકોમાં)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
આવૃત્તિ	10	35	52	61	38	29

તો ઉપકરણોના આયુષ્ણનો બહુલક નક્કી કરો.

- નીચેની માહિતી એક ગામનાં 200 કુટુંબો માટે તેમના ઘર ચલાવવા માટે કુલ માસિક ખર્ચનું આવૃત્તિ વિતરણ દર્શાવે છે. કુટુંબોના માસિક ખર્ચનો બહુલક શોધો તથા કુટુંબોના માસિક ખર્ચનો મધ્યક શોધો :

માસિક ખર્ચ (₹ માં)	કુટુંબોની સંખ્યા
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. નીચેનું વિતરણ ભારતની ઉચ્ચતર માધ્યમિક શાળાઓમાં રાજ્યવાર શિક્ષક-વિદ્યાર્થી ગુણોત્તરનું આવૃત્તિ વિતરણ આપે છે. આ માહિતીનો બહુલક અને મધ્યક શોધો. આ બે માપનું અર્થવાટન કરો.

પ્રતિ શિક્ષક વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	રાજ્યો/કેન્દ્ર શાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ વિશ્વના કેટલાક શ્રેષ્ઠ બેટ્સમેનો દ્વારા એક દિવસીય આંતરરાષ્ટ્રીય મેચોમાં નોંધાવેલ રનની સંખ્યા આપે છે :

નોંધાવેલ રન	બેટ્સમેનોની સંખ્યા
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

માહિતીનો બહુલક શોધો.

6. એક વિદ્યાર્થીએ, પ્રત્યેક 3 મિનિટનો એક એવા 100 સમયગાળાઓ માટે રસ્તા પરની એક જગ્યાએથી પસાર થતી ગાડીઓની સંખ્યાની નોંધ કરી અને તેને નીચે આપેલ કોષ્ટકમાં સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં દર્શાવી છે. આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ગાડીઓની સંખ્યા	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
આવૃત્તિ	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ



ધોરણ IX માં તમે અભ્યાસ કર્યો છે તેમ, મધ્યસ્થ માહિતીમાં મધ્યના અવલોકનનું મૂલ્ય આપતું હોય એવું મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ છે. યાદ કરો, અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે, આપણે પહેલાં માહિતીનાં અવલોકનોને ચઢતા કમમાં ગોફવીએ છીએ. ત્યાર બાદ, જો n -અયુગ્મ હોય, તો મધ્યસ્થ એ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અવલોકન છે. અને જો n -યુગ્મ હોય, તો મધ્યસ્થ એ $\frac{n}{2}$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોની સરેરાશ છે.

ગણિત

નીચે 100 વિદ્યાર્થીઓએ 50 ગુણની એક કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ દર્શાવ્યા છે. આ માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવો છે.

મેળવેલા ગુણ	20	29	28	33	42	38	43	25
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	6	28	24	15	2	4	1	20

સૌપ્રથમ, આપણે ગુણને ચઢતા કર્મમાં ગોઠવીએ અને નીચે પ્રમાણે આવૃત્તિ કોષ્ટક તૈયાર કરીએ :

કોષ્ટક 14.9

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
કુલ	100

અહીં, $n = 100$ એ યુગમ છે. તેથી મધ્યસ્થ એ $\frac{n}{2}$ માં અને $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ માં અવલોકનોની સરેરાશ થશે, એટલે કે,

તે 50 માં અને 51 માં અવલોકનોની સરેરાશ થશે. આ અવલોકનો શોધવા માટે, નીચે પ્રમાણે આગળ વધીએ :

કોષ્ટક 14.10

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
20	6
25 સુધી	$6 + 20 = 26$
28 સુધી	$26 + 24 = 50$
29 સુધી	$50 + 28 = 78$
33 સુધી	$78 + 15 = 93$
38 સુધી	$93 + 4 = 97$
42 સુધી	$97 + 2 = 99$
43 સુધી	$99 + 1 = 100$

આપણે આ માહિતીને ઉપરના આવૃત્તિ કોષ્ટકને દર્શાવતો હોય, તેમાં એક બીજો સંબં ઉમેરોએ અને તેનું નામ સંચયી આવૃત્તિ-સંબં રાખીશું.

કોષ્ટક 14.11

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	સંચયી આવૃત્તિ
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ઉપરના કોષ્ટક પરથી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

50 મું અવલોકન 28 છે.

(શા માટે?)

51 મું અવલોકન 29 છે.

$$\text{તેથી, } \text{મધ્યસ્થ} = \frac{28+29}{2} = 28.5$$

નોંધ : કોષ્ટક 14.11 ના સ્તંભ 1 અને સ્તંભ 3 થી બનેલો ભાગ સંચયી આવૃત્તિ કોષ્ટક તરીકે ઓળખાય છે. આશરે 50 % વિદ્યાર્થીઓએ 28.5 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે અને બીજા 50 % વિદ્યાર્થીઓએ 28.5 કરતાં વધુ ગુણ મેળવ્યાં છે અથવા માહિતી મધ્યસ્થ 28.5 દ્વારા મળે છે.

હવે, ચાલો આપણે જોઈએ કે વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યસ્થ કેવી રીતે મેળવવો. નીચેની પરિસ્થિતિ દ્વારા તે સમજુએ.

એક ચોક્કસ પરીક્ષામાં 53 વિદ્યાર્થીઓએ 100 માંથી મેળવેલા ગુણનું વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે આપેલ છે તેનો અભ્યાસ કરો :

કોષ્ટક 14.12

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

ઉપરના કોષ્ટક પરથી, નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપવા પ્રયત્ન કરો :

કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ 10 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા?

જવાબ સ્પષ્ટ છે કે, 5.

કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ 20 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા?

નિરીક્ષણ કરો કે, જે વિદ્યાર્થીઓએ 20 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે તે સંખ્યા $0 - 10$ સુધી મેળવેલા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા તેમજ $10 - 20$ સુધી મેળવેલા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાનો પોતાનામાં સમાવેશ કરે છે. તેથી 20 કરતાં ઓછા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $5 + 3$ એટલે કે 8 છે. આપણે કહીએ છીએ કે વર્ગ $10 - 20$ ની સંચયી આવૃત્તિ 8 છે.

આ જ પ્રમાણે, બીજા વર્ગો માટે સંચયી આવૃત્તિની ગણતરી કરી શકીએ. એટલે કે, 30 કરતાં ઓછા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, 40 કરતાં ઓછા, ..., 100 કરતાં ઓછા સુધી. આપણે તેમને નીચે આપેલ કોષ્ટક 14.13 માં દર્શાવીએ છીએ :

કોષ્ટક 14.13

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (સંચયી આવૃત્તિ)
10 કરતાં ઓછા	5
20 કરતાં ઓછા	$5 + 3 = 8$
30 કરતાં ઓછા	$8 + 4 = 12$
40 કરતાં ઓછા	$12 + 3 = 15$
50 કરતાં ઓછા	$15 + 3 = 18$
60 કરતાં ઓછા	$18 + 4 = 22$
70 કરતાં ઓછા	$22 + 7 = 29$
80 કરતાં ઓછા	$29 + 9 = 38$
90 કરતાં ઓછા	$38 + 7 = 45$
100 કરતાં ઓછા	$45 + 8 = 53$

ઉપર આપેલ વિતરણને ‘શી ઓછા પ્રકારનું’ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે. અહીં $10, 20, 30, \dots, 100$, એ જે-તે વર્ગ અંતરાલોની ઉર્ધ્વસીમાઓ છે.

આપણે આ જ પ્રમાણે, 0 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, 10 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, 20 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, અને આમ આગળ, વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા માટેનું કોષ્ટક બનાવી શકીએ. કોષ્ટક 14.12 પરથી, આપણે નિરીક્ષણ કરીએ છીએ કે, તમામ 53 વિદ્યાર્થીઓએ 0 કે તેનાથી વધારે ગુણ મેળવ્યા છે. 5 વિદ્યાર્થીઓએ અંતરાલ $0 - 10$ માં ગુણ મેળવ્યા છે. તેથી, આનો અર્થ એ થાય છે કે $53 - 5 = 48$ વિદ્યાર્થીઓ 10 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવે છે. આ જ પ્રમાણે આગળ વધતાં, આપણાને 20 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવવાવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $48 - 3 = 45$, 30 કે વધુ માટે $45 - 4 = 41$, અને આગળ, કોષ્ટક 14.14 માં બતાવ્યા પ્રમાણે.

કોષ્ટક 14.14

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (સંચયી આવૃત્તિ)
0 કે તેથી વધારે	53
10 કે તેથી વધારે	$53 - 5 = 48$
20 કે તેથી વધારે	$48 - 3 = 45$
30 કે તેથી વધારે	$45 - 4 = 41$
40 કે તેથી વધારે	$41 - 3 = 38$
50 કે તેથી વધારે	$38 - 3 = 35$
60 કે તેથી વધારે	$35 - 4 = 31$
70 કે તેથી વધારે	$31 - 7 = 24$
80 કે તેથી વધારે	$24 - 9 = 15$
90 કે તેથી વધારે	$15 - 7 = 8$

ઉપરના કોષ્ટકને, ‘થી વધારે પ્રકારનું’ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે. અહીં, 0, 10, 20, 30, ..., 90 એ જે તે વર્ગ-અંતરાલની અધઃસીમાઓ છે.

હવે, વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે આપણે આ પૈકી ગમે તે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

ચાલો, આપણે નીચે આપેલ કોષ્ટક 14.15 મેળવવા માટે કોષ્ટકો 14.12 અને 14.13 ને એકત્રિત કરીએ.

કોષ્ટક 14.15

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f)	સંચયી આવૃત્તિ (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

હવે, વર્ગીકૃત માહિતીમાં, સંચયી આવૃત્તિઓ તરફ દર્શિપાત કરીને જ આપણે મધ્યનું અવલોકન શોધવા સમર્થ ન હોઈ શકીએ, કારણ કે મધ્યનું અવલોકન એ કોઈક વર્ગઅંતરાલની અંદરનું મૂલ્ય હશે. તેથી કોઈક વર્ગમાં એક એવું અવલોકન શોધવું આવશ્યક છે, જે સમગ્ર વિતરણના બે સમાન ભાગ કરે. પરંતુ આ કયો વર્ગ હોવો જોઈએ?

આ વર્ગ શોધવા માટે, આપણે બધા વર્ગોની સંચયી આવૃત્તિઓ અને $\frac{n}{2}$ શોધીએ. હવે, આપણે એવો ચોક્કસ વર્ગ નક્કી કરીએ કે, જેની સંચયી આવૃત્તિ $\frac{n}{2}$ કરતાં મોટી (અને $\frac{n}{2}$ ની સૌથી નજીક) છે. આને મધ્યસ્થ વર્ગ કહેવાય છે. ઉપરના વિતરણમાં, $n = 53$. તેથી, $\frac{n}{2} = 26.5$. હવે, જેની સંચયી આવૃત્તિ 29 હોય તેવો વર્ગ 60 - 70 છે. 29 એ $\frac{n}{2}$ એટલે કે, 26.5 પછી તુરત જ મોટી આવૃત્તિ છે.

તેથી, 60 - 70 એ મધ્યસ્થ વર્ગ છે.

મધ્યસ્થ વર્ગ શોધ્યા પછી, આપણે મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ :

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

જ્યાં, l = મધ્યસ્થ વર્ગની અધિસીમા

n = અવલોકનોની સંખ્યા

cf = મધ્યસ્થ વર્ગની આગળના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ

f = મધ્યસ્થ વર્ગની આવૃત્તિ

h = વર્ગલંબાઈ (માની લીધું છે કે વર્ગલંબાઈ સમાન છે.)

$$\text{કિમતો } \frac{n}{2} = 26.5, l = 60, cf = 22, f = 7, h = 10$$

ઉપરના સૂત્રમાં આ કિમતો મૂકતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7} \right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4 \text{ મળશે.}$$

તેથી, લગભગ અડધા વિદ્યાર્થીઓએ 66.4 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે અને અડધા વિદ્યાર્થીઓએ 66.4 કરતાં વધારે ગુણ મેળવ્યા છે.

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X ની 51 છોકરીઓની ઉંચાઈનો (સેમીમાં) સર્વેક્ષણ હાથ ધરવામાં આવ્યો અને નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવી :

ઉંચાઈ (સેમીમાં)	છોકરીઓની સંખ્યા
140 કરતાં ઓછી	4
145 કરતાં ઓછી	11
150 કરતાં ઓછી	29
155 કરતાં ઓછી	40
160 કરતાં ઓછી	46
165 કરતાં ઓછી	51

ઉંચાઈનો મધ્યस્થ શોધો.

ઉકેલ : મધ્યસ્થ ઉંચાઈની ગણતરી કરવા માટે આપણાને વર્ગઅંતરાલો અને તેમને અનુરૂપ આવૃત્તિની જરૂર છે.

આપેલ વિતરણ ‘થી ઓછા પ્રકારનું’ છે. 140, 145, 150, ..., 165 અનુરૂપ વર્ગ અંતરાલોની ઉર્ધ્વસીમાઓ છે. તેથી વર્ગો 140 થી ઓછી સંખ્યા. 140 - 145, 145 - 150, ..., 160 - 165 હોવા જોઈએ. નિરીક્ષણ કરો કે, આપેલ વિતરણ પરથી, આપણાને જ્ઞાત થાય છે કે 4 છોકરીઓની ઉંચાઈ 140 સેમી કરતાં ઓછી છે, એટલે કે 140 થી નીચેના વર્ગ અંતરાલની આવૃત્તિ 4 છે. હવે, જેમની ઉંચાઈ 145 કરતાં ઓછી છે એવી 11 છોકરીઓ છે અને 4 છોકરીઓની ઉંચાઈ 140 કરતાં ઓછી છે. તેથી, અંતગલ 140–145 માં જેમની ઉંચાઈ હોય તેવી છોકરીઓની સંખ્યા $11 - 4 = 7$ છે, આ જ પ્રમાણે 145 - 150 ની આવૃત્તિ છે, $29 - 11 = 18$, 150 - 155 માટે $40 - 29 = 11$ અને આમ આગળ. તેથી આપણું આવૃત્તિ-વિતરણ કોણ્ઠક આપેલ સંચયી આવૃત્તિઓ દર્શાવવાની આ રીતનું થશે :

કોણ્ઠક 14.16

વર્ગ-અંતરાલો	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
140 થી ઓછી	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

હવે, $n = 51$. તેથી, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$. આ અવલોકન વર્ગ 145 - 150 માં છે. તેથી,

$$l (\text{અધઃસીમા}) = 145$$

$$cf(145 - 150 થી આગળના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ) = 11$$

$$f(\text{મધ્યસ્થ વર્ગ } 145 - 150 \text{ ની આવૃત્તિ}) = 18$$

$$h (\text{વર્ગલંબાઈ}) = 5$$

$$\text{સૂત્ર, મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h \text{ નો ઉપયોગ કરતાં,}$$

$$\text{આપણી પાસે, મધ્યસ્થ} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

તેથી, છોકરીઓની મધ્યસ્થ ઊંચાઈ 149.03 સેમી છે.

આનો અર્થ છે કે લગભગ 50 % છોકરીઓની ઊંચાઈ આ ઊંચાઈ કરતાં ઓછી અને 50 % છોકરીઓની ઊંચાઈ આના કરતાં વધારે છે.

ઉદાહરણ 8 : નીચે આપેલ માહિતીનો મધ્યસ્થ 525 છે. જો કુલ આવૃત્તિ 100 હોય, તો x અને y નાં મૂલ્યો શોધો.

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

ઉકેલ :

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

$n = 100$ આપેલ છે.

તેથી, $76 + x + y = 100$, એટલે કે $x + y = 24$... (1)

મધ્યસ્થ 525 છે, અને તે વર્ગ 500 - 600 માં આવેલ છે.

તેથી, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

$$\text{આપણને મળે છે, } 525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20} \right) \times 100$$

$$\text{એટલે કે, } 525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$\text{એટલે કે, } 25 = 70 - 5x$$

$$\text{એટલે કે, } 5x = 70 - 25 = 45$$

$$\text{તેથી, } x = 9$$

આને કારણે, (1) પરથી આપણને મળે છે. $9 + y = 24$,

$$\text{એટલે કે } y = 15$$

હવે, તમે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં તમામ ત્રણો ય માપોનો અભ્યાસ કર્યો છે, ચાલો આપણે ચર્ચા કરીએ કે કયું માપ ચોક્કસ જરૂરિયાત માટે ઉત્તમપણે અનુકૂળ રહેશે.

મધ્યક એ સૌથી વધુ વખત ઉપયોગમાં લેવાતું મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ છે, કારણ કે તે તમામ અવલોકનોને ગણતરીમાં લે છે અને સંપૂર્ણ માહિતીના સૌથી મોટા અને સૌથી નાના અવલોકનોની સીમાઓની વચ્ચે રહે છે. તે આપણને બે કે તેથી વધુ વિતરણોની સરખામણી કરવા માટેનું સામર્થ્ય આપે છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક ચોક્કસ પરીક્ષાના જુદી-જુદી શાળાઓના વિદ્યાર્થીઓના પરિણામના મધ્યકની સરખામણી કરવાથી, આપણે તારવી શકીએ કે, કઈ શાળાની કામગીરી વધુ સારી છે.

જોકે, માહિતીમાં આત્યંતિક કંમતો મધ્યકને અસર કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યાં વર્ગની આવૃત્તિ લગભગ એકસરખી હોય ત્યારે વર્ગનો મધ્યક, માહિતીનું સારું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે. પરંતુ, જો એક વર્ગની આવૃત્તિ 2 હોય અને બીજા પાંચની આવૃત્તિઓ 20, 25, 20, 21, 18 હોય, તો માહિતી જે રીતે વર્ત છે તેને મધ્યક સારી રીતે પ્રતિબિંબિત નહિ કરે. તેથી, આવી પરિસ્થિતિમાં મધ્યક, માહિતીનું સારી રીતે પ્રતિનિધિત્વ કરતો નથી.

જેમાં વ્યક્તિગત અવલોકનો મહત્વનાં નથી તેવા પ્રશ્નો અંગે આપણે ઈચ્છાએ કે 'નમૂનારૂપ' અવલોકન શોધી કાઢીએ, ત્યારે મધ્યસ્થ વધારે ધોર્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, કામદારોનો નમૂનારૂપ ઉત્પાદન દર શોધવો, દેશમાં સરેરાશ

ગણિત

વેતન વગેરે, આ પ્રકારની પરિસ્થિતિઓમાં આત્યંતિક મૂલ્યો હોઈ પણ શકે. તેથી મધ્યકને લેવા કરતાં આપણે મધ્યસ્થને વધુ સારા મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપ તરીકે લઈએ છીએ.

જે પરિસ્થિતિઓમાં સૌથી વધુ વખત આવતું મૂલ્ય અથવા સૌથી લોકપ્રિય વસ્તુને સ્થાપિત કરવાની જરૂર છે તે સ્થિતિમાં બહુલક શ્રેષ્ઠ વિકલ્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે સૌથી વધુ જોવાતો લોકપ્રિય ટી.વી. કાર્યક્રમ, સૌથી વધુ માંગવાળી ઉપભોક્તા વસ્તુ, સૌથી વધુ લોકો દ્વારા ઉપયોગમાં લેવાતો વાહનનો રંગ વગેરે.

નોંધ :

- મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના ત્રણ માપો વચ્ચે પ્રયોગમૂલક સંબંધ છે.

$$3 \times \text{મધ્યસ્થ} = \text{બહુલક} + 2 \times \text{મધ્યક}$$

- વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય તેવી વર્ગિકૃત માહિતીના મધ્યસ્થની પણ ગણતરી કરી શકાય છે. પરંતુ, આપણે અહીં તે ચર્ચા કરીશું નહિએ.

સ્વાધ્યાય 14.3

- નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ એક વિસ્તારમાં 68 ગ્રાહકોનો માસિક વીજવપરાશ આપે છે. આ માહિતીનો મધ્યસ્થ, મધ્યક અને બહુલક શોધો અને તેમને સરખાવો.

માસિક વપરાશ (એકમમાં)	ગ્રાહકોની સંખ્યા
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

- જો નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યસ્થ 28.5 હોય, તો x અને y નાં મૂલ્યો શોધો.

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
કુલ	60

3. એક જીવનવીમા એજન્ટે, 100 પોલિસીધારકોની ઉંમર માટે નીચેનું વિતરણ પ્રાપ્ત કર્યું. જેમની ઉંમર 18 વર્ષથી વધુ, પરંતુ 60 વર્ષથી ઓછી હોય તેવી જ વક્તિઓને પોલિસીઓ આપવામાં આવી હોય, તો તેમની મધ્યસ્થ ઉંમર શોધો.

ઉંમર (વર્ષમાં)	પોલિસીધારકોની સંખ્યા
20 થી ઓછી	2
25 થી ઓછી	6
30 થી ઓછી	24
35 થી ઓછી	45
40 થી ઓછી	78
45 થી ઓછી	89
50 થી ઓછી	92
55 થી ઓછી	98
60 થી ઓછી	100

4. એક છોડનાં 40 પાંડાંઓની લંબાઈ ખૂબ જ નજીકના મિલીમીટર સુધી માપવામાં આવી અને મેળવેલ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

લંબાઈ (મિલીમાં)	પાંડાંઓની સંખ્યા
118 – 126	3
127 – 135	5
136 – 144	9
145 – 153	12
154 – 162	5
163 – 171	4
172 – 180	2

પાંડાંઓની મધ્યસ્થ લંબાઈ શોધો.

(સ્થળ : મધ્યસ્થ શોધવા માટે માહિતીને સતત વર્ગોમાં ફેરવવાની જરૂર છે, કારણ કે સૂત્ર સતત વર્ગો માટે છે. વર્ગો 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5, ... , 171.5 – 180.5 માં પરિવર્તિત થાય છે.)

ગણિત

5. નીચેનું કોષ્ટક 400 નીઓન ગોળાના આયુષ્યનું આવૃત્તિ વિતરણ આપે છે :

આયુષ્ય (કલાકોમાં)	ગોળાની સંખ્યા
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

ગોળાના આયુષ્યનો મધ્યસ્થ શોધો.

6. સ્થાનિક ટેલિવીન યાદીમાંથી 100 અટક થાદચિંહિક રીતે પસંદ કરવામાં આવી હતી અને અંગ્રેજ મૂળાક્ષરોમાં અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે મેળવ્યું હતું :

અક્ષરોની સંખ્યા	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
અટકોની સંખ્યા	6	30	40	16	4	4

અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો. અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનો મધ્યક પણ શોધો. અટકોમાં અક્ષરોની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

7. નીચેનું વિતરણ એક ધોરણના 30 વિદ્યાર્થીઓનાં વજન આપે છે. વિદ્યાર્થીઓનાં વજનનો મધ્યસ્થ શોધો.

વજન (કિગ્રામાં)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	8	6	6	3	2

14.5 સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણની આલેખીય પ્રસ્તુતિ

આપણે જાડીએ છીએ તેમ, ચિત્રો શબ્દો કરતાં વધુ સ્પષ્ટ કહી જાય છે. આલેખીય નિરૂપણ પર દસ્તિપાત કરતાં જ આપણને તે આપેલ માહિતીને સમજવામાં મદદ કરે છે. ધોરણ IX માં આપણે માહિતીને લંબાલેખ, સંત્બાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણ દ્વારા દર્શાવી છે.

ચાલો, હવે આપણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણને આલેખ દ્વારા દર્શાવીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો આપણે કોષ્ટક 14.13 માં આપેલ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો વિચાર કરીએ.

યાદ કરો કે, કિમતો 10, 20, 30, ..., 100 અનુરૂપ વર્ગઅંતરાલોની ઉધ્વસીમાઓ છે. કોષ્ટકની માહિતીને આલેખ દ્વારા દર્શાવવા માટે, આપણે વર્ગઅંતરાલોની ઉધ્વસીમાઓને સમક્ષિતિજ અક્ષ (x -અક્ષ) અને



S9G3K9



તેમની અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિઓ શિરોલંબ અક્ષ (y-અક્ષ) પર અનુકૂળ માપ પસંદ કરીને દર્શાવીશું. બંને અક્ષો પર માપ સમાન ન પણ હોઈ શકે. ચાલો હવે આપણે કમ્પ્યુટર જોડેને અનુરૂપ બિંદુઓ (અધિસીમા, અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિ) એટલે કે, (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) આલેખપત્ર પર મૂકીએ અને તેમને મુક્તહસ્ત સણંગ વક્ત દ્વારા જોડીએ. આપણે જે વક્ત મેળવીએ છીએ તેને **સંચયી આવૃત્તિ વક્ત** અથવા **થી ઓજ્વ પ્રકારનો ઓજ્વ** (ogive) (જુઓ આંકૃતિ 14.1) કહે છે.

શબ્દ 'ogive' નો ઉચ્ચાર ઓજ્વ થાય છે અને તે શબ્દ ogee પરથી ઉત્તરો આવ્યો છે. ogee અંતર્ગોળ ચાપનું બહિર્ગોળ ચાપ સાથે મિલન થતું હોય તેવા આકારથી બને છે. આથી શિરોલંબ અંતવાળો S આ આકારનો વક્ત બને છે. સ્થાપત્ય કલામાં 14 મી તથા 15 મી સદીની ગોથીક પદ્ધતિનાં લક્ષણો પૈકીનું એક ogee આકાર છે.

તે પછી, ફરીથી આપણે કોષ્ટક 14.14 માં આપેલ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો વિચાર કરીએ અને તેનો 'થી વધુ પ્રકારનો ઓજ્વ' દોરીએ.

ધાર કરો, અહીં, 0, 10, 20, ..., 90 એ અનુક્રમે વર્ગ અંતરાલો 0 - 10, 10 - 20, ..., 90 - 100 ની અધિસીમાઓ છે. 'કરતાં વધારે પ્રકારનું' આલેખીય નિરૂપણ કરવા માટે આપણે x-અક્ષ પર અધિસીમાઓ અને અનુરૂપ y-અક્ષ પર સંચયી આવૃત્તિઓ દર્શાવીશું. પછી આપણે બિંદુઓ (અધિસીમા, અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિ), એટલે કે, (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) આલેખ પેપર પર દર્શાવીશું અને તેમને મુક્તહસ્ત સણંગ વક્ત દ્વારા જોડીશું. આપણને જે વક્ત મળે છે તે સંચયી આવૃત્તિ વક્ત છે અથવા **'થી વધુ પ્રકાર'**નો ઓજ્વ છે. (જુઓ આંકૃતિ 14.2.)

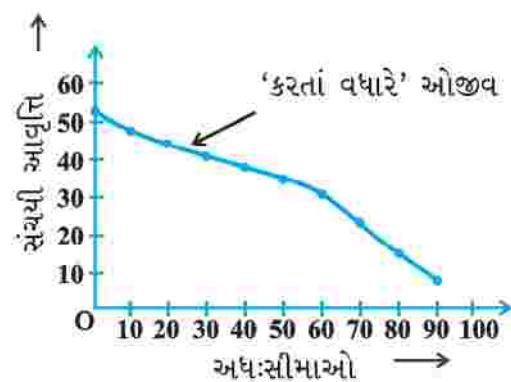
નોંધ : નોંધ કરો કે, બંને ઓજ્વને જે કોષ્ટક 14.12 માં આપેલ છે. (આંકૃતિ 14.1 અને આંકૃતિ 14.2) તે એક જ માહિતીને અનુરૂપ છે.

હવે, ઓજ્વ મધ્યસ્થ સાથે કોઈ પણ રીતે સંબંધિત છે?

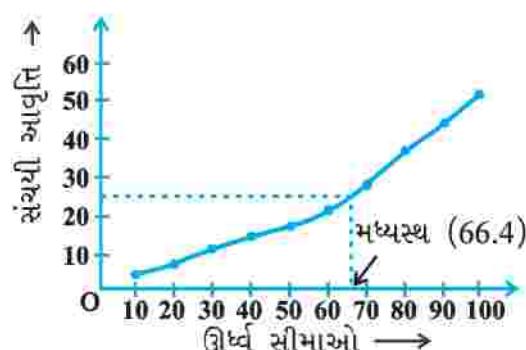
કોષ્ટક 14.12 ની માહિતીને અનુરૂપ, આ બંને સંચયી આવૃત્તિ વક્તો પરથી શું મધ્યસ્થ મેળવવો શક્ય છે? ચાલો આપણે જોઈએ.

$$y\text{-અક્ષ પર } \frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5 \text{ નું સ્થાન દર્શાવવું તે એક સ્પષ્ટ રસ્તો છે. (જુઓ આંકૃતિ 14.3.)$$

આ બિંદુથી વક્તના બિંદુમાં છેદતી હોય તેવી x-અક્ષને સમાંતર રેખા દોરો. આ બિંદુથી x-અક્ષને લંબ દોરો. આ લંબના x-અક્ષ સાથેના છેદબિંદુનો x-પામ માહિતીનો મધ્યસ્થ આપે છે (જુઓ આંકૃતિ 14.3.)



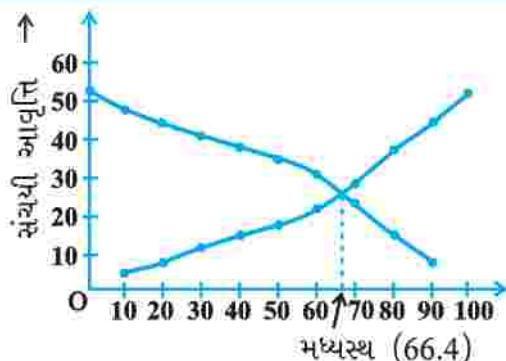
આંકૃતિ 14.2



આંકૃતિ 14.3

મધ્યસ્થ શોધવાની અન્ય રીતો નીચે આપેલ છે :

એક જ અક્ષ પર બંને ઓળખ દોરો. (એટલે કે, 'થી ઓછા પ્રકારનો અને થી વધારે પ્રકારનો') બે ઓળખ એકબીજાને એક બિંદુમાં છેદશે. આ બિંદુથી, જો આપણે x -અક્ષ પર લંબ દોરીએ, તો બિંદુ x -અક્ષને જ્યાં તે છેદશે, તેનો x -યામ મધ્યસ્થ આપશે. (જુઓ આકૃતિ 14.4.)



આકૃતિ 14.4

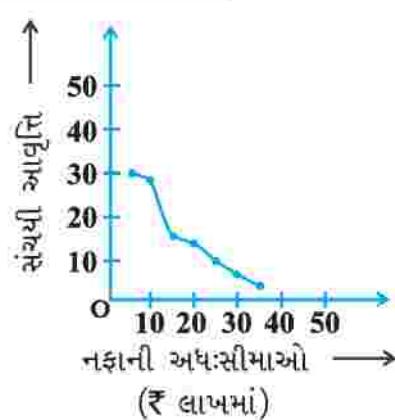
ઉદાહરણ 9 : નીચેનું વિતરણ એક વસ્તીનાં શોપિંગ કોમ્પ્લેક્સની 30 દુકાનો દ્વારા માપ્ત નફો આપે છે :

નફો (રૂ લાખમાં)	દુકાનોની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
5 કે તેનાથી વધારે	30
10 કે તેનાથી વધારે	28
15 કે તેનાથી વધારે	16
20 કે તેનાથી વધારે	14
25 કે તેનાથી વધારે	10
30 કે તેનાથી વધારે	7
35 કે તેનાથી વધારે	3

ઉપર આપેલ માહિતી માટે બંને ઓળખ દોરો. તે પરથી મધ્યસ્થ નફો મેળવો.

ઉકેલ : પહેલાં આપણે યામાંથી દોરીએ, નફાની અધઃસીમાઓ સમાક્ષિતિજ અક્ષ પર અને સંચયી આવૃત્તિ y -અક્ષ પર લઈએ. પછી બિંદુઓ $(5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7)$ અને $(35, 3)$ દર્શાવે. આપણે આ બિંદુઓને સંગ્રહ મુક્ત હસ્ત વક્ત દ્વારા 'થી વધારે' પ્રકારનો ઓળખ મેળવવા માટે જોડીએ. (આકૃતિ 14.5 માં બતાવ્યા પ્રમાણો)

હવે, ચાલો આપણે નીચે આપેલ કોષ્ટક પરથી વર્ગો, તેમની આવૃત્તિઓ અને સંચયી આવૃત્તિ મેળવીએ :



આકૃતિ 14.5

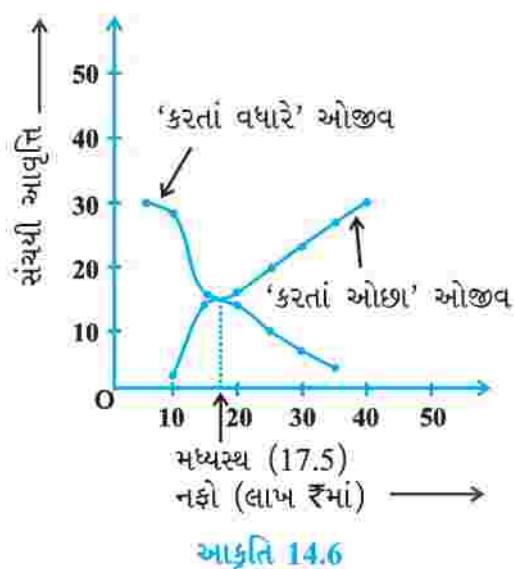
કોષ્ટક 14.17

વર્ગો	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
દુકાનોની સંખ્યા	2	12	2	4	3	4	3
સંચયી આવૃત્તિ	2	14	16	20	23	27	30

આ કિમતોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે બિંદુઓ $(10, 2)$, $(15, 14)$, $(20, 16)$, $(25, 20)$, $(30, 23)$, $(35, 27)$, $(40, 30)$ દર્શાવીને એ અંશો પર આકૃતિ 14.5 માં છે તેમ 'થી ઓછા' પ્રકારનો ઓળખ મેળવીએ. આકૃતિ 14.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે મુક્ત હસ્ત વક્ત દોરીએ.

તેમનાં છેદ બિંદુઓનો x -યામ 17.5 ની નજીક છે અને તે મધ્યस્થ છે. આ હકીકતને સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને પણ ચકાસી શકાય. તેથી, મધ્યસ્થ નંખો ₹ 17.5 લાખ છે.

નોંધ : ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં, અત્રે નોંધનીય છે કે, વર્ગાંતરાલો સતત હતા. ઓળખ દોરવા માટે, વર્ગાંતરાલો સતત હોય, તે સુનિશ્ચિત કરવું જોઈએ. (વળી, ધોરણ IX માં સંભાલેખની રચનાઓ જુઓ.)



સ્વાધ્યાય 14.4

1. નીચેનું આવૃત્તિ વિતરણ એક કારખાનાના 50 કર્મચારોનું ફૈનિક વેતન દર્શાવે છે :

ફૈનિક વેતન (₹ માં)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
કામદારોની સંખ્યા	12	14	8	6	10

ઉપરના આવૃત્તિ વિતરણને, 'થી ઓછા પ્રકાર' નાં સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવો અને તેનો 'ઓળખ' દોરો.

2. એક વર્ગના 35 વિદ્યાર્થીઓની વજનાં તપાસ દરમિયાન, તેમનાં વજન નીચે પ્રમાણે નોંધાયા :

વજન (કિલોગ્રામમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
38 કરતાં ઓછાં	0
40 કરતાં ઓછાં	3
42 કરતાં ઓછાં	5
44 કરતાં ઓછાં	9
46 કરતાં ઓછાં	14
48 કરતાં ઓછાં	28
50 કરતાં ઓછાં	32
52 કરતાં ઓછાં	35

આપેલ માહિતી માટે 'થી ઓછા પ્રકાર'નો ઓળખ દોરો. તેથી વજનનો મધ્યસ્થ મેળવો. આલેખ પરથી આ મેળવેલા પરિણામને સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ચકાસો.

ગણિત

3. નીચેનું કોષ્ટક એક ગામનાં 100 ખેતરોમાં પ્રતિ હેક્ટર ઘઉનું ઉત્પાદન દર્શાવે છે :

ઉત્પાદન ક્ષમતા (કિગ્રા/હેક્ટર)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
ખેતરોની સંખ્યા	2	8	12	24	38	16

આ આવૃત્તિ વિતરણને 'થી વધારે પ્રકાર'ના વિતરણમાં પરિવર્તિત કરો અને તેનો ઓળખ દોરો.

14.6 સારાંશ

આ પ્રકારણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો :

1. વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક નીચેનાં સૂત્રો દ્વારા મેળવી શકાય :

$$(i) \text{ પ્રત્યક્ષ રીત : } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$(ii) \text{ ધારેલ મધ્યકની રીત : } \bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

$$(iii) \text{ પદ વિચલનની રીત : } \bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$$

અતે વર્ગની આવૃત્તિ તેના મધ્યબિંદુએ કેન્દ્રિત છે એવી ધારણા લીધી છે. આ મધ્યબિંદુને વર્ગની મધ્યકમત કહે છે.

2. વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક,

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને શોધી શકાય છે. સંકેતોના પ્રચલિત અર્થો છે.

3. જેને આપેલ વર્ગથી અગાઉના બધા વર્ગની આવૃત્તિઓનો સરવાળો કરીને મેળવાય છે એવી આવૃત્તિ સંચયી આવૃત્તિ છે.

4. વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ,

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.

સંકેતોને તેમના પ્રચલિત અર્થો છે.

5. સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણને આલેખિક સ્વરૂપે સંચયી આવૃત્તિ વક્ત અથવા 'થી ઓછા પ્રકાર'નો અને 'થી વધારે પ્રકાર'ના ઓળખ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે.

6. વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થને આલેખ દ્વારા, આ માહિતીઓના બે ઓળખના છેદબિંદુના ર્થામ તરીકે મેળવી શકાય છે.

વાયકને નોંધ

વર્ગીકૃત માહિતીના બહુલક અને મધ્યસ્થની ગણતરી કરવા માટે સૂત્રોના ઉપયોગ કરતાં પહેલાં તે સુનિશ્ચિત કરી લેવું જોઈએ કે, વર્ગ અંતરાલો સતત છે. આ જ શરત ઓળખની રૂચના માટે પડ્યા લાગુ પડે છે. વધુમાં, ઓળખના ડિસ્સામાં, બંને અક્ષો પર માપ અસમાન પડ્યા હોઈ શકે.





U9H3K5

સંભાવના

15

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

— R.S. Woodward

15.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ઘટનાઓની પ્રાયોગિક સંભાવનાઓનો અભ્યાસ ધોરણ IX માં કર્યો છે. તે પ્રયોગોનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત હતી.

આપણે એક પ્રયોગની ચર્ચા કરી હતી. તેમાં એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાથી મળતાં પરિણામોની આવૃત્તિ નીચે પ્રમાણે હતી :

ઇઅપ (H) : 455 કાંટો (T) : 545

આ પ્રયોગના આધારે, ઇઅપ મળવાની પ્રાયોગિક સંભાવના $\frac{455}{1000}$, એટલે કે 0.455 હતી અને કાંટો મળવાની સંભાવના 0.545 હતી. (આ સાથે જ ધોરણ IX ગણિતશાસ્કના પાઠ્યપુસ્તકના પ્રકરણ 15 નું ઉદાહરણ 1 જુઓ.) નોંધ કરો કે, આ સંભાવનાઓ એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત હો. આ કારણે, તે પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ કહેવાય હો. વાસ્તવમાં, પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ, ઘટનાઓ ઉદ્ભબે તે માટેના પ્રત્યક્ષ પ્રયોગો અને જરૂર પૂરતા સાનુકૂળ સંજોગોનાં પરિણામો પર આધારિત હો. તદ્વપરાંત, આ સંભાવનાઓ કેવળ ‘અંદાજિત’ હો. જો આપણે આ જ પ્રયોગને અન્ય 1000 વખત કરીએ, તો આપણાને જુદી માહિતી મળી શકે અને તે અન્ય અંદાજિત સંભાવના આપતી હોય.

તમે એક સિક્કાને અનેક વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ ધોરણ IX માં કર્યો છે અને નોંધ્યું છે કે, ઘણી વાર સિક્કા પર ઇઅપ (અથવા કાંટો) મળ્યો છે. (પ્રકરણ 15 ની પ્રવૃત્તિઓ 1 અને 2 નો સંદર્ભ જુઓ.) તમે એ પણ નોંધ્યું હોશે કે,

જેમ જેમ સિક્કાને ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના, સંખ્યા $\frac{1}{2}$ ની નજીક અને નજીક પહોંચે છે. કેવળ તમે જ નહિએ, પરંતુ દુનિયાના જુદા-જુદા ભાગોમાંથી અન્ય ઘણી બધી વ્યક્તિઓએ આ પ્રકારના પ્રયોગ કર્યા છે અને સિક્કા પર મળતી છાપની સંખ્યા નોંધી છે.

ઉદાહરણ તરીકે, અઢારમી સદીના ફેન્ચ પ્રકૃતિશાસ્ક્રિપ્ટ કોમ્ટ દ બફફન (Comte de Buffon) એક સિક્કાને 4040 વખત ઉછાલ્યો અને 2048 વખત છાપ મેળવી. આ કિર્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{2048}{4040}$ હતી, એટલે કે 0.507. ક્રિટનના જે. ઈ. કેરિચ (J. E. Kerrich) સિક્કાને 10000 વખત ઉછાળતાં 5067 વખત છાપ મેળવી. આ કિર્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ હતી. આંકડાશાસ્ક્રિપ્ટ પીઅરસન (Karl Pearson) કેટલોક વધારે સમય ફાળવ્યો અને 24,000 વખત સિક્કાને ઉછાલ્યો. તેણે 12,012 વખત છાપ મેળવી અને આમ, તેણે છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના 0.5005 મેળવી હતી.

હવે, ધારો કે આપણે પૂછીએ, જો પ્રયોગને દસ લાખ વખત અથવા એક કરોડ વખત અને આમ વધુ ને વધુ વખત (પુનરાવર્તિત) કરવામાં આવે તો છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના શું થશે? આપને સહજ જ્ઞાનથી અંતર્સ્કુરણા થશે કે જેમ સિક્કાને ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના સંખ્યા 0.5 એટલે કે $\frac{1}{2}$ ની આસપાસ સ્થાયી થાય છે. તેને જ આપણે છાપ મેળવવાની (અથવા કાંટો મેળવવાની) સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (theoretical probability) કહીએ છીએ. તે તમે પછીના વિભાગમાં જોશો. આ પ્રકારણમાં, આપણે ઘટનાની પ્રશ્ના (સૈદ્ધાંતિક પણ કહેવાય છે) સંભાવનાનો પરિચય અને આ જ્યાલ પર આધારિત સરળ કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું.

15.2 સંભાવના – પ્રશ્નાંસાં અભિગમ

ચાલો, આપણે નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

ધારો કે, એક સિક્કાને યાદદિની રીતે ઉછાલ્યો છે.

જ્યારે આપણે એક સિક્કો બોલીએ છીએ, ત્યારે આપણે માની લઈએ છીએ કે, તે ‘સમતોલ’ છે, એટલે કે, તેના માટે એવું કોઈ જ કારણ નથી કે તે બીજી બાજુ કરતાં એક બાજુ પર વધુ વખત નીચે પડે છે. એવા સિક્કાના આ સમપ્રમાણતાના ગુણવર્ભને આપણે સમતોલ હોવાનો ગુણવર્ભ કહીશું. શબ્દગ્રયોગ ‘યાદદિની ઉછાલી’નો આપણે એ અર્થ કરીશું કે, સિક્કો મુક્તપણે, કોઈપણ પ્રકારના પૂર્વગ્રહ કે વિઘ્ન વિના નીચે પડવા માટે મુક્ત છે.

આપણે અગાઉથી જ જાણીએ છીએ કે બે શક્ય રીતો પૈકી કોઈ એક રીતે જ સિક્કો નીચે પડશે - સિક્કા ઉપર છાપ (H) આવશે અથવા કાંટો (T) આવશે (સિક્કો તેની ધાર પર નીચે પડશે, તે શક્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, સિક્કો રેતીમાં પડે છે. આપણે આ શક્યતાને નકારી કરીએ છીએ.). આપણે વ્યાજબીપણે ધારી શકીએ છીએ કે, પ્રત્યેક પરિણામ, છાપ અથવા કાંટો, ઉદ્દ્દલ્લવાની એટલી જ શક્યતા છે, જેટલી બીજાની. પરિણામો છાપ અથવા કાંટો, સમસંભાવી છે, અને કહીને આપણે તેનો ઉલ્લેખ કરીશું.

સમસંભાવી પરિણામોના અન્ય ઉદાહરણ માટે, ધારો કે, આપણે એક પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. આપણા માટે, પાસાનો અર્થ હેઠાં સમતોલ પાસો એવો કરીશું. શક્ય પરિણામો શું છે? તે પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે.



R 3P513

પ્રત્યેક સંખ્યા પાસા ઉપર તે દેખાય તેની શક્યતા સમાન છે. તેથી પાસાને ફેંકવાનાં સમસંભાવી પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે.

શું પ્રત્યેક પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી હોય છે ? ચાલો આપણે જોઈએ.

ધારો કે, એક થેલામાં 4 લાલ દડા અને 1 ભૂરો દડો છે અને તમે થેલામાં જોયા વગર એક દડો યાદચિક રીતે પસંદ કરો છો. ક્યાં પરિણામો મળશે ? શું પરિણામો - ‘એક લાલ દડો’ અને ‘એક ભૂરો દડો’ સમસંભાવી છે ? 4 લાલ દડા અને માત્ર એક ભૂરો દડો હોવાથી, તમે સંમત થશો કે, તમને ભૂરો દડો મળો તે કરતાં લાલ દડો મળવાની શક્યતા વધુ છે. તેથી, પરિણામ (લાલ દડો અથવા ભૂરો દડો) સમસંભાવી નથી. આમ છતાં, થેલામાંથી કોઈ પણ રંગનો એક દડો યાદચિક રીતે પસંદ કરવાના પ્રયોગનાં પરિણામ સમસંભાવી છે. તેથી, બધા જ પ્રયોગો માટે જરૂરી નથી કે, પરિણામો સમસંભાવી હોય.

પરંતુ, આ પ્રકરણમાં, હવે પછીથી, આપણે ધારી લઈછું કે, બધા જ પ્રયોગોનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

ધોરણ IX માં ઘટના E ની પ્રયોગાત્મક સંભાવના P(E) આપણે નીચે આપેલ સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાપિત કરી છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના } E \text{ ઉદ્દ્દેશ્યે તેવા પ્રયત્નોની સંખ્યા}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}$$

સંભાવનાનું પ્રયોગમૂલક અર્થઘટન પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ઘણી વખત મોટી સંખ્યાના પ્રયત્નો પુનરાવર્તિત કરી શકાય એવી પ્રત્યેક ઘટના પર લાગુ પાડી શકાય. પ્રયોગને પુનરાવર્તિત કરવાની કિયાને કેટલીક મર્યાદાઓ છે, જેમ કે, તે ખૂબ જ ખર્ચાળ હોઈ શકે અથવા ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં અવ્યવહારુ પણ હોય. અલબંત, સિક્કાને ઉછાળવાના અથવા પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગોમાં તે સારી રીતે કાર્ય કરે છે. પરંતુ, ઉપગ્રહનું પ્રક્રિપણ કરવાના પ્રયોગના પુનરાવર્તન વિશે શું કહેવાય ? ખાસ કરીને પ્રક્રિપણ દરમિયાન ઉપગ્રહના નિષ્ફળ જવાની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે અથવા બહુમાણી ઈમારત ભૂકૂપમાં નાશ પામે તેની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે ઘટનાનું પુનરાવર્તન કરાય ?

જે પ્રયોગોમાં આપણે ચોક્કસ પ્રકારની ધારણાઓ કરવા માટે તૈયાર હોઈએ છીએ, તે પ્રયોગના પુનરાવર્તનને ટાળી શકાય, કારણ કે ધારણાઓ સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની ગણતરીમાં પ્રત્યક્ષ રીતે મદદ કરે છે. સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા આપણને સંભાવનાની નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે. (આ ધારણા ઉપરનાં બે ઉદાહરણો સિક્કા તથા પાસા ઉછાળવા જેવા ઘણા પ્રયોગોમાં સત્ય છે.)

ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (પ્રશિષ્ઠ સંભાવના પણ કહેવાય છે), P(E) તરીકે દર્શાવાય છે અને તેને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાપિત કરવામાં આવે છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના } E \text{ માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}{\text{પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા}$$

અને આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાને આપણે ટૂકમાં સંભાવના તરીકે લઈશું.

સંભાવનાની આ વ્યાખ્યા **પિએર સિમોન લાપ્લાસ (Pierre Simon Laplace)** C.E. 1795 માં આપી હતી.

Probability theory had its origin in the 16th century when an Italian physicist and mathematician **J.Cardan** wrote the first book on the subject, **The Book on Games of Chance**. Since its inception, the study of probability has attracted the attention of great mathematicians. **James Bernoulli** (C.E.1654 – C.E.1705), **A. de Moivre** (C.E.1667 – C.E.1754), and **Pierre Simon Laplace** are among those who made significant contributions to this field. Laplace's **Theorie Analytique des Probabilités**, C.E. 1812, is considered to be the greatest contribution by a single person to the theory of probability. In recent years, probability has been used extensively in many areas such as biology, economics, genetics, physics, sociology etc.



Pierre Simon Laplace
(C.E.1749-C.E.1827)

ચાલો, આપણે જેમના માટે કેટલીક સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા સત્ય છે તેવી ઘટનાઓની સંભાવના શોધીએ.

ઉદાહરણ 1 : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે ત્યારે છાપ (H) મળવાની સંભાવના શોધો તથા કાંટો (T) મળવાની સંભાવના પડા શોધો.

ઉકેલ : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા બે છે - છાપ (H) અને કાંટો (T). છાપ મળે તેને ઘટના E લો. ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા (એટલે કે છાપ મળવાની) 1 છે. તેથી

$$P(E) = P(\text{છાપ}) = \frac{\text{E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}} = \frac{1}{2}$$

આ જ પ્રમાણે, જો 'કાંટો મળે' તે ઘટના F હોય તો

$$P(F) = P(\text{કાંટો}) = \frac{1}{2} \quad (\text{જી માટે ?})$$

ઉદાહરણ 2 : એક થેલામાં લાલ, ભૂરો અને પીળો એમ ત્રણ સમાન કદના દડા છે. ડિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચિક રીતે પસંદ કરે છે. તેણે પસંદ કરેલ દડો (i) પીળો હોય (ii) લાલ હોય (iii) ભૂરો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ડિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચિક રીતે પસંદ કરે છે. તેથી, તે આપેલ દડામાંથી ગમે તે એક દડો પસંદ કરે એ સમસંભાવી છે.

'પસંદ કરેલ દડો પીળો હોય' તેને ઘટના Y લો,

‘પસંદ કરેલ દડો ભૂરો હોય’ તેને ઘટના B લો, અને ‘પસંદ કરેલ દડો લાલ હોય’ તેને ઘટના R લો.
હવે, શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા = 3 છે.

(i) ઘટના Y માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 1. તેથી, $P(Y) = \frac{1}{3}$

આ જ પ્રમાણે (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ અને (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$

નોંધ :

1. જે ઘટના ગ્રયોગનું માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી હોય તેને પ્રાથમિક ઘટના કહે છે. ઉદાહરણ 1 માં બંને ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે. આ જ પ્રમાણે ઉદાહરણ 2 માં તૃણોય ઘટનાઓ Y, B અને R પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે.

2. ઉદાહરણ 1માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(E) + P(F) = 1$

ઉદાહરણ 2 માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

અવલોકન કરો કે, પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 છે. વાપક રીતે પણ આ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : ધારો કે, આપણે પાસાને એકવાર ફેકીએ છીએ. (i) પાસાના ઉપરના પૃષ્ઠ ઉપર 4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ? (ii) 4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ?

ઉકેલ : (i) અહીં, ધારો કે, ‘4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવી’ તે ઘટના E છે. પાસો ફેકવાના કુલ શક્ય પરિણામો છ છે : 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 અને E માટે સાનુકૂળ પરિણામો 5 અને 6 છે. માટે E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 2 છે. તેથી,

$$P(E) = P(4 \text{ કરતાં મોટી સંખ્યા}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) ધારો કે ‘4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવવી’ તે ઘટના F છે. શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 6

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામો 1, 2, 3, 4 છે.

તેથી, F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે.

$$\text{માટે, } P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ઉપરના ઉદાહરણમાં ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે ? ના, તેઓ પ્રાથમિક ઘટનાઓ નથી કારણ કે, ઘટના E માં 2 પરિણામો અને ઘટના F માં 4 પરિણામો છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 1 પરથી, આપણે નોંધ કરીએ,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

જ્યાં, E એ ‘છાપ મેળવવાની’ ઘટના છે અને F એ ‘કાંટો મેળવવાની’ ઘટના છે. ઉદાહરણ 3 નાં (i) અને (ii) પરથી, આપણને મળે છે ;

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad (2)$$

જ્યાં, E એ ઘટના ‘4 કરતાં મોટી સંખ્યા’ અને F એ ઘટના 4 કરતાં નાની અથવા તેને સમાન સંખ્યા છે.

ગણિત

આપણે નોંધીએ કે, 4 કરતાં મોટી નહી તેવી સંખ્યા મેળવવી એ 4 કે 4 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવા બરાબર જ છે અને એથી ઉલ્લંઘન પડત.

ઉપર દર્શાવેલ (1) અને (2) માં, શું F એ ‘not E’ (એટલે કે, ‘E નહિ’) ને સમાન નથી ? હા, તે છે. આપણે ઘટના ‘E નહી’ ને \bar{E} દ્વારા દર્શાવીશું.

$$\text{એથી } P(E) + P(E \text{ નહિ}) = 1$$

$$\text{એટલે કે } P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

આ પરિણામ આપણને આપે છે, $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

$$\text{વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ઘટના } E \text{ માટે સત્ય છે કે } P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

ઘટના \bar{E} , ઘટના ‘E નહિ’ રજૂ કરે છે. તેને ઘટના E ની પૂરક ઘટના કહે છે. આપણે E અને \bar{E} એકબીજાની પૂરક ઘટનાઓ છે તેમ પણ કહીએ છીએ.

આગળનો અભ્યાસ કરતાં પહેલાં, ચાલો આપણે નીચે આપેલા પ્રશ્નોના ઉત્તર શોખવાના પ્રયત્ન કરીએ.

(i) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં સંખ્યા 8 મળે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં 7 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના શું છે ?

ચાલો આપણે (i) નો ઉત્તર જોઈએ :

આપણે જાણીએ છીએ કે પાસાને એકવાર ઉછાળતાં માત્ર જ શક્ય પરિણામો મળે છે. આ પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે. પાસાના કોઈ પણ પૃષ્ઠ પર 8 અંકિત નથી, તેથી 8 માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી. એટલે કે, આવાં પરિણામોની સંખ્યા શૂન્ય છે. બીજા શરૂદોમાં, પાસાને એક વાર ઉછાળતાં 8 મેળવવો, અશક્ય છે.

$$\text{તેથી, } P(8 \text{ મેળવવું}) = \frac{0}{6} = 0$$

એટલે કે, જે ઘટના ઉદ્દ્દેશ્યવી અશક્ય છે તેની સંભાવના 0 છે. આવી ઘટનાને અશક્ય ઘટના કહે છે.

ચાલો આપણે (ii) નો ઉત્તર જોઈએ :

પાસાની દરેક સપાટી પર 7 કરતાં નાની સંખ્યા અંકિત કરેલ હોવાથી, એ વાત ચોક્કસ છે કે, પાસાને એકવાર ઉછાળવાથી હંમેશા 7 કરતાં નાની સંખ્યા જ મળશે. તેથી, સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા પણ બધા જ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા જેટલી જ એટલે કે 6 છે.

$$\text{એના પરિણામ સ્વરૂપે } P(E) = P(7 \text{ કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવી) = \frac{6}{6} = 1$$

તેથી, જે ઘટના ચોક્કસપણે અથવા નિશ્ચિતપણે ઉદ્દેશ્યે તેમ હોય તેની સંભાવના 1 છે. આવી ઘટનાને ચોક્કસ ઘટના અથવા નિશ્ચિત ઘટના કહે છે.

નોંધ : સંભાવના $P(E)$ ની વાગ્યા પરથી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, અંશ (ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા) એ હંમેશાં છેદ જેટલી અથવા તેનાં કરતા નાની (શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા) સંખ્યા છે. તેથી,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

હવે, ચાલો આપણે પતાંની રમત સાથે સંકળાયેલ ઉદાહરણ લઈએ. તમે પતાં રમવાની થોકડી જોઈ છે ? તે 52 પતાં ધરાવે છે તેમને એક ભાતનાં 13 પતાં હોય તેવા 4 સમૂહમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. પ્રત્યેક પત્તું કાળી (♣), લાલ (♥), ચોક્ક (♦) અથવા કુલ્લા (♦) નું હોય છે. કાળી અને કુલ્લાનાં પતાં કાળા રંગના, જ્યારે લાલ અને ચોક્કનાં પતાં લાલ રંગના હોય છે. પ્રત્યેક સમૂહમાં એક્કો, રાજા, રાણી, ગુલામ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 નાં પતાં હોય છે. રાજા, રાણી અને ગુલામના પતાંઓને મુખમુદ્રા પતાં (face cards) કહે છે.

ઉદાહરણ 4 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પતાંની થોકડીમાંથી એક પતું ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલું પતું (i) એક્કો હોય (ii) એક્કો ન હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : સરખી રીતે ચીપેલાં પતાં સમસંભાવી પરિણામોની ખાતરી આપે છે.

(i) થોકડીમાં 4 એક્કો હોય છે. ‘પતું એક્કો છે’ તેને ઘટના E લો.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે અને શક્ય પરિણામોની સંખ્યા 52 છે. (શા માટે ?)

$$\text{તેથી, } P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) ‘ખેંચેલું પતું એક્કો નથી’ તે ઘટનાને F લો.

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = $52 - 4 = 48$ છે.

(શા માટે ?)

શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 52

$$\text{તેથી, } P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

નોંધ : નોંધ કરો કે, F બીજું કશું નહીં પરતું \bar{E} છે. તેથી, આપણે P(F) ની ગણતરી નીચે પ્રમાણે પણ કરી

$$\text{શકીએ : } P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

ઉદાહરણ 5 : બે ખેલાડીઓ, સંગીતા અને રેશ્મા ટેનિસ મેચ રમે છે. સંગીતા મેચ જતે તેની સંભાવના 0.62 આપેલ છે. રેશ્મા મેચ જતે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, S અને R અનુકૂળ સંગીતા મેચ જતે અને રેશ્મા મેચ જતે તે ઘટનાઓ દર્શાવે છે.

સંગીતાની મેચ જતવાની સંભાવના = $P(S) = 0.62$ (આપેલ છે.)

$$\begin{aligned} \text{રેશ્માની મેચ જતવાની સંભાવના} &= P(R) = 1 - P(S) & [\text{કારણ કે, R અને S પૂરક ઘટનાઓ છે.}] \\ &= 1 - 0.62 = 0.38 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 6 : સવિતા અને હમિદા ભિત્રો છે. બંનેના (i) જન્મદિવસ જુદા-જુદા હોય (ii) જન્મદિવસ એક જ હોય તેની સંભાવના કેટલી થશે? (લીપ વર્ષને અવગાણવું.)

ઉકેલ : બે ભિત્રોમાંથી, એક છોકરી, કહો સવિતાનો જન્મદિવસ વર્ષનો કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે છે. હવે, હમિદાનો જન્મદિવસ પણ વર્ષનાં 365 દિવસ પૈકી કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે.

આપણે માની લઈશું કે, આ 365 પરિણામો સમસંભાવી છે.

(i) જો હમિદાનો જન્મદિવસ, સવિતાના જન્મદિવસ કરતાં જુદો હોય, તો તેના જન્મદિવસ માટે સાનુકૂળ પરિણામો $365 - 1 = 364$ છે.

$$\text{તેથી, } P(\text{હમિદાનો જન્મદિવસ એ સવિતાના જન્મદિવસથી જુદો છે.}) = \frac{364}{365}$$

(ii) $P(\text{સવિતા અને હમિદાનો જન્મદિવસ એક જ છે.})$

$$= 1 - P(\text{બંનેના જન્મદિવસ જુદા છે.})$$

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [P(\bar{E}) = 1 - P(E) \text{ નો ઉપયોગ કરતાં}]$$

$$= \frac{1}{365}$$

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X માં 40 વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમાંથી 25 છોકરીઓ અને 15 છોકરાઓ છે. વર્ગ શિક્ષકે એક વિદ્યાર્થનિ વર્ગ પ્રતિનિધિ તરીકે પસંદ કરવાનો છે. તે દરેક વિદ્યાર્થના નામ બિન્ન બિન્ન ચિહ્ની પર લખે છે, ચિહ્ની એકસમાન છે. પછી તે ચિહ્નીઓને થેલામાં મૂકે છે અને તેમને સંપૂર્ણરીતે મિશ્ર કરે છે. પછી તે થેલામાંથી એક ચિહ્ની કાઢે છે. ચિહ્ની પર લખેલ નામ (i) છોકરીનું હોય (ii) છોકરાનું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : કુલ 40 વિદ્યાર્થીઓ છે અને એક નામની ચિહ્ની પસંદ કરવાની છે.

(i) શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા 40 છે.

છોકરીનું નામ લખેલ ચિહ્ની પસંદ કરી હોય તેના માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 25 છે. (શા માટે ?)

$$\text{તેથી, } P(\text{છોકરીના નામવાળી ચિહ્ની}) = P(\text{છોકરી}) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

(ii) છોકરાનું નામ લખેલ ચિહ્ની પસંદ કરી હોય તેના માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 15 છે. (શા માટે ?)

$$\text{તેથી, } P(\text{છોકરાના નામવાળી ચિહ્ની}) = P(\text{છોકરો}) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

નોંધ : $P(\text{છોકરો})$ આપણે અન્ય રીતે પણ શોધી શકીએ.

$$P(\text{છોકરો}) = 1 - P(\text{છોકરો નથી}) = 1 - P(\text{છોકરી}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

ઉદાહરણ 8 : એક ડ્બામાં 3 ભૂરી, 2 સફેદ અને 4 લાલ લખોટીઓ છે. જો ડ્બામાંથી યાદચિક્ષક રીતે એક લખોટી યાદચિક્ષક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો તે (i) સફેદ (ii) ભૂરી (iii) લાલ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : એમ કહેવું કે, યાદચિક્ષક રીતે એક લખોટી પસંદ કરવી, એ એવું કહેવાનો ટૂંકો રસ્તો છે કે, બધી જ લખોટીઓ સમસંભાવીપણે પસંદ થઈ શકે છે. તેથી, શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 3 + 2 + 4 = 9 (શા માટે ?)

ધારો કે, W એ પસંદ થયેલ 'લખોટી સફેદ છે' તે ઘટના, B એ 'લખોટી ભૂરી છે' તે ઘટના અને R એ 'લખોટી લાલ છે' તે ઘટના દર્શાવે છે.

(i) ઘટના W માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 2 છે.

$$\text{તેથી, } P(W) = \frac{2}{9}$$

$$\text{આ જ પ્રમાણે, (ii) } P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ અને (iii) } P(R) = \frac{4}{9}$$

$$\text{નોંધ કરો કે, } P(W) + P(B) + P(R) = 1$$

ઉદાહરણ 9 : હરગ્રીત બે જુદા-જુદા સિક્કાઓને એક સાથે ઉછાળે છે (કહો, 1 ₹ નો એક અને 2 ₹ નો બીજો) તે ઓછામાં ઓછી એક છાપ (H) મેળવે તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : આપણે 'છાપ' માટે H અને 'કાંટો' માટે T લખીશું. જ્યારે બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, ત્યારે શક્ય પરિણામો (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) મળે છે, તે તમામ સમસંભાવી છે. અહીં, (H, H) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા (કહો, ₹ 1) પર છાપ અને બીજા સિક્કા (₹ 2) પર પણ છાપ મળે છે. આ જ પ્રમાણે (H, T) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા પર છાપ અને બીજા સિક્કા પર કાંટો છે અને આમ આગળ.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામો, 'ઓછામાં ઓછી એક છાપ'; (H, H), (H, T) અને (T, H) છે. (શા માટે ?)

તેથી, E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 3 છે.

$$\text{માટે, } P(E) = \frac{3}{4}$$

એટલે કે, હરપ્રીત ઓછામાં ઓછી એક છાપ મેળવે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે.

નોંધ : તમે $P(E)$ નીચે પ્રમાણે પડા શોધી શકો છો :

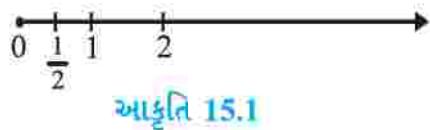
$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (\text{કારણ કે, } P(\bar{E}) = P(\text{છાપ નહિ}) = \frac{1}{4})$$

અત્યાર સુધી જેમની ચર્ચા કરી તે બધાં જ ઉદાહરણોમાં તમે એ નિરીક્ષણ કર્યું કે પ્રત્યેક પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા સાન્ત (finite) હતી ? જો ના હોય, તો શું થાય તે ચકાસીએ.

એવા ઘણા પ્રયોગો છે કે જેનાં પરિણામો આપેલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની ગમે તે સંખ્યા હોય, અથવા જેનાં પરિણામો વર્તુળ અથવા લંબચોરસની અંદરનું પ્રત્યેક બિંદુ હોય, વગેરે. શું હવે તમે તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા ગણી શકો છો ? તમે જાણો છો કે, આ શક્ય નથી ‘કારણ કે બે સંખ્યાઓ વચ્ચે અસંખ્ય (અનંત) સંખ્યાઓ હોય છે, અથવા વર્તુળની અંદર અનંત બિંદુઓ હોય છે. તેથી, સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની જે વ્યાખ્યા તમે શીખ્યાં તે વર્તમાન સ્વરૂપમાં લાગુ કરી શકશો નહિ. આમાંથી બહાર નીકળવાનો શું માર્ગ છે ? આના ઉત્તર માટે, ચાલો આપણે નીચે આપેલ ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 10* : સંગીત ખુરશીની રમતમાં, સંગીત પૂરું પાડતી વ્યક્તિને સૂચના આપવામાં આવી છે કે, તે વગાડવાનું શરૂ કરે તેની 2 મિનિટમાં ગમે તે સમયે સંગીત વગાડવાનું રોકી છે. સંગીત શરૂ થયા પછીની પહેલી અડ્ધી મિનિટમાં સંગીત બંધ થઈ જશે તેની સંભાવના શું છે ?

ઉકેલ : અહીં શક્ય પરિણામો 0 અને 2 વચ્ચેની તમામ સંખ્યાઓ છે. આ 0 થી 2 વચ્ચેનો સંખ્યા રેખા પરનો ભાગ છે. (આકૃતિ 15.1 જુઓ.)



ધારો કે, E એ ઘટના છે કે ‘પ્રથમ અડ્ધી મિનિટ દરમિયાન સંગીત રોકાયું છે.’ ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામો સંખ્યા રેખા પર 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનાં બિંદુઓ છે.

0 થી 2 સુધીનું અંતર 2 છે અને 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનું અંતર $\frac{1}{2}$ છે. બધાં પરિણામો સમસંભાવી હોવાથી આપણે કહી શકીએ કે, કુલ અંતર 2 માંથી, ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર $\frac{1}{2}$ છે.

$$\text{તેથી, } P(E) = \frac{\text{ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર}}{\text{કુલ અંતર કે, જેમાં પરિણામો સમાઈ શકે છે}}$$

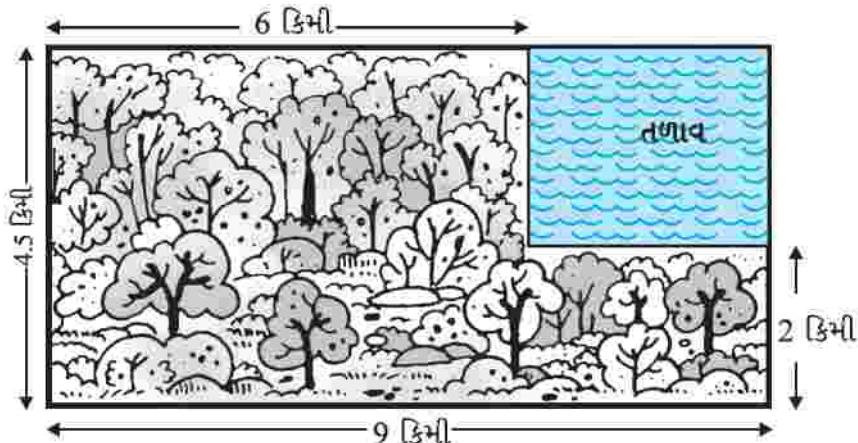
$$= \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

શું આપણે ઉદાહરણ 10 નો જ્યાલ, સાનુકૂળ ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તરની સંભાવના શોધવા માટે વિસ્તૃત કરી શકીએ ?

* પરીક્ષાના દિનિબિંદુથી નથી.

ગણિત

ઉદાહરણ 11* : ખોવાઈ ગયેલ હેલિકોપ્ટર વિશે ખબર મળી છે કે તે આકૃતિ 15.2 માં દર્શાવેલ લંબચોરસ વિસ્તારમાં ક્યાંક તૂટી પડ્યું છે. શું સંભાવના છે કે, તે આકૃતિમાં બતાવેલ તળાવમાં તૂટી પડ્યું છે ?



આકૃતિ 15.2

ઉકેલ : હેલિકોપ્ટર આપેલ વિસ્તારમાં ગમે ત્યાં તૂટી પડે તે સમસંભાવી છે.

$$\text{હેલિકોપ્ટર જ્યાં તૂટીને પડી શકે છે તે વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ} = (4.5 \times 9) \text{ કિમી}^2 = 40.5 \text{ કિમી}^2$$

$$\text{તળાવનું ક્ષેત્રફળ} = (2.5 \times 3) \text{ કિમી}^2 = 7.5 \text{ કિમી}^2$$

$$\text{તેથી, } P(\text{હેલિકોપ્ટર તળાવમાં તૂટી પડે}) = \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$$

ઉદાહરણ 12 : પૂઠાની પેટીમાં રાખેલાં 100 ખમીસ પૈકી 88 ક્ષતિરહિત છે. તે પૈકી 8 માં નાની ખામીઓ છે અને 4 માં મોટી ખામીઓ છે. વેપારી જિમી ક્ષતિરહિત ખમીસ જ સ્વીકારશે, પરંતુ અન્ય વેપારી સુજાતા માત્ર મોટી ખામીવાળા ખમીસ જ નકારશે. પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે છે.

(i) તે જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : 100 ખમીસ ધરાવતી પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. માટે, 100 સમસંભાવી પરિણામો છે.

$$(i) \text{ જિમીને સાનુકૂળ (એટલે કે, સ્વીકાર્ય) પરિણામોની સંખ્યા} = 88 \quad (\text{શા માટે ?})$$

$$\text{આથી, જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ પસંદ થયું હોય તેની સંભાવના} = \frac{88}{100} = 0.88$$

$$(ii) \text{ સુજાતાને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા} = 88 + 8 = 96 \quad (\text{શા માટે ?})$$

$$\text{તેથી, } P(\text{સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ}) = \frac{96}{100} = 0.96$$

ઉદાહરણ 13 : એક ભૂરો અને એક રાખોડી એમ બે પાસાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. તમામ શક્ય પરિણામો લખો. પાસાની ઉપરની સપાટી પર દેખાતી સંખ્યાઓનો સરવાળો (i) 8 હોય (ii) 13 હોય (iii) 12 કે, તેનાથી નાનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : જ્યારે ભૂરો પાસો '1' બતાવે, ત્યારે રાખોડી પાસો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી કોઈ પણ એક સંખ્યા બતાવે. આ

* પરીક્ષાના દર્શિબિંદુથી નથી.

જ રીતે જ્યારે ભૂરો પાસો ‘2’, ‘3’, ‘4’, ‘5’ અથવા ‘6’ બતાવે ત્યારે શક્ય પરિણામોની સૂચિ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે ; પ્રત્યેક કમ્યુક્ટ જોડનો પ્રથમ ઘટક એ ભૂરો પાસા પર દેખાતી સંખ્યા અને દ્વિતીય ઘટક એ રાખોડી પાસા પર દેખાતી સંખ્યા છે.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

આકૃતિ 15.3

આપણે નોંધીએ કે, (1, 4) એ (4, 1) કરતાં જુદી છે.

(શા માટે ?)

તેથી શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = $6 \times 6 = 36$

- (i) ઘટના ‘બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 8 છે’ ને E વડે દર્શાવો તેનાં સાનુકૂળ પરિણામો (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) અને (6, 2) છે. (જુઓ આકૃતિ 15.3.)
એટલે કે, ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 5 છે.

$$\text{તેથી, } P(E) = \frac{5}{36}$$

- (ii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના F, ‘બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 13’ માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી.

$$\text{તેથી, } P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

- (iii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના G, ‘બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો હોય તે માટે તમામ પરિણામો સાનુકૂળ છે. તેથી, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$.

સ્વાધ્યાય 15.1

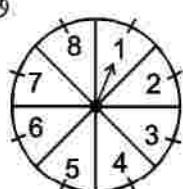
1. નીચેનાં વિધાનો પૂર્ણ કરો :

- ઘટના E ની સંભાવના + ઘટના ‘E નહિ’ ની સંભાવના =
- ઉદ્ભવી ન શકે તેવી ઘટનાની સંભાવના છ. આવી ઘટનાને કહે છે.
- ચોક્કસપણે ઉદ્ભવતી ઘટનાની સંભાવના છ. આવી ઘટનાને કહે છે.
- પ્રયોગની તમામ મૂળભૂત (પ્રાથમિક) ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો છ.
- ઘટનાની સંભાવના થી મોટી અથવા તેના જેટલી અને થી નાની અથવા તેના જેટલી હોય છે.

১৪



આકૃતિ 15.4



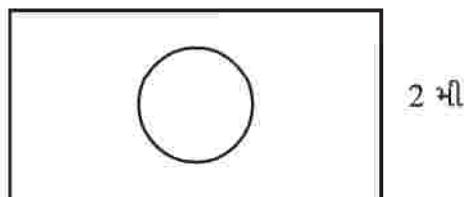
આંકનિ 15.5

A B C D E A

આ પાસાને એકવાર ઉછળવામાં આવે છે પાસા પર (i) A મળે (ii) D મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

- 20*. ધારો ૩, એક પાસાને તમે યાદચિક રીતે આકૃતિ 15.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે લંબચોરસ ક્ષેત્ર પર ફેંકો છો. તે 1 મી વ્યાસના વર્તળની અંદર પડુશે તેની સંભાવના કેટલી ?**

3 41



આકૃતિ 15.6

21. એક જથ્થો 144 બોલપેન ધરાવે છે. તેમાંથી 20 ખામીયુક્ત અને બાકીની સારી છે. જો પેન સારી હશે તો, નુરી પેન ખરીદશે, પરંતુ જો તે ખામીયુક્ત હશે તો ખરીદશે નહિ. દુકાનદાર યાદચિંહ રીતે એક પેન કાઢે છે અને તેને આપે છે.

ગણિત

(i) તે પેન ખરીદ્શે તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે પેન નહિ ખરીદે તેની સંભાવના કેટલી ?

22. ઉદાહરણ 13 નાં સંદર્ભમાં (i) નીચે આપેલ કોષ્ટક પૂરું કરો :

ઘટના :											
'પાસા પરનો સરવાળો'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) એક વિદ્યાર્થી દલીલ કરે છે કે 11 શક્ય પરિણામો 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 છે. તેમાંના

પ્રત્યેકની સંભાવના $\frac{1}{11}$ છે. શું આપ આ દલીલ સાથે સહમત છો? તમારું જવાબનું સમર્થન કરો.

23. એક રમતમાં એક રૂપિયાના સિક્કાને 3 વાર ઉધાળવાનો છે અને તેના પરિણામ દરેક વખતે નોંધવાના છે. જો તમામ વખત ઉધાળતાં સરખું પરિણામ મળે, એટલે કે ત્રણ છાપ અથવા ત્રણ કાંટા તો હનિક રમત જીતી જાય છે, અન્યથા હારે છે. તો હનિક રમત હારે તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

24. પાસાને બે વખત ઉધાળવામાં આવે છે :

(i) એક પણ વખત ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે નહિ.

(ii) ઓછામાં ઓછી એકવાર ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

[સૂચન : એક પાસાને બે વાર ઉધાળવો અને બે પાસાને એક સાથે ઉધાળવા, એ બંનેને એક જ પ્રયોગ ગણવામાં આવે છે.]

25. નીચેનામાંથી કઈ દલીલો સાચી છે અને કઈ સાચી નથી? તમારું જવાબ માટે કારણો આપો.

(i) જો બે સિક્કાને એક સાથે ઉધાળવામાં આવે તો ત્રણ શક્યતાઓ મળે છે - બે છાપ અથવા બે કાંટા અથવા પ્રત્યેકનો એક તેથી, આ પ્રત્યેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે.

(ii) જો પાસાને ઉધાળવામાં આવે તો બે શક્ય પરિણામો મળે છે - અયુગ્મ સંખ્યા અથવા યુગ્મ સંખ્યા, તેથી અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય 15.2 (વૈકલ્પિક)*

- બે ગ્રાહકો શ્યામ અને એકતા એક જ અઠવાડિયામાં (મંગળવાર થી શનિવાર) કોઈ ચોક્કસ દુકાનની મુલાકાત લે છે. દરેક વ્યક્તિ કોઈ પણ દિવસે દુકાનની મુલાકાત, અન્ય દિવસની જેમ જ લે છે. બંને વ્યક્તિ દુકાનની મુલાકાત (i) એક જ દિવસે (ii) કમિક (એક પણી એક) દિવસોએ (iii) જુદા-જુદા દિવસોએ લેશે તેની સંભાવના કેટલી ?
- પાસા પર સંખ્યાઓ એ રીતે લખવામાં આવી છે કે તેનાં પૃષ્ઠ, સંખ્યાઓ 1, 2, 2, 3, 3, 6 દર્શાવે છે. તે પાસાને બે વાર ઉધાળવામાં આવે છે અને બંને પાસા પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો પાછળના કોષ્ટકમાં નોંધી તે પૂર્ણ કરો :

* પરીક્ષાના દાખિબંદુથી નથી.

		પ્રથમવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ					
		1	2	2	3	3	6
બીજીવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ	+	2	3	3	4	4	7
	2	3	4	4	5	5	8
	2				5		
	3						
	3			5			9
	6	7	8	8	9	9	12

કુલ સરવાળો

(i) યુગ્મ મળે. (ii) 6 મળે. (iii) ઓદ્ધામાં ઓછો 6 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

3. એક થેલામાં 5 લાલ દડા અને કેટલાંક વાદળી (ભૂરો) દડા છે. જો ભૂરો દડો નીકળવાની સંભાવના લાલ દડો નીકળે તેની સંભાવના કરતાં બમળી હોય, તો થેલામાં રહેલા ભૂરા દડાઓની સંખ્યા શોધો.

4. એક પેટીમાં 12 દડા છે. તેમાંના x દડા કાળા છે. જો પેટીમાંથી એક દડો યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે કાળો દડો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

જો બીજા 6 કાળા દડા ખોખામાં મૂકવામાં આવે તો કાળો દડો નીકળવાની સંભાવના હવે પહેલાં હતી તેનાં કરતાં બમળી થાય છે, તો x શોધો.

5. એક બરણીમાં 24 લખોટીઓ છે, કેટલીક લીલી અને બાકીની ભૂરી છે. બરણીમાંથી જો એક લખોટી યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે લીલી હોય તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. બરણીમાંની ભૂરી લખોટીઓની સંખ્યા શોધો.

15.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે :

- પ્રાયોગિક સંભાવના અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવના વચ્ચેનો તફાવત
- ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, સંકેત $P(E)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$P(E) = \frac{\text{E માટે સાનુક્ષે પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}}$$

આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

- ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના 1 છે.
- અશક્ય ઘટનાની સંભાવના 0 છે.
- ઘટના E ની સંભાવના એ સંખ્યા $P(E)$ છે

તથા, $0 \leq P(E) \leq 1$

ગણિત

6. માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી ઘટનાને ગ્રાથમિક (મૂળભૂત) ઘટના કહે છે. પ્રયોગની તમામ ગ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે.
7. કોઈ પણ ઘટના E માટે $P(E) + P(\bar{E}) = 1$. \bar{E} એ ઘટના ‘E નહિ’ દર્શાવે છે. E અને \bar{E} પૂરક ઘટનાઓ કહેવાય છે.

વાચકને નોંધ

ઘટનાની એક ગ્રાથોગિક અથવા પ્રયોગમૂલક સંભાવના એ હડીકતમાં જે બન્યું છે તેના પર આપ્યારિત છે અને ઘટનાની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, ચોક્કસ ધારણાઓના આખાર પર શું ઘટિત થશે તેની આગાહી કરવાના પ્રયત્નો કરે છે. જેમ પ્રયોગ કરવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ આપણે અપેક્ષા રાખી શકીએ કે, ગ્રાથોગિક અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાઓ લગભગ સમાન થાય છે.



ગણિતમાં સાબિતીઓ A1

A1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણા રોજિંદા જીવનમાં તર્કી કરવાની અને વિચારવાની ક્ષમતા ખૂબ જ ઉપયોગી છે. ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, જો કોઈ રાજકારણી તમને એમ કહે કે, ‘જો તમને સ્વચ્છ સરકારમાં રસ હોય, તો તમારે મને મત આપવો જોઈએ’ તો તે વાસ્તવમાં તમને એમ ગળે ઉતારવા હશે છે કે, જો તમે તેને મત ન આપ્યો, તો તમને સ્વચ્છ સરકારમાં રસ નથી. એ જ રીતે, જો કોઈ આહેરાત એવું દર્શાવતી હોય કે, ‘બુદ્ધિશાળી લોકો XYZ બુટ પહેરે છે,’ તો શું કંપની તમને એવું તારણ કાઢવા પ્રેરે છે કે, જો તમે XYZ બુટ નહિ પહેરો, તો તમે પૂરતા બુદ્ધિશાળી નથી. તમે એ જોઈ શકો છો કે, ઉપરનાં વિધાનો સામાન્ય લોકોને ગેરમાર્ગ દોરી શકે છે. તેથી, જો આપણે તર્કની પદ્ધતિ યોગ્ય રીતે સમજીએ, તો આપણે અજાણતાના પણ આવા છુણમાં પડીએ નહિ.

તર્કનો સાચો ઉપયોગ ગણિતનું હાઈ છે. વિશિષ્ટ રીતે સાબિતીની ર્ચનામાં તેનો ઉપયોગ થાય છે. ખાસ કરીને ભૂમિતિમાં ધોરણ IXમાં તમે સાબિતીની સંકલ્પનાનો પરિચય મેળવ્યો છે અને તમે ખરેખર ઘણાં વિધાનો સાબિત કર્યા છે. યાદ કરો કે, જેમાંનું પ્રત્યેક ગાણિતિક વિધાન સાબિતીમાંના અગાઉના વિધાન પરથી અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ કોઈ પ્રમેય પરથી અથવા પૂર્વધારણા કે પ્રતીપ પરથી તાર્કિક રીતે તારવેલું હોય છે એવાં કેટલાંક વિધાનોથી સાબિતી ર્ચાય છે. સાબિતીની ર્ચનામાં મુખ્ય સાધન, આનુમાનિક તર્કની પ્રક્રિયા છે.

આ પ્રકરણની શરૂઆત આપણે ગાણિતિક વિધાન શું છે, તેના પુનરાવર્તનથી કરીશું. આપણે આનુમાનિક તર્કમાં આપણા કૌશલ્યો ધારદાર બનાવવા કેટલાંક ઉદાહરણોનો ઉપયોગ કરીને આગળ વધીશું. આપણે નિષેધનો ખ્યાલ પણ મેળવીશું અને આપેલા વિધાનનું નિષેધ મેળવીશું. પછી આપણે ચર્ચા કરીશું કે, આપેલ વિધાનનું પ્રતીપ કેવી રીતે શોધી શકાય. અંતે, આપણે ધોરણ IX માં શીખેલા કેટલાક પ્રમેયોની સાબિતીના પૃથક્કરણથી સાબિતીના ઘટકોનું પુનરાવર્તન કરીશું. તેનો તમે ધોરણ IX માં પરિચય મેળવ્યો છે તેમ જ તે આ પુસ્તકના ઘણાં પ્રકરણમાં છે.

A1.2 ગાણિતિક વિધાનોનો પુનરાવર્તય

યાદ કરો કે, વિધાન એ આજ્ઞા, ઉદ્ગાર કે પ્રશ્ન ન હોય તેવું અર્થપૂર્વી વાક્ય છે, ઉદાહરણ તરીકે, ‘કિકેટના

ગણિત

વિશ્વકપની અંતિમ મેચમાં કઈ બે ટીમ રમી રહી છે ?” તે પ્રશ્ન છે, વિધાન નથી. “જાઓ અને તમારું ગૃહકાર્ય પૂરું કરો.” તે આજા છે, વિધાન નથી. “કેવો અદ્ભૂત ગોલ !” તે ઉદ્ગાર છે, વિધાન નથી.

યાદ રાખો, સામાન્ય રીતે વિધાન નીચેનામાંથી કોઈ એક હોઈ શકે :

- હંમેશાં સત્ય
- હંમેશાં અસત્ય
- અસ્પષ્ટ (સંદિગ્ય)

ધોરણ IX માં તમે ગણિતમાં એ પણ અભ્યાસ કર્યો છે કે, વાક્ય કંઈ તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય હોય તો જ તે વાક્ય સ્વીકાર્ય વિધાન બને. તેથી સંદિગ્ય વિધાનનોને ગણિતિક વિધાનનો તરીકે ગણતરીમાં લેવામાં આવતાં નથી.

હવે, ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણોથી આપણો સમજની સમીક્ષા કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિધાનો હંમેશાં સત્ય, હંમેશાં અસત્ય કે સંદિગ્ય છે તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :

- (i) સૂર્ય પૃથ્વીની આસપાસ પરિબ્રમણ કરે છે.
- (ii) વાહનોને ચાર પૈડાં હોય છે.
- (iii) પ્રકાશની અંદાજિત ઝડપ 3×10^5 કિમી/સે છે.
- (iv) કોલકતાનો રસ્તો નવેમ્બરથી માર્ય બંધ રહે છે.
- (v) દરેક મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન છે.

ઉકેલ :

- (i) આ વિધાન હંમેશાં અસત્ય છે. કારણ કે, ખગોળશાસ્ત્રીઓએ પ્રસ્થાપિત કર્યું છે કે, પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પરિબ્રમણ કરે છે.
- (ii) આ વિધાન સંદિગ્ય છે, કારણ કે, આપણે નક્કી ન કરી શકીએ કે, તે હંમેશાં સત્ય છે કે હંમેશાં અસત્ય. તે વાહન કર્યું છે તેના પર આધારિત છે. વાહનને 2, 3, 4, 6, 10 વરેરે પૈડાં હોઈ શકે.
- (iii) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, કારણ કે, બૌતિકશાસ્ત્રીઓએ તે સિદ્ધ કર્યું છે.
- (iv) આ વિધાન સંદિગ્ય છે, કારણ કે, ક્યા રસ્તાનો નિર્દેશ કરેલો છે, તે સ્પષ્ટ નથી.
- (v) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે કારણ કે, દરેક મનુષ્યે ક્યારેક તો મરવાનું છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો અને તમારા જવાબનાં કારણો જણાવો :

- (i) બધા સમબાજુ ત્રિકોણો સમદિબાજુ ત્રિકોણ છે.
- (ii) કેટલાંક સમદિબાજુ ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.
- (iii) બધા સમદિબાજુ ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.
- (iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.
- (v) કેટલીક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.
- (vi) બધા પૂર્ણાંકો સંમેય હોય છે તેવું નથી.
- (vii) કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે કોઈ સંમેય સંખ્યા નથી.

ઉકેલ :

- (i) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે સમબાજુ ત્રિકોણોમાં બધી બાજુઓ સમાન હોય છે, અને તેથી તે સમદિબાજુ ત્રિકોણ પણ છે.

- (ii) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, જેના આધાર ખૂશાઓ 60° ના હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોઈ શકે છે.
- (iii) આ વિધાન અસત્ય છે. તેનું કોઈ પ્રતિ ઉદાહરણ આપો.
- (iv) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, જ્યાં p કોઈ પૂર્ણાંક અને $q = 1$ હોય તેવી $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંકો છે. (ઉદાહરણ તરીકે $3 = \frac{3}{1}$)
- (v) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં છે, p અને q પૂર્ણાંક છે અને p એ q વડે નિઃશેષ વિભાજ્ય ન હોય, તો તે પૂર્ણાંક નથી. (ઉદાહરણ તરીકે $\frac{3}{2}$)
- (vi) ‘સંમેય સંખ્યા ન હોય તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યા છે’ એવું આ વિધાન કહે છે. આ અસત્ય છે, કારણ કે, બધા પૂર્ણાંકો સંમેય સંખ્યા છે.
- (vii) આ વિધાન અસત્ય છે. તમે જાણો છે કે બે સંમેય સંખ્યાઓ r અને s વચ્ચે સંમેય સંખ્યા $\frac{r+s}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $x < 4$ હોય, તો નીચેનાં વિધાનોમાંથી કયું વિધાન સત્ય છે? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

- (i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

ઉકેલ :

- (i) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3$ લેતાં $x < 4$ છે અને $2x > 8$ નું સમાધાન ન થાય.
- (ii) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3.5$ લેતાં $x < 4$ છે અને $2x < 6$ નું સમાધાન ન થાય.
- (iii) આ વિધાન સત્ય છે. તે $x < 4$ અને $2x < 8$ સમાન વિધાનો છે.

ઉદાહરણ 4 : નીચેનાં વિધાનોને યોગ્ય શરત સાથે એવી રીતે પુનઃ લખો કે જેથી સત્ય વિધાન મળે.

- (i) જો કોઈ ચતુર્ભુણના વિકર્ષણો સમાન હોય, તો તે લંબચોરસ છે.
- (ii) કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુઓ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતી રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.
- (iii) બધા પૂર્ણાંક p માટે \sqrt{p} એ અસંમેય છે.
- (iv) બધાં દ્વિધાત સમીકરણોને બે વાસ્તવિક ઉકેલ હોય છે.

ઉકેલ :

- (i) જો સમાંતરબાજુ ચતુર્ભુણના વિકર્ષણો સમાન હોય, તો તે લંબચોરસ છે.
- (ii) કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતી રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.
- (iii) બધા અવિભાજ્યો p માટે \sqrt{p} એ અસંમેય છે.
- (iv) બધાં દ્વિધાત સમીકરણોને વધુમાં વધુ બે વાસ્તવિક ઉકેલ હોય છે.

નોંધ : ઉપરનાં વિધાનોને ફરીથી દર્શાવવાની અન્ય રીત પણ હોઈ શકે. સરળતા ખાતર (iii) ને ફરીથી \sqrt{p} એ બધા પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવા પૂર્ણાંકો માટે અસંમેય છે એમ પણ દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય A 1.1

1. નીચેનાં વિધાનો હંમેશાં સત્ય, હંમેશાં અસત્ય કે સંદિગ્ધ પૈકી કયાં પ્રકારનાં છે તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણ આપો :
 - (i) ગણિતનાં બધાં પાઠ્યપુસ્તકો રસપ્રદ હોય છે.
 - (ii) પૃથ્વીથી સૂર્યનું અંતર આશરે 1.5×10^8 કિમી છે.
 - (iii) બધા મનુષ્યો વૃદ્ધ થશે.
 - (iv) ઉત્તરકાશીથી હર્શિલની મુસાફરી કંટાળાજનક છે.
 - (v) એક જીવો દૂરબીનમાંથી એક હાથી જોયો.
2. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :
 - (i) બધા ખટકોણો બહુકોણો છે.
 - (ii) કેટલાક બહુકોણો પંચકોણો છે.
 - (iii) બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓ 2 વડે વિભાજ્ય હોય તે સત્ય નથી.
 - (iv) કેટલીક વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અસંમેય છે.
 - (v) બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંમેય હોય તે સત્ય નથી.
3. ધારો કે, a તથા b એવી વાસ્તવિક સંખ્યા છે જેની માટે $ab \neq 0$ છે. નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો :
 - (i) a અને b બંને શૂન્ય હોવા જોઈએ.
 - (ii) a અને b બંને શૂન્યેતર હોવા જોઈએ.
 - (iii) a અને b પૈકી કોઈ એક શૂન્યેતર હોવો જોઈએ.
4. નીચેનાં વિધાનોને યોગ્ય શરતોની સાથે તે સત્ય બને તે રીતે પુનઃ લખો :
 - (i) જો $a^2 > b^2$, હોય, તો $a > b$
 - (ii) જો $x^2 = y^2$, હોય, તો $x = y$
 - (iii) જો $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ હોય, તો $x = 0$
 - (iv) ચતુર્ભોજના વિકર્ણો એકબીજાને દુલાગે છે.

A1.3 આનુમાનિક તર્ક

ધોરણ IX માં તમે આનુમાનિક તર્કની સંકલ્પનાનો પરિચય મેળવ્યો છે. અહીં આપણે બીજાં વધુ ઉદાહરણો લઈને આપેલાં અને સત્ય ધારેલાં વિધાનો પરથી તારણ કાઢવામાં આનુમાનિક તર્ક કેવી રીતે ઉપયોગી છે તે દર્શાવીશું. આપેલાં વિધાનોને 'પ્રતિજ્ઞાઓ' અથવા 'પૂર્વધારણાઓ' કહે છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોથી શરૂ કરીશું.

ઉદાહરણ 5 : 'બિજાપુર કણ્ણાટક રાજ્યમાં છે' એમ આપેલ છે અને ધારો કે, શબાના બિજાપુરમાં રહે છે. શબાના કયા રાજ્યમાં રહે છે ?

ઉકેલ : અહીં બે પ્રતિજ્ઞાઓ છે :

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| (i) બિજાપુર કણ્ણાટક રાજ્યમાં છે. | (ii) શબાના બિજાપુરમાં રહે છે. |
|----------------------------------|-------------------------------|
- આ પ્રતિજ્ઞાઓ પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, શબાના કણ્ણાટક રાજ્યમાં રહે છે.

ઉદાહરણ 6 : 'ગણિતનાં બધાં પાઠ્યપુસ્તકો રસપ્રદ હોય છે' એવું આપેલ છે અને ધારો કે, તમે ગણિતનું પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો. તમે જે પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો તેના વિશે શું કહી શકાય ?

ઉકેલ : આપેલ પ્રતિજ્ઞાના વિધાન (અથવા પૂર્વધારણાઓ)નો ઉપયોગ કરીને તારવી શકાય કે તમે રસમણ પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો.

ઉદાહરણ 7 : આપેલું છે કે, $y = -6x + 5$ અને જો $x = 3$ તો y નું મૂલ્ય કેટલું ?

ઉકેલ : આપેલ ને પૂર્વધારણાઓ પરથી,

$$y = -6(3) + 5 = -13 \text{ મળે.}$$

ઉદાહરણ 8 : ABCD સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોજન છે એવું આપેલું છે. ધારો કે, $AD = 5$ સેમી અને $AB = 7$ સેમી (જુઓ આફ્ટિ A1.1.) DC અને BC ની લંબાઈઓ વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?

ઉકેલ : અહીં આપેલ છે કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોજન છે. તેથી આપણે તારવી શકીએ કે સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોજના બધા ગુણધર્મો ચતુર્ભોજન ABCD ને લાગુ પડે છે. વિશેષ કરીને સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોજની સામસામેની બાજુ એકબીજાને સમાન છે તે ગુણધર્મ સત્ય છે. તેથી હવે $AD = 5$ સેમી છે તે પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, $BC = 5$ સેમી. એ જ રીતે તારવી શકાય કે $DC = 7$ સેમી.



આફ્ટિ A 1.1

નોંધ : આ ઉદાહરણમાં પ્રતિજ્ઞા (પક્ષ)માં સમાયેલા ગુણધર્મોને શોધીને તેનો કેવી રીતે ઉપયોગ કરવો તે આપણે જોયું.

ઉદાહરણ 9 : બધા અવિભાજ્યો p માટે \sqrt{p} અસંમેય છે અને ધારો કે, 19423 અવિભાજ્ય છે. $\sqrt{19423}$ માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

ઉકેલ : આપણે તારવી શકીએ કે, $\sqrt{19423}$ અસંમેય છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે નોંધ્યું હશે કે, આપણે જાણતા નથી કે, પ્રતિજ્ઞા સત્ય છે કે નહિ. આપણે માની લઈએ છીએ કે પક્ષ સત્ય છે અને પછી આનુમાનિક તર્ક લગાડીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, ઉદાહરણ 9 માં આપણે પરીક્ષણ નથી કર્યું કે 19423 એ અવિભાજ્ય છે કે નહીં. દલીલની સરળતા ભાબતર આપણે એવું ધાર્યું છે કે, તે અવિભાજ્ય છે. આ વિભાગમાં આપણે એ વાત પર ભાર મૂકવા માંગીએ છીએ કે, એક ચોક્કસ વિધાન આપ્યું હોય તો તારણ પર આવવા માટે આનુમાનિક તર્કનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો. અહીં વાસ્તવિક ભાબત એ છે કે, આપણે તર્કની સાચી પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી રહ્યા છીએ અને તર્કની આ પદ્ધતિ પૂર્વધારણાઓની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા હોવા પર આધારિત નથી. એ નોંધ્યું જોઈએ કે, જો આપણે અસત્ય આધાર વિધાનોથી (કે પૂર્વધારણાઓથી) શરૂ કરીએ તો આપણે અસત્ય તારણ પર આવીએ.

સ્વાધ્યાય A 1.2

1. એવું આપેલ છે કે, ‘ખીઓ મૃત્યુને અધીન છે’ અને ધારો કે A ખી છે. આપણે A ના વિશે શું તારણ કાઢી શકીએ ?
2. ‘બે સંમેય સંખ્યાઓનો ગુણકાર સંમેય છે’ તેમ આપેલ છે. a અને b સંમેય સંખ્યાઓ છે. ab માટે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?
3. ‘અસંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત છે અને $\sqrt{17}$ અસંમેય છે’ એમ આપેલ છે. $\sqrt{17}$ ના દશાંશ નિરૂપણ માટે આપણે શું તારણ કાઢી શકીએ ?
4. ‘ $y = x^2 + 6$ અને $x = -1$ ’ આપેલ હોય તો y ની કિમત માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

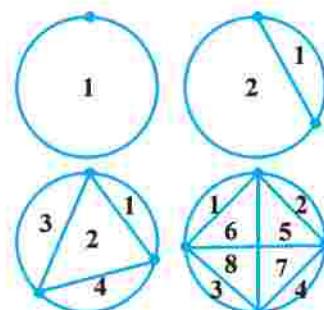
ગણિત

5. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોગ આપેલ છે અને $\angle B = 80^\circ$. સમાંતર બાજુ ચતુર્ભોગના બીજા ખૂણાઓ માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?
6. 'PQRS ચક્કીય ચતુર્ભોગ છે' એવું આપેલ છે અને તેના વિકર્ષો એકબીજાને દૂભાગે છે. ચતુર્ભોગ PQRS વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?
7. બધા અવિભાજ્યો p માટે \sqrt{p} અસંમેય છે એમ આપેલું છે અને ધારો કે, 3721 અવિભાજ્ય છે. તમે તારવી શકો કે, $\sqrt{3721}$ અસંમેય સંખ્યા છે ? તમારું તારણ સાચું છે ? સત્ય હોય તો શા માટે અને અસત્ય હોય તો શા માટે ?

A1.4 ધારણાઓ, પ્રમેયો, સાબિતીઓ અને ગાણિતિક તર્ક

આકૃતિ A 1.2 ધ્યાનમાં લો. પ્રથમ વર્તુળમાં એક બિંદુ, બીજા વર્તુળમાં બે બિંદુઓ, ત્રીજા વર્તુળમાં ત્રણ બિંદુઓ અને એ પ્રમાણે આગળ આપેલું છે. દરેક વિકલ્પમાં બિંદુઓને જોડતી શક્ય બધી રેખાઓ દોરેલી છે.

રેખાઓ વર્તુળને પરસ્પર અનાચાદી પ્રદેશોમાં (સામાન્ય લાગ ન હોય તેવા) વિભાજિત કરે છે. આ પ્રદેશોને આપણે ગણી શકીએ અને પરિણામોને નીચે દર્શાવેલા કોષ્ટકમાં નોંધીએ :



આકૃતિ A 1.2

બિંદુઓની સંખ્યા	પ્રદેશોની સંખ્યા
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

તમારામાંથી કેટલાકે આપેલાં બિંદુઓથી બનતા પ્રદેશોની સંખ્યા વિશેના સૂત્રનું અનુમાન કર્યું હશે. ધોરણ IXના અભ્યાસ પરથી તમને યાદ હશે કે, આ બુદ્ધિગમ્ય અનુમાનને ગાણિતિક અટકળ કરે છે.

ધારો કે, તમારી ધારણા છે કે, વર્તુળ પર આપેલાં n બિંદુઓમાંથી પ્રત્યેક બે બિંદુઓને જોડતી બધી શક્ય રેખાઓ દોરીએ તો મળતા પરસ્પર અનાચાદી પ્રદેશોની સંખ્યા $2^n - 1$ છે. આ એક ખૂબ જ બુદ્ધિગમ્ય અનુમાન છે. અને કોઈ પરીક્ષણ કરી શકે કે, જો $n = 5$ હોય, તો આપણાને 16 પ્રદેશો મળે. તેથી, 5 બિંદુઓ માટે આ સૂત્ર સત્ય

છે. તમે ગમે તે n બિંદુઓ માટે $2^n - 1$ અનાયાદિત પ્રદેશો મળે તે સત્ય છે એમ તમે કેવી રીતે જવાબ આપશો. જો કોઈ તમને પૂછે કે, આ $n = 25$ માટે તમે સંતુષ્ટ થશો? તો આવા મશ્શો સાથે કામ કરવા માટે તમારે જે શંકાથી પર રહીને આ પરિણામ સત્ય છે તેવું દર્શાવતી હોય એવી સાબિતીની જરૂર પડે અથવા કોઈ n માટે આ પરિણામ ખોટું છે તેવું દર્શાવતા ઉદાહરણની જરૂર પડે. ખરેખર, જો તમે આના માટે ગંભીર હો અને $n = 6$ માટે પ્રયત્ન કર્યો હોય, તો તમે જોશો કે, 31 પ્રદેશો મળે છે. અને $n = 7$ માટે 57 પ્રદેશો છે. તેથી, $n = 6$ એ ઉપરની ધારણા માટેનું પ્રતિઉદાહરણ છે. આ પ્રતિઉદાહરણની અગત્યતા દર્શાવે છે. તમને કદાચ યાદ હશે કે, ધોરણ IX માં આપણો ચર્ચા કરી છે કે કોઈ વિધાનને અસત્ય છે તેમ સાબિત કરવા કોઈ એક પ્રતિઉદાહરણ આપવું પર્યાપ્ત છે.

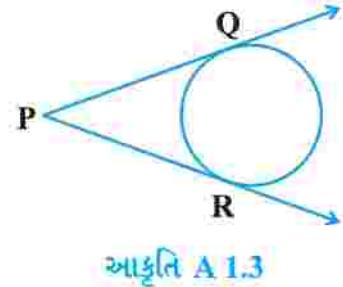
તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું હશે કે, $n = 1, 2, 3, 4$ અને 5 માટે પરિણામ ચકાસવાને બદલે પ્રદેશોની સંખ્યા સંબંધી સાબિતી પર આપણો ભાર મૂકવો જોઈએ. હવે બીજાં વધારે ઉદાહરણો જોઈએ. તમે નીચેના પરિણામથી પરિચિત છો. (પ્રકરણ 5માં આપેલું છે.)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

તેની પથાર્થતા પ્રસ્તાવિત કરવા માટે પરિણામને $n = 1, 2, 3, \dots$ વગેરે માટે ચકાસવું પૂરતું નથી, કારણ કે, કોઈ n માટે આ પરિણામ સત્ય ન પણ હોય. ઉપરના ઉદાહરણમાં $n = 6$ માટે પરિણામ અસત્ય ઠરે છે. જે શંકાથી પર રહીને સત્ય પ્રસ્તાવિત કરે છે એવી સાબિતીની આપણી જરૂરિયાત છે. પછીના વર્ગોમાં તમે સાબિતી શીખશો.

હવે, આકૃતિ A 1.3 ધ્યાનમાં લો. તેમાં P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો PQ અને PR દોરેલા છે.

તમે સાબિત કર્યું છે કે, $PQ = PR$ (પ્રમેય 10.2). તમે ફક્ત આવી કેટલીક આકૃતિઓ દોરી, સંબંધિત સ્પર્શકોની લંબાઈ માપીને અને દરેક કિસ્સામાં પરિણામ સત્ય છે તેવું તમારી જાતે ચકાસીને સંતુષ્ટ થતા નથી.



આકૃતિ A 1.3

તમને યાદ છે કે, સાબિતી શાની બનેલી છે? તે સાબિતીમાં આવેલાં અગાઉના વિધાન પરથી અથવા સાબિત કરવાના પરિણામ પર આધારિત ન હોય તેવાં અગાઉ સાબિત કરેલાં (અને જાહીતાં) પરિણામો પરથી અથવા પૂર્વધારણાઓથી અથવા વ્યાખ્યા પરથી અથવા તમે કરેલી ધારણાઓ પરથી મળેલાં વિધાનોની શૂન્યબલાથી (યથાર્થ દલીલો) તે બની હતી. તમે જે વિધાન સાબિત કરવા માંગો છો તે વિધાન $PQ = PR$ પરથી તમારી સાબિતી પૂરી કરો. કોઈ સાબિતી રચવાનો આ રસ્તો છે.

સાબિતીની રચના કેમ થાય તેની વધુ સારી સમજ મેળવવામાં ઉપયોગી થાય તે માટે હવે આપણો કેટલાંક ઉદાહરણો અને પ્રમેયો અને સાબિતીનાં પૃથક્કરણ જોઈશું.

આપણે સાબિતીની કહેવાતી ગ્રત્યક રીત કે આનુમાનિક રીતનો ઉપયોગ કરીને શરૂ કરીશું. આ રીતમાં, આપણે કેટલાંક વિધાનો રચીશું. દરેક વિધાન આગળનાં વિધાનો પર આધારિત છે. જો દરેક વિધાન તાર્કિક રીતે સત્ય હોય (એટલે કે માન્ય દલીલ હોય), તો તાર્કિક સત્ય તારણ મળે.

ગણિત

ઉદાહરણ 10 : બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો સંમેય સંખ્યા છે.

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે, x અને y સંમેય સંખ્યા છે.	આપણે x અને y સંમેય છે ત્યાંથી શરૂ કરીશું, કારણ કે, પરિણામ સંમેય સંખ્યા વિશે છે.
2	ધારો કે, પૂર્ણાંકો m, n, p અને q માટે $x = \frac{m}{n}, n \neq 0$ અને $y = \frac{p}{q}, q \neq 0$	સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતાં
3	તેથી, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	પરિણામ સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળાનો નિર્દેશ કરે છે. તેથી, આપણે $x + y$ મેળવીએ.
4	પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને, આપણે જોઈ શકીએ કે, $mq + np$ અને nq પૂર્ણાંકો છે.	પૂર્ણાંકોના જાડીતા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કર્યો.
5	$n \neq 0$ અને $q \neq 0$ હોવાથી $nq \neq 0$ મળે.	પૂર્ણાંકોના જાડીતા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કર્યો.
6	તેથી, $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ સંમેય સંખ્યા છે.	સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કર્યો.

નોંધ : ધ્યાન આપો કે, ઉપરની સાભિતીનું દરેક વિધાન આગળ પ્રસ્થાપિત થયેલ તથ્ય કે વ્યાખ્યા પર આધારિત છે.

ઉદાહરણ 11 : 3 કરતાં મોટી દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા કોઈક પૂર્ણાંક k માટે $6k + 1$ કે $6k + 5$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

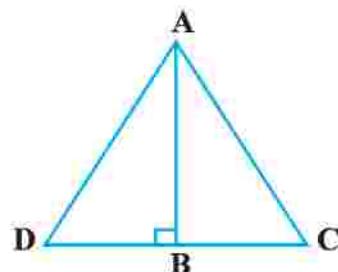
ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે, p એ 3 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.	3 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા વિષે પરિણામ છે. આથી, આપણે એવી સંખ્યાથી શરૂ કરીશું.
2	p ને 6 વડે ભાગતાં, p એ ધન પૂર્ણાંક k માટે $6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4,$ અનૂંચ k માટે $6k + 5$ સ્વરૂપનો જોઈ શકે.	યુક્તિદની ભાગવિધિ પરથી
3	પરંતુ $6k = 2(3k), 6k + 2 = 2(3k + 1),$ અને $6k + 3 = 3(2k + 1), 6k + 4 = 2(3k + 2)$ તેથી, તે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ નથી.	p અવિભાજ્ય છે એમ આપેલું હોવાથી p ના સ્વરૂપનું પૃથક્કરણ કરીએ.
4	તેથી કોઈ ધનપૂર્ણાંક k માટે, p એ $6k + 1$ કે અનૂંચ પૂર્ણાંક k માટે $6k + 5$ સ્વરૂપમાં જ હોવો જોઈએ.	બીજા વિકલ્પો દૂર કરીને આપણે આ તારણ પર આવીએ.

નોંધ : (1) $3k, 3k + 1, 2k + 1$ અને $3k + 2$ એ 1 કરતાં મોટા છે. કારણ કે, $k \neq 0$

(2) ઉપરના ઉદાહરણમાં, આપણે અલગ-અલગ વિકલ્પો દૂર કરીને તારણ પર આવ્યા આ રીતને કેટલીક વાર **વિકલ્પ નિવારણની રીત** તરીકે પડ્યા ઓળખવામાં આવે છે.

પ્રમેય A1.1 : (પાયથાગોરસના પ્રમેયનું પ્રતીપ) : જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો છે.



આકૃતિ A 1.4

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે ΔABC એ વિધાન $AC^2 = AB^2 + BC^2$ નું સમાધાન કરે છે.	આપણે આવા ત્રિકોણ વિશેનું એક વિધાન સાબિત કરીએ છીએ. આથી આ પરિણામ લઈને આપણે શરૂઆત કરીએ.
2	AB ને લંબરેખા BD રચો જેથી $BD = BC$ અને A તથા D જોડો.	જેના વિશે વાત કરી છે તેવું આ એક સાહજિક સોપાન છે. આપણે વારંવાર સાબિત થયેલા પ્રમેયોની જરૂર પડશે.
3	રચના પરથી, ΔABD કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી $AD^2 = AB^2 + BD^2$	આપણે પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું. તેને સાબિત કર્યો છે.
4	રચના પરથી, $BD = BC$ હોવાથી $AD^2 = AB^2 + BC^2$	તાર્કિક તારણ
5	તેથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ધારણાનો ઉપયોગ અને આગળનું વિધાન
6	AC અને AD ધન હોવાથી $AC = AD$	સંખ્યાના જાડીતા ગુણ્યાર્થમનો ઉપયોગ કરતાં
7	આપણે દર્શાવ્યું છે કે $AC = AD$. ઉપરાંત રચના કરી છે કે $BC = BD$ અને AB સામાન્ય છે. તેથી બાબાબા પરથી, $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	જાડીતા પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યો.
8	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ હોવાથી, $\angle ABC \cong \angle ABD$ મળે અને $\angle ABD$ કાટકોણ છે. $\therefore \angle ABC = 90^\circ$	અગાઉ પ્રસ્તાવિત હકીકતને આધારે તાર્કિક તારણ

નોંધ : ઉપરના પૈકી દરેક પરિણામ બધાં એક સાથે જોડાયેલાં પરિણામો છે. તેમને સોપાનોની કમિકતાથી સાબિત કર્યો છે તેમનો કમ અગત્યનો છે. સાબિતીમાંનું દરેક સોપાન આગળના સોપાનને અને અગાઉના જાડીતાં પરિણામોને અનુસરે છે. (જુઓ પ્રમેય 6.9.)

સ્વાધ્યાય A 1.3

નીચેનાં દરેક પ્રશ્નમાં એક વિધાન સાબિત કરવાનું છે. દરેક સાબિતીમાં બધાં સોપાનોની યાદી બનાવો અને દરેક સોપાન માટે કારણ આપો :

1. બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 4 વડે વિભાજ્ય છે.
2. બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓ લો. તેમના વર્ગોનો સરવાળો લો. અને મળતા પરિણામમાં 6 ઉમેરો. સાબિત કરો કે આ રીતે ગ્રાફ નવી સંખ્યા હુંમેશાં 8 વડે વિભાજ્ય છે.
3. જો $p \geq 5$ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય, તો સાબિત કરો કે, $p^2 + 2$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

(સૂચન : ઉદાહરણ 11નો ઉપયોગ કરો.)

4. જો x અને y સંમેય સંખ્યાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે, xy સંમેય સંખ્યા છે.
5. જો a અને b ધન પૂર્ણાંક હોય, તો તમે જાણો છો કે, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, જ્યાં q એ પૂર્ણ સંખ્યા છે. સાબિત કરો કે ગુ.સા.અ. $(a, b) =$ ગુ.સા.અ. (b, r)
- [સૂચન : ધારો કે, ગુ.સા.અ. $(b, r) = h$. તેથી, $b = k_1 h$ અને $r = k_2 h$ જ્યાં k_1 અને k_2 પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.]
6. ત્રિકોણ ABCની બાજુ BC ને સમાંતર રેખા AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદ છે. સાબિત કરો કે, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5 વિધાનનું નિષેધ

આ વિભાગમાં, આપણે વિધાનના નિષેધનો અર્થ શું છે તેની ચર્ચા કરીશું. આપણે શરૂ કરીએ તે પહેલાં આપણે સંકલ્પના સમજવી સરળ બને તે માટે કેટલાક સંકેત દાખલ કરીએ. શરૂઆતમાં આપણે વિધાનને એક એકમ તરીકે લઈએ અને તેને એક સંકેત આપીએ. ઉદાહરણ તરીકે, વિધાન : ‘દિલ્લીમાં પહેલી સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.’ ને આપણે p વડે દર્શાવીએ. આને આમ પણ લખી શકાય.

p : દિલ્લીમાં પહેલી સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.

એ જ રીતે, ચાલો આપણે લખીએ.

q : બધા શિક્ષકો સ્વી છે.

r : માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.

$s : 2 + 2 = 4$

t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

આ સંકેત આપણાને વિધાનનો ગુણધર્મોની ચર્ચા કરવા તેમજ કેવી રીતે તેમને જોડી શકાય તે માટે મદદ કરે છે. શરૂઆતમાં આપણે જેને ‘સાદું’ વિધાન કહીએ છીએ તેના વિશે જોઈશું અને પછી ‘સંયુક્ત’ વિધાન વિશે જોઈશું.

હવે નીચેનું કોષ્ટક ધ્યાનમાં લો. તેમાં આપેલા દરેક વિધાન પરથી નવું વિધાન બનાવ્યું છે.

મૂળ વિધાન	નવું વિધાન
p : હિલ્લીમાં 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.	$\sim p$: તે અસત્ય છે કે, 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ હિલ્લીમાં વરસાદ હતો.
q : બધા શિક્ષકો જી છે.	$\sim q$: તે અસત્ય છે કે, બધા શિક્ષકો જી છે.
r : માઈકના કૂતરાને કાળી પૂછડી છે.	$\sim r$: તે અસત્ય છે કે, માઈકના કૂતરાને કાળી પૂછડી છે.
$s : 2 + 2 = 4$	$\sim s$: તે અસત્ય છે કે, $2 + 2 = 4$
t : ટ્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.	$\sim t$: તે અસત્ય છે કે, ટ્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

કોષ્ટકમાંનું નવું વિધાન જૂના વિધાનને અનુરૂપ નિષેધ છે. એટલે કે, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ અને $\sim t$ અનુકૂળ વિધાનો p , q , r , s અને t નાં નિષેધ છે. અહીં, $\sim p$ એ ‘ p નથી’ એમ વંચાય. વિધાન $\sim p$ એ હકાર વિધાન p નું નકાર બનાવે છે. ધ્યાન આપો કે, આપડી સામાન્ય વાતચીતમાં આપણે $\sim p$ નો સરળ અર્થ ‘હિલ્લીમાં 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ ન હતો એમ લઈએ છીએ.’ તેમ છતાં જ્યારે આપણે આમ કરીએ ત્યારે તેની કાળજી લેવી જરૂરી છે. તમે કદાચ એવું ધારતા હો કે, વિધાનનું નિષેધ સરળ રીતે મેળવવા આપેલા વિધાનમાં યોગ્ય જગ્યાએ ‘નહીં’ દાખલ કરીને મેળવી શકાય.

જ્યારે વિધાન “બધા”થી શરૂ થતું હોય, ત્યારે p ના આ ડિસ્ટ્રિક્ટ મુશ્કેલી આવશે. ઉદાહરણ તરીકે વિધાન q નો વિચાર કરો. q : બધા શિક્ષકો જી છે. આ વિધાનનું નિષેધ આપણે $\sim q$ તરીકે લઈએ. તે અસત્ય છે કે, બધા શિક્ષકો જી છે તે “કેટલાક શિક્ષકો પુરુષ છે” ના જેવું વિધાન છે.

ચાલો આપણે જોઈએ કે, જો માત્ર “નહિં” એ q માં ઉમેરીએ તો શું થાય. આપણાને એવું વિધાન મળો : “બધા શિક્ષકો જી નથી” અથવા આપણો એ વિધાન મેળવી શકીએ : “બધા જ શિક્ષકો જી નથી.” પહેલું વિધાન લોકોને ગુંચવણમાં મૂકી શકે. તેનો સૂચિતરાઈ (જો આપણે શર્દુ ‘બધા’ પર ભાર મૂકીએ) એ છે કે, બધા શિક્ષકો પુરુષ છે. આ ચોક્કસ રીતે q નું નિષેધ નથી. તેમ છતાં, બીજું વિધાન $\sim q$ નો અર્થ આપે છે. એટલે કે, ઓછામાં ઓછો એક શિક્ષક હોય જે જી ન હોય. તેથી, જ્યારે વિધાનનું નિષેધ લખો ત્યારે કાળજી લો !

તેથી, આપણે સાચા નિષેધનો નિર્ણય કેવી રીતે કરીશું? આપણે નીચેના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીએ.

પારો કે, p એક વિધાન છે અને $\sim p$ તેનું નિષેધ છે. જ્યારે p સત્ય હોય ત્યારે $\sim p$ અસત્ય હોય અને જ્યારે $\sim p$ અસત્ય હોય ત્યારે p સત્ય હોય.

ઉદાહરણ તરીકે, જો માઈકના કૂતરાની પૂછડી કાળી છે, તે સત્ય હોય, તો માઈકના કૂતરાની પૂછડી કાળી નથી તે અસત્ય છે. “જો માઈકના કૂતરાની પૂછડી કાળી છે” એ અસત્ય હોય તો માઈકના કૂતરાની પૂછડી કાળી નથી તે સત્ય હોય.

આ જ રીતે વિધાનો ઝ અને ઝ ના નિષેધ માટે, $s = 2 + 2 = 4$ નું નિષેધ, $\sim s = 2 + 2 \neq 4$

t : ટ્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

નિર્ધેધ, $\sim t$: ત્રિકોણ ABC સમબાજુ નથી.

તો હવે, $\sim(\sim t)$ શું થશે ? તે $2 + 2 = 4$ થશે. તે ડ છે અને $\sim(\sim t)$ શું છે ?

“ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે” તેમ થશે. એટલે કે ઇ છે.

હકીકતમાં કોઈ પણ વિધાન p માટે $\sim(\sim p)$ એ p છે.

ઉદાહરણ 12 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિર્ધેધ જણાવો :

- માઈકના કૂતરાને કાળી પૂછડી નથી.
- બધી અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.
- $\sqrt{2}$ અસંમેય સંખ્યા છે.
- કેટલીક સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.
- બધા શિક્ષકો પુરુષ નથી.
- કેટલાક ઘોડાઓ બદામી રંગના નથી.
- કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી નથી કે, જેથી $x^2 = -1$ થાય.

ઉકેલ :

- માઈકના કૂતરાની પૂછડી કાળી નથી તે અસત્ય છે. એટલે કે, માઈકના કૂતરાની પૂછડી કાળી છે.
- બધી અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તે અસત્ય છે, એટલે કે, કેટલીક (ઓછામાં ઓછી એક) અસંમેય સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. કોઈ આને એવું પણ લખી શકે “બધી જ અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તેવું સત્ય નથી.”
- $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તે અસત્ય છે, એટલે કે, $\sqrt{2}$ અસંમેય નથી.
- કેટલીક સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે તે અસત્ય છે, એટલે કે કોઈક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.
- બધા શિક્ષકો પુરુષો નથી તે અસત્ય છે, એટલે કે, કેટલાક શિક્ષકો સ્ત્રીઓ છે.
- કેટલાક ઘોડાઓ બદામી રંગના નથી તે અસત્ય છે, એટલે કે, બધા ઘોડાઓ બદામી રંગના છે.
- કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા એવી નથી કે જેથી, $x^2 = -1$ થાય તે અસત્ય છે, એટલે કે, ઓછામાં ઓછી એક વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી છે જેથી, $x^2 = -1$ થાય.

નોંધ : ઉપરની ચર્ચા પરથી, કોઈ વિધાનનું નિર્ધેધ મેળવવા માટે આપણે નીચેના કાર્યનિયમો સુધી પહોંચાએ.

- પહેલાં નહિ લખીને વિધાન લખો.
- જો તેમાં કોઈ ગુંચવણ હોય, તો વિશિષ્ટ રીતે, વિધાનોમાં ‘બધા’ કે ‘કેટલાક’ સમાયેલા હોય ત્યારે યોગ્ય સુધારા કરો.

સ્વાધ્યાય A 1.4

1. નીચેનાં વિધાનોનાં નિર્ધેધ જણાવો :

- મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન છે.
- રેખા l એ રેખા m ને સમાંતર છે.

- (iii) આ પ્રકરણમાં ઘડ્યા સ્વાધ્યાય છે.
- (iv) બધી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ છે.
- (v) કેટલીક અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગમ છે.
- (vi) કોઈ વિદ્યાર્થી આળસુ નથી.
- (vii) કેટલીક બિલાડીઓ કાળી નથી.
- (viii) $\sqrt{x} = -1$ થાય તેવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x નથી.
- (ix) પૂર્ણાંક સંખ્યા $a, 2$ વડે વિભાજ્ય છે.
- (x) a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો છે.
2. નીચેના દરેક પ્રશ્નોમાં, બે વિધાનો છે. બીજું વિધાન એ પહેલા વિધાનનું નિષેધ છે કે નહીં તે જણાવો.
- (i) મુમતાજ ભૂખી છે. (ii) કેટલીક બિલાડીઓ કાળી છે.
- મુમતાજ ભૂખી નથી. કેટલીક બિલાડીઓ કથ્થાઈ છે.
- (iii) બધા હાથી મોટા છે. (iv) બધાં અગ્નિશામક યંત્રો લાલ હોય છે.
- એક હાથી મોટો નથી. બધાં અગ્નિશામક યંત્રો લાલ નથી.
- (v) કોઈ મનુષ્ય ગાય નથી. કેટલાક મનુષ્યો ગાય છે.

A1.6 વિધાનનું પ્રતીપ

હવે, આપણે વિધાનના પ્રતીપની સંકલ્પનાનું પરીક્ષા કરીએ. આના માટે, આપણને સંયુક્ત વિધાનની સંકલ્પનાની જરૂર પડશે તે એક અથવા વધારે સાદાં વિધાનોનું સંયોજન છે. સંયુક્ત વિધાનો બનાવવા માટેની ઘડી રીતો છે. પરંતુ, આપણે બે સાદાં વિધાનોને ‘જો અને તો’ નો ઉપયોગ કરી જોડવા ઉપર ધ્યાન આપીશું. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ વિધાન ‘જો વરસાદ પડે, તો સાયકલ પર જવું મુશ્કેલ પડે’ એ બે વિધાનોનું બનેલું છે.

p : વરસાદ પડે છે.

q : સાઈકલ પર જવું મુશ્કેલ પડે.

આગળ દર્શાવેલ સંકેતનો ઉપયોગ કરીને આપણે કહી શકીએ : $\text{જો } p \text{ તો } q$.

આપણે એવું પણ કહી શકીએ કે, p પરથી q સૂચિત થાય છે અને તેને $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય છે.

હવે, ધારો કે, કોઈ એવું વિધાન છે, ‘જો પાણીની ટાંકી કાળી હોય, તો તેમાં પીવાલાયક પાણી છે.’ આ વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપમાં છે.

અહીં p પક્ષ છે. (પાણીની ટાંકી કાળી છે) અને q તારણ છે. (ટાંકીમાં પીવાલાયક પાણી છે) ધારો કે, આપણે પક્ષ અને તારણને બદલીએ, તો શું ભણે ? અહીં $q \Rightarrow p$ મળે. એટલે કે, જો ટાંકીમાંનું પાણી પીવાલાયક હોય, તો તે ટાંકી કાળી હોય. આ વિધાનને વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન $q \Rightarrow p$ છે, યાદ રાખો કે,

સામાન્ય રીતે, જો p અને q વિધાનો હોય, તો વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન $q \Rightarrow p$ છે, યાદ રાખો કે, $p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow p$ બંને એકબીજાનાં પ્રતીપ વિધાનો છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

- (i) જો જમિલા સાયકલ ચલાવતી હોય, તો 17 ઓગસ્ટે રવિવાર હોય.
- (ii) જો 17 ઓગસ્ટે રવિવાર હોય, તો જમિલા સાઈકલ ચલાવતી હોય.
- (iii) જો પૌલિન ગુસ્સે થાય, તો તેનો ચહેરો લાલ થાય.
- (iv) જો કોઈ બજીની પાસે શિક્ષણની ડિગ્રી હોય, તો તે ભણાવી શકે.
- (v) જો કોઈ બજીને વાયરસનો ચેપ લાગે, તો તેનું તાપમાન ઊંચું રહે.
- (vi) જો અહમદ મુંબઈમાં હોય, તો તે ભારતમાં છે.
- (vii) જો ટ્રિકોણ ABC સમબાજુ ટ્રિકોણ હોય, તો તેના અંત:કોણો સમાન છે.
- (viii) જો x એ અસંમેય સંખ્યા હોય, તો x નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત છે.
- (ix) જો $x - a$ બહુપદી $p(x)$ નો અવયવ હોય, તો $p(a) = 0$

ઉકેલ :

ઉપરનું દરેક વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપમાં છે. તેથી તેનું પ્રતીપ શોધવા માટે પહેલાં p અને q ઓળખીશું અને પછી $q \Rightarrow p$ લખીશું.

- (i) p : જમિલા સાઈકલ ચલાવે છે અને
 q : 17 ઓગસ્ટ રવિવારે આવશે.
 તેથી તેનું પ્રતીપ થશે : જો 17 ઓગસ્ટ રવિવાર આવે, તો જમિલા સાઈકલ ચલાવે.
- (ii) આ વિધાન (i) નું પ્રતીપ વિધાન છે. તેથી, તેનું પ્રતીપ એ ઉપર આપેલું વિધાન (i) છે.
- (iii) જો પૌલિનનો ચહેરો લાલ થાય, તો તે ગુસ્સે હોય.
- (iv) જો કોઈ બજીની ભણાવી શકે, તો તેની પાસે શિક્ષણની ડિગ્રી હોય.
- (v) જો કોઈ બજીનું તાપમાન ઊંચું રહે, તો તેને વાઈરસનો ચેપ લાગ્યો હોય.
- (vi) જો અહમદ ભારતમાં હોય, તો તે મુંબઈમાં હોય.
- (vii) જો ટ્રિકોણ ABC ના બધા અંત:કોણો સમાન હોય, તો તે સમબાજુ છે.
- (viii) જો x નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત હોય, તો x એ અસંમેય સંખ્યા છે.
- (ix) જો $p(a) = 0$ હોય, તો $x - a$ એ બહુપદી $p(x)$ નો અવયવ છે.

જુઓ કે, આપણે ઉપર આપેલા દરેક વિધાનના પ્રતીપ તે સત્ય છે કે, અસત્ય તેની ચિંતા કર્યા સિવાય એમ જ લખ્યા છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું વિધાન વિચારો. જો અહમદ મુંબઈમાં હોય, તો તે ભારતમાં છે. આ વિધાન સત્ય છે. હવે, તેનું પ્રતીપ વિધાન ધ્યાનમાં લો : જો અહમદ ભારતમાં હોય, તો તે મુંબઈમાં છે. આ હંમેશાં સત્ય ન પણ હોઈ શકે. તે ભારતનાં ગમે તે ભાગમાં હોઈ શકે.

ગણિતમાં, ચોક્કસ રીતે ભૂમિતિમાં, તમે એવી ઘણી સ્થિતિમાં આવ્યા હશો કે, જ્યાં $p \Rightarrow q$ સત્ય હોય અને તેનું પ્રતીપ વિધાન, અર્થાત્, $q \Rightarrow p$ પણ સત્ય છે કે નહીં તે નક્કી કરવું પડે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ વિધાનો જણાવો. દરેક કિસ્સામાં તે સત્ય છે કે અસત્ય એ પણ નક્કી કરો.

- જો n યુગમ પૂર્ણાંક હોય, તો $2n + 1$ અયુગમ પૂર્ણાંક છે.
- જો વાસ્તવિક સંખ્યાનું દરશાશ નિરૂપણ સાન્ત હોય, તો તે સંખ્યા સંમેય છે.
- જો બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદતી હોય, તો અનુકોણોની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.
- જો કોઈ ચતુર્ભુણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુર્ભુણ સમાંતરબાજુ ચતુર્ભુણ છે.
- જો બે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય, તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

ઉકેલ :

- પ્રતીપ વિધાન ‘જો $2n + 1$ અયુગમ પૂર્ણાંક હોય, તો n યુગમ પૂર્ણાંક છે’ થાય. આ વિધાન અસત્ય છે.
(ઉદાહરણ તરીકે, $15 = 2(7) + 1$ અને 7 તે અયુગમ છે.)
- પ્રતીપ વિધાન ‘જો કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા સંમેય હોય, તો તેનું દરશાશ નિરૂપણ સાન્ત હોય’ થાય. આ અસત્ય વિધાન છે, કારણ કે, સંમેય સંખ્યાનું દરશાશ નિરૂપણ અનંત આવૃત પણ હોઈ શકે છે.
- પ્રતીપ વિધાન થશે ‘જો કોઈ છેદિકા બે રેખાને એવી રીતે છેદ કે તેથી બનતા અનુકોણ સમાન થાય, તો તે બે રેખાઓ સમાંતર છે.’ આપણે ધોરણ IX પાઠ્યપુસ્તકની પૂર્વધારણા 6.4માં એવું ધાર્યું છે. તેથી આ વિધાન સત્ય છે.
- જો કોઈ ચતુર્ભુણ સમાંતરબાજુ ચતુર્ભુણ હોય, તો તેની સામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુ સમાન છે. આ સત્ય છે. (પ્રમેય 8.1, ધોરણ IX)
- ‘જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો એકરૂપ છે’ એ પ્રતીપ છે. આ વિધાન અસત્ય છે. આનું કોઈ ધોરણ પ્રતિઉદાહરણ શોધવાનું તમારા પર છોડી દઈશું.

સ્વાધ્યાય A 1.5

1. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

- જો ટેક્સ્યોમાં ગરમી હોય, તો શરણને ખૂબ પરસેવો વળો.
- જો શાલિની ભૂખી હોય, તો તેના પેટમાં બિલાડાં બોલતાં હોય.
- જો જસ્વંતને શિષ્યવૃત્તિ મળે, તો તે ડિગ્રી મેળવી શકે.
- જો વનસ્પતિને ફૂલો હોય, તો તે જીવંત છે.
- જો કોઈ પ્રાણી બિલાડી હોય, તો તેને પૂંછડી હોય.

2. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો. ઉપરાંત દરેક કિસ્સામાં, તેનું પ્રતીપ સત્ય છે કે અસત્ય છે તે નક્કી કરો.

- જો ત્રિકોણ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેના આધાર પરના ખૂણા સમાન હોય.

- (ii) જો કોઈ પૂર્ણક અયુગમ હોય, તો તેનો વર્ગ અયુગમ પૂર્ણક છે.
- (iii) જો $x^2 = 1$ હોય, તો $x = 1$
- (iv) જો ABCD સમાંતર બાજુ ચતુર્ભુષણ હોય, તો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે છે.
- (v) જો a, b અને c પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય, તો $a + (b + c) = (a + b) + c$
- (vi) જો x અને y બે અયુગમ સંખ્યાઓ હોય, તો $x + y$ યુગમ સંખ્યા છે.
- (vii) જો કોઈ સમાંતરબાજુ ચતુર્ભુષણનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

A1.7 વિરોધાભાસથી સાબિતી

અત્યાર સુધીનાં આપણાં બધાં ઉદાહરણોમાં આપણે પરિણામોની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે પ્રત્યક્ષ દલીલોનો ઉપયોગ કર્યો હતો. હવે આપણે પરોક્ષ દલીલો કરીશું, વિશિષ્ટ રીતે ગણિતમાં ‘વિરોધાભાસથી સાબિતી’ તરીકે ઓળખાતું બૂબુ જ શક્તિશાળી એવું સાધન છે. આપણે આ રીતનો પ્રકરણ 1માં કેટલીક સંખ્યાઓને સંમેય પ્રસ્થાપિત કરવા અને બીજા પ્રકરણોમાં કેટલાક પ્રમેયોમાં પણ ઉપયોગ કર્યો છે. અહીં, આપણે બીજાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો આ સંકલ્પના દર્શાવવા લઈશું.

શરૂઆત કરતાં પહેલાં, આપણે વિરોધાભાસ શું છે તે સમજાયે. ગણિતમાં, જ્યારે વિધાન p એવું મળે કે p સત્ય હોય અને તેનું નિષેધ $\neg p$ પણ સત્ય હોય, ત્યારે વિરોધાભાસ ઉદ્ભવે.

ઉદાહરણ તરીકે,

$$p : x = \frac{a}{b}, a \text{ અને } b \text{ પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.}$$

$$q : a \text{ અને } b \text{ બંને 2 વડે નિઃશેષ વિભાજ્ય છે.}$$

જો આપણે એવું ધારીએ કે, p સત્ય છે અને q સત્ય છે તેવું સાબિત કરી શકીએ, તો આપણે વિરોધાભાસ પર આવીએ છીએ. કારણ કે, q સૂચિત કરે છે કે, p નું નિષેધ સત્ય છે. તમને યાદ હશે કે, જ્યારે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ, ત્યારે આ જ બન્યું હતું. (જુઓ પ્રકરણ 1)

વિરોધાભાસથી સાબિતી કેવી રીતે મળે છે ?

આપણે આ એક ચોક્કસ ઉદાહરણથી સમજાયે.

ધારો કે, આપણને નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

બધી સ્વીઓ મૃત્યુને અધીન છે.

A સ્વી છે. સાબિત કરો કે, A મૃત્યુને અધીન છે.

આ એક અત્યંત સરળ ઉદાહરણ છે. ચાલો આપણે જોઈએ કે, તેને વિરોધાભાસથી કેમ સાબિત કરી શકાય.

- ચાલો, આપણે ધારીએ કે, વિધાન p ની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માંગીએ છીએ. (અહીં, આપણે સાબિત કરવા માંગીએ છીએ કે, A મૃત્યુને અધીન છે તે સત્ય છે.)

- તેથી, આપણે વિધાન સત્ય નથી એવું ધારીને શરૂઆત કરીશું એટલે કે, આપણે ધારીશું કે p નું નિષેધ સત્ય છે. (એટલે કે, A મૃત્યુને અધીન નથી.)
 - પછી આપણે p ના નિષેધની સત્યાર્થતા પર આધારિત તાર્કિક તારણોની હારમાળા આગળ લઈ જવાની પ્રક્રિયા કરીશું. (કારણ કે, A મૃત્યુને અધીન નથી એ આપેલા વિધાન ‘બધી લીઓ મૃત્યુને અધીન છે.’ નું ગ્રતિ ઉદાહરણ છે. તેથી, તે અસત્ય છે કે, બધી લીઓ, મૃત્યુને અધીન છે.)
 - જો આ વિરોધાભાસ તરફ દોરતું હોય, તો આપણી અસત્ય ધારણા કે, p સત્ય નથી ના કારણે વિરોધાભાસ ઉદ્ભબ છે. (આપણાને વિરોધાભાસ મળે છે, કારણ કે, આપણે બધી લીઓ મૃત્યુને અધીન છે’ અને તેનું નિષેધ એ જ સાથે ‘બધી લીઓ મૃત્યુને અધીન નથી’ એ સત્ય હોવાથી વિરોધાભાસ મળે છે; કારણ કે આપણે ધાર્યું છે કે, A મૃત્યુને અધીન નથી.)
 - તેથી આપણી ધારણા અસત્ય છે. એટલે કે, p સત્ય થવું જોઈએ. (તેથી, A મૃત્યુને અધીન છે.)
- ચાલો આપણે ગણિતનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 15 : શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને કોઈ પણ અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ :

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
આપણે વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીશું. ધારો કે, r શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા છે અને x અસંમેય સંખ્યા છે. ધારો કે, $r = \frac{m}{n}$ જ્યાં m અને n પૂર્ણાંકો છે અને $m \neq 0, n \neq 0$. આપણે એ સાબિત કરવું છે કે rx અસંમેય છે.	
ધારો કે, rx સંમેય છે.	અહીં, આપણે સાબિત કરવા જરૂરી વિધાનનું નિષેધ ધાર્યું છે.
તેથી, પૂર્ણાંક p , શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $rx = \frac{p}{q}$	આગળના વિધાન અને સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા અનુસાર
$rx = \frac{p}{q}, q \neq 0$ ની પુનરચના કરીએ અને $r = \frac{m}{n}$ નો ઉપયોગ કરીએ, $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ મળે. np અને mq પૂર્ણાંકો છે અને $mq \neq 0$. તેથી x સંમેય સંખ્યા છે.	પૂર્ણાંકોના ગુણધર્મો અને સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા પરથી.
આ એક વિરોધાભાસ છે, કારણ કે, આપણે સિદ્ધ કર્યું કે x સંમેય છે. પરંતુ પક્ષ પ્રમાણે x અસંમેય છે.	આપણે આ જ વિરોધાભાસ તો શોધતા હતા.
rx સંમેય છે એવી અસત્ય ધારણાના કારણે આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભબ્યો. આથી rx અસંમેય છે.	તાર્કિક તારણ

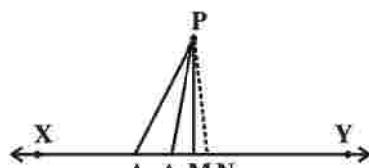
હવે, આપણે ઉદાહરણ 11 સાબિત કરીશું. પરંતુ આ વખતે વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીશું. સાબિતી આગળ આપેલી છે.

ગણિત

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
આપણે એવું ધારીએ કે, વિધાન સત્ય નથી.	આગળ જોયું તેમ, વિરોધાભાસથી સાબિતીનો આ શરૂઆતનો મુદ્દો છે.
તેથી, આપણે ધારીએ કે, પૂર્ણાંક સંખ્યા n માટે $6n + 1 \leq 6n + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય એવી અવિભાજ્ય સંખ્યા $p > 3$ મળે.	પરિણામમાંના વિધાનનું આ નિષેધ છે.
6 વડે ભાગાકાર માટે યુક્તિડ ભાગ પ્રવિષ્ટ અને p એ $6n + 1 \leq 6n + 5$ સ્વરૂપમાં નથી એ હકીકતનો ઉપયોગ કરીને $p = 6n$ કે $6n + 2 \leq 6n + 3$ કે $6n + 4$ મળે. ($p > 3$ અવિભાજ્ય હોવાથી $n > 1$)	અગાઉ સાબિત કરેલા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં
તેથી, p એ કાં તો 2 અથવા 3 વડે વિભાજ્ય બને.	તાર્કિક તારણ
તેથી, p અવિભાજ્ય નથી. (નોંધ : $p > 3$ હોવાથી $p = 2$ અથવા 3 નથી.)	તાર્કિક તારણ
આપણી પૂર્વધારણા p અવિભાજ્ય છે. તેનો આ વિરોધાભાસ છે.	આપણને આન્ની જ જરૂર છે.
અહીં, વિરોધાભાસ મળે છે, કારણ કે, આપણે ધાર્યું છે કે એવો અવિભાજ્ય $p > 3$ અસ્તિત્વ ધરાવે જે $6n + 1 \leq 6n + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય.	
તેથી, 3 કરતાં મોટી પ્રત્યેક અવિભાજ્ય સંખ્યા $6n + 1 \leq 6n + 5$ સ્વરૂપમાં હોય.	આપણે તારણ મેળવ્યું.

નોંધ : ઉપર તમે સાબિતીનું ઉદાહરણ દર્શાવ્યું, હજુય ફરીથી પરિણામ સાબિત કરવા માટે બીજી કેટલીક રીતો છે.

પ્રમેય A 1.2 : એક બિંદુમાંથી તે બિંદુમાંથી પસાર ન થતી હોય તેવી રેખા પરનાં બિંદુઓ અને આપેલ બિંદુને જોડતા તમામ રેખાખંડોમાં તે બિંદુમાંથી રેખા પરનો લંબરેખાખંડ સૌથી નાનો હોય છે.



આકૃતિ A 1.5

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
ધારો કે XY આપેલી રેખા છે. P એ રેખા XY પર ન હોય તેવું બિંદુ છે અને PM, PA_1, PA_2, \dots વગેરે P માંથી રેખા XY પરનાં બિંદુઓ સુધી દોરેલા રેખાખંડો છે. તેમાં PM સૌથી નાનો છે. (જુઓ આકૃતિ A 1.5.)	આપણે એવું સાબિત કરવું છે કે, PM, PA_1, PA_2, \dots વગેરે માંથી XY ને લંબ સૌથી નાનો છે. આપણે આ રેખાખંડો લઈને શરૂ કરીશું.
ધારો કે PM એ XY ને લંબ નથી.	વિરોધાભાસથી સાબિત કરવા માટે વિધાનનું આ નિષેધ છે.
XY પર લંબ PN દોરો. તે આકૃતિ A 1.5માં તૂટક રેખાથી દર્શાવેલ છે.	આપણે આપણું પરિણામ સાબિત કરવા રચનાની અવારનવાર જરૂર પડશે.

PN એ આપેલા બધા રેખાખંડો PM, PA ₁ , PA ₂ , ... વગેરેમાં સૌથી નાનો છે. એટલે કે, PN < PM	કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુ કર્ષાથી નાની હોય છે અને સંખ્યાઓનો જાડીતો ગુણધર્મ
આપણી પૂર્વધારણા કે PM એ બધા રેખાખંડોમાં સૌથી નાનો છે તેનો વિરોધાભાસ મળે છે.	ચોક્કસપણે આપણે આની જ તો જરૂર છે.
તેથી, રેખાખંડ PM એ XY ને લંબ છે.	આપણે તારણ મેળવ્યું.

સ્વાધ્યાય A 1.6

- ધારો કે, $a + b = c + d$, અને $a < c$, વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, $b > d$
- જો r સંમેય સંખ્યા હોય અને x અસંમેય સંખ્યા હોય, તો વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, $r + x$ અસંમેય સંખ્યા છે.
- વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, a^2 યુગ્મ હોય, તો a પણ યુગ્મ છે.
[સૂચન : a યુગ્મ નથી એમ ધારો. તેથી, તે કોઈ પૂર્ણાંક n માટે a^2 એ $2n + 1$ સ્વરૂપમાં છે અને આગળ વધો]
- વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, $a^2, 3$ વડે વિભાજ્ય હોય, તો a એ, 3 વડે વિભાજ્ય હોય.
- વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને ભતાવો કે, n ની કોઈ પણ કિમત માટે 6^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય ન હોય.
- વિરોધાભાસથી સાબિત કરો કે, સમતલની કોઈપણ બે લિન રેખાઓ એક કરતાં વધારે બિંદુમાં છેટે નહીં.

A1.8 સારાંશ

આ પરિશીષણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

- સાબિતીના અલગ અલગ ઘટકો અને ધોરણ IX માં શીખેલી સંબંધિત સંકલનાઓ.
- વિધાનનું નિષેધ
- વિધાનનું પ્રતીપ
- વિરોધાભાસથી સાબિતી



ગાણિતિક મોડેલિંગ A2

A2.1 પ્રાસ્તાવિક

- એક પુખ્ત માનવશરીરમાં લોહીનું વહન કરતી ધમનીઓ અને શિરાઓની લંબાઈ લગભગ 1,50,000 કિમી હોય છે.
- માનવહૃદય શરીરમાં પ્રત્યેક 60 સેકન્ડે 5 થી 6 લિટર લોહીને વહેતું કરે છે.
- સૂર્યની સપાઠીનું તાપમાન અંદરે 6000° સે. છે.

તમને ક્યારેય આશ્રય થયું છે કે, આપણા વૈજ્ઞાનિકો અને ગાણિતશાસ્ત્રીઓએ ઉપર્યુક્ત પરિણામોનું અનુમાન કેવી રીતે કર્યું હશે ? તેમણે મૃત પુખ્ત માનવશરીરની બધી જ ધમનીઓ અને શિરાઓ બહાર કાઢીને તેમની લંબાઈ માપી હશે ? તે માનવશરીરનું બધું જ લોહી બહાર કાઢી અને આ પરિણામ પર પહોંચ્યા હશે ? સૂર્યની સપાઠીનું તાપમાન જાણવા માટે તેમણે થરમોમિટર સાથે સૂર્યની સજ્ર બેડી હશે ? ચોક્કસપણે ના. તો આ પરિણામોના આંકડા તેમને કેવી રીતે મળ્યા ?

સંભવત : આનો જવાબ ગાણિતિક મોડેલિંગમાં રહેલો છે. તમે તેનો પરિચય ધોરણ IX માં કર્યો છે. તમને યાદ હશે કે ગાણિતિક મોડેલિંગ એ જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે. અને તમે એ પણ જાણો છો કે, ગાણિતિક મોડેલિંગ ગાણિતિક મોડેલ બનાવવાની પદ્ધતિ છે અને આ આપણે મોડેલનો ઉપયોગ સમસ્યાનું વિશ્લેષણ કરવામાં અને તેને ઉકેલવામાં કરીએ છીએ.

આમ, ગાણિતિક મોડેલિંગમાં આપણે વાસ્તવિક દુનિયાને લગતી સમસ્યાઓ લઈશું અને તેનું રૂપાંતરણ તે સમસ્યાને સમકક્ષ ગાણિતિક સમસ્યામાં પરિવર્તિત કરીશું. ત્યાર બાદ આપણે ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી અને આ ઉકેલનું વાસ્તવિક દુનિયાને લગતી સમસ્યા માટે અર્થઘટન કરીશું. અહીં એ પણ જોવું અગત્યનું છે કે, આપણે મેળવેલ ઉકેલ મોડેલની યથાર્થતાની ચકાસણીના તબક્કે અર્થપૂર્ણ હોય. આગળ જેમાં ગાણિતિક મોડેલિંગની ખૂબ જ અગત્યતા હોય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપેલ છે :

- (i) દુર્ગમ સ્થાન પર આવેલ નદીની પહોળાઈ તથા ઊડાઈ શોધવી.
- (ii) પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહોના દ્રવ્યમાનનું અનુમાન કરવું.
- (iii) પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહો વચ્ચેના અંતરનું અનુમાન કરવું.
- (iv) કોઈ એક દેશમાં ચોમાસાના આગમનની આગાહી કરવી.
- (v) શેરબજારના વલણની આગાહી કરવી.
- (vi) વ્યક્તિના શરીરમાં રહેલા લોહીના જથ્થાનો અંદાજ લગાવવો.
- (vii) કોઈ એક શહેરની 10 વર્ષ પછીની જનસંખ્યાનું અનુમાન કરવું.
- (viii) ઝડ પર રહેલાં પાંદડાની સંખ્યાનો અંદાજ કાઢવો.
- (ix) કોઈ એક શહેરના વાતાવરણમાં રહેલા અલગ-અલગ પ્રદૂષકોનો ppm એકમમાં અંદાજ લગાવવો.
- (x) પ્રદૂષકોની પર્યાવરણ પર થતી અસરોના અંદાજ કાઢવા.
- (xi) સૂર્યની સપાટીના તાપમાનનો અંદાજ મૂકવો.

આ પ્રકરણમાં આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાનું પુનરાવલોકન કરીશું અને આસપાસનાં કેટલાંક દુન્યવી ઉદાહરણો દ્વારા તેની સંકળ્યના સ્પષ્ટ કરીશું. વિભાગ A 2.2 માં મોડલ બનાવવાના વિવિધ તબક્કા દર્શાવીશું. વિભાગ A 2.3 માં આપણે વિવિધ ઉદાહરણોની ચર્ચા કરીશું, વિભાગ A 2.4 માં આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગની ઉપયોગિતા સંબંધિત કારણો પર વિચાર કરીશું.

યાદ રાખો કે, અમારું ધેય તમને ગણિત દુન્યવી સમસ્યાઓ ઉકેલવામાં કેવી રીતે સહાય કરે છે તે વિશે જાગૃત કરવાનું છે. તેમ છતાં પણ ગાણિતિક મોડેલિંગના મહત્વને સચોટ રીતે સમજવા માટે તમને ગણિતનું થોડું વધારે જ્ઞાન હોય તે આવશ્યક છે. ઉચ્ચ વર્ગમાં તમને આને સંબંધિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોવા મળશે.

A2.2 ગાણિતિક મોડેલિંગનાં સોપાનો

ધોરણ IX માં આપણે મોડેલિંગ વિશેનાં ઉદાહરણો વિશે વિચાર કર્યો હતો. આ ઉદાહરણોમાં તમને પ્રક્રિયા અને તેમાં સમાવિષ્ટ સોપાનો વિશે જાણકારી મળી હતી. ચાલો, હવે આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગ સંબંધિત મુજ્ય સોપાનો પર ફરીથી વિચાર કરીએ.

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજણા) : વાસ્તવિક સમસ્યાને વ્યાખ્યાયિત કરો અને જો તમે સમૂહમાં કામ કરતા હો તો જેને તમે સમજવા માંગતા હો એવી સમસ્યા પર વિચાર કરો. કેટલીક ધારણાઓ કરીને તથા કેટલાંક પરિબળોને અવગણીને સફળતા મેળવી શકાય તે માટે સમસ્યાનું સરળીકરણ કરો.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, આપણી સમસ્યા એક તળાવમાં રહેલી માછલીઓનો સંખ્યાઓનો અંદાજ મેળવવાની છે. અહીં પ્રત્યેક માછલીને પકડી અને ત્યાર બાદ તેની ગણતરી કરવી શક્ય નથી. આવી સ્થિતિમાં, સંભવત: આપણે તળાવમાંથી માછલીઓનો નિયત નમૂનો લઈશું, તેની ગણતરી કરી અને તેના આધારે તેમની કુલ સંખ્યાનું અનુમાન કરીશું.

ગાંધીજિત

સોપાન 2 (ગાંધીજિત વર્ણન અને સૂચીકરણ) : સમસ્યાના વિભિન્ન પાસાંઓનું વર્ણન ગાંધીજિત શબ્દોમાં કરો. સમસ્યાના વિભિન્ન લક્ષણોને ગાંધીજિત સ્વરૂપે દર્શાવવાની કેટલીક પદ્ધતિઓ નીચે પ્રમાણે છે :

- ચલને વ્યાખ્યાયિત કરો.
- સમીકરણ અથવા અસમતા લખો.
- માહિતી એકત્રિત કરો અને તેને કોણક સ્વરૂપે દર્શાવો.
- આલેખ દોરો.
- સંભાવનાઓની ગણતરી કરો.

ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લીધેલા થોડાક નમૂનાના આધારે માછલીઓની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ કેવી રીતે કરી શકાય ? આ માટે નિશ્ચિત નમૂના તરીકે લીધેલ દરેક માછલીને નિશાની કરી અને તળાવમાં રહેલી બીજી માછલીઓ સાથે તેમને છોડી દઈશું. થોડાક સમય બાદ આપણે ફરીથી માછલીઓનો એક નિશ્ચિત નમૂનો લઈશું અને આ નવા નમૂનામાં અગાઉ નિશાની કરેલી માછલીઓની સંખ્યા કેટલી છે તે જોઈશું. ત્યારબાદ ગુણોત્તર અને પ્રમાણનો ઉપયોગ કરીને આપણે તેમની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ મેળવી શકીશું. ધારો કે, તળાવમાંથી આપણે 20 માછલીઓનો એક નમૂનો લઈએ છીએ અને દરેકને નિશાની કરી અને તળાવમાં બાકી રહેલ માછલીઓ સાથે ભળી જાય તે રીતે તે ૪ તળાવમાં છોડી દઈએ છીએ. ત્યારબાદ તળાવમાં રહેલા માછલીઓના મિશ્ર સમૂહમાંથી આપણે માછલીઓનો બીજો એક નમૂનો (ધારો કે, 50 માછલીઓ) લઈએ અને જોઈશું કે, આ નવા નમૂનામાં અગાઉથી નિશાની કરેલ કેટલી માછલીઓ આવેલ છે. આ પ્રમાણે આપણે માહિતી એકત્રિત કરીશું અને ત્યારબાદ તેનું વિશ્વેષણ કરીશું.

અહીં આપણે એવું માની લઈશું કે, નિશાની કરેલ દરેક માછલી એક સમાન રૂપે તળાવમાં બાકી રહેલ માછલીઓ સાથે ભળે છે અને આપણે જે નિશ્ચિત નમૂનો લઈએ છીએ તે માછલીઓના કુલ સમૂહનું સારું પ્રતિનિષિત્વ કરે છે.

સોપાન 3 (ગાંધીજિત સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : અહીં સોપાન 2 માં સરળ બનાવેલ ગાંધીજિત સમસ્યાનો વિભિન્ન ગાંધીજિત પ્રવિષ્ટિનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, સોપાન 2 માં લીધેલા બીજા જથ્થામાં 5 માછલીઓ નિશાનીવાળી મળે છે. આમ, માછલીઓની કુલ સંખ્યામાંથી $\frac{5}{50}$ એટલે કે, $\frac{1}{10}$ માછલીઓ નિશાનીવાળી હશે. હવે જો આ મળેલ સંખ્યાને કુલ સંખ્યા સ્વરૂપે દર્શાવીએ, તો કુલ સંખ્યાનો $\frac{1}{10}$ ભાગ = 20

$$\text{આમ, કુલ સંખ્યા} = 20 \times 10 = 200 \text{ થાય.}$$

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : અગાઉના સોપાનમાં ગ્રામ થયેલ ઉકેલને આપણે સોપાન 1 માં લીધેલ વાસ્તવિક જીવનસંબંધી સ્થિતિના સંદર્ભમાં લઈશું.

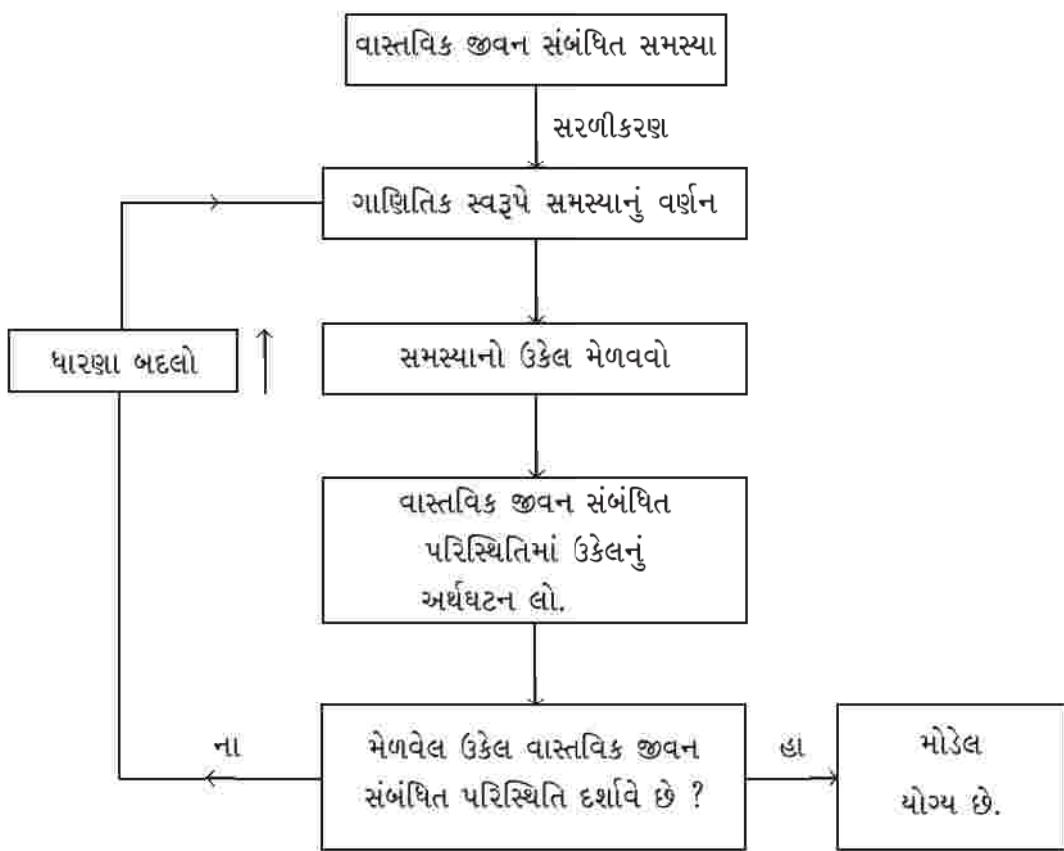
ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 3 ની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવતાં આપણને માછલીઓની કુલ સંખ્યા 200 મળી હતી.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : હવે આપણે મૂળ પરિસ્થિતિ પર પાછા ફરીએ અને જોઈએ કે, ગાણિતિક પ્રવિધિ દ્વારા મેળવેલ પરિણામ સાર્થક છે કે નહીં. જો સાર્થક હોય, તો આપણે જ્યાં સુધી કોઈ નવી માહિતી પ્રાપ્ત ન થાય અથવા તો યથાર્થતામાં કોઈ બદલાવ ન આવે ત્યાં સુધી આ મોડેલનો ઉપયોગ કરતા રહીશું.

ટેટલીક વાર સમસ્યાનું ગાણિતિક વર્ણન કરતી વખતે સરળીકરણ માટે કરવામાં આવતી ધારણાઓના લીધે વાસ્તવિક સમસ્યાના આવશ્યક પાસાંઓથી આપણે વંચિત રહીએ છીએ. આ પરિસ્થિતિમાં મેળવેલ ઉકેલ વાસ્તવિકતાથી બહુ જ દૂર હોય છે અને વાસ્તવિક પરિસ્થિતિના સંરંભમાં તે અર્થપૂર્ણ હોતા નથી. જો આવું થાય, તો આપણે સોપાન 1 માં કરેલી ધારણાઓ પર ફરી વિચાર કરીશું. અને કદાચ જે પરિબળોને અગાઉ અવગાયા હતા તેમનો સમાવેશ કરીને વધુ વાસ્તવિક બનાવીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 3 માં આપણાને મળેલ માછલીઓની કુલ સંખ્યાનું અનુમાન એ તળાવમાં રહેલી માછલીઓની વાસ્તવિક સંખ્યા જેટલું ના પણ હોય. હવે આપણે સોપાન 2 અને 3 ની પ્રક્રિયાને એકથી વધારે વાર કરી અને મેળવેલ પરિણામોનો મધ્યક મેળવીશું અને જોઈશું કે તે દ્વારા ઉચિત પરિણામ મળે છે કે નહિ. આ રીતે તમને કુલ સંખ્યાની વધુ નજીકનો અંદાજ મળશે.

ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાને દર્શાવતી બીજી એક પદ્ધતિ આકૃતિ A 2.1માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ A 2.1

ઉકેલની સરળતા માટે મોડેલ બનાવનાર સરળીકરણ (ઉકેલ પ્રાપ્તિની સરળતા માટે) અને ચોક્સાઈ બંનેની વગ્યે સંતુલન જાળવી રાખે છે કે, જેથી કંઈ પ્રગતિ થઈ શકે તેટલા વાસ્તવિકતાથી પર્યાપ્ત રીતે નજીક હોય તેવી તે આશા રાખે છે. સર્વોત્તમ પરિણામ એ હશે, કે જેનાથી આગળ શું થવાનું છે તેની આગાહી કરી શકાય અથવા તો થોડીક

ચોક્સાઈ સાથે પરિણામની આગાહી કરી શકાય. ધ્યાન રાખો કે, સમસ્યાના સરળીકરણ માટે ઉપયોગમાં લેવાયેલ વિભિન્ન ધારણાઓથી આપણને અલગ-અલગ મોડેલ મળી શકે છે. આમ કોઈ પણ મોડેલ પરિપૂર્ણ હોતું નથી. આમાંથી કેટલાક સારાં પણ હોય અને કેટલાંક ઉત્તમ પણ હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય A 2.1

- નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિ પર વિચાર કરો.

તેરમી સદીના પ્રારંભમાં લિઓનાર્ડો ફિલોનાકીએ એક કુટપ્રશ રજુ કર્યો કે, જો તમારી પાસે સસલાની એક જોડ (એક નર અને એક માદા) હોય અને તે પ્રજનન કરે તો અમૃત સમય પછી તમારી પાસે કેટલાં સસલાં હશે. ધારો કે, એક જોડ દર મહિને એક એક જોડ (એક નર અને એક માદા) ને જન્મ આપે છે અને તાજી જન્મેલી સસલાની જોડ જન્મના 2 મહિના બાદ પ્રથમ જોડને જન્મ આપી શકે છે. શરૂઆત અને પ્રથમ માસ ને બાદ કરતાં માસવાર સસલાંઓની જોડની સંખ્યા તે માસના અગાઉના બે માસમાં રહેલી જોડની સંખ્યાના સરવાળા બરાબર થાય છે.

માસ	સસલાની જોડ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

16 મહિના પછી તમારી પાસે લગભગ 1600 જોડ સસલાં હશે !

આ પરિસ્થિતિનું સ્પષ્ટ વિખાન કરો તથા ગાણિતિક મોડેલિંગનાં અલગ-અલગ સોપાનો વિશે સ્પષ્ટતા કરો.

A2.3 કેટલાંક ઉદાહરણો

હવે ગાણિતિક મોડેલિંગના કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : (પાસાની એક જોડને ફેંકવી) : ધારો કે, તમારી શિક્ષિકા તમને અનુમાન કરવાની એક રમત માટે આદ્યવાન આપે છે. આ રમતમાં તે પાસાની એક જોડ ફેંકશે. પાસાઓને ફેંકતાં પહેલાં તમારે તે બંને પાસા પર આવનાર સંખ્યાઓનો સરવાળો કેટલો હશે તેનું અનુમાન લગ્બાવવાનું છે. દરેક સત્ય જવાબ માટે તમને બે ગુણ મળશે અને દરેક અસત્ય જવાબ માટે તમે બે ગુણ ગુમાવશો. તો આ રમત માટે કઈ સંખ્યાઓ ઉત્તમ અનુમાન હશે ?

ઉકેલ :

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજ) : અહીં તમારે કેટલીક એવી સંખ્યાઓ જાણવી પડશે કે જેની પાસાઓ પર આવવાની સંભાવના સૌથી વધારે હોય.

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન) : ગાણિતિક સ્વરૂપમાં આ સમસ્યા પાસાઓ પર આવનાર સંખ્યાના અલગ-અલગ શક્ય સરવાળાઓની સંભાવના જાણવામાં પરિવર્તિત થાય છે.

નીચે દર્શાવેલ 36 સંખ્યા યુગ્મમાંથી કોઈ એક યાદચિક વિકલ્યના રૂપમાં પસંદ કરી આપણે બહુ જ સરળ રીતે આ સ્થિતિને પ્રદર્શિત કરી શકીએ છીએ :

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ઉપર્યુક્ત સંખ્યા-યુગ્મમાં દર્શાવેલ પ્રથમ સંખ્યા પ્રથમ પાસા પર આવેલ સંખ્યા છે અને બીજી સંખ્યા બીજા પાસા પર આવેલ સંખ્યા દર્શાવે છે.

સોપાન 3 (ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : ઉપર્યુક્ત સંખ્યા-યુગ્મમાં આવેલા સંખ્યાઓના સરવાળા કરતાં આપણને સંભવિત સરવાળા તરીકે 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 જેવી સંખ્યાઓ મળે છે. ઉપર્યુક્ત દરેક ઘટનાને સમસંભાવી માનીને આપણે દરેકની સંભાવના શોધવી પડશે.

તે આપણે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું :

સરવાળો	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

તમે જોઈ શકો છો કે, સંખ્યાઓનો સરવાળો 7 આવવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ છે. તે સરવાળા તરીકે આવતી અન્ય સંખ્યાઓ કરતા સૌથી વધારે છે.

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થધટન) : સરવાળો 7 આવવાની સંભાવના સૌથી વધારે હોવાથી તમે સંખ્યા 7 નું અનુમાન વારંવાર કરી શકો છો.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : પાસાની એક જોડને ઘણી બધી વાર ઉછાળો અને તેનાં પરિણામો માટે એક સાપેક્ષ

આવૃત્તિ કોષ્ટક બનાવો. હવે સાપેક્ષ આવૃત્તિની સરખામણી તેને અનુરૂપ સંભાવનાઓ જોડે કરો. હવે જો આ પરિણામો એકબીજાની નજીક ના હોય તો શક્ય છે કે, પાસાઓની જોડ અસમતોલ છે. જે સંખ્યા પૂર્વગ્રહયુક્ત હોય તેવી માહિતી લઈએ.

હવે પછીના ઉદાહરણ માટે તમને થોડીક પૂર્વ ભૂમિકાની જરૂર પડશે.

જ્યારે રૂપિયાની જરૂર હોય, ત્યારે રૂપિયા ના હોવા એ ઘણા બધા લોકોનો સામાન્ય અનુભવ છે. આપણને હંમેશાં રૂપિયાની જરૂર પડે છે; પછી એ જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુઓ ખરીદવા માટે હોય કે, ચુખાકારી માટે. સ્કૂટર, રેફિજરેટર, ટેલિવિઝન, કાર જેવી વસ્તુઓ ઓછી મૂડી સાથે પણ ગ્રાહક ખરીદી શકે તે માટે વેપારીઓ દ્વારા હપતા પદ્ધતિ જેવી યોજનાઓ અમલમાં મૂકવામાં આવે છે.

ઘણી વાર વસ્તુઓનું વેચાણ વધારવાના ભાગડુપે ગ્રાહકોને આર્કષવા માટે પણ વેપારી હપતાપદ્ધતિ જેવી યોજના મૂકે છે. હપતાપદ્ધતિમાં ગ્રાહકે વસ્તુ ખરીદી વખતે વસ્તુની પૂરેપૂરી ખરીદકિમત આપવી પડતી નથી. વસ્તુની ખરીદી વખતે ગ્રાહક વસ્તુની કુલ ખરીદ કિમતનો અમુક ભાગ ચૂકવે છે અને બાકી રહેલ રકમ તે માસિક, ત્રિમાસિક, છ માસિક કે વાર્ષિક હપતાડુપે ચૂકવી શકે. હકીકતમાં હપતાપદ્ધતિમાં વેપારી પાછળથી ચૂકવવામાં આવનારી રકમ પર થોડુંક વ્યાજ પણ ગ્રાહક પાસેથી વસૂલ કરે છે. (તેને સ્થગિત ચૂકવણી (Deferred payment) કહે છે.)

હપતા પદ્ધતિને વધુ સારી રીતે સમજવા માટે તેને સંબંધિત ઉદાહરણ લેતાં પહેલાં આપણે તેની સંકલ્પના સંબંધિત વારંવાર ઉપયોગમાં લેવાતા શર્જાઓ સમજાએ.

વસ્તુની ખરીદી વખતે ગ્રાહક દ્વારા ચૂકવાતી વસ્તુની પૂરેપૂરી કિમતને રોકડ કિમત (Cash price) કહે છે. હપતાપદ્ધતિમાં ગ્રાહક દ્વારા મૂળ કિમતના કોઈ એક અંશ જેટલી ચૂકવવામાં આવતી રકમને તત્કાળ ચૂકવણી (Down payment) કહે છે.

નોંધ : હપતાપદ્ધતિમાં ખરીદેલ વસ્તુની ખરીદીની બાકી રહેલ રકમની ચૂકવણી એક વર્ષની અંદર જ કરવાની હોય તો સ્થગિત ચૂકવણી પર સાઢુ વ્યાજ વસૂલવામાં આવે છે.

જૂના જમાનામાં ઉધાર લીધેલ ધન રાશિ પર વ્યાજ લેવું એક ફુમથા હતી અને આવું કરવું તે પ્રતિબંધિત પણ હતું. વ્યાજ વસૂલી સંબંધિત કાયદાથી બચવા માટે લોકો ઉધાર લેવા માટે કોઈ એક ચલણનો ઉપયોગ કરતાં અને તેની ચૂકવણી કોઈ બીજા ચલણમાં કરતાં અને વ્યાજ વિનિમયનો દર છુપાવતા હતા.

હવે, આ સંબંધિત ગાણિતિક મોડેલિંગની સમસ્યા પર વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 2 : જૂલી એક સાઈકલ ખરીદવા હિચે છે. તે બજારમાં જાય છે, અને જૂએ છે કે, જે સાઈકલ તેને પસંદ છે તેની કિમત ₹ 1800 છે. જૂલી પાસે ફક્ત ₹ 600 જ છે. તેથી તે દુકાનદારને કહે છે કે, તે અત્યારે સાઈકલ ખરીદી શકે તેવી સ્થિતિમાં નથી. થોડીક ગણતરી બાદ દુકાનદાર નીચે પ્રમાણેની તૈયારી બતાવે છે : તે જૂલીને કહે છે કે, જો તે અત્યારે ₹ 600 રોકડા તત્કાળ ચૂકવણી પેટે અને બાકીની રકમ ₹ 610નો એક એવા બે માસિક હપતામાં ચૂકવે તો તે અત્યારે સાઈકલ ખરીદી શકે છે. જૂલી પાસે હવે બે વિકલ્પ છે, કાં તો એ હપતા પદ્ધતિ દ્વારા સાઈકલ ખરીદે અથવા તો તે રોકડેથી ખરીદવા માટે બેંકમાંથી વાર્ષિક 10 ટકાના સાદા વ્યાજે ઉપલબ્ધ જીવણ લે. કયો વિકલ્પ આર્થિક રીતે વધુ યોગ્ય હશે ?

ઉકેલ :

સોધાન 1 (સમસ્યાની સમજ) : અહીં જૂલી એ નક્કી કરવા માંગે છે કે, તેને દુકાનદાર દ્વારા આપવામાં આવેલ વિકલ્પ સ્વીકારવો કે નહિ. આ માટે બંને વિકલ્પ માટેના વ્યાજના દર જાણવા જરૂરી છે; એક કે જે હપતાપદ્ધતિમાં લાગુ પડશે અને બીજો કે જે બેંક દ્વારા લગાવવામાં આવશે (તે 10 % છે.)

સોપાન ૨ (ગાણિતિક વર્ષાન) : હપતાપદ્વિતિની યોજનાના સ્વીકાર કે અસ્વીકાર માટે, તેને દુકાનદાર દ્વારા લેવામાં આવનાર વ્યાજની સરખામણી બેન્કના વ્યાજ સાથે કરવી પડશે. ધ્યાન આપો. અહીં વ્યાજની ચૂકવણી એક વર્ષની અંદર કરવાની હોવાથી સારું વ્યાજ લાગુ પડશે.

આપણે જાણીએ છીએ કે સાઈકલની રોકડ કિમત = ₹ 1800

અને હપતાપદ્વિતિમાં તત્કાળ ચૂકવણીની રકમ = ₹ 600

માટે, હપતાપદ્વિતિ દ્વારા જેની ચૂકવણી છે તે શેષ-રકમ = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200

ધારો કે દુકાનદાર દ્વારા લેવાનાર વ્યાજનો વાર્ષિક ૬૨ r % છે.

પ્રત્યેક હપતાની રકમ = ₹ 610

હપતા દ્વારા ચૂકવાતી કુલ રકમ = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

હપતાપદ્વિતિમાં ચૂકવવામાં આવનાર કુલ વ્યાજ = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

હવે, જૂછી ₹ 1200 પોતાની પાસે એક મહિના સુધી રાખે છે. માટે

પ્રથમ માસનું મુદ્દલ = ₹ 1200

દ્વિતીય માસનું મુદ્દલ = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

દ્વિતીય માસનું શેષમુદ્દલ ₹ 590 + વ્યાજ (₹ 20) = માસિક હપતો (₹ 610) = બીજો હપતો

આમ, એક માસ માટેનું કુલ મુદ્દલ = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

$$\text{તેથી, વ્યાજ} = \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \quad (2)$$

સોપાન ૩ (સમયાનો ઉકેલ મેળવવો) : પરિષ્ણામ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

$$\text{માટે} \quad r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \quad (\text{આશરે})$$

સોપાન ૪ (ઉકેલનું અર્થઘટન) : હપતાપદ્વિતિમાં વ્યાજનો દર 13.14 % છે. બેન્ક દ્વારા લાગવવામાં આવેલ વ્યાજનો દર 10 % છે.

આમ, સાઈકલ ખરીદવા માટે બેન્કમાંથી ધન રાશિ લેવી જૂછી માટે આર્થિક રીતે વધુ યોગ્ય છે.

સોપાન ૫ (મોડેલની વધ્યાર્થતા) : આ સ્થિતિમાં હવે આ સોપાનનું હવે કોઈ મહત્વ નથી કારણ કે, અહીં સંખ્યાઓ નિશ્ચિત છે. તેમ છતાં પણ બેન્કમાંથી લોન લેવા માટે કરવી પડતી ઔપચારિકતાઓ તથા તે માટે કરવા પડતા ખર્ચ જેવા કે, સ્ટેમ્પેપર (દસ્તાવેજ માટેના કાગળ)ની કિમત વગેરેના કારણે અસરકારક વ્યાજનો દર હપતાપદ્વિતિમાં લાગુ પડનાર વ્યાજના દર કરતાં વધી જાય છે. તેથી, તે પોતાનો વિચાર બદલી પણ શકે છે.

નોંધ : વ્યાજના દર અંગેનું મોડેલિંગ હજુ પણ તેની પ્રારંભિક અવસ્થામાં જ છે અને તેની માન્યતા નાણાકીય બજાર માટે હજુ પણ એક સમસ્યા જ છે અને જો હપતાની રકમ નક્કી કરવા માટે અલગ અલગ વ્યાજના દર લગાવવામાં આવેલ હોય તો તેની માન્યતા એક મહત્વની સમસ્યા બની રહે છે.

સ્વાધ્યાય A 2.2

નીચે આપેલ સમસ્યાઓ માટે સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવા માટેના ગાણિતિક મોડેલિંગનાં વિભિન્ન સોધાનો દર્શાવો :

- એક પક્ષીવિદું એક વિશાળ ક્ષેત્રમાં રહેલા પોપટની સંખ્યાનો અંદાજ મેળવવા માંગે છે. આ માટે તે કેટલાક પોપટ પકડવા માટે જાળ પાથરે છે અને 32 પોપટ પકડે છે. તેને તે કરી પહેરાવી છોડી મૂકે છે. તે પછીના અઠવાડિયે તે જાળ પાથરીને 40 પોપટ પકડે છે. તેમાંથી 8 પોપટ કરી પહેરેલા છે.
 - બીજી વાર પકડેલા પોપટમાંથી કેટલા ભાગના પોપટ કરી પહેરેલા હશે ?
 - આ ક્ષેત્રમાં રહેલા પોપટની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ મેળવો.
- ધારો કે બાજુમાં આપેલ આકૃતિ એક જંગલની લીધેલી હવાઈ તસ્વીર દર્શાવે છે અને તેમાં રહેલું પ્રત્યેક ટ્યુંકું એક વૃક્ષનો નિર્દેશ કરે છે. અહીં તમારો ઉદ્દેશ, પર્યાવરણ સર્વેક્ષણના ભાગ રૂપે અહીં દર્શાવેલ ક્ષેત્રની જમીન પરનાં વૃક્ષની સંખ્યા શોધવાનો છે.
- એક ટીવી રૂ 24,000 રોકડા આપીને ખરીદી શકાય છે અથવા તો રૂ 8000ની તત્કાળ ચૂકવણી કરી અને બાકીની રકમ રૂ 2800 નો એક એવા કુલ છ માસિક હપતા દ્વારા ચૂકવીને ખરીદી શકાય છે. અલી બજારમાં ટીવી ખરીદવા જાય છે. તેની પાસે રૂ 8000 છે. હવે તેની પાસે બે વિકલ્પ છે કાં તો એ હપતાપદ્ધતિ દ્વારા ટીવી ખરીદે અથવા તો નાણાકીય મંડળી પાસેથી લોન લઈ અને રોકડેથી ટીવી ખરીદે. મંડળી વાર્ષિક 18 ટકાના સાદા વ્યાજ લોન આપે છે, તો અલી માટે ક્યો વિકલ્પ યોગ્ય છે ?

A2.4 ગાણિતિક મોડેલિંગ કેમ મહત્વનું છે ?

અહીં લીધેલાં ઉદાહરણોમાં આપણે જોયું કે, ગાણિતિક મોડેલિંગ એ વિવિધ વિદ્યાશાખાઓને લગતો વિષય છે. ગાણિતશાખાઓ અને અન્ય ક્ષેત્રના તજ્જ્ઞો, પ્રવર્તમાન પેદાશની સુધારણા માટે, ઉત્તમ પ્રદેશ બનાવવા તથા પેદાશોના પ્રવાહનો અંદાજ મેળવવા માટે પોતાના જ્ઞાન અને અનુભવનો ઉપયોગ કરે છે.

આમ તો મોડેલિંગના મહત્વ માટેના ઘણાં બધાં વિશેષ કારણો છે પરંતુ તેમાંના મોટા ભાગનાં કારણો નિભાલિભિત સાથે કોઈ ને કોઈ રીતે સંકળાયેલા છે.

- સમજદારી વધારવા માટે :** જો કોઈ અયું ગાણિતિક મોડેલ હોય તે જે વાસ્તવિક દુનિયાને સંબંધિત તંત્રના આવશ્યક વ્યવહારોને પ્રદર્શિત કરે તો આપણે મોડેલના વિશ્લેષણ દ્વારા વધુ સારી રીતે તે તંત્રને સમજી શકીએ છીએ. અને એ મોડેલના નિર્માણ વખતે આપણે જોઈશું કે, કયાં-કયાં પરિબળો તંત્ર માટે અતિમહત્વના છે અને તંત્રનાં વિભિન્ન પાસાઓ કેવી રીતે એકબીજા સાથે સંકળાયેલા છે.
- આગાહી અથવા અનુમાન અથવા નકલ કરવી :** ઘણી વાર આપણે એ જ્ઞાનવા માંગીએ છીએ કે, વાસ્તવિક દુનિયા સંબંધિત તંત્રનું ભવિષ્યમાં શું મહત્વ હશે. પરંતુ, તંત્ર સાથે તેનો સીધો પ્રયોગ કરવો મૌંઠો, અવ્યવહારું અથવા અશક્ય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે હવામાનની આગાહીમાં,

માનવશરીરમાં ઔષ્ઠધીય કાર્યક્ષમતાના અભ્યાસમાં, અણુમથક (ન્યુક્લિયર રીએક્ટર)ની સારામાં સારી રૂપરેખા તૈયાર કરવામાં, વગેરેમાં.

અનેક ગ્રકારનાં સંગઠનોમાં પૂર્વાનુમાન ઘણું જ મહત્વનું હોય છે કેમ કે નિર્જાયક પ્રક્રિયાઓમાં ભવિષ્યમાં થનાર ઘટનાઓની આગાહીઓને સમાવિષ્ટ કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, વેચાણવિભાગમાં માંગ સંબંધિત વિશ્વસનીય પૂર્વાનુમાન વેચાણ અંગેની વ્યૂહરચનાના આયોજનમાં ઉપયોગી થાય છે.

સ્કૂલ બોર્ડને અલગ-અલગ જિલ્લાઓમાં શાળાએ જતાં બાળકોની સંખ્યાનું પૂર્વાનુમાન લગાવવું આવશ્યક છે, કારણ કે, તેનાથી એ નિર્જાય લઈ શકાય કે, ક્યાં અને ક્યારે નવી શાળા શરૂ કરવી પડશે ?

હંમેશાં, પૂર્વાનુમાન કરનારાઓ પૂર્વાનુમાન માટે ભૂતકાળની માહિતીઓનો ઉપયોગ કરે છે. સૌપ્રથમ તેઓ પૂર્વાનુમાનને વર્ણવતી ભાતની ઓળખ માટે માહિતીનું વિશ્લેષણ કરે છે. ત્યાર બાદ આ માહિતી અને પદ્ધતિનો ઉપયોગ ભવિષ્યમાં થનાર પૂર્વાનુમાનમાં કરી શકાય છે. આ આધારભૂત વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ મોટાભાગના પૂર્વાનુમાનોમાં કરવામાં આવે છે. જે લાક્ષણિકતા અહીં ઓળખવામાં આવેલ છે તે ભવિષ્યમાં પણ ચાલુ રહેશે તે એ ધારણા પર આધારિત છે.

- **અંદાજ :** ધંધી વાર, આપણને મોટા મૂલ્યનો અંદાજ લગાવવો પડે છે. તમે જંગલમાં રહેલાં વૃક્ષો, તળાવમાં રહેલી માછલીઓ વગેરેનાં ઉદાહરણ જોઈ ચૂક્યા છો. એક અન્ય ઉદાહરણ તરીકે, ચુંટણી પહેલાં, ચુંટણીમાં ભાગ લેનારા પક્ષો પોતાના પક્ષની ચુંટણીમાં જીતવાની સંભાવનાનું પૂર્વાનુમાન કરવા માંગતા હોય છે. વિશેષરૂપે તે એ બાબતનું અનુમાન લગાવવા ઈચ્છે છે કે તેમના મત વિસ્તારમાંથી કેટલા લોકો તેમના પક્ષને મત આપશે. તેમના આ અનુમાનના આધારે તેઓ તેમના પ્રચારની વ્યૂહરચના નક્કી કરવા માંગતા હોય છે. ચુંટણીમાં ક્યા પક્ષને કેટલી બેઠક મળશે તેના અનુમાન માટે ચુંટણી સર્વેકાણ (Exit polls)નો વ્યાપક ઉપયોગ થતો હોય છે.

સ્વાધ્યાય A 2.3

1. છેલ્લાં પાંચ વર્ષની માહિતીના આધારે, આ વર્ષના અંતે ધોરણ 10 ની બોર્ડની પરીક્ષામાં તમારી શાળાના ગણિત વિષયના સરાસરી ગુણની ટકાવારીનું પૂર્વાનુમાન કરો.

A2.5 સારાંશ

આ પરિશીષણમાં તમે નિભાલિભિત મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ગાણિતિક મોડેલ એ વાસ્તવિક જીવનની પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે. ગાણિતિક મોડેલિંગ એ ગાણિતિક મોડેલ રચવાની, તેને ઉકેલવાની અને વાસ્તવિક જીવન સમસ્યાઓ સમજવામાં તેનો ઉપયોગ કરવાના પ્રક્રિયા છે.
2. મોડેલિંગમાં ઉપયોગી અલગ-અલગ સોધાનો આ પ્રમાણે છે : સમસ્યાની સમજ, ગાણિતિક મોડેલનું સૂત્રીકરણ, તેનો ઉકેલ, વાસ્તવિક જીવન સંદર્ભે તેનું અર્થઘટન અને છેલ્લે અત્યંત આવશ્યક મોડેલની યથાર્થતા.
3. કેટલાંક ગાણિતિક મોડેલનું નિર્માણ કર્યું.
4. ગાણિતિક મોડેલિંગની મહત્તમાંથી એક પણ અનુભૂતિ નથી.

જવાબો/સ્વીચ્છાનો

स्वाध्याय 1.1

स्वाध्याय 1.2

১৪

- 1.** (i) સાન્ત (ii) સાન્ત (iii) અનંત આવૃત્તિ (iv) સાન્ત
 (v) અનંત આવૃત્તિ (vi) સાન્ત (vii) અનંત આવૃત્તિ (viii) સાન્ત
 (ix) સાન્ત (x) અનંત આવૃત્તિ

2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375
 (vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3. (i) સંમેય, q ના અવિભાજ્ય અવયવો 2 અથવા 5 અથવા ફક્ત બંને હશે.
(ii) સંમેય નથી
(iii) સંમેય, q ના અવિભાજ્ય અવયવોમાં 2 અથવા 5 ઉપરાંત અન્ય કોઈ અવિભાજ્ય પણ સમાવિષ્ટ છે.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (i) શૂન્યો નથી (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$
(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$
2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. (i) ભાગફળ = $x - 3$ અને શેષ = $7x - 9$
(ii) ભાગફળ = $x^2 + x - 3$ અને શેષ = 8
(iii) ભાગફળ = $-x^2 - 2$ અને શેષ = $-5x + 10$
2. (i) છા (ii) છા (iii) ના 3. $-1, -1$ 4. $g(x) = x^2 - x + 1$
5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14, g(x) = 2, q(x) = x^2 - x + 7, r(x) = 0$
(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, g(x) = x^2 - 1, q(x) = x + 1, r(x) = 2x + 2$
(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2, g(x) = x^2 - 1, q(x) = x + 2, r(x) = 4$
(i), (ii) અને (iii) એ દરેક માટે બીજાં ઘણાં ઉદાહરણો પણ હોઈ શકે. આ નમૂના માત્ર છે.

સ્વાધ્યાય 2.4 (વૈકલ્પિક)*

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ 3. $a = 1, b = \pm \sqrt{2}$
4. $-5, 7$ 5. $k = 5$ અને $a = -5$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. બૈજિક રીતે બંને પરિસ્થિતિ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.
જો x અને y અનુક્રમે આફતાબ અને તેની પુત્રીની હાલની ઉમર હોય, તો $x - 7y + 42 = 0; x - 3y - 6 = 0$, આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોનો આલેખ દ્વારી શકાય.
2. બૈજિક રીતે બે પરિસ્થિતિ આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

જો x અને y અનુકૂળે બેટ અને બોલની કિમત (₹ માં) હોય, તો $x + 2y = 1300$; $x + 3y = 1300$. આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોના આલેખ દોરી શકાય.

3. બૈજિક રીતે પરિસ્થિતિ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

જો x અને y અનુકૂળે સફરજન અને દ્રાક્ષના ભાવ (₹ પ્રતિ કિગ્રામાં) હોય, તો $2x + y = 160$; $4x + 2y = 300$, આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોના આલેખ દોરી શકાય.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (i) આવશ્યક સુરેખ સમીકરણ્યુગમ $x + y = 10$; $x - y = 4$ છે. x છોકરીઓની સંખ્યા અને y છોકરાઓની સંખ્યા છે. આલેખની રીતે ઉકેલ મેળવવા આ સમીકરણોના આલેખ, આલેખપત્ર પર સમાન અક્ષો લઈને દોરો. છોકરીઓની સંખ્યા = 7, છોકરાઓની સંખ્યા = 3
(ii) આવશ્યક સુરેખ સમીકરણ્યુગમ $5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$ છે. x અને y અનુકૂળે પેન્સિલ અને પેનની કિમત (₹ માં) દર્શાવે છે.
આલેખની રીતે ઉકેલ મેળવવા આ સમીકરણોના આલેખ આલેખપત્ર પર સમાન અક્ષો લઈને દોરો.
એક પેન્સિલની કિમત = ₹ 3; એક પેનની કિમત = ₹ 5
2. (i) એક બિંદુમાં છિદ્ર (ii) સંપાતિ (iii) સમાંતર
3. (i) સુસંગત (ii) સુસંગત નથી (iii) સુસંગત
(iv) સુસંગત (v) સુસંગત
4. (i) સુસંગત (ii) સુસંગત નથી (iii) સુસંગત
(iv) સુસંગત નથી

ઉપર (i) નો ઉકેલ x ની કોઈ પણ કિમત માટે $y = 5 - x$ થી મળે, એટલે કે, તેના અસંખ્ય ઉકેલ મળે છે.

ઉપર (iii) નો ઉકેલ $x = 2$, $y = 2$ છે. એટલે કે, અનન્ય ઉકેલ છે.

5. લંબાઈ = 20 મી અને પહોળાઈ = 16 મી

6. ગ્રાફ વિભાગો માટે નમૂનારૂપ જવાબ

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $(-1, 0)$, $(4, 0)$ અને $(2, 3)$ છે.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (i) $x = 9$, $y = 5$ (ii) $s = 9$, $t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$
અતે x ની કિમત કોઈ પણ હોઈ શકે એટલે કે અસંખ્ય ઉકેલો છે.
(iv) $x = 2$, $y = 3$ (v) $x = 0$, $y = 0$ (vi) $x = 2$, $y = 3$
2. $x = -2$, $y = 5$, $m = -1$
3. (i) $x > y$ હોય તેવી બે સંખ્યાઓ હોય, તો $x - y = 26$, $x = 3y$; $x = 39$, $y = 13$
(ii) જો x અને y ખૂલ્લાઓના અંશ માપ હોય, તો $x - y = 18$, $x + y = 180$; $x = 99$, $y = 81$
(iii) x અને y અનુકૂળે એક બેટ અને એક બોલની કિમત (₹ માં) હોય, તો $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$;
 $x = 500$, $y = 50$
(iv) x નિશ્ચિત કિમત (₹ માં) અને y પ્રતિ કિમીમાં દર હોય, તો $x + 10y = 105$, $x + 15y = 155$;
 $x = 5$, $y = 10$; ₹ 255

(v) x અને y અનુક્રમે અપૂર્ણાકના અંશ અને છેદ હોય, તો $11x - 9y + 4 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$;

$$\frac{7}{9} \quad (x = 7, y = 9)$$

(vi) x અને y અનુકૂળમે જેકોબ અને તેના પુત્રની (ઉમર (વર્ષમાં) હોય, તો $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$;

$$x = 40, y = 10$$

स्वाध्याय 3.4

- 1.** (i) $x = \frac{19}{5}, y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2, y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$

(iv) $x = 2, y = -3$

2. (i) x અને y અનુક્રમે અપૂર્ણાકના અંશ અને છેદ હોય, તો $x - y + 2 = 0, 2x - y - 1 = 0; \frac{3}{5}$

(ii) x અને y અનુક્રમે નૂરી અને સોન્નની ઉંમર (વર્ષમાં) હોય, તો $x - 3y + 10 = 0, x - 2y - 10 = 0$,
નૂરીની ઉંમર $x = 50$, સોન્નની ઉંમર $y = 20$

(iii) x અને y અનુક્રમે સંખ્યાના દશક અને એકમના અંકો હોય, તો $x + y = 9, 8x - y = 0; 18$

(iv) x અને y અનુક્રમે ₹ 50 અને ₹ 100 ની ચલણી નોટની સંખ્યા હોય, તો $x + 2y = 40, x + y = 25$,
 $x = 10, y = 15$

(v) x એ નિયત દર (₹ માં) અને y એ પ્રતિદિન વધારાનો દર (₹ માં) હોય, તો $x + 4y = 27, x + 2y = 21$;
 $x = 15, y = 3$

स्वाध्याय 3.5

स्वाध्याय 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ (ii) $x = 4, y = 9$ (iii) $x = \frac{1}{5}, y = -2$
 (iv) $x = 4, y = 5$ (v) $x = 1, y = 1$ (vi) $x = 1, y = 2$
 (vii) $x = 3, y = 2$ (viii) $x = 1, y = 1$

2. (i) u अने v अनुकमे होणीनी अने प्रवाहनी झडप किमी/क्लाकमां होय, तो $u + v = 10$, $u - v = 2$;
 $u = 6, v = 4$

(ii) n अने m अनुकमे 1 ली अने 1 पुरुष द्वारा भरतकाम पूरु करवामां लागता दिवसोनी संख्या होय, तो
 $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, $n = 18, m = 36$

(iii) u अने v अनुकमे ट्रेन अने बसनी झडप किमी/क्लाकमां होय, तो $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4$, $\frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$,
 $u = 60, v = 80$

स्वाध्याय 3.7 (वैकल्पिक)*

2024

स्वाध्याय 4.2

3. સંખ્યાઓ 13 અને 14 છે.
 4. ધન પૂર્ણાંકો 13 અને 14 છે.
 5. 5 સેમી અને 12 સેમી
 6. નમૂનાની સંખ્યા = 6, દરેક નમૂનાનો ખર્ચ = ₹ 15

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}, 3$ (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (iv) અસ્તિત્વ ધરાવતા નથી.
2. 1 ની જેમ જ
3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2
4. 7 વર્ષ
5. ગણિતમાં ગુણ = 12, અંગ્રેજમાં ગુણ = 18
 અથવા ગણિતમાં ગુણ = 13, અંગ્રેજમાં ગુણ = 17
6. 120 મી, 90 મી
7. 18, 12 અથવા 18, -12
8. 40 કિમી/કલાક
9. 15 કલાક, 25 કલાક
10. પેસેન્જર ટ્રેનની ઝડપ = 33 કિમી/કલાક
 એક્સપ્રેસ ટ્રેનની ઝડપ = 44 કિમી/કલાક
11. 18 મી, 12 મી

સ્વાધ્યાય 4.4

1. (i) વાસ્તવિક ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવતા નથી. (ii) સમાન ઉકેલ ; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$
 (iii) બિનિ ઉકેલ ; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$
2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$
3. હા. 40 મી, 20 મી 4. ના 5. હા, 20 મી, 20 મી

સ્વાધ્યાય 5.1

1. (i) હા. 15, 23, 31, ... સમાંતર શ્રેષ્ઠી રચે છે. દરેક અનુગામી પદ પૂરોગામી પદમાં 8 ઉમેરતાં મળે છે.
 (ii) ના. કિ V, $\frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \dots$
 (iii) હા. 150, 200, 250,... સમાંતર શ્રેષ્ઠી રચે છે.

- $$(iv) \text{ नि. मुद्रा } 10000 \left(1 + \frac{8}{100}\right), 10000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2, 10000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^3, \dots$$

अध्याय 5.2

- 1.** (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}, \boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}, \boxed{8}$
 (iv) $\boxed{-2}, \boxed{0}, \boxed{2}, \boxed{4}$ (v) $\boxed{53}, \boxed{23}, \boxed{8}, \boxed{-7}$

4. 16 મું પદ **5.** (i) 34 (ii) 27

6. ના **7.** 178 **8.** 64

9. 5 મું પદ **10.** 1 **11.** 65 મું પદ

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, ... **17.** છેલ્લેથી 20 મું પદ 158 છે.

18. -13, -8, -3 **19.** 11 મં વર્ષ **20.** 10

स्वाध्याय 5.3

2. (i) $1046 \frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) -8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$

(iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$

(vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. $12; a = 9, d = 8, S = 636$ ને સૂત્ર $S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ માં મૂકીતાં, દ્વિધાત સમીકરણ

$$4n^2 + 5n - 636 = 0$$
 મળે. તેને ઉકેલતાં, $n = -\frac{53}{4}$, 12 મળે. આ બે ઉકેલ પૈકી ફક્ત ઉકેલ 12 સ્વીકાર્ય છે.

5. $n = 16, d = \frac{8}{3}$ 6. $n = 38, S = 6973$ 7. સરવાળો = 1661

8. $S_{51} = 5610$ 9. n^2 10. (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4; a_2 = S_2 - S_1 = 1; S_3 = 3, a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
 $a_{10} = S_{10} - S_9 = -15; a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$

12. 4920 13. 960 14. 625 15. ₹ 27750

16. ઈનામનું મૂલ્ય (₹ માં) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 છે.

17. 234 18. 143 સેમી

19. 16 હાર, લાકડાના 5 પાટડા ઉપરની હારમાં મૂકવા પડે. $S = 200, a = 20, d = -1$ ને સૂત્ર

$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ માં મૂકીતાં, $41n - n^2 = 400$ મળે. તેને ઉકેલતાં, $n = 16, 25$ મળે. તેથી હારની સંખ્યા કાં તો 16 હોય કે, 25 હોય. $a_{25} = a + 24 d = -4$ એટલે કે, 25મી હારમાં લાકડાના પાટડાની સંખ્યા -4 છે. તે સ્વીકાર્ય નથી. તેથી, $n = 16$ શક્ય નથી. $n = 16$ માટે, $a_{16} = 5$. તેથી, 16 હાર થશે અને 5 લાકડાના પાટડા ઉપરની હારમાં મૂકવા પડે.

20. 370 મી

સ્વાધ્યાય 5.4 (વૈકલ્પિક)*

1. 32 મું 46 2. $S_{16} = 20, 76$ 3. 385 સેમી
 4. 35 5. 750 મી³

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (i) સમર્પણ (ii) સમર્પણ (iii) સમબાજુ
 (iv) સમાન, સમગ્રમાણમાં 3. ના

સ્વાધ્યાય 6.2

1. (i) 2 સેમી (ii) 2.4 સેમી (iii) ધ
 2. (i) ના (ii) ધ (iii) ધ
 9. O માંથી AD અને BCને અનુક્રમે E અને F માં છેદતી DC ને સમાંતર રેખા દોરો.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. (i) હા, ખૂખૂખૂ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$
(ii) હા, બાબાબા, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$
(iii) ના
(iv) હા, બાખૂખૂ, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$
(v) ના
(vi) હા, ખૂખૂ, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$
2. $55^\circ, 55^\circ, 55^\circ$
14. $AD = DE$ થાય તે રીતે AD ને બિંદુ E સુધી લંબાવો અને $PM = MN$ થાય તે રીતે PM ને N સુધી લંબાવો. EC અને NR જોડો.
15. 42 મી

સ્વાધ્યાય 6.4

1. 11.2 સેમી 2. 4 : 1 5. 1 : 4 8. C 9. D

સ્વાધ્યાય 6.5

1. (i) હા, 25 સેમી (ii) ના (iii) ના (iv) હા, 13 સેમી
6. $a\sqrt{3}$ 9. 6 મી 10. $6\sqrt{7}$ મી 11. $300\sqrt{61}$ કિમી
12. 13 મી 17. C

સ્વાધ્યાય 6.6 (વૈકલ્પિક)*

1. R માંથી SP ને સમાંતર રેખા લંબાવેલ QP ને T માં છેદ છે. PT = PR સાબિત કરો.
6. આ સ્વાધ્યાયના પ્રશ્ન 5ના પરિણામ (iii) નો ઉપયોગ કરો.
10. , 3 મી, 2.79 મી

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$
2. 39; 39 કિમી 3. ના 4. હા
5. ચંપા સાચી છે.
6. (i) ઓરસ (ii) ચતુર્ભુજોણ નથી (iii) સમાંતરબાજુ ચતુર્ભુજોણ
7. $(-7, 0)$ 8. $-9, 3$ 9. ± 4 , $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$
10. $3x + y - 5 = 0$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. $(1, 3)$ 2. $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$
3. $\sqrt{61}$ મી, 5 માં કમાંકની રેખા 22.5 મી અંતરે 4. 2 : 7
5. $1 : 1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 6. $x = 6, y = 3$ 7. $(3, -10)$
8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ 9. $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0, 5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ 9. 24 ચો એકમ

स्वाध्याय 7.3

- 1.** (i) $\frac{21}{2}$ ચો એકમ (ii) 32 ચો એકમ

2. (i) $k = 4$ (ii) $k = 3$

3. 1 ચો એકમ, $1 : 4$ **4.** 28 ચો એકમ

स्वाध्याय 7.4 (वैकल्पिक)*

1. $2 : 9$ 2. $x + 3y - 7 = 0$ 3. $(3, -2)$ 4. $(1, 0), (1, 4)$
 5. (i) AD અને AB ને યામાંકો લેતાં, $(4, 6), (3, 2), (6, 5)$
 (ii) CB અને CD ને યામાંકો લેતાં, $(12, 2), (13, 6), (10, 3)$; $\frac{9}{2}$ ચો. એકમ, $\frac{9}{2}$ ચો. એકમ; બંને
 વિકલ્પમાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે.

6. $\frac{15}{32}$ ચો એકમ; $1 : 16$

7. (i) $D\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (ii) $P\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$
 (iii) $Q\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $R\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R સંખ્યાઓ
 (v) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

स्वाध्याय 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}$, $\cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 3. $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$

4. $\sin A = \frac{15}{17}$, $\sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin \theta = \frac{5}{13}$, $\cos \theta = \frac{12}{13}$, $\tan \theta = \frac{5}{12}$, $\cot \theta = \frac{12}{5}$, $\cosec \theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ 8. હા

9. (i) 1 (ii) 0 10. $\sin P = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{5}{13}$, $\tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) અસત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) અસત્ય (v) અસત્ય

સ્વાધ્યાય 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$
2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C 3. $\angle A = 45^\circ, \angle B = 15^\circ$
4. (i) અસત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) અસત્ય (v) સત્ય

સ્વાધ્યાય 8.3

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0
3. $\angle A = 36^\circ$ 5. $\angle A = 22^\circ$ 7. $\cos 23^\circ + \sin 15^\circ$

સ્વાધ્યાય 8.4

1. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}, \tan A = \frac{1}{\cot A}, \sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$
2. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}, \cos A = \frac{1}{\sec A}, \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}, \cosec A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

3. (i) 1 (ii) 1 4. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

સ્વાધ્યાય 9.1

1. 10 મી 2. $8\sqrt{3}$ મી 3. 3 મી, $2\sqrt{3}$ મી 4. $10\sqrt{3}$ મી
5. $40\sqrt{3}$ મી 6. $19\sqrt{3}$ મી 7. $20(\sqrt{3} - 1)$ મી 8. $0.8(\sqrt{3} + 1)$ મી
9. $16\frac{2}{3}$ મી 10. $20\sqrt{3}$ મી, 20 મી, 60 મી 11. $10\sqrt{3}$ મી, 10 મી
12. $7(\sqrt{3} + 1)$ મી 13. $75(\sqrt{3} - 1)$ મી 14. $58\sqrt{3}$ મી
15. 3 સેકન્ડ

સ્વાધ્યાય 10.1

1. અસંખ્ય 2. (i) એક (ii) છેદક (iii) બે (iv) સ્પર્શબિંદુ 3. D

સ્વાધ્યાય 10.2

1. A 2. B 3. A 6. 3 સેમી
7. 8 સેમી 12. AB = 15 સેમી, AC = 13 સેમી

સ્વાધ્યાય 12.1

1. 28 સેમી 2. 10 સેમી
 3. સોનેરી : 346.5 સેમી²; લાલ : 1039.5 સેમી²; વાદળી : 1732.5 સેમી²; કાળો : 2425.5 સેમી²;
 સફેદ : 3118.5 સેમી²
 4. 4375 5. A

સ્વાધ્યાય 12.2

1. $\frac{132}{7}$ સેમી² 2. $\frac{77}{8}$ સેમી² 3. $\frac{154}{3}$ સેમી²
 4. (i) 28.5 સેમી² (ii) 235.5 સેમી²
 5. (i) 22 સેમી (ii) 231 સેમી² (iii) $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ સેમી²
 6. 20.4375 સેમી²; 686.0625 સેમી² 7. 88.44 સેમી²
 8. (i) 19.625 મી² (ii) 58.875 મી² 9. (i) 285 મિમી (ii) $\frac{385}{4}$ મિમી²
 10. $\frac{22275}{28}$ સેમી² 11. $\frac{158125}{126}$ સેમી²
 12. 189.97 ક્રમી² 13. ₹ 162.68 14. D

સ્વાધ્યાય 12.3

1. $\frac{4523}{28}$ સેમી² 2. $\frac{154}{3}$ સેમી² 3. 42 સેમી²
 4. $\left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right)$ સેમી² 5. $\frac{68}{7}$ સેમી² 6. $\left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right)$ સેમી²
 7. 42 સેમી² 8. (i) $\frac{2804}{7}$ મી (ii) 4320 મી²
 9. 66.5 સેમી² 10. 1620.5 સેમી² 11. 378 સેમી²
 12. (i) $\frac{77}{8}$ સેમી² (ii) $\frac{49}{8}$ સેમી² 13. 228 સેમી²
 14. $\frac{308}{3}$ સેમી² 15. 98 સેમી² 16. $\frac{256}{7}$ સેમી²

સ્વાધ્યાય 13.1

1. 160 સેમી² 2. 572 સેમી² 3. 214.5 સેમી²
 4. મોટામાં મોટો વ્યાસ = 7 સેમી, પૃષ્ઠફળ = 332.5 સેમી²
 5. $\frac{1}{4} l^2 (\pi + 24)$ 6. 220 મિમી² 7. 44 મી², ₹ 22000
 8. 18 સેમી² 9. 374 સેમી²

સ્વાધ્યાય 13.2

1. π સેમી³
2. 66 સેમી³ નમૂનાની અંદરની હવાનું કદ = (શંકુ + નળાકાર + શંકુ)ની અંદરની હવાનું કદ
 $= \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 \right)$ અહીં, r શંકુ અને નળાકારની ત્રિજ્યા છે. h_1 શંકુની ઊંચાઈ (લંબાઈ) અને h_2 નળાકારની ઊંચાઈ (લંબાઈ) છે.
માંગેલ કદ = $\frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$

3. 338 સેમી³
4. 523.53 સેમી³
5. 100
6. 892.26 કિગ્રા
7. 1.131 મી³ (આશરે)
8. સત્ય નથી. સાચો જવાબ 346.51 સેમી³ છે.

સ્વાધ્યાય 13.3

1. 2.74 સેમી
2. 12 સેમી
3. 2.5 મી
4. 1.125 મી
5. 10
6. 400
7. 36 સેમી ; $12\sqrt{13}$ સેમી
8. 562500 મી² ; અથવા 56.25 હેક્ટર
9. 100 મિનિટ

સ્વાધ્યાય 13.4

1. $102 \frac{2}{3}$ સેમી³
2. 48 સેમી²
3. $710 \frac{2}{7}$ સેમી²
4. દૂધનો ખર્ચ ₹ 209 અને ઘાતુની શીટનો ખર્ચ ₹ 156.75
5. 7964.4 મી

સ્વાધ્યાય 13.5 (વૈકલ્પિક)*

1. 1257.14 સેમી; 789 ગ્રા (લગભગ)
2. 30.14 સેમી³; 52.75 સેમી²
3. 1792
4. $782 \frac{4}{7}$ સેમી²

સ્વાધ્યાય 14.1

1. 8.1 છોડ. આપણો પ્રત્યક્ષ રીતનો ઉપયોગ કર્યો છે. કારણ કે x_i અને f_i નું સંખ્યાત્મક મૂલ્ય નાનું છે.
2. ₹ 545.20
3. $f = 20$
4. 75.9
5. 57.19
6. ₹ 211
7. 0.099 ppm
8. 12.38 દિવસો
9. 69.43 %

સ્વાધ્યાય 14.2

1. બહુલક = 36.8 વર્ષ, મધ્યક = 35.37 વર્ષ, હોસ્પિટલમાં દાખલ થયેલા મહત્તમ દર્દીઓની ઉંમર 36.8 વર્ષ હતી. જ્યારે, હોસ્પિટલમાં દાખલ થયેલા દર્દીઓની સરેરાશ ઉંમર 35.37 વર્ષ હતી
2. 65.625 કલાક
3. બહુલકીય માસિક ખર્ચ = ₹ 1847.83
માસિક સરેરાશ ખર્ચ = ₹ 2662.5
4. બહુલક = 30.6, મધ્યક = 29.2, મોટા ભાગનાં રાજ્યો / કેન્દ્ર શાસિત પ્રદેશમાં વિદ્યાર્થી શિક્ષક ગુણોત્તર 30.6 છે અને આ ગુણોત્તરની સરેરાશ 29.2 છે.

5. બહુલક = 4608.7 રન
6. બહુલક = 44.7 ગાડી

स्वाध्याय 14.3

- મધ્યસ્થ = 137 એકમ, મધ્યક = 137.05 એકમ; બહુલક = 135.76 એકમ
આમ, ત્રણેય વિકલ્પમાં લગભગ સમાન છે.
 - $x = 8, y = 7$
 - મધ્યસ્થ ઉમર = 35.76 વર્ષ
 - મધ્યસ્થ લંબાઈ = 146.75 મીમી
 - મધ્યસ્થ આયુષ્ય = 3406.98 કલાક
 - મધ્યસ્થ = 8.05, મધ્યક = 8.32, બહુલકીય કદ = 7.88
 - મધ્યસ્થ વજન = 56.67 કિગ્રા.

संख्याय 14.4

દૈનિક આવક (₹ માં)	સંચયી આવૃત્તિ
120 થી ઓછી	12
140 થી ઓછી	26
160 થી ઓછી	34
180 થી ઓછી	40
200 થી ઓછી	50

બિંદુઓ $(120, 12)$, $(140, 26)$,
 $(160, 34)$, $(180, 40)$ અને $(200, 50)$ નું
આલેખન કરી ઓળખ દોડો

2. બિંદુઓ $(38, 0)$, $(40, 3)$, $(42, 5)$, $(44, 9)$, $(46, 14)$, $(48, 28)$, $(50, 32)$ અને $(52, 35)$ નું આલોખન કરી ઓળખ દોરો. અહીં, $\frac{n}{2} = 17.5$. જેનો y યામ 17.5 હોય તે બિંદુ ઓળખ પર દર્શાવો. આ બિંદુનો x યામ મધ્યस્થ થશે. જે 46.5 છે.

ઉત્પાદન (કિગ્રા/હે.)	સંચયી આવૃત્તિ
50 કે તેથી વધારે	100
55 કે તેથી વધારે	98
60 કે તેથી વધારે	90
65 કે તેથી વધારે	78
70 કે તેથી વધારે	54
75 કે તેથી વધારે	16

હવે, બિંદુઓ $(50, 100)$, $(55, 98)$, $(60, 90)$, $(65, 78)$, $(70, 54)$ અને $(75, 16)$ નું આલેખન કરી ઓળખ દોડો.

અધ્યાત્મ 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, અશક્ય ઘટના (iii) 1, ચોક્કસ ઘટના
(iv) 1 (v) 0, 1

पुस्तक

22. (i)	બે પાસા પરનો સરવાળો	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	સંભાવના	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) ના, અગિયાર સરવાળા સમસંભાવી નથી.

23. $\frac{3}{4}$: સંભવિત પરિણામો : HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH
 અહીં, THH નો અર્થ પહેલી વખત ઉછાળતાં કાંટો, બીજી વખત ઉછાળતાં છાપ અને ત્રીજી વખત ઉછાળતાં છાપ આ પ્રમાણે.

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) ખોટું, આપણે પરિણામોને આ પ્રમાણે વર્ગીકૃત કરી શકીએ, પરંતુ, તે સમસંભાવી નથી. તેનું કારણ એ છે કે, દરેક પૈકી એક પરિણામ બે રીતે મળે છે. જેમ કે, પહેલા સિક્કા પર છાપ અને બીજા સિક્કા પર કાંટો અથવા પહેલા સિક્કા પર કાંટો અને બીજા સિક્કા પર છાપ મળે છે. તેથી, બે છાપ (અથવા બે કાંટા) મળે તેના કરતાં આની સંભાવના બમળી થાય.

(ii) સત્ય, પ્રશ્નમાં વિચારેલ પરિણામો સમસંભાવી છે.

સ્વાધ્યાય 15.2 (વૈકલ્પિક)

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

- (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 4. $\frac{x}{12}$, $x = 3$ 5. 8

સ્વાધ્યાય A 1.1

1. (i) સંદર્ભ (ii) સત્ય (iii) સત્ય (iv) સંદર્ભ (v) સંદર્ભ
 2. (i) સત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) સત્ય (v) સત્ય
 3. ફક્ત (ii) સત્ય છે.
 4. (i) જો $a > 0$ અને $a^2 > b^2$, તો $a > b$
 (ii) જો $xy \geq 0$ અને $x^2 = y^2$, તો $x = y$
 (iii) જો $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ અને $y \neq 0$, તો $x = 0$
 (iv) સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોણના વિકણો એકબીજાને દુલાગે છે.

સ્વાધ્યાય A 1.2

1. A મૃત્યુને અધીન છે. 2. ab સંમેય છે.
 3. $\sqrt{17}$ નું દર્શાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત્ત છે.
 4. $y = 7$ 5. $\angle A = 100^\circ$, $\angle C = 100^\circ$, $\angle D = 80^\circ$
 6. PQRS એક લંબચોરસ છે.
 7. હા, પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞાને કારણો ના, કારણ કે $\sqrt{3721} = 61$ અસંમેય નથી.
 પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા અસત્ય હોવાને કારણ તારણ અસત્ય છે.

સ્વાધ્યાય A 1.3

1. કોઈક પૂર્ણાંક n માટે બે કભિક અયુગમ સંખ્યાઓ $2n+1$ અને $2n+3$ લો.

સ્વાધ્યાય A 1.4

1. (i) મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન નથી.
 (ii) રેખા l રેખા m ને સમાંતર નથી.

- (iii) આ પ્રકરણમાં બહુ સ્વાધ્યાય નથી.
- (iv) બધા જ પૂર્ણકો સંમેય છે એવું નથી.
- (v) બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે તેમ નથી.
- (vi) કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ આપણું છે.
- (vii) બધી બિલાડીઓ કાળી છે.
- (viii) $\sqrt{x} = -1$ થાય તેવી, ઓછામાં ઓછી એક એવી વાસ્તવિક સંખ્યા x મળે.
- (ix) પૂર્ણક સંખ્યા a એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી.
- (x) પૂર્ણકો a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય નથી.

2. (i) હા (ii) ના (iii) ના (iv) ના (v) હા

સ્વાધ્યાય A 1.5

- (i) જો શરણને ખૂબ પરસેવો વળે, તો ટોકિયોમાં ગરમી હોય.
(ii) જો શાલિનીના પેટમાં બિલાડાં બોલતા હોય, તો તે ખૂખી હોય.
(iii) જો જશવંત ડિગ્રી મેળવી શકે, તો તેને શિષ્યવૃત્તિ મળે.
(iv) જો છોડ જવંત હોય, તો તેને ફૂલો આવે.
(v) જો કોઈ પ્રાણીને પૂંછડી હોય, તો તે બિલાડી છે.
- (i) જો ટ્રિકોણ ABC ના આધાર ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તે સમાંતરબાજુ છે. સત્ય
(ii) જો કોઈ પૂર્ણકનો વર્ગ અયુગ્મ હોય, તો તે પૂર્ણક અયુગ્મ છે. સત્ય
(iii) જો $x = 1$, તો $x^2 = 1$. સત્ય
(iv) જો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે, તો ABCD સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોજા છે. સત્ય
(v) જો $a + (b + c) = (a + b) + c$, તો a, b અને c પૂર્ણ સંખ્યા છે. અસત્ય.
(vi) જો $x + y$ યુગ્મ હોય, તો x અને y અયુગ્મ છે. અસત્ય.
(vii) જો સમાંતરબાજુ ચતુર્ભોજા લંબચોરસ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર છે. સત્ય

સ્વાધ્યાય A 1.6

- ધારણા $b \leq d$ ધારી વિરોધાભાસ મેળવો.
- જુઓ, પ્રકરણ 1નું ઉદાહરણ 10
- જુઓ, પોરણ IX ગણિત પાઠ્યપુસ્તકનું પ્રમેય 5.1

સ્વાધ્યાય A 2.2

- (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160
- 1 સેમી² વિસ્તાર લો. તેમાં રહેલા ટપકાંની સંખ્યા ગણો. વૃક્ષોની કુલ સંખ્યા એ ટપકાંની સંખ્યા અને ક્ષેત્રફળ (સેમી²) નો ગુણાકાર થશે.
- હપતા પદ્ધતિમાં વ્યાજનો ૬૨ 17.74 % છે અને તે 18 ટકાથી ઓછો છે.

સ્વાધ્યાય A 2.3

- વિદ્યાર્થીઓ પોતાના જવાબ શોધશે.

