ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1219/119-125/છ, તા. 16-02-2019 થી મંજૂર

ગણિત

ધોરણ X

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

કિંમત : ₹ 126.00

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

અનુવાદ
ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
શ્રી વિજય વોરા
ડૉ. રવિ બોરાણા
શ્રી નરેશ જાલોરીયા
ડૉ. અતુલ વ્યાસ
શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડ્યા
શ્રી કલ્પેશ અખાણી

સમીક્ષા
ડૉ. એ. એચ. હાસમાણી
ડૉ. પી. આઈ. અંધારીયા
ડૉ. જે. સી. પ્રજાપતિ
શ્રી એસ. આર. ગજેરા
ડૉ. હરેશ ભુટક
શ્રી ઈન્દ્રવદન શાહ
શ્રી કમલેશ ભટ્ટ
શ્રી પ્રતિભાબહેન નાગ્રેચા
શ્રી યોગેશ દેવલુક
શ્રી કલ્પેશ વ્યાસ
ડૉ. દીપક વ્યાસ
ડૉ. જી. એફ. મહેતા
શ્રી લલીત યાદવ
શ્રી અંજનાબહેન એન. પટેલ

ભાષાશુદ્ધિ
ડૉ. નરેશ દવે

સંયોજન
શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન
શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા ઠરાવ ક્રમાંકઃ મશબ/1217/1036/છ તા.25/10/2017 થી શાળા કક્ષાએ NCERTનાં પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્લી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ X** ના **ગણિત** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરાવીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક રાજ્ય કક્ષાની સમિતિની રચના કરવામાં આવી. આ સમિતિની સાથે NCERT ના પ્રતિનિધિ તરીકે આર.આઈ.ઈ. ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક દ્વિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું, જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ, શ્રી ઈન્દ્રવદન શાહ, ડૉ. જી. એફ. મહેતા, શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડ્યા, શ્રી રમણીકલાલ વિરપરા, ડૉ. અશ્વનીકુમાર ગર્ગ (આર.આઈ.ઈ., ભોપાલ), ડૉ. સુરેશ મકવાણા (આર.આઈ.ઈ., ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહ્યા હતા અને તેમણે પોતાનાં કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરાં પાડ્યાં છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા તેમજ તેની ગુણવત્તા જાળવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે. તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્લીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

પી. ભારતી (IAS)

નિયામક	કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા.	ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2019,
પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી અવંતિકા સિંઘ, નિયામક
મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the Textbook Development Committee responsible for this textbook. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J. V. Narlikar and the Chief Advisor for this textbook, Dr. H. K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G. P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to the systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational Research and Training

New Delhi
20 November 2006

Preface

Through the years, from the time of the Kothari Commission, there have been several committees looking at ways of making the school curriculum meaningful and enjoyable for the learners. Based on the understanding developed over the years, a National Curriculum Framework (NCF) was finalised in 2005. As part of this exercise, a National Focus Group on Teaching of Mathematics was formed. Its report, which came in 2005, highlighted a constructivist approach to the teaching and learning of mathematics.

The essence of this approach is that children already know, and do some mathematics very naturally in their surroundings, before they even join school. The syllabus, teaching approach, textbooks etc., should build on this knowledge in a way that allows children to enjoy mathematics, and to realise that mathematics is more about a way of reasoning than about mechanically applying formulae and algorithms. The students and teachers need to perceive mathematics as something natural and linked to the world around us. While teaching mathematics, the focus should be on helping children to develop the ability to particularise and generalise, to solve and

pose meaningful problems, to look for patterns and relationships, and to apply the logical thinking behind mathematical proof. And, all this in an environment that the children relate to, without overloading them.

This is the philosophy with which the mathematics syllabus from Class I to

Class XII was developed, and which the textbook development committee has tried to realise in the present textbook. More specifically, while creating the textbook, the following broad guidelines have been kept in mind.

- *The matter needs to be linked to what the child has studied before, and to her experiences.*
- *The language used in the book, including that for 'word problems', must be clear, simple and unambiguous.*
- *Concepts/processes should be introduced through situations from the children's environment.*
- *For each concept/process give several examples and exercises, but not of the same kind. This ensures that the children use the concept/process again and again, but in varying contexts. Here 'several' should be within reason, not overloading the child.*
- *Encourage the children to see, and come out with, diverse solutions to problems.*
- *As far as possible, give the children motivation for results used.*
- *All proofs need to be given in a non-didactic manner, allowing the learner to see the flow of reason. The focus should be on proofs where a short and clear argument reinforces mathematical thinking and reasoning.*
- *Whenever possible, more than one proof is to be given.*
- *Proofs and solutions need to be used as vehicles for helping the learner develop a clear and logical way of expressing her arguments.*
- *All geometric constructions should be accompanied by an analysis of the construction and a proof for the steps taken to do the required construction. Accordingly, the children would be trained to do the same while doing constructions.*
- *Add such small anecdotes, pictures, cartoons and historical remarks at several places which the children would find interesting.*
- *Include optional exercises for the more interested learners. These would not be tested in the examinations.*

- *Give answers to all exercises, and solutions/hints for those that the children may require.*
- *Whenever possible, propagate constitutional values.*

As you will see while studying this textbook, these points have been kept in mind by the Textbook Development Committee. The book has particularly been created with the view to giving children space to explore mathematics and develop the abilities to reason mathematically. Further, two special appendices have been given — Proofs in Mathematics, and Mathematical Modelling. These are placed in the book for interested students to study, and are only optional reading at present. These topics

may be considered for inclusion in the main syllabi in due course of time.

As in the past, this textbook is also a team effort. However, what is unusual about the team this time is that teachers from different kinds of schools have been an integral part at each stage of the development. We are also assuming that teachers will contribute continuously to the process in the classroom by formulating examples and exercises contextually suited to the children in their particular classrooms. Finally, we hope that teachers and learners would send comments for improving the textbook to the NCERT.

PARVIN SINCLAIR
G.P. DIKSHIT
Chief Advisors
Textbook Development Committee

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, **Emeritus Professor**, ***Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune***

CHIEF ADVISOR

Dr. H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, **Professor**, ***DESM, NCERT, New Delhi***

MEMBERS

Anjali Gupte, **Teacher**, ***Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan***

Avantika Dam, **TGT**, ***CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi***

Dharam Prakash, **Reader**, ***CIET, NCERT, New Delhi***

H.C. Pradhan, **Professor**, ***Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai, Maharashtra***

Harsha J. Patadia, **Senior Reader**, ***Centre of Advance Study in Education, M.S. University of Baroda, Vadodara, Gujarat***

Jabashree Ghosh, **TGT**, ***DM School, RIE, NCERT, Bhubaneswar, Orissa***

Mahendra Shankar, **Lecturer (S.G.) (Retd.)**, ***NCERT, New Delhi***

Meena Shrimali, **Teacher**, ***Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan***

R. Athmaraman, **Mathematics Education Consultant**, ***TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu***

S. Pattanayak, **Professor**, ***Institute of Mathematics and Application, Bhubaneswar, Orissa***

S.K.S. Gautam, **Professor**, ***DESM, NCERT, New Delhi***

Shraddha Agarwal, **PGT**, ***Sir Padampat Singhania Education Centre, Kanpur, (U.P.)***

Srijata Das, **Sr. Lecturer** ***(Mathematics), SCERT, New Delhi***

U.B. Tewari, **Professor**, ***Department of Mathematics, IIT, Kanpur, (U.P.)***

Uaday Singh, **Lecturer**, ***DESM, NCERT, New Delhi***

MEMBER-COORDINATORS

Ashutosh K. Wazalwar, **Professor**, ***DESM, NCERT, New Delhi***

Praveen K. Chaurasia, **Lecturer**, ***DESM, NCERT, New Delhi***

Acknowledgements

The Council acknowledges the valuable comments of the following participants of the workshop towards the finalisation of the book — K.K. Gupta, Reader, *U.N.P.G. College, Padrauna, Uttar Pradesh; Deepak Mantri,* Teacher, *Vidya Bhawan Basic School, Udaipur, Rajasthan; Shagufta Anjum,* Teacher, *Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan; Ranjana Sharma,* Teacher, *Vidya Bhawan Secondary School, Udaipur, Rajasthan. The Council acknowledges the suggestions given by Utpal Chakraborty,* Lecturer, *SCERT, Raipur, Chattisgarh.*

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop : K. Balaji, TGT, *Kendriya Vidyalaya, Donimalai, Karnataka; Shiv Kumar Nimesh,* TGT, *Rajkiya Sarvodaya Bal Vidyalaya, Delhi; Ajay Singh,* TGT, *Ramjas Senior Secondary School No. 3, Delhi; Rajkumar Dhawan,* PGT, *Geeta Senior Secondary School No. 2, Delhi; Shuchi Goyal,* PGT, *The Airforce School, Delhi; Manjit Singh,* TGT, *Government High School, Gurgaon, Haryana; Pratap Singh Rawat,* Lecturer, *SCERT, Gurgaon, Haryana; Ritu Tiwari,* TGT, *Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Delhi.*

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur for conducting the third workshop of the development committee at Udaipur, and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, Head, *DESM, NCERT.*

The Council also acknowledges the efforts of Uttam Kumar (NCERT) and Rajesh Sen (Vidya Bhawan Society, Udaipur), DTP Operators; *Monika Saxena,* Copy Editor; *and Abhimanu Mohanty,* Proof Reader; *APC office and the administrative staff DESM, NCERT and the Publication Department of the NCERT.*

અનુક્રમણિકા

I7N2W9

વાસ્તવિક સંખ્યાઓ 1

H1W4U3

1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં તમે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દુનિયામાં ડોકિયું કર્યું અને તમને અસંમેય સંખ્યાઓ મળી. આ પ્રકરણમાં આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ચર્ચા ચાલુ રાખીશું. આપણે વિભાગ 1.2 અને 1.3 માં ધન પૂર્ણાંકોના ખૂબ જ અગત્યના ગુણધર્મો, યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિ અને અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયથી પ્રારંભ કરીશું.

'યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિ' નામ જ દર્શાવે છે કે, તેને પૂર્ણાંકોની વિભાજ્યતા સાથે કંઈક સંબંધ છે. સરળ ભાષામાં કહીએ તો કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક a ને બીજા કોઈ ધન પૂર્ણાંક b વડે ભાગવામાં આવે, તો અનૃણ શેષ r વધે અને તે b કરતાં નાની હોય. તમારામાંથી મોટા ભાગના અભ્યાસાર્થી કદાચ ભાગાકારને સ્વાભાવિક લાંબી પ્રક્રિયા તરીકે ઓળખતા હશે. જો કે, આ પરિણામ ખૂબ જ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજી શકાય, છતાં આ પરિણામો દર્શાવવા અને સમજવા લગભગ સરળ છે, પૂર્ણાંકોની વિભાજ્યતાના ગુણધર્મો સંબંધી તેના ઘણા બધા ઉપયોગો છે. આપણે તેમાંના કેટલાકને સમજીશું અને તેનો ઉપયોગ મુખ્યત્વે બે ધન પૂર્ણાંકોના ગુ.સા.અ. **(ગુરુતમ સામાન્ય અવયવ, HCF અથવા GCD)** શોધવા માટે કરીશું.

અન્ય પાસામાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયમાં ધન પૂર્ણાંકોના ગુણાકારની વાત આવે છે. તમે જાણો છો કે, દરેક વિભાજ્ય પૂર્ણાંકને અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકોના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય. આ અગત્યનો ગુણધર્મ એ ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય*** છે. આ પરિણામ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજાવી શકાય. આપણે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના બે મુખ્ય વ્યવહારુ ઉપયોગ કરીશું. તેના ગણિતના ક્ષેત્રમાં કેટલાક ખૂબ જ ઊંડા અને નોંધપાત્ર ઉપયોગો છે. તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે કે, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ જેવી ઘણી બધી સંખ્યાઓને અસંમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

બીજું, આ પ્રમેયનો ઉપયોગ, સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ ક્યારે સાન્ત હોય અને ક્યારે અનંત આવૃત્ત હોય તે જાણવામાં થાય છે. આ માટે આપણે $\frac{p}{q}$ ના છેદ q ના અવિભાજ્ય અવયવો પર દૃષ્ટિપાત કરીએ છીએ. તમે જોશો કે, q નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ $\frac{p}{q}$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિનું સંપૂર્ણ સ્વરૂપ નક્કી કરે છે.

આથી, ચાલો આપણે નિરીક્ષણ દ્વારા અભ્યાસનો પ્રારંભ કરીએ.

1.2 યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય

M2A4K9

નીચે દર્શાવેલ લોક કોયડાને વિચારીએ.*

એક વેપારી રસ્તા પર ઈંડાં વેચી રહ્યો હતો. જેની પાસે કંઈ જ કામ ન હતું તેવો એક આળસુ માણસ તે વેપારી સાથે શાબ્દિક દ્વન્દ્વમાં ઊતરી ગયો અને તેનું પરિણામ તકરારમાં આવ્યું. તેણે ઈંડાંની ટોપલી ખેંચી લીધી અને જમીન પર પછાડી. ઈંડાં તૂટી ગયાં. વેપારી પંચાયત પાસે ગયો અને પેલા આળસુ વ્યક્તિ પાસેથી તૂટેલાં ઈંડાંના પૈસા અપાવવા કહ્યું. પંચાયતે પૂછ્યું કે કેટલાં ઈંડાં તૂટી ગયાં હતાં. તેણે આ પ્રમાણે જવાબ આપ્યો :

જો ઈંડાંને બે-બેના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, એક ઈંડું બાકી રહે;
જો ઈંડાંને ત્રણ-ત્રણના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, બે ઈંડાં બાકી રહે;
જો ઈંડાંને ચાર-ચારના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, ત્રણ ઈંડાં બાકી રહે;
જો ઈંડાંને પાંચ-પાંચના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, ચાર ઈંડાં બાકી રહે;
જો ઈંડાંને છ-છના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, પાંચ ઈંડાં બાકી રહે;
જો ઈંડાંને સાત-સાતના સમૂહમાં ગણવામાં આવે તો, કોઈ ઈંડું બાકી ન રહે.

મારી ટોપલીમાં 150 થી વધુ ઈંડાં સમાઈ શકે નહિ. તો તે ટોપલીમાં કેટલાં ઈંડાં હતાં? ચાલો આપણે કોયડો ઉકેલવા પ્રયાસ કરીએ. ધારો કે ઈંડાંની સંખ્યા a હતી. ગણતરી કરતાં પહેલાં એ તો સ્પષ્ટ છે કે, a ની કિંમત 150 કે તેથી ઓછી હોય.

જો ઈંડાંની સાત-સાતના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો કંઈ જ બાકી રહે નહિ, તેથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા p માટે, $a = 7p + 0$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની છ-છના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, પાંચ ઈંડાં બાકી રહે. કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા q માટે, $a = 6q + 5$

જો ઈંડાંની પાંચ-પાંચના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, ચાર ઈંડાં બાકી રહે. તેથી કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા w માટે, $a = 5w + 4$

જો ઈંડાંની ચાર-ચારના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, ત્રણ ઈંડાં બાકી રહે. તેથી, કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા s માટે, $a = 4s + 3$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની ત્રણ-ત્રણના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, બે ઈંડાં બાકી રહે. આથી કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા t માટે, $a = 3t + 2$ વડે દર્શાવી શકાય.

જો ઈંડાંની બે-બેના સમૂહમાં ગણતરી કરીએ તો, એક ઈંડું બાકી રહે. તેથી, કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા u માટે, $a = 2u + 1$ વડે દર્શાવી શકાય.

દરેક કિસ્સામાં, આપણે આપેલ a નો ધન પૂર્ણાંક b (આપણા આ ઉદાહરણમાં b ની કિંમત ક્રમિક રીતે 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 છે.) વડે ભાગાકાર થાય છે અને શેષ r વધે છે. (આપણા આ ઉદાહરણમાં r ની કિંમત ક્રમિક રીતે 0, 5, 4, 3, 2 અને 1 છે.) અને શેષ b કરતાં ઓછી છે. જ્યારે આપણે આવાં સમીકરણો લખીએ છીએ ત્યારે આપણે પ્રમેય 1.1માં આપેલ યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ પ્રમેય વાપરીએ છીએ.

ફરી આપણે આપણા કોયડા તરફ જઈએ. તમને કોઈ ખ્યાલ આવે છે કે, આપણે તેને કેવી રીતે ઉકેલી શકીએ? હા, આ બધી જ સ્થિતિનું સમાધાન કરે તેવા 7 ના ગુણિત શોધવા જોઈએ. પ્રયત્ન અને ભૂલ પરથી, (લ.સા.અ.ની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરતાં) તમને તેની પાસે 119 ઈંડાં હતાં તેવી માહિતી મળી શકે.

યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો પરિચય મેળવવા માટે, નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોના યુગ્મ વિચારીએ.

17, 6;   5, 12;   20, 4

* આ એ. રામપાલ અને અન્યો દ્વારા લિખિત 'Numeracy Counts!' માં આપેલ કોયડાનું સુધારેલ સ્વરૂપ છે.

આ કોયડામાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, આપણે દરેક યુગ્મ વચ્ચે નીચે પ્રમાણે સંબંધ દર્શાવી શકીએ :

$17 = 6 \times 2 + 5$ (17 માં 6 બે વખત છે અને 5 શેષ વધે છે.)

$5 = 12 \times 0 + 5$ (12 એ 5 થી મોટા હોવાથી આ સંબંધ આમ થશે.)

$20 = 4 \times 5 + 0$ (અહીં 4 ના પાંચ ગણા 20 થાય અને કંઈ જ શેષ ન વધે.)

ધન પૂર્ણાંકો a અને b ના પ્રત્યેક યુગ્મ માટે, આપણને નીચેના સંબંધને સંતોષે તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r મળે છે.

$$a = bq + r,\ 0 \le r < b$$

આપણે નોંધીએ કે, q અથવા r શૂન્ય પણ હોઈ શકે. (પરંતુ બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)

હવે નીચે દર્શાવેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ના યુગ્મ માટે તમે પૂર્ણાંકો q અને r શોધવા પ્રયત્ન કરી શકશો?

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

તમે નોંધ્યું કે q અને r અનન્ય છે? તે $0 \le r < b$ માટે $a = bq + r$ નું સમાધાન કરતા હોય તેવા પૂર્ણાંકોની એક માત્ર જોડ મળે.

તમને એવી અનુભૂતિ પણ થઈ હશે કે આપણે ભાગાકારની જે લાંબી પ્રક્રિયા વર્ષોથી કરતા આવ્યા છીએ તેનું આ તો માત્ર નવા સ્વરૂપે પુનઃવિધાન છે અને તેમાં આ પૂર્ણાંકો q અને r ને અનુક્રમે ***ભાગફળ*** અને ***શેષ*** કહે છે.

આપણે આ પરિણામને ઔપચારિક રીતે નીચેના સ્વરૂપમાં સામાન્ય વિધાન સ્વરૂપે મૂકી શકીએ :

પ્રમેય : 1.1 (યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય) : ***આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને સંગત અનન્ય અનૃણ પૂર્ણાંકો q અને r એવા મળે કે જેથી $a = bq + r,\ 0 \le r < b$.***

નોંધ : q અનૃણ છે. પરંતુ q તથા r બંને સાથે શૂન્ય નથી. આ પરિણામ લાંબા સમયથી પ્રચલિત છે. પરંતુ તેની પ્રથમ વખત નોંધ ***યુક્લિડ (Euclid)ની Elements Book-VII*** માં લેવાઈ હતી. ***યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ (Euclid's division algorithm)*** **આ પૂર્વ-પ્રમેય પર આધારિત છે.**

An ***algorithm*** is a series of well defined steps which gives a procedure for solving a type of problem.

The word *algorithm* comes from the name of the 9th century Persian mathematician ***al-Khwarizmi***. In fact, even the word 'algebra' is derived from a book, he wrote, called ***Hisab al-jabr w'al-muqabala.***

A ***lemma*** is a proven statement used for proving another statement.

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (C.E. 780 - C.E.850)

યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિ એ આપેલા બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. શોધવા માટેની પ્રવિધિ છે. જેના વડે ધન પૂર્ણાંકો a અને b બંને વિભાજ્ય હોય તેવો મોટામાં મોટો ધન પૂર્ણાંક d એ a અને b નો ગુ.સા.અ. છે.

ચાલો, પ્રથમ આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા આ પ્રવિધિનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકાય છે તે જોઈએ. ધારો કે આપણે બે પૂર્ણાંકો 455 અને 42 નો ગુ.સા.અ. શોધવો છે તો આપણે મોટા પૂર્ણાંક 455 થી શરૂઆત કરીશું. ત્યાર બાદ તેની ઉપર આપણે યુક્લિડનું પૂર્વ પ્રમેય વાપરીશું.

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

હવે આપણે ભાજક 42 ને ભાજ્ય તરીકે લઈ અને શેષ 35 ને ભાજક તરીકે લઈને ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ તો,

$$42 = 35 \times 1 + 7 \text{ મળે.}$$

હવે ભાજક 35 ને ભાજ્ય તરીકે લઈ અને શેષ 7 ને ભાજક તરીકે લઈને ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$35 = 7 \times 5 + 0 \text{ મળે.}$$

આપણે નોંધીએ કે, શેષ શૂન્ય મળે છે અને હવે આપણે પ્રક્રિયા આગળ નથી કરી શકતા. આ તબક્કે આપણે એવું નિર્ણયાત્મક રીતે કહીએ છીએ કે 455 અને 42 નો ગુ.સા.અ. 7 થાય. તમે 455 અને 42 ના અવયવોની યાદી બનાવીને સરળતાથી આ ચકાસી શકો છો. આ પદ્ધતિ કેમ નિર્ણયાત્મક છે? આનો જવાબ નીચેના પરિણામ ઉપરથી મળશે.

હવે, આપણે **યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ** સ્પષ્ટપણે દર્શાવી શકીએ.

$c > d$ હોય તેવા બે ધન પૂર્ણાંકો c અને d નો ગુ.સા.અ. મેળવવા માટે નીચેનાં સોપાન છે :

સોપાન 1 : યુક્લિડના ભાગાકાર પૂર્વ-પ્રમેયનો c અને d ઉપર ઉપયોગ કરતાં આપણને $c = dq + r$, $0 \le r < d$ થાય તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r મળે.

સોપાન 2 : જો $r = 0$, તો d એ c અને d નો ગુ.સા.અ. થાય.
જો $r \neq 0$, તો d અને r ને ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય લગાડીએ.

સોપાન 3 : આ પ્રક્રિયા જ્યાં સુધી શેષ 0 ન થાય ત્યાં સુધી ચાલુ રાખો. આ તબક્કે જ્યારે શેષ શૂન્ય બને ત્યારે ભાજક એ માંગેલ ગુ.સા.અ. થાય.

આ પ્રવિધિમાં પરિણામ મળે છે કારણ કે ગુ.સા.અ. (c, d) = ગુ.સા.અ. (d, r).

ગુ.સા.અ. (c, d) એ c અને d નો ગુ.સા.અ. દર્શાવે છે, વગેરે.

ઉદાહરણ 1 : યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી 4052 અને 12576 નો ગુ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ :

સોપાન 1 : $12576 > 4052$ હોવાથી ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ 12576 અને 4052 ઉપર કરતાં,

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

સોપાન 2 : શેષ 420 શૂન્યેતર હોવાથી ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ 4052 અને 420 ઉપર કરતાં,

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

સોપાન 3 : ભાજક 420ને નવા ભાજ્ય તરીકે અને શેષ 272 ને નવા ભાજક તરીકે લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

હવે આપણે નવો ભાજ્ય 272 અને નવો ભાજક 148 લઈએ અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ, તો

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

હવે નવો ભાજ્ય 148 અને નવો ભાજક શેષ 124 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

નવો ભાજ્ય 124 અને નવો ભાજક 24 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

નવો ભાજ્ય 24 અને નવો ભાજક 4 લેતાં અને ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

શેષ હવે શૂન્ય બને છે. આથી આપણી પ્રક્રિયા અટકે છે. આ તબક્કે ભાજક 4 હોવાથી, 12576 અને 4052નો ગુ.સા.અ. 4 થાય.

આપણે નોંધીએ કે 4 = ગુ.સા.અ. (24, 4)
= ગુ.સા.અ. (124, 24)
= ગુ.સા.અ. (148, 124)
= ગુ.સા.અ. (272, 148)
= ગુ.સા.અ. (420, 272)
= ગુ.સા.અ. (4052, 420)
= ગુ.સા.અ. (12576, 4052).

યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ માત્ર ખૂબ જ મોટી સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ. મેળવવા માટે જ ઉપયોગી છે, એટલું જ નહિ પરંતુ તે કમ્પ્યૂટરના પ્રોગ્રામ તૈયાર કરવા માટેના અલગોરિધમ (પ્રવિધિ)ના ખૂબ જ શરૂઆતનાં ઉદાહરણોમાંની એક છે.

આપણે નોંધીએ કે જ્યાં સુધી શેષ 0 ન બને ત્યાં સુધી દરેક તબક્કે ભાજક એ નવો ભાજ્ય બને છે અને શેષ એ નવો ભાજક બને છે. શેષ શૂન્ય બને તે તબક્કે છેલ્લો ભાજક એ આપેલ સંખ્યાઓનો ગુ.સા.અ. છે.

નોંધ :

1. યુક્લિડના ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય અને ભાગપ્રવિધિ ખૂબ જ નજીકથી એકબીજા સાથે જોડાયેલા હોવાથી લોકો અવારનવાર ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેયને પણ ભાગપ્રવિધિ કહેતા હતા.
2. વળી, યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનું વિધાન માત્ર ધન પૂર્ણાંકો માટે જ કર્યું છે, છતાં તેને $b \neq 0$ હોય તેવા બધા જ શૂન્યેતર પૂર્ણાંકો સુધી વિસ્તારી શકાય, જોકે ભાગપ્રવિધિના આ પાસાની ચર્ચા આપણે અહીં નહિ કરીએ.

સંખ્યાઓના ગુણધર્મો મેળવવા માટે યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિના કેટલાક ઉપયોગો છે. આપણે આ ઉપયોગોના કેટલાંક ઉદાહરણો અહીં આપીએ.

ઉદાહરણ 2 : દર્શાવો કે દરેક યુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ કોઈક પૂર્ણાંક q માટે, $2q$ સ્વરૂપમાં હોય અને દરેક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક કોઈક પૂર્ણાંક q માટે, $2q + 1$, સ્વરૂપમાં હોય.

ઉકેલ : ધારો કે a કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે અને $b = 2$. તો,

યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ અનુસાર કોઈ પૂર્ણાંક $q \geq 0$ માટે $a = 2q + r$ અને $r = 0$ અથવા $r = 1$, કારણ કે $0 \leq r < 2$.

માટે, **$a = 2q$ અથવા $2q + 1$.**

જો $a = 2q$, તો a એ 2 વડે વિભાજ્ય છે અને a ને યુગ્મ પૂર્ણાંક કહે છે.

જો $a = 2q + 1$ તો a એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી તથા a ને 2 વડે ભાગતાં 1 શેષ વધે છે. આવા પૂર્ણાંક a ને અયુગ્મ પૂર્ણાંક કહે છે.

જો a એ $2q$ ના સ્વરૂપમાં હોય તો a યુગ્મ પૂર્ણાંક છે. વળી કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક યુગ્મ અથવા અયુગ્મ હોઈ શકે. માટે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ $2q + 1$ સ્વરૂપમાં હોય.

ઉદાહરણ 3 : દર્શાવો કે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક એ કોઈક પૂર્ણાંક q માટે $4q + 1$ અથવા $4q + 3$, સ્વરૂપમાં હોય.

ઉકેલ : ચાલો આપણે અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક a લઈએ. આપણે પૂર્ણાંક a અને $b = 4$ માટે ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરીએ.

$0 \leq r < 4$, હોવાથી સંભવિત શેષ 0, 1, 2 અને 3 થાય.

આથી, q ને ભાગફળ લેતાં, a એ $4q$, અથવા $4q + 1$, અથવા $4q + 2$, અથવા $4q + 3$.

જો કે a અયુગ્મ હોવાથી a એ $4q$ અથવા $4q + 2$ ન હોઈ શકે. (કારણ કે બંને 2 વડે વિભાજ્ય છે.)

માટે, કોઈ પણ અયુગ્મ પૂર્ણાંક એ $4q + 1$ અથવા $4q + 3$ સ્વરૂપનો હોય.

ઉદાહરણ 4 : એક મીઠાઈવાળા પાસે 420 નંગ કાજુ બરફી અને 130 નંગ બદામ બરફી છે. તે એવી રીતે આ બરફીઓને થપ્પી સ્વરૂપે ગોઠવવા માંગે છે કે દરેક થપ્પીમાં બરફીની સંખ્યા સમાન હોય અને તે તાસકમાં ઓછામાં ઓછી જગ્યા રોકે. આ હેતુ માટે દરેક થપ્પીમાં કેટલી સંખ્યામાં બરફી રાખવી જોઈએ?

ઉકેલ : આ પ્રશ્નનો ઉકેલ પ્રયત્ન અને ભૂલ દ્વારા મેળવી શકાય. પરંતુ આને ગાણિતિક રીતે કરવા માટે આપણે ગુ.સા.અ. (420, 130) શોધવો જોઈએ. આ ગુ.સા.અ. દરેક થપ્પીમાં રહેલ બરફીની મહત્તમ સંખ્યા થાય અને થપ્પીઓની સંખ્યા પણ લઘુતમ થાય. આથી તાસકમાં વપરાયેલ જગ્યા પણ લઘુતમ થાય.

હવે તેનો ગુ.સા.અ. શોધવા માટે યુક્લિડ પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરતાં,

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

આથી 420 અને 130 નો ગુ.સા.અ. 10 થાય.

માટે તે મીઠાઈવાળા દરેક થપ્પીમાં કોઈ પણ પ્રકારની બરફીની સંખ્યા 10 રાખી શકે.

નોંધ : દરેક થપ્પીમાં બરફીની સમાન સંખ્યા d હોય, તો 420 તથા 130 બંને d વડે વિભાજ્ય છે. થપ્પીઓની સંખ્યા $\frac{420}{d}$ તથા $\frac{130}{d}$ ન્યૂનતમ હોય તો, તાસકમાં ઓછામાં ઓછી જગ્યા રોકે. આ માટે d મહત્તમ હોય તે આવશ્યક છે. આથી $d =$ ગુ.સા.અ. (420, 130).

સ્વાધ્યાય 1.1

1. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી ગુ.સા.અ. શોધો :
   (i) 135 અને 225 (ii) 196 અને 38220 (iii) 867 અને 255
2. દર્શાવો કે કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા, કોઈક પૂર્ણાંક q માટે $6q + 1$, અથવા $6q + 3$, અથવા $6q + 5$ પ્રકારની હોઈ શકે.
3. એક લશ્કરનું 616 સભ્યોનું જૂથ લશ્કરના બેન્ડના 32 સભ્યોની પાછળ કૂચ કરી રહ્યું છે. બંને જૂથ સમાન સંખ્યાના સ્તંભમાં કૂચ કરી રહ્યાં છે. તે જે સ્તંભમાં કૂચ કરી રહ્યા છે તેવા કોઈ પણ સ્તંભમાં મહત્તમ કેટલા સભ્યો હશે?
4. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ કોઈક પૂર્ણાંક m માટે $3m$ અથવા $3m + 1$ સ્વરૂપમાં હોય.
   [**સૂચન :** ધારો કે x કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે તો તે $3q$, $3q + 1$ અથવા $3q + 2$ સ્વરૂપમાં હોય. હવે દરેકનો વર્ગ કરો અને દર્શાવો કે ફરીથી તેને $3m$ અથવા $3m + 1$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય.]
5. યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય વાપરીને દર્શાવો કે કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો ઘન $9m$, $9m + 1$ અથવા $9m + 8$ સ્વરૂપનો હોય.

1.3 અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય

L9U8Z3

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે જોયું છે કે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર રૂપે લખી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$, અને આ પ્રમાણે આગળ વધી શકાય.

હવે, આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું બીજું પાસું જોવા પ્રયત્ન કરીએ. કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના

ગુણાકારથી મેળવી શકાય? ચાલો આપણે જોઈએ. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ સમૂહ લો. ઉદાહરણ તરીકે, 2, 3, 7, 11 અને 23. આપણે કેટલીક અથવા બધી જ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરીએ અને આપણે ઇચ્છીએ તેટલી વખત તેનું પુનરાવર્તન કરવાની છૂટ આપીએ તો આપણે બહોળી સંખ્યામાં ધન પૂર્ણાંકો મેળવી શકીએ. (ખરેખર તો, અનંત સંખ્યાઓ) ચાલો આપણે કેટલીક યાદી બનાવીએ.

$7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

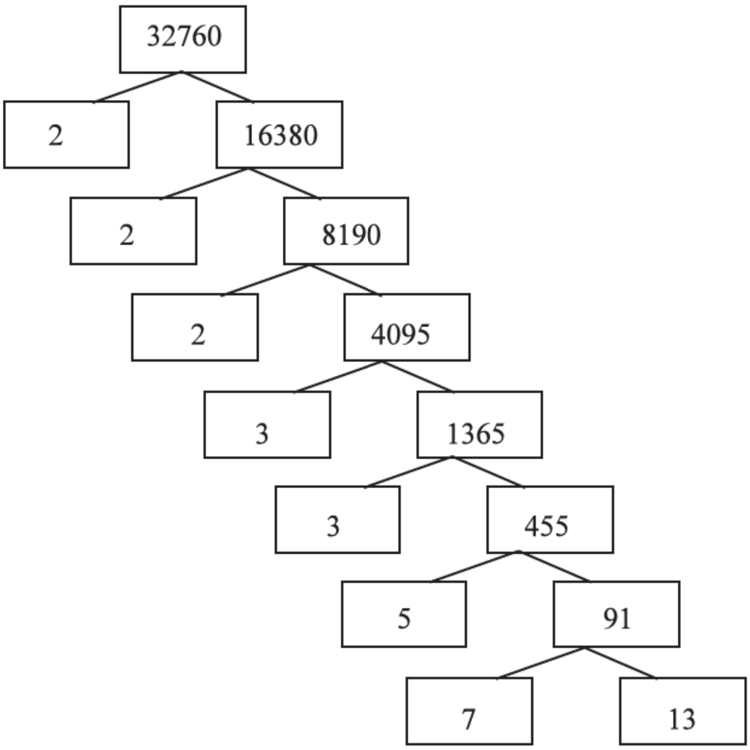
$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ અને આ પ્રમાણે...

હવે, ધારો કે તમારા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના સમૂહમાં બધી જ શક્ય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ લઈએ તો આ સમૂહનું કદ કેટલું થાય તે માટે તમારું શું અનુમાન છે? શું તેમાં માત્ર નિશ્ચિત સંખ્યામાં જ પૂર્ણાંકો હશે ? અથવા અનંત સંખ્યામાં પૂર્ણાંકો હશે? ખરેખર તો અનંત સંખ્યામાં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આથી, જો આપણે બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને આ રીતે સાંકળીએ તો, બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અને બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના તમામ શક્ય ગુણાકારો લઈને આપણે અનંત સંખ્યાઓનો સમૂહ મેળવી શકીએ. પ્રશ્ન એ છે કે આપણે બધી જ વિભાજ્ય સંખ્યાઓ આ રીતે મેળવી શકીએ? તમે શું વિચારો છો? તમે વિચારો છો કે જે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતનો ગુણાકાર ન હોય તેવી કોઈ વિભાજ્ય સંખ્યા કદાચ હશે? આપણે ઉત્તર આપીએ તે પહેલાં, ચાલો આપણે ધન પૂર્ણાંકોનું અવયવીકરણ કરીએ. આપણે અગાઉ જે કર્યું છે તેનાથી ઊલટી પ્રક્રિયા કરીએ.

આપણે તમને પરિચિત એવા અવયવ વૃક્ષનો ઉપયોગ કરીએ. ચાલો, આપણે કોઈ મોટી સંખ્યા લઈએ જેમકે 32,760 અને આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે અવયવ પાડીએ :



આથી આપણને 32760 એ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ જેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર રૂપે મળે છે.

આથી $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર રૂપે દર્શાવી શકાય. ચાલો આપણે બીજી સંખ્યા 123456789 ચકાસીએ. તેને $3^2 \times 3803 \times 3607$ તરીકે લખી શકાય. ખરેખર તો તમારે પરીક્ષણ કરવું જોઈએ કે 3803 અને 3607 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે! (તમારી જાતે બીજી કેટલીક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે પરીક્ષણ કરો.) આ તથ્ય આપણને એવી ધારણા તરફ દોરી જાય છે કે દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાય. ખરેખર તો આ વિધાન સત્ય છે. પૂર્ણાંકોના અભ્યાસ માટે તેની પાયાની નિર્ણાયક ભૂમિકા હોવાથી તેને ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય*** કહે છે.

ચાલો આપણે હવે આ પ્રમેયને ઔપચારિક રીતે દર્શાવીએ.

પ્રમેય 1.2 (અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય) : ***દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને, તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે લખી શકાય છે.***

An equivalent version of Theorem 1.2 was probably first recorded as Proposition 14 of Book IX in ***Euclid's Elements***, before it came to be known as the ***Fundamental Theorem of Arithmetic***. However, the first correct proof was given by ***Carl Friedrich Gauss*** in his ***Disquisitiones Arithmeticae***. ***Carl Friedrich Gauss*** is often referred to as the 'Prince of Mathematicians' and is considered one of the three greatest mathematicians of all time, along with ***Archimedes*** and ***Newton***. He has made fundamental contributions to both mathematics and science.

Carl Friedrich Gauss
(C.E.1777 – C.E.1855)

અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય દર્શાવે છે કે, દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાનું અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર સ્વરૂપે અવયવીકરણ કરી શકાય. હકીકતમાં તે કંઈક વધુ દર્શાવે છે. તે દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાનું તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે નિરૂપણ કરી શકાય.

આ પરથી આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય અને તેમાં કઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા કયા ક્રમે મળશે તે માટે આપણે ચોક્કસ ન હોઈ શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે ગુણાકારમાં દર્શાવેલ સંખ્યા $2 \times 3 \times 5 \times 7$ અને $3 \times 5 \times 7 \times 2$ તરીકે અથવા બીજા કોઈ પણ શક્ય ક્રમમાં દર્શાવેલ આ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને લખીએ તો તે બધા ગુણાકાર સમાન છે. આ હકીકતને નીચેના સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય.

1 થી મોટી કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ તેના ક્રમને અવગણીએ તો અનન્ય હોય છે.

વ્યાપક રીતે, આપેલ વિભાજ્ય સંખ્યા x ને આપણે $x = p_1 p_2 \dots p_n$ તરીકે લખી શકીએ, જ્યાં $p_1, p_2, \dots, p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે અને ચડતા ક્રમમાં લખેલી છે, એટલે કે $p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n$. જો આપણે સમાન અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને ગુણીએ, તો આપણને અવિભાજ્ય સંખ્યાના ઘાત મળે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

એક વખત આપણે નક્કી કરીએ કે, અવિભાજ્ય અવયવો ચડતા ક્રમમાં હશે તો આપણું અવયવીકરણ અનન્ય હશે.

ગણિતમાં અને બીજા ક્ષેત્રમાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનેક ઉપયોગો છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : કોઈક ધન પૂર્ણાંક n માટે 4^n નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હશે કે કેમ તે નિર્ણય કરો.

ઉકેલ : જો કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે સંખ્યા 4^n નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હોય, તો તે 5 વડે વિભાજ્ય હોય. આથી 4^n ના અવિભાજ્ય અવયવોમાં 5 હોવો જોઈએ. આ શક્ય નથી, કારણ કે $4^n = (2)^{2n}$; આથી 4^n ના અવયવીકરણમાં એક જ અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક 2 મળે. આથી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયની અનન્યતા શરત અનુસાર નક્કી થાય છે કે 4^n ના અવયવીકરણમાં 2 સિવાય બીજી કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. માટે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n એવી ન મળે કે જેના માટે 4^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય હોય.

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયનો સ્પષ્ટ રીતે ઉલ્લેખ કર્યા વગર બે ધન પૂર્ણાંકોના ***ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. (લઘુતમ સામાન્ય અવયવ, LCM, Least Common Multiple)*** શોધતાં શીખી ગયાં છો. આ પદ્ધતિ **અવિભાજ્ય અવયવીકરણ** પદ્ધતિ તરીકે પણ ઓળખાય છે. ચાલો આપણે આ પદ્ધતિને ઉદાહરણ દ્વારા યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પદ્ધતિથી 6 અને 20 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $6 = 2^1 \times 3^1$ અને $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ હોવાથી,

અગાઉનાં ધોરણોમાં મેળવ્યું છે તેમ તમે ગુ.સા.અ. (6, 20) = 2 અને લ.સા.અ. (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ મેળવી શકો.

જુઓ કે, ગુ.સા.અ. (6, 20) = 2^1 = **આપેલી સંખ્યાઓમાં રહેલા સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવના નાનામા નાના ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર**

લ.સા.અ. (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **આપેલી સંખ્યામાં રહેલા તમામ અવિભાજ્ય અવયવોના મહત્તમ ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર**

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે જોયું હશે કે ગુ.સા.અ. (6, 20) × લ.સા.અ. (6, 20) = 6×20.

ખરેખર તો આપણે ચકાસી શકીએ કે કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો, a અને b માટે

ગુ.સા.અ. (a, b) × લ.સા.અ. $(a, b) = a \times b$ થાય.

જો બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. આપેલ હોય તો આપણે આ પરિણામનો ઉપયોગ કરી તેમનો લ.સા.અ. શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 7 : 96 અને 404 નો ગુ.સા.અ. અવિભાજ્ય અવયવની રીતે મેળવો અને તે પરથી તેનો લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : 96 અને 404 નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $96 = 2^5 \times 3$, $404 = 2^2 \times 101$ મળશે.

આથી આ બંને પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. = $2^2 = 4$.

વળી, $\text{લ.સા.અ.} (96, 404) = \dfrac{96 \times 404}{\text{ગુ.સા.અ.} (96, 404)} = \dfrac{96 \times 404}{4} = 9696$

ઉદાહરણ 8 : અવિભાજ્ય અવયવોની રીતથી 6, 72 અને 120 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે,

$$6 = 2 \times 3, \ 72 = 2^3 \times 3^2, \ 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

અહીં, સામાન્ય અવયવો અનુક્રમે 2 અને 3 ની નાનામાં નાની ઘાત 2^1 અને 3^1 છે.

આથી ગુ.સા.અ. (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

આપેલી ત્રણેય સંખ્યાઓમાં 2^3, 3^2 અને 5^1 એ અવિભાજ્ય અવયવો 2, 3 અને 5 ની મોટામાં મોટી ઘાત છે.

આથી, લ.સા.અ. (6, 72, 120) = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

નોંધ : જુઓ કે, $6 \times 72 \times 120 \neq$ ગુ.સા.અ. (6, 72, 120) × લ.સા.અ. (6, 72, 120).

આથી ત્રણ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર તેમના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ.ના ગુણાકારને સમાન ન પણ હોય.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. નીચેની દરેક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોની જોડીના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો અને

ગુ.સા.અ. × લ.સા.અ. = બંને પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર થાય છે તેમ ચકાસો.

(i) 26 અને 91 (ii) 510 અને 92 (iii) 336 અને 54

3. નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોના અવિભાજ્ય અવયવની રીતે ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો :

(i) 12, 15 અને 21 (ii) 17, 23 અને 29 (iii) 8, 9 અને 25

4. જો ગુ.સા.અ. (306, 657) = 9 આપેલ હોય, તો લ.સા.અ. (306, 657) શોધો.

5. કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે 6^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય થાય કે નહિ તે ચકાસો.

6. સમજાવો કે $7 \times 11 \times 13 + 13$ અને $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ એ શા માટે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે ?

7. એક રમતના મેદાનમાં વર્તુળાકાર માર્ગ છે. સોનિયાને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 18 મિનિટ લાગે છે, જ્યારે રવિને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 12 મિનિટ લાગે છે. ધારો કે બંને એક જ સમયે, એક જ બિંદુએથી, એક જ દિશામાં પરિભ્રમણ કરવાનું પ્રારંભ કરે છે, તો કેટલી મિનિટ બાદ બંને ફરી પ્રારંભબિંદુ પર ભેગા થાય ?

1.4 અસંમેય સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તન

K3X2J6

ધોરણ IX માં અસંમેય સંખ્યાઓ અને તેના ઘણા બધા ગુણધર્મોનો પરિચય તમને કરાવવામાં આવ્યો હતો. તમે તેના અસ્તિત્વનો અને કેવી રીતે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ સાથે મળીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓ બનાવે છે તેનો અભ્યાસ કર્યો હતો. તમે અસંમેય સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર દર્શાવતાં પણ શીખ્યા છો. જો કે આપણે તે સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે તેમ સાબિત નહોતું કર્યું. આ વિભાગમાં, આપણે $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ અને વ્યાપક રીતે અવિભાજ્ય p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરીશું. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય અને અન્ય પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરી આપણે આ પરિણામ પ્રાપ્ત કરીશું.

યાદ કરો કે જે સંખ્યાને પૂર્ણાંક p તથા શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી ન શકાય તે સંખ્યા 's' ને અસંમેય સંખ્યા કહેવાય છે. જેનાથી આપણે પરિચિત છીએ, તેવા $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, π, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110... જેવી અસંમેય સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણો મળે.

આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેમ સાબિત કરીએ તે પહેલાં આપણને આગળ દર્શાવેલ પ્રમેયની જરૂર પડશે. તેની સાબિતી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પર આધારિત છે.

પ્રમેય 1.3 : ધારો કે p એ એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. ધન પૂર્ણાંક a માટે, a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય હોય.

***સાબિતી :** ધારો કે a નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$a = p_1p_2 \dots p_n$, જ્યાં $p_1, p_2, \dots, p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આવશ્યક નથી કે તે $p_1, p_2, \dots, p_n$ ભિન્ન સંખ્યાઓ જ હોય.

માટે, $a^2 = (p_1p_2 \dots p_n)(p_1p_2 \dots p_n) = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2$

હવે આપણને આપેલ છે કે a^2 એ p વડે વિભાજ્ય છે. માટે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પરથી કહી શકાય કે p એ a^2 નો એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનન્યતાની શરત પરથી કહી શકાય કે a^2 ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર $p_1, p_2, \dots, p_n$ છે. આથી p એ $p_1, p_2, \dots, p_n$ પૈકીનો એક હોય. હવે $a = p_1 p_2 \dots p_n$, હોવાથી p એ a નો અવયવ પણ છે.

હવે આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેની સાબિતી આપવા માટે તૈયાર છીએ.

આ સાબિતી 'અનિષ્ટાપત્તિ'ની પ્રયુક્તિ પર આધારિત છે. (આ પ્રયુક્તિની કેટલીક ચર્ચા પરિશિષ્ટ 1 માં વિગતે કરેલ છે.)

પ્રમેય 1.4 : $\sqrt{2}$ એ અસંમેય છે.

સાબિતી : આથી ઊલટું, ધારો કે $\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી આપણે $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ થાય તેવા પૂર્ણાંકો r અને s $(s \neq 0)$ મેળવી શકીએ.

જો r અને s ને 1 સિવાય સામાન્ય અવયવ હોય, તો તે તમામ સામાન્ય અવયવ વડે r તથા s ને ભાગતાં $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ મળે.

આપણે a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય લઈ શકીએ. આથી, $b\sqrt{2} = a$.

આપણે બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરીએ તો, $2b^2 = a^2$ મળે. માટે a^2 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે, પ્રમેય 1.3 અનુસાર, a એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક c માટે $a = 2c$ લખી શકીએ.

a ની કિંમત મૂકતાં આપણને $2b^2 = 4c^2$ મળે. આથી, $b^2 = 2c^2$ થાય.

આનો અર્થ એ થાય કે b^2 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. આથી, b પણ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(ફરીથી પ્રમેય 1.3, $p = 2$ સાથે ઉપયોગમાં લેતાં)

માટે, a તથા b ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 2 છે.

આથી, a અને b ને 1 સિવાય કોઈ જ સામાન્ય અવયવ નથી તે ધારણાનો વિરોધાભાસ મળે.

$\sqrt{2}$ સંમેય છે તે ધારણા અસત્ય હોવાથી આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો.

આથી, કહી શકાય કે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

*પરીક્ષાના હેતુથી આપેલ નથી.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું શક્ય હોય તો, ધારો કે $\sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે શૂન્યેતર પૂર્ણાંક a અને b શોધી શકીએ કે જેથી $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય.

ધારો કે a અને b ને 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ છે. આથી આપણે તેને સામાન્ય અવયવ વડે ભાગી શકીએ અને વ્યાપકતા ગુમાવ્યા સિવાય માની શકીએ કે, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.

આથી, $b\sqrt{3} = a$.

બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણને $3b^2 = a^2$ મળે.

માટે a^2 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. આથી પ્રમેય 1.3 અનુસાર a પણ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક c માટે $a = 3c$ લખી શકીએ.

a ની કિંમત મૂકવાથી $3b^2 = 9c^2$. આથી, આપણને $b^2 = 3c^2$ મળે.

આનો અર્થ એ થયો કે b^2 ને 3 વડે ભાગી શકાય અને તેથી b ને પણ 3 વડે ભાગી શકાય.

($p = 3$ માટે પ્રમેય 1.3નો ઉપયોગ કરતાં)

આથી, a તથા b ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 3 છે.

માટે, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય હોવાના વિધાનનો વિરોધાભાસ ઊભો થયો.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો કારણકે આપણે $\sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય છે.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ધોરણ IX માં આપણે દર્શાવ્યું હતું કે,

- ***સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કે તફાવત અસંમેય હોય છે, અને***
- ***શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકાર અને ભાગફળ અસંમેય હોય છે.***

આપણે કેટલાક ખાસ વિકલ્પોમાં આ પરિણામ સાબિત કરીએ.

ઉદાહરણ 10 : દર્શાવો કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું ધારો કે $5 - \sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને પૂર્ણાંક b શોધી શકીએ કે જેથી $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય $(b \neq 0)$.

માટે $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

આ સમીકરણની પુનઃગોઠવણી કરતાં આપણને $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$ મળે. a અને b પૂર્ણાંકો હોવાથી $5 - \frac{a}{b}$ સંમેય મળે અને આથી $\sqrt{3}$ પણ સંમેય થાય.

આથી, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે તથ્યનો વિરોધાભાસ ઉત્પન્ન થાય.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો, કારણ કે આપણે $5 - \sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય હતી.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉદાહરણ 11 : દર્શાવો કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું ધારો કે $3\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને પૂર્ણાંક b શોધી શકીએ કે જેથી $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$. પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણને $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ મળે.

3, a અને b પૂર્ણાંકો હોવાથી, $\frac{a}{3b}$ સંમેય છે અને આથી $\sqrt{2}$ પણ સંમેય છે. પરંતુ $\sqrt{2}$ અસંમેય છે. આથી તે તથ્યનો વિરોધાભાસ ઊભો થાય.

આથી આપણે કહી શકીએ કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. સાબિત કરો કે, $\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
2. સાબિત કરો કે, $3 + 2\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
3. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યા અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 સંમેય સંખ્યાઓ અને તેના દશાંશ નિરૂપણનું પુનરાવર્તન

E4Z8F1

ધોરણ IX માં તમે અભ્યાસ કર્યો કે, સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત અથવા અનંત અને આવૃત્ત હોય છે. આ વિભાગમાં આપણે સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ લઈએ અને શોધીએ કે તેનું દશાંશ નિરૂપણ ક્યારે સાન્ત અને ક્યારે અનંત અને આવૃત્ત હોય છે. કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈ આપણે તે નક્કી કરીએ.

ચાલો આપણે નીચે દર્શાવેલ સંમેય સંખ્યાઓ લઈએ :

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

હવે,

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

કોઈ પણ અપેક્ષા રાખી શકે કે આ તમામને જેનો છેદ 10 નો ઘાત હોય તેવી સંમેય સંખ્યા તરીકે દર્શાવી શકીએ. ચાલો આપણે અંશ અને છેદમાં રહેલા સામાન્ય અવયવોને દૂર કરીએ અને જોઈએ કે આપણને શું પ્રાપ્ત થાય છે :

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

કોઈ તરાહ દેખાય છે? આપણે સાન્ત દશાંશ સ્વરૂપમાં આપેલી વાસ્તવિક સંખ્યાને જ્યાં p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય અને q શૂન્યેતર હોય તેવા સંમેય સંખ્યાના સ્વરૂપ $\frac{p}{q}$ માં રૂપાંતરિત કરી અને છેદ q ના અવિભાજ્ય અવયવોની 2 ની ઘાતમાં અથવા 5 ની અથવા તેમના બંનેની ઘાત છે. આપણે 10 ના ઘાતના અવયવો માત્ર 2 તથા 5 ના ઘાત હોય તેવી જ અપેક્ષા રાખીએ છીએ.

જો કે આપણે અમુક જ ઉદાહરણો પર કાર્ય કર્યું, છતાં આપણે જોઇ શકીએ કે, જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય એવી કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાને છેદમાં 10 ના ઘાતવાળી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તેવા સ્વરૂપમાં પરિણમતી સંખ્યા તરીકે દર્શાવી શકાય. વળી 10 ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર 2 અને 5 છે. આથી અંશ અને છેદ વચ્ચેના સામાન્ય અવયવો દૂર કરતાં આ વાસ્તવિક સંખ્યા જ્યાં q નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપમાં હોય અને n, m એ અનૃણ પૂર્ણાંક હોય એવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં મળે.

ચાલો આપણે આપણું પરિણામ ઔપચારિક રીતે લખીએ :

પ્રમેય 1.5 : જો x એ સાન્ત દશાંશ નિરૂપણવાળી સંમેય સંખ્યા હોય, તો x ને જ્યાં p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય અને q નું અવિભાજ્યમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપમાં હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. n, m એ અનૃણ પૂર્ણાંકો છે. (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$. તે અવિભાજ્યોમાં વર્ગીકરણ નથી. x પોતે જ પૂર્ણાંક છે.)

જો પ્રમેય 1.5ના પ્રતીપનો વિચાર કરીએ તો શું થશે તે જાણીને તમને આશ્ચર્ય થશે. જો આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યા પસંદ કરીએ અને અનૃણ પૂર્ણાંકો m તથા n માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m હોય, તો $\frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત થશે? *(જો $m = n = 0$ તો $q = 1$ તથા $\frac{p}{q}$ પોતે જ પૂર્ણાંક છે.)*

ચાલો આપણે આ સત્ય હોવાના દેખીતાં કારણો જોઈએ. તમે ચોક્કસ સહમત થશો કે જ્યાં b એ 10 નો ઘાતાંક હોય તેવી $\frac{a}{b}$ સ્વરૂપની સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે. જ્યાં q એ 2^n5^m સ્વરૂપે હોય, તેવા સ્વરૂપની સંખ્યા $\frac{p}{q}$ ને જ્યાં b એ 10 ની ઘાત હોય તેવા સમકક્ષ સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરવી એ અર્થસભર થશે.

ચાલો આપણે ઉપરનાં ઉદાહરણો તરફ જઈએ અને ઊલટી પ્રક્રિયા કરીએ.

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(ii) $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{5^3 \times 2^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$

(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4} = \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4} = \frac{233408}{10^4} = 23.3408$

આ ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે જો q એ $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપમાં હોય, તો આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાને જ્યાં b એ 10 ની ઘાત હોય તેવી સમાન સંખ્યા $\frac{a}{b}$ માં કેવી રીતે રૂપાંતરિત કરી શકીએ. આથી આવી સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત છે. હવે આ પરિણામ આપણે ઔપચારિક રીતે લખીએ.

પ્રમેય 1.6 : જો $x = \frac{p}{q}$ માં q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપે હોય અને n, m એ અનૃણ પૂર્ણાંકો હોય, તો x નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય. (જો $m = n = 0$ તો $q = 1$)

હવે આપણે જેનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય એવી સંમેય સંખ્યાઓ તરફ જવા તૈયાર છીએ. ફરીથી આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ અને જોઈએ આગળ શું થાય છે.

આપણે ધોરણ IXના પુસ્તકમાંથી પ્રકરણ 1નું $\frac{1}{7}$ ના દશાંશ નિરૂપણ વિષયક ઉદાહરણ 5 જોઈએ.

$$
\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\overline{)10} \\
\underline{7} \\
30 \\
\underline{28} \\
20 \\
\underline{14} \\
60 \\
\underline{56} \\
40 \\
\underline{35} \\
50 \\
\underline{49} \\
10 \\
\underline{7} \\
30
\end{array}
$$

અહીં શેષ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1... અને ભાજક 7 છે.

આપણે નોંધીએ કે અહીં છેદ 7 સ્પષ્ટપણે $2^n\ 5^m$ સ્વરૂપમાં નથી. આથી પ્રમેય 1.5 અને 1.6 પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{7}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત ન હોઈ શકે. 0 એ શેષ તરીકે નથી આવતો (કારણ?) અને શેષ અમુક તબક્કા બાદ પુનરાવર્તન પામે છે. આથી, આપણને અંકસમૂહ 142857 નું પુનરાવર્તિત જૂથ $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળના ભાગ રૂપે મળે છે.

$\frac{1}{7}$ ના કિસ્સામાં આપણે જે જોયું તે પ્રમેય 1.5 અને 1.6 માં આવરી લેવાઈ ન હોય તેવી કોઈપણ સંમેય સંખ્યા માટે સત્ય છે. આવી સંખ્યાઓ માટે આપણી પાસે :

પ્રમેય 1.7 : જો q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે $2^n 5^m$ સ્વરૂપે ન હોય, તો $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત્ત છે.

ઉપરની ચર્ચાને અંતે આપણે એવા તારણ પર આવીએ કે દરેક સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત અથવા અનંત અને આવૃત્ત હોય છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યા વગર, નીચે દર્શાવેલ સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે કે અનંત અને આવૃત્ત છે તે જણાવો :

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. પ્રશ્ન 1 માં જે સંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય તેનું દશાંશ નિરૂપણ દર્શાવો.

3. નીચેની વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ દર્શાવેલ છે. દરેક માટે જણાવો કે તે સંમેય છે કે નહિ. અને જો સંમેય હોય, તો તેના $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં q ના અવિભાજ્ય અવયવો વિશે તમે શું કહી શકશો ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120 1200 12000 120000... (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વ-પ્રમેય

આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને bને સંગત $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ નું સમાધાન કરે તેવી અનન્ય પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r નું અસ્તિત્વ છે. (બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)

2. યુક્લિડની ભાગ-પ્રવિધિ : યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વ-પ્રમેય અનુસાર $a > b$ હોય તેવા કોઈપણ બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b નો ગુ.સા.અ. નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

પગલું 1 : $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ થાય તેવા q અને r મેળવવા ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરો.

પગલું 2 : જો $r = 0$ તો ગુ.સા.અ. b છે. જો $r \neq 0$ તો ભાગાકારના પૂર્વ-પ્રમેયનો b અને r માટે ઉપયોગ કરો.

પગલું 3 : જ્યાં સુધી શેષ 0 ન મળે ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખો. શેષ 0 થાય તે તબક્કે ભાજક એ ગુ.સા.અ. (a, b) થાય. વળી ગુ.સા.અ. (a, b) = ગુ.સા.અ. (b, r)

3. ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય : દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે.***

4. જો p અવિભાજ્ય હોય અને a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય છે.

5. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરવું.

6. જેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત છે તેવી સંમેય સંખ્યા a ને આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીએ. p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય છે અને અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપમાં હોય.

(જો $m = n = 0$ તો $q = 1$ અને તેનું અવિભાજ્યોમાં વર્ગીકરણ નથી. $\frac{p}{q}$ પૂર્ણાંક જ છે.)

7. જેમાં અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપનું હોય તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય.

8. જેમાં અનૃણ પૂર્ણાંકો n, m માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ 2^n5^m સ્વરૂપનું ન હોય તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત હોય.

વાચકને નોંધ

તમે જોયું છે કે,

ધન પૂર્ણાંકો p, q, r માટે ગુ.સા.અ. $(p, q, r) \times$ લ.સા.અ. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, (પ્રશ્ન 8)

આમ છતાં, ત્રણ સંખ્યાઓ p, q, r માટે નીચેનાં પરિણામો સત્ય છે :

$$\text{લ.સા.અ.}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{ગુ.સા.અ.}(p,q,r)}{\text{ગુ.સા.અ.}(p,q) \times \text{ગુ.સા.અ.}(q,r) \times \text{ગુ.સા.અ.}(p,r)}$$

$$\text{ગુ.સા.અ.}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{લ.સા.અ.}(p,q,r)}{\text{લ.સા.અ.}(p,q) \times \text{લ.સા.અ.}(q,r) \times \text{લ.સા.અ.}(p,r)}$$

W7U5L8

જાણકારી માટે

C.E. is an abbreviation for Common Era
B.C.E. is an abbreviation for Before Common Era
C.E. and B.C.E. are used in exactly the same way as AD and BC.

Y3F4S4

બહુપદીઓ 2

2.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે એક ચલ બહુપદી અને તેમની ઘાતનો અભ્યાસ કર્યો છે. યાદ કરો કે જો $p(x)$ ચલ x માં બહુપદી હોય તો, **$p(x)$ માં x ના મહત્તમ ઘાતાંકને બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત કહે છે.** ઉદાહરણ તરીકે, $4x + 2$ એ ચલ x માં એક ઘાતવાળી બહુપદી છે. $2y^2 - 3y + 4$ એ ચલ y માં 2 ઘાતવાળી બહુપદી છે, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ એ ચલ x માં 3 ઘાતવાળી બહુપદી છે અને $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ એ ચલ u માં 6 ઘાતવાળી બહુપદી છે.

$\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2+2x+3}$ વગેરે જેવી અભિવ્યક્તિઓ બહુપદીઓ નથી.

એક ઘાતવાળી બહુપદીને ***સુરેખ બહુપદી (Linear Polynomial)*** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, વગેરે બધી જ સુરેખ બહુપદીઓ છે. $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ વગેરે જેવી બહુપદીઓ સુરેખ બહુપદીઓ નથી.

બે ઘાતવાળી બહુપદીને ***દ્વિઘાત બહુપદી (Quadratic Polynomial)*** કહે છે. '*quadratic*' શબ્દ '*quadrate*' પરથી મેળવવામાં આવ્યો છે અને તેનો અર્થ 'વર્ગ' એવો થાય છે. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે. (તેમના સહગુણકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.) વ્યાપક રીતે, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c માટે અને શૂન્યેતર a માટે x માં કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ સ્વરૂપમાં હોય.

ત્રણ ઘાત ધરાવતી બહુપદીને ***ત્રિઘાત બહુપદી (Cubic Polynomial)*** કહે છે. ત્રિઘાત બહુપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો $2 - x^3$, x^3, $\sqrt{2}x^3$, $3 - x^2 + x^3$, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ છે. હકીકતમાં ત્રિઘાત બહુપદીનું ખૂબ જ સરળ વ્યાપક સ્વરૂપ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ છે. અહીં, a, b, c, d વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a \neq 0$.

હવે, બહુપદી $p(x) = x^2 - 3x - 4$ નો વિચાર કરો. આ બહુપદીમાં $x = 2$ મૂકતાં, આપણને $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ મળે. $x^2 - 3x - 4$ માં $x = 2$ મૂકતાં મૂલ્ય '-6' મળ્યું તે $x^2 - 3x - 4$ ની $x = 2$ આગળની કિંમત થાય. આ જ પ્રમાણે, $p(0)$ એ $p(x)$ નું $x = 0$ આગળનું મૂલ્ય છે અને તે -4 છે.

જો $p(x)$ એ x માં બહુપદી હોય, અને જો k કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $p(x)$ માં x ને બદલે k મૂકવાથી મળતા મૂલ્ય ને $p(x)$ ની $x = k$ આગળની કિંમત કહે છે અને તેને $p(k)$ વડે દર્શાવાય છે.

$x = -1$ આગળ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ની કિંમત શું થાય ?

આપણને $p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$ મળે.

વળી, એ પણ જુઓ કે $p(4) = (4)^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$

$p(-1) = 0$ અને $p(4) = 0$ હોવાથી, -1 અને 4 ને દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 - 3x - 4$ નાં શૂન્યો કહે છે. વ્યાપક રીતે, ***જો $p(k) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા k ને બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય કહે છે.***

આપણે ધોરણ IX માં સુરેખ બહુપદીનાં શૂન્ય કેવી રીતે મેળવવા તેનો અભ્યાસ કર્યો છે. ઉદાહરણ તરીકે જો k એ $p(x) = 2x + 3$ નું એક શૂન્ય હોય તો $p(k) = 0$. આથી આપણને $2k + 3 = 0$ મળશે. આથી, $k = \frac{-3}{2}$.

વ્યાપક રીતે, k એ $p(x) = ax + b$ નું શૂન્ય હોય તો, $p(k) = ak + b = 0$. આથી $k = \frac{-b}{a}$ થાય.

આમ, સુરેખ બહુપદી $ax + b$ નું શૂન્ય $= \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{અચળ પદ})}{x \text{ નો સહગુણક}}$

આથી, સુરેખ બહુપદીના શૂન્યને બહુપદીના સહગુણકો સાથે સંબંધ છે. શું અન્ય બહુપદીઓના કિસ્સામાં પણ આવું બનશે ? ઉદાહરણ તરીકે, દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોને પણ તેના સહગુણકો સાથે સંબંધ છે ?

આ પ્રકરણમાં, આપણે આ પ્રશ્નોના જવાબ મેળવવા પ્રયત્ન કરીશું. આપણે બહુપદીઓ માટે ભાગ પ્રવિધિનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

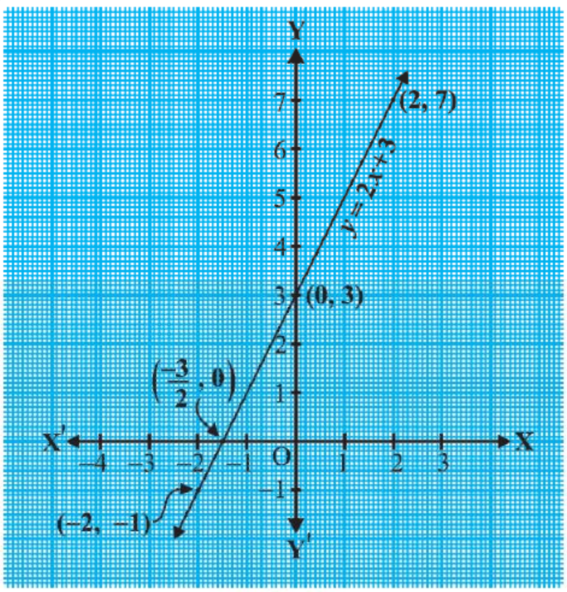
2.2 બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ

V6I8D2

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $p(k) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા k એ બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય છે પરંતુ બહુપદીનાં શૂન્યો શા માટે અગત્યનાં છે ? આના ઉત્તર માટે, પ્રથમ આપણે *સુરેખ* અને *દ્વિઘાત બહુપદીઓનું ભૌમિતિક નિરૂપણ* અને તેનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ જોઈએ.

પ્રથમ સુરેખ બહુપદી $ax+b$, $a \neq 0$ નો વિચાર કરો. આપણે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે કે $y = ax + b$ નો આલેખ એક રેખા છે. ઉદાહરણ તરીકે $y = 2x + 3$ નો આલેખ એ બિંદુઓ $(-2, -1)$ અને $(2, 7)$માંથી પસાર થતી રેખા છે.

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7



આકૃતિ 2.1

આકૃતિ 2.1 પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $y = 2x + 3$ નો આલેખ x-અક્ષને $x = -1$ અને $x = -2$ની મધ્યમાં આવેલા બિંદુ $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ માં છેદે છે.

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે બહુપદી $2x + 3$ નું શૂન્ય $\frac{-3}{2}$ છે. આથી, બહુપદી $2x + 3$ નું શૂન્ય એ $y = 2x + 3$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તેનો x-યામ છે.

વ્યાપક રીતે, સુરેખ બહુપદી $ax + b$, $a \neq 0$ માટે $y = ax + b$ નો આલેખ x-અક્ષને બરાબર એક બિંદુ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ બિંદુમાં છેદતી રેખા છે.

આથી શૂન્યેતર a માટે સુરેખ બહુપદી $ax + b$ ને એક જ શૂન્ય $\frac{-b}{a}$ છે અને તે $y = ax + b$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તેનો x-યામ છે.

હવે, આપણે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ જોઈએ. $x^2 - 3x - 4$ દ્વિઘાત બહુપદીનો વિચાર કરો. ચાલો આપણે જોઈએ કે $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ* કેવો દેખાશે.

આપણે કોષ્ટક 2.1 માં x ની કેટલીક કિંમતોને અનુરૂપ $y = x^2 - 3x - 4$ ની કિંમતોની યાદી બનાવી છે.

કોષ્ટક 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

જો આપણે ઉપરની યાદીમાં દર્શાવેલાં બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવી આલેખ દોરીએ તો તે આકૃતિ 2.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો દેખાશે.

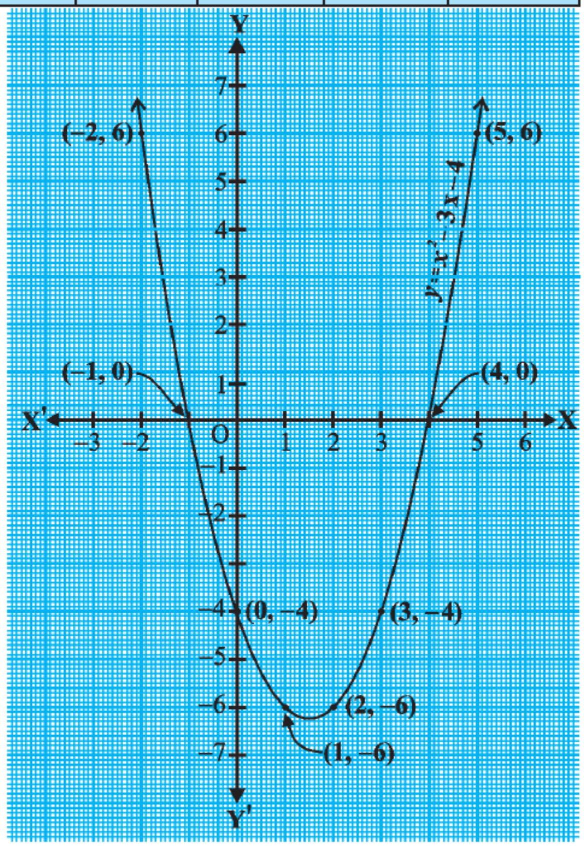
ખરેખર તો, શૂન્યેતર a હોય તેવી કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, ના સંદર્ભમાં તેને અનુરૂપ સમીકરણ $y = ax^2 + bx + c$ નો આલેખ અનુક્રમે $a > 0$ અથવા $a < 0$ અનુસાર ઉપરની તરફ ખુલ્લો વક્ર $\bigvee$ અથવા નીચેની તરફ ખુલ્લો વક્ર $\bigwedge$ મળશે. (આ વક્રને પરવલય કહે છે.)

તમે કોષ્ટક 2.1 પરથી જોઈ શકો છો કે -1 અને 4 એ આપેલ દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો છે.

આકૃતિ 2.2 પરથી નોંધો કે $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે. તેમના x યામ -1 અને 4 છે.

આમ, દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 - 3x - 4$ નાં શૂન્યો એ $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે તેમના x યામ થાય.

આ હકીકત કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી માટે સત્ય છે, દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ નાં શૂન્યો એ



આકૃતિ 2.2

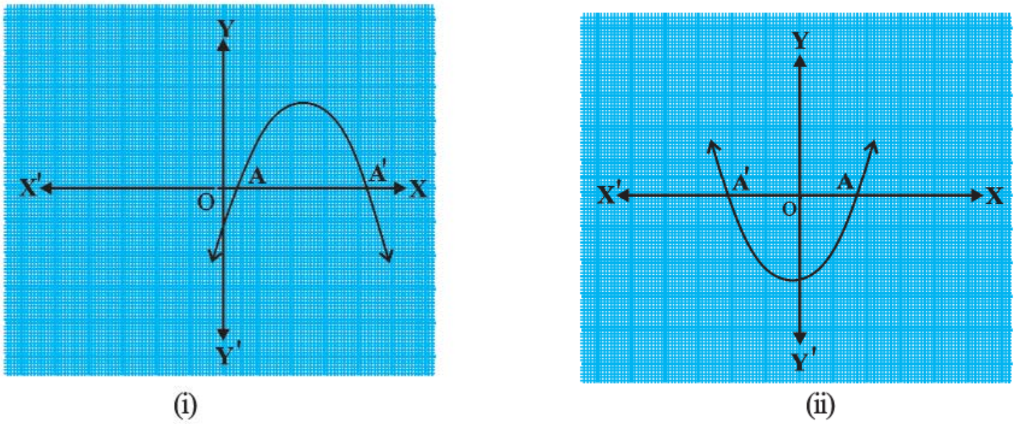
* વિદ્યાર્થી એ દ્વિઘાત તથા ત્રિઘાત બહુપદીઓના આલેખ દોરવાનું અપેક્ષિત નથી તથા તે મૂલ્યાંકનનો હિસ્સો નથી.

નિશ્ચિતપણે $y = ax^2 + bx + c$ ને દર્શાવતો પરવલય x-અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદે છે તે બિંદુઓના x-યામ થાય.

અગાઉના આપણા નિરીક્ષણને આધારે $y = ax^2 + bx + c$ ના આલેખના આકાર માટે નીચે પ્રમાણેના ત્રણ વિકલ્પ હોઈ શકે :

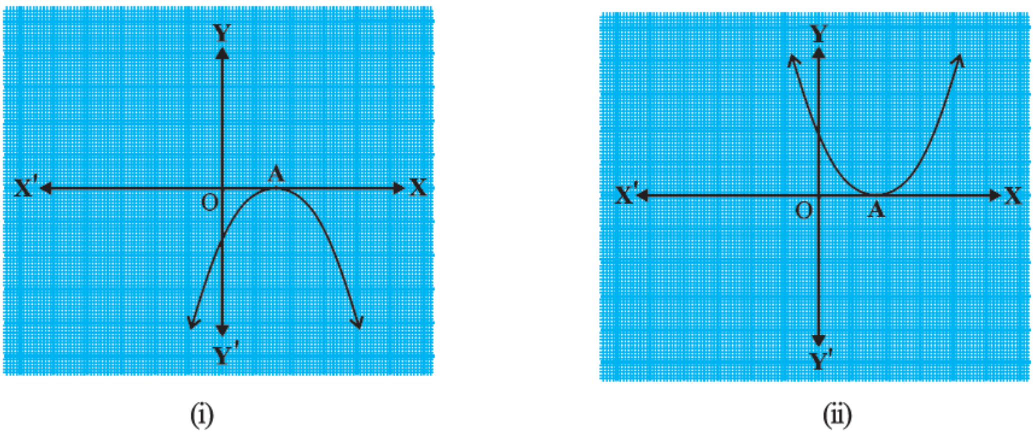
વિકલ્પ (i) : અહીં આલેખ x-અક્ષને ***બે ભિન્ન બિંદુઓ*** A અને A' માં છેદે છે.

આ કિસ્સામાં A અને A' ના x-યામ એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં બે શૂન્યો થાય. (જુઓ આકૃતિ 2.3.)



આકૃતિ 2.3

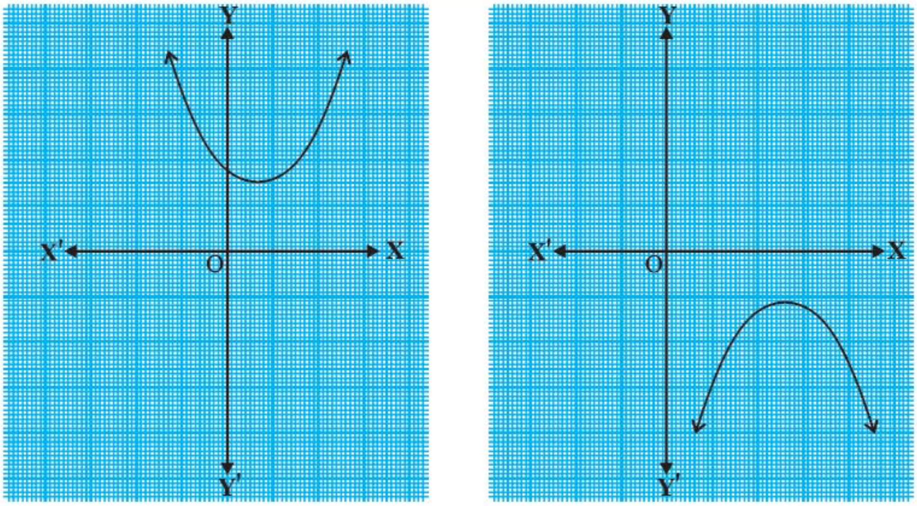
વિકલ્પ (ii) : અહીં આલેખ x-અક્ષને એક બિંદુમાં છેદે છે. એટલે કે તે x-અક્ષને બે સંપાતી બિંદુઓમાં છેદે છે. આથી વિકલ્પ (i)વાળા બિંદુ A અને A′ સંપાતી બને છે અને એક જ છેદબિંદુ A મળે છે. (જુઓ આકૃતિ 2.4.)



આકૃતિ 2.4

આ કિસ્સામાં બિંદુ Aનો x-યામ એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નું ***એક માત્ર શૂન્ય*** થશે.

વિકલ્પ (iii) : અહીં આલેખ સંપૂર્ણપણે x-અક્ષની ઉપર અથવા સંપૂર્ણપણે x-અક્ષની નીચે છે અને તે x-અક્ષને કોઈ પણ બિંદુએ છેદશે નહીં. (જુઓ આકૃતિ 2.5.)



આકૃતિ 2.5

આથી, આ કિસ્સામાં દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ ને ***વાસ્તવિક શૂન્ય*** નથી.

આથી, ભૌમિતિક રીતે જોઈ શકાય કે, દ્વિઘાત બહુપદીને કાં તો બે ભિન્ન શૂન્યો હોય અથવા બે સમાન શૂન્યો હોય (એટલે કે એક શૂન્ય) અથવા શૂન્ય ન હોય. આનો અર્થ એ પણ થાય કે બે ઘાતવાળી બહુપદીને વધુમાં વધુ બે શૂન્યો હોય.

હવે, ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ માટે તમે શું અપેક્ષા રાખો છો ? ચાલો, આપણે નક્કી કરીએ. ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 4x$ નો વિચાર કરો. $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ કેવો દેખાશે તે જોઈએ.

ચાલો, આપણે x ની કેટલીક કિંમતોને અનુરૂપ y ની કેટલીક કિંમતોની યાદી કોષ્ટક 2.2 માં દર્શાવેલ છે તે જોઈએ.

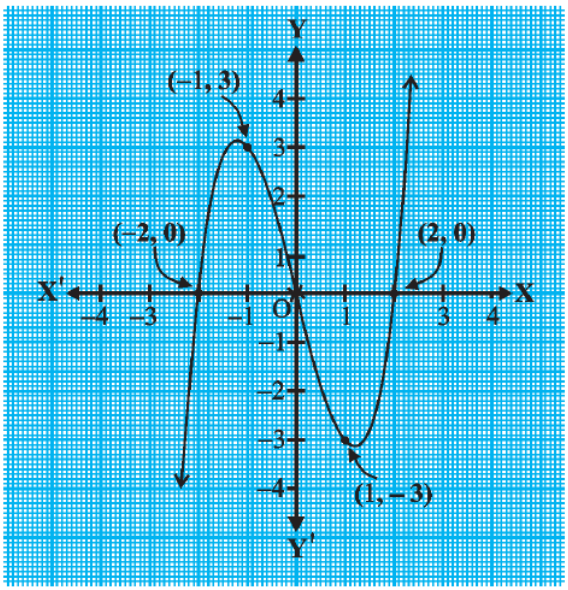
કોષ્ટક 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવી આલેખ દોરતાં આપણે જોઈ શકીએ કે, $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ ખરેખર આકૃતિ 2.6 માં દર્શાવેલ છે તેવો લાગશે.

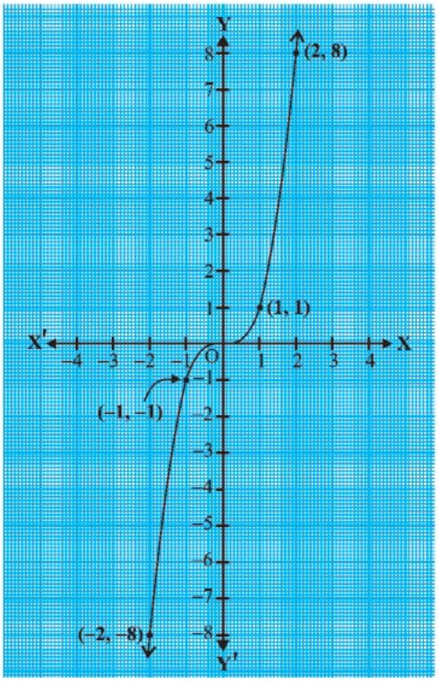
ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે જોઈ શકીએ કે -2, 0 અને 2 એ ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 4x$ નાં શૂન્યો છે અવલોકન કરો કે $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ x-અક્ષને જયાં છેદે છે તે બિંદુઓના x-યામ જ હકીકતમાં -2, 0 અને 2 છે.

વક્ર x-અક્ષને આ ત્રણ બિંદુએ જ છેદતો હોવાથી તેના x-યામ આ બહુપદીનાં શૂન્યો થાય અને આ સિવાય અન્ય કોઈ શૂન્ય ન મળે.

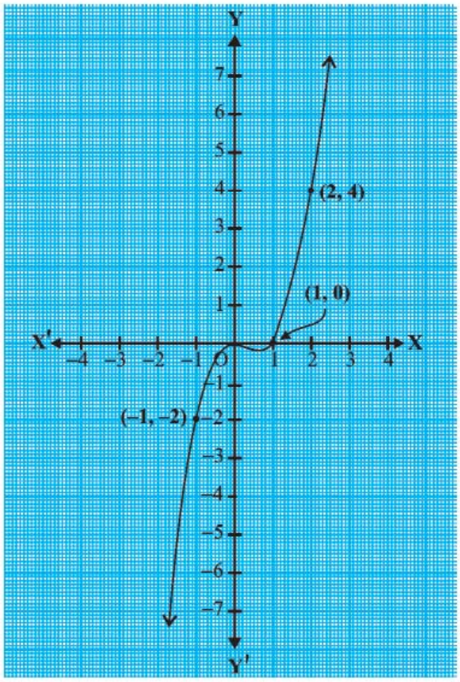


આકૃતિ 2.6

ચાલો આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો લઈએ. ત્રિઘાત બહુપદીઓ x^3 અને $x^3 - x^2$નો વિચાર કરો. આકૃતિ 2.7 અને આકૃતિ 2.8 માં અનુક્રમે $y = x^3$ અને $y = x^3 - x^2$ ના આલેખ આપણે દોર્યા છે.



આકૃતિ 2.7



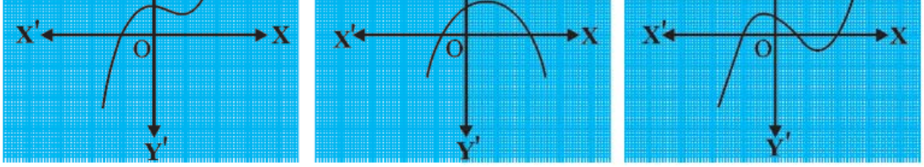
આકૃતિ 2.8

આપણે નોંધીએ કે 0 એ બહુપદી x^3 નું એક માત્ર શૂન્ય છે. વળી, આકૃતિ 2.7 પરથી તમે જોઈ શકો છો કે $y = x^3$ નો આલેખ x-અક્ષને માત્ર એક બિંદુમાં છેદે છે અને તેનો x-યામ 0 છે. $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ હોવાથી, બહુપદી $x^3 - x^2$ નાં શૂન્યો માત્ર 0 અને 1 છે. વળી, આકૃતિ 2.8 પરથી આ મૂલ્યો $y = x^3 - x^2$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદે છે તેમના x-યામ છે.

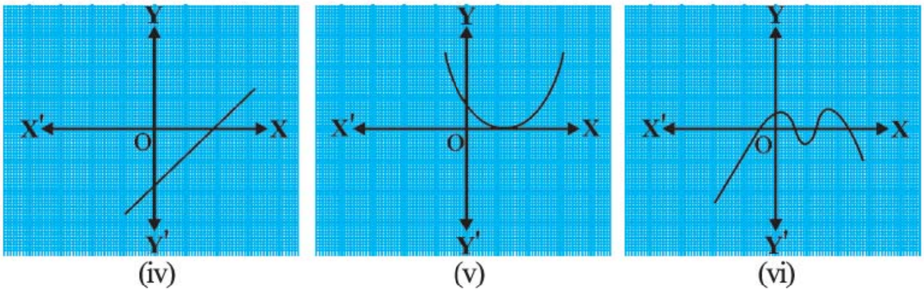
ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી, આપણે જોયું કે કોઈ પણ ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો ત્રણ ઘાતવાળી બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય છે.

નોંધ : વ્યાપક રીતે કહીએ તો આપેલી બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત n હોય તો $y = p(x)$ નો આલેખ x-અક્ષને વધુમાં વધુ n બિંદુઓમાં છેદે. માટે n ઘાતવાળી બહુપદી $p(x)$ ને વધુમાં વધુ n શૂન્યો હોય.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આકૃતિ 2.9માં આપેલ આલેખ જુઓ. પ્રત્યેક આલેખ બહુપદી $p(x)$ માટે $y = p(x)$ ના આલેખ છે. પ્રત્યેક આલેખ માટે $p(x)$નાં શૂન્યોની સંખ્યા શોધો.



(i) (ii) (iii)



આકૃતિ 2.9

ઉકેલ :

(i) આલેખ x-અક્ષને એક જ બિંદુમાં છેદતો હોવાથી શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે.

(ii) આલેખ x-અક્ષને બે બિંદુમાં છેદતો હોવાથી શૂન્યોની સંખ્યા 2 છે.

(iii) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 3 છે. **(શા માટે ?)**

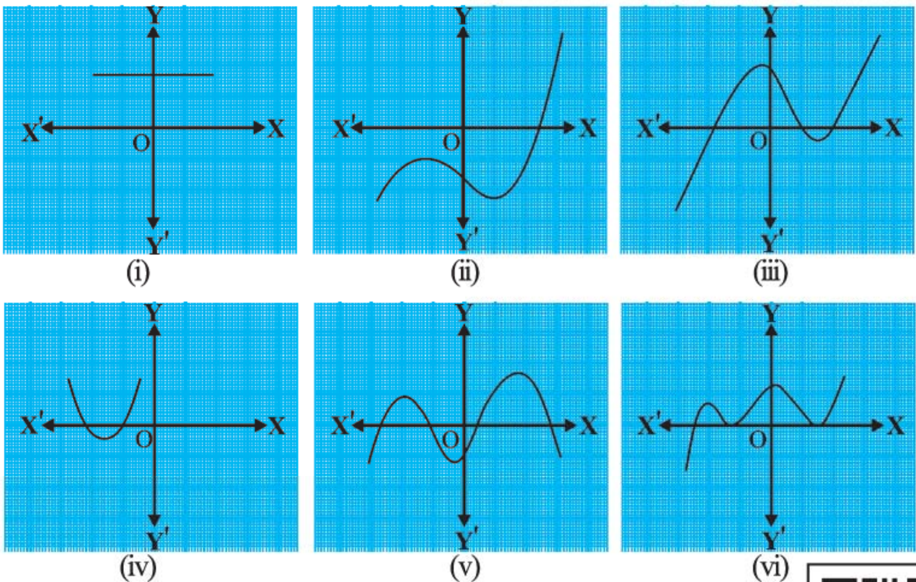
(iv) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે. **(શા માટે ?)**

(v) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે. **(શા માટે ?)**

(vi) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 4 છે. **(શા માટે ?)**

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચે આકૃતિ 2.10 માં કોઈ બહુપદી $p(x)$ માટે $y = p(x)$ ના આલેખ આપેલ છે. દરેક કિસ્સામાં $p(x)$ નાં શૂન્યોની સંખ્યા શોધો.



F9C4K2

આકૃતિ 2.10

2.3 બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ

તમે જોયું કે સુરેખ બહુપદી $ax + b$ નું શૂન્ય $\frac{-b}{a}$ છે. હવે આપણે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેના

સંબંધના સંદર્ભે વિભાગ 2.1 માં ઉદ્‌ભવેલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવા પ્રયત્ન કરીએ. ચાલો, આ માટે આપણે દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ લઈએ. ધોરણ IX માં તમે દ્વિઘાત બહુપદીના મધ્યમપદના ભાગ પાડી તેના અવયવ પાડતાં શીખ્યાં છો. માટે, આપણે મધ્યમ પદના એવા બે ભાગ પાડીએ જેમનો સરવાળો '$-8x$' થાય અને જેમનો ગુણાકાર $6 \times 2x^2 = 12x^2$ આવે. આથી,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x\,(x-3) - 2(x-3) \\ &= (2x-2)\,(x-3) \\ &= 2(x-1)\,(x-3) \end{aligned}$$

આથી, જ્યારે $x - 1 = 0$ અથવા $x - 3 = 0$ હોય ત્યારે $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ની કિંમત શૂન્ય થાય. આથી $2x^2 - 8x + 6$ નાં શૂન્યો 1 અને 3 છે.

અવલોકન કરો કે,

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો સરવાળો} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = -\frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો ગુણાકાર} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

ચાલો, આપણે વધુ એક દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ લઈએ. મધ્યમપદના ભાગ પાડવાની પદ્ધતિ દ્વારા,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 \\ &= 3x\,(x+2) - 1\,(x+2) \\ &= (3x-1)\,(x+2) \end{aligned}$$

$3x^2 + 5x - 2$ ની કિંમત શૂન્ય લેતાં, $3x - 1 = 0$ અથવા $x + 2 = 0$ થાય. આથી $x = \frac{1}{3}$ અથવા $x = -2$.

માટે, $3x^2 + 5x - 2$ નાં શૂન્યો $\frac{1}{3}$ અને -2 થાય. અવલોકન કરો કે,

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો સરવાળો} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{તેનાં શૂન્યોનો ગુણાકાર} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

વ્યાપક રીતે, જો શૂન્યેતર a માટે દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = ax^2 + bx + c$, નાં શૂન્યો α* અને β* હોય, તો આપણે જાણીએ છીએ કે $x - \alpha$ અને $x - \beta$ એ $p(x)$ ના અવયવો થાય. માટે,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= k(x-\alpha)\,(x-\beta),\ k \text{ શૂન્યેતર અચળ} \\ &= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta], \\ &= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\,\alpha\beta \end{aligned}$$

બંને બાજુ x^2, x ના સહગુણકો અને અચળ પદને સરખાવતાં આપણને,

$a = k,\ b = -k\,(\alpha + \beta),\ c = k\,\alpha\beta$ મળે.

* α તથા β ગ્રીક મૂળાક્ષરો છે અને તેમનો ઉચ્ચાર અનુક્રમે ''આલ્ફા'' અને ''બીટા'' થાય છે. આગળ જતાં જેનો ઉચ્ચાર ગેમા થાય તેવા વધુ એક મૂળાક્ષર γ નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\,\beta = \frac{c}{a} \text{ મળે.}$$

આથી શૂન્યોનો સરવાળો $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-\,(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 2 : દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 7x + 10$ નાં શૂન્યો શોધો તથા તેનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

ઉકેલ : આપણી પાસે

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

આથી, જ્યારે $x + 2 = 0$ અથવા $x + 5 = 0$ હોય, ત્યારે $x^2 + 7x + 10$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

માટે $x = -2$ અથવા $x = -5$.

આથી, $x^2 + 7x + 10$ નાં શૂન્યો -2 અને -5 થાય. હવે,

શૂન્યોનો સરવાળો $= (-2) + (-5) = -(7) = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-\,(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= (-2) \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ઉદાહરણ 3 : બહુપદી $x^2 - 3$ નાં શૂન્યો શોધો અને તેનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

ઉકેલ : નિત્યસમ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ યાદ કરી તેનો ઉપયોગ કરી, આપણે લખી શકીએ કે,

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

આથી, જ્યારે $x = \sqrt{3}$ અથવા $x = -\sqrt{3}$ હોય ત્યારે $x^2 - 3$ ની કિંમત શૂન્ય થાય.

માટે, $x^2 - 3$ નાં શૂન્યો $\sqrt{3}$ અને $-\sqrt{3}$ છે.

હવે,

શૂન્યોનો સરવાળો $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \dfrac{-\,(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ઉદાહરણ 4 : જેનાં શૂન્યોના સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે –3 અને 2 હોય તેવી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો α અને β છે.

આપણી પાસે

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

જો $a = 1$ તો $b = 3$ અને $c = 2$

આથી, આપેલ શરતને અનુરૂપ એક દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 3x + 2$ છે.

તમે એ પણ ચકાસી શકો કે શૂન્યેતર વાસ્તવિક k માટે, $k(x^2 + 3x + 2)$ સ્વરૂપની કોઈ પણ બીજી દ્વિઘાત બહુપદી આ શરતોને અનુરૂપ લઈ શકાય.

ચાલો, આપણે હવે ત્રિઘાત બહુપદીઓ જોઈએ. તમે કલ્પના કરી શકશો કે ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો અને તેના સહગુણકો વચ્ચે શું આવો જ સંબંધ હશે ?

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ નો વિચાર કરીએ,

$p(x)$ ને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય. આપણે $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ માટે $p(x) = 0$ થાય તે ચકાસી શકીએ. આ સંખ્યાઓ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ નાં શૂન્યો થાય. હવે,

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ નો સહગુણક})}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{ અચળ પદ}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

જો કે અહીં એક વધુ સંબંધ છે. બબ્બે શૂન્યોના ગુણાકારોના સરવાળાનો વિચાર કરીએ. આપણી પાસે

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\} = -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

વ્યાપક રીતે, જો ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો α, β, γ હોય, તો સાબિત કરી શકાય કે,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

ચાલો, એક ઉદાહરણ સમજીએ.

ઉદાહરણ 5* : ચકાસો કે $3, -1, -\frac{1}{3}$ એ ત્રિઘાત બહુપદી $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ નાં શૂન્યો છે અને તે પછી શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

* પરીક્ષાના દ્રષ્ટિકોણથી લીધેલ નથી.

ઉકેલ : આપેલી બહુપદીને $ax^3 + bx^2 + cx + d$ સાથે સરખાવતાં,

આપણને $a = 3$, $b = -5$, $c = -11$, $d = -3$ મળશે. વધુમાં

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

આથી, 3, -1 અને $-\frac{1}{3}$ એ $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ નાં શૂન્યો છે.

આથી, આપણે $\alpha = 3$, $\beta = -1$ અને $\gamma = -\frac{1}{3}$ લઈએ.

હવે,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + \left((-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right) + \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \times 3\right)$$

$$= -3 + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = -\left(-\frac{3}{3}\right) = \frac{-d}{a}$$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. નીચે દર્શાવેલ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં શૂન્યો શોધો તથા તેમનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો :

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ અનુક્રમે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો સરવાળો અને શૂન્યોનો ગુણાકાર છે તે પરથી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો :

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 બહુપદીઓ માટે ભાગપ્રવિધિ

આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો છે. વધુમાં, જો તમને એક શૂન્ય આપેલ હોય તો તમે બીજાં બે શૂન્યો શોધી શકો ? આ માટે ચાલો આપણે ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 3x^2 - x + 3$ નો વિચાર કરીએ. જો અમે તમને કહીએ કે તેનું એક શૂન્ય 1 છે આથી તમે જાણો છો કે $x - 1$ એ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ નો એક અવયવ છે. આથી, તમે

R5S7W9

$x^3 - 3x^2 - x + 3$ ને $x - 1$ વડે ભાગો. આ તો તમે ધોરણ IX માં શીખ્યાં છો. આથી ભાગફળ $x^2 - 2x - 3$ મળશે.

બાદમાં, $x^2 - 2x - 3$ ના મધ્યમ પદનું વિભાજન કરતાં તમને $(x + 1)(x - 3)$ અવયવ મળશે.

આથી, $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$

$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ મળશે.

આથી, આપેલા ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો હવે 1, –1 અને 3 મળી જાય છે.

ચાલો આપણે એક બહુપદીનો બીજી બહુપદી વડે ભાગાકાર કરવાની પદ્ધતિની વિગતવાર ચર્ચા કરીએ. પરંપરાગત સોપાનોની નોંધ કરતાં પહેલાં આપણે એક ઉદાહરણનો અભ્યાસ કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : $2x^2 + 3x + 1$ ને $x + 2$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે જ્યારે શેષ શૂન્ય હોય અથવા તેની ઘાત ભાજકની ઘાત કરતાં ઓછી હોય ત્યારે આપણે ભાગાકારની પ્રક્રિયા અટકાવીશું. આથી, અહીં ભાગફળ $2x - 1$ અને શેષ 3 છે.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x \;\; - 1 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + 3x + 1 \\
 & 2x^2 + 4x \\
 & \underline{-\quad\; -\quad\quad} \\
 & \quad\; -x + 1 \\
 & \quad\; -x - 2 \\
 & \quad\; \underline{+\quad\; +} \\
 & \quad\quad\quad 3
\end{array}
$$

વળી,

$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$

માટે, $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

આથી, ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ

ચાલો, હવે આપણે એક બહુપદીને દ્વિઘાત બહુપદી વડે ભાગીને આ પ્રક્રિયા સમજીએ.

ઉદાહરણ 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ને $1 + 2x + x^2$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે ભાજક અને ભાજ્યનાં પદોને તેમના ઘાતાંકના ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવીએ. યાદ કરો કે બહુપદીનાં પદોને આ ક્રમમાં ગોઠવીએ તો, તે સ્વરૂપને બહુપદીનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહે છે. આ ઉદાહરણમાં, ભાજ્ય પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં જ છે અને $x^2 + 2x + 1$ એ ભાજકનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ થશે.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad 3x - 5 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\
 & 3x^3 + 6x^2 + 3x \\
 & \underline{-\quad\;\; -\quad\;\; -\quad\quad} \\
 & \quad\; -5x^2 - x + 5 \\
 & \quad\; -5x^2 - 10x - 5 \\
 & \quad\; \underline{+\quad\;\; +\quad\;\; +} \\
 & \quad\quad\quad 9x + 10
\end{array}
$$

સોપાન 1 : ભાગફળનું પ્રથમ પદ મેળવવા માટે ભાજ્યના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદને (એટલે કે $3x^3$) ભાજકના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદ (એટલે કે x^2) વડે ભાગો. ભાગફળ $3x$ થશે. ત્યાર બાદ ભાગાકારની પ્રક્રિયા આગળ ધપાવતાં $-5x^2 - x + 5$ વધશે.

સોપાન 2 : હવે ભાગફળનું બીજું પદ મેળવવા માટે ભાગાકારના નવા ભાજ્યનાં સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદને (એટલે કે $-5x^2$). ભાજકના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદ (એટલે કે x^2) વડે ભાગો. ભાગફળ –5 મળશે. ફરીથી ભાગાકારની પ્રક્રિયા $-5x^2 - x + 5$ સાથે આગળ ધપાવો.

સોપાન 3 : $9x + 10$ બાકી રહેશે. હવે, $9x + 10$ની ઘાત ભાજક $x^2 + 2x + 1$ની ઘાત કરતાં ઓછી છે માટે, આપણે ભાગાકાર આગળ ધપાવી શકીશું નહિ.

માટે, ભાગફળ $3x - 5$ અને શેષ $9x + 10$ છે. વળી,

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) \quad = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10$$
$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

અહીં પણ આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ

અહીં આપણે જે પ્રવિધિ લાગુ પાડી તે યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિને સમાન છે. આપણે તેનો પ્રકરણ 1માં અભ્યાસ કર્યો છે.

તે દર્શાવે છે કે,

જો $p(x)$ અને $g(x)$ બે બહુપદીઓ હોય અને $g(x) \neq 0$, તો આપણે એવી બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ શોધી શકીએ, જેથી

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x),$$

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ની ઘાત $<$ $g(x)$ ની ઘાત.

આ પરિણામ બહુપદીઓ માટે **ભાગપ્રવિધિ** તરીકે ઓળખાય છે.

ચાલો, આપણે તેનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ નો $x - 1 - x^2$ વડે ભાગાકાર કરો અને ભાગ પ્રવિધિ ચકાસો.

ઉકેલ : જુઓ કે આપેલ બહુપદીઓ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી. આથી, ભાગાકાર કરવા માટે આપણે પ્રથમ ભાજ્ય અને ભાજકને તેની ઘાતના ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવીશું.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & \;\;{+}\quad\; {-} \quad\;\; {+} \\ \cline{2-2} & \qquad 2x^2 - 2x + 5 \\ & \qquad 2x^2 - 2x + 2 \\ & \qquad\; {-} \quad\;\; {+} \quad\;\; {-} \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad 3 \end{array}$$

આથી, ભાજ્ય $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ અને ભાજક $= -x^2 + x - 1$.

ભાગાકારની પ્રક્રિયા જમણી બાજુએ દર્શાવેલ છે.

આપણે 3માં x ની ઘાત $= 0 < 2 =$ ઘાત $(-x^2 + x - 1)$ થવાથી ત્યાં અટકીશું.

આથી, ભાગફળ $= x - 2$, શેષ $= 3$

હવે, ભાજક × ભાગફળ + શેષ $= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

$=$ ભાજ્ય

આ રીતે ભાગપ્રવિધિને ચકાસી શકાય.

ઉદાહરણ 9 : જો $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ એ $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ નાં બે શૂન્યો છે તેવું તમે જાણતા હો, તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

ઉકેલ : $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ બે શૂન્યો હોવાથી, $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ એ આપેલ બહુપદીનો અવયવ થશે. હવે આપણે આપેલી બહુપદીને $x^2 - 2$ વડે ભાગીએ.

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & & & 2x^2 & -3x & +1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 & -3x^3 & -3x^2 & +6x & -2 \\
 & 2x^4 & & -4x^2 & & \\
 & - & & + & & \\
\cline{2-6}
 & & -3x^3 & +x^2 & +6x & -2 \\
 & & -3x^3 & & +6x & \\
 & & + & & - & \\
\cline{2-6}
 & & & x^2 & & -2 \\
 & & & x^2 & & -2 \\
 & & & - & & + \\
\cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

ભાગફળનું પ્રથમ પદ $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

ભાગફળનું બીજું પદ $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

ભાગફળનું ત્રીજું પદ $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

આથી, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

હવે, $-3x$ ના ભાગ પાડતાં આપણે $2x^2 - 3x + 1$ ના અવયવ $(2x - 1)(x - 1)$ પાડી શકીશું. આથી, તેનાં શૂન્યો $x = \dfrac{1}{2}$ અને $x = 1$ થશે. માટે આપેલી બહુપદીનાં શૂન્યો $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}, 1$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.3

1. નીચે આપેલ તમામ બહુપદી $p(x)$ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગો અને ભાગફળ તથા શેષ મેળવો :

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6, \quad g(x) = 2 - x^2$

2. નીચે આપેલ બે બહુપદીઓ પૈકી બીજી બહુપદીને પ્રથમ બહુપદી વડે ભાગીને ચકાસો કે પ્રથમ બહુપદી એ બીજી બહુપદીનો અવયવ છે કે નહિ.

(i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. જો $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ અને $-\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ એ $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ નાં બે શૂન્યો હોય, તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગતાં ભાગફળ અને શેષ અનુક્રમે $x - 2$ અને $-2x + 4$ મળે છે, તો $g(x)$ શોધો.

5. ભાગપ્રવિધિ અને નીચેની શરતોને સંતોષે તેવી બહુપદીઓ $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ અને $r(x)$ નાં ઉદાહરણો આપો.

(i) $p(x)$ ની ઘાત $=$ $q(x)$ ની ઘાત

(ii) $q(x)$ ની ઘાત $=$ $r(x)$ ની ઘાત

(iii) $r(x)$ ની ઘાત $= 0$

સ્વાધ્યાય 2.4 (વૈકલ્પિક)*

1. નીચે ત્રિઘાત બહુપદીની સાથે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ તેનાં શૂન્યો છે તે ચકાસો. દરેક પ્રશ્નમાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ પણ ચકાસો :

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 ; \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 ; 2, 1, 1$

2. જેનાં શૂન્યોનો સરવાળો, બબ્બે શૂન્યોના ગુણાકારનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 2, –7, –14 છે એવી ત્રિઘાત બહુપદી શોધો.

3. જો બહુપદી $x^3 - 3x^2 + x + 1$ નાં શૂન્યો $a - b, a, a + b$ હોય તો a અને b શોધો.

4. બહુપદી $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ નાં બે શૂન્યો $2 \pm \sqrt{3}$ હોય તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

5. બહુપદી $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ ને બીજી બહુપદી $x^2 - 2x + k$ વડે ભાગતાં આવે તો શેષ $x + a$ મળે તો k અને a શોધો.

2.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. 1, 2 અને 3 ઘાત ધરાવતી બહુપદીઓને અનુક્રમે સુરેખ, દ્વિઘાત અને ત્રિઘાત બહુપદીઓ કહે છે.

2. વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c તથા શૂન્યેતર a માટે, x પરની વાસ્તવિક સહગુણકો ધરાવતી દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ છે.

3. $y = p(x)$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તે બિંદુના x-યામ એ બહુપદી $p(x)$નાં શૂન્યો છે.

4. દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 વાસ્તવિક શૂન્યો અને ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 3 વાસ્તવિક શૂન્યો હોય છે.

5. જો α અને β એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો હોય, તો

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6. જો α, β, γ એ ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો હોય, તો

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

અને $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

7. ભાગ પ્રવિધિ દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ બહુપદી $p(x)$ અને કોઈ શૂન્યેતર બહુપદી $g(x)$ ને સંગત બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ મળે જેથી,

$$p(x) = g(x)\,q(x) + r(x),$$

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ની ઘાત $<$ $g(x)$ ની ઘાત.

J9T8Z7

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.

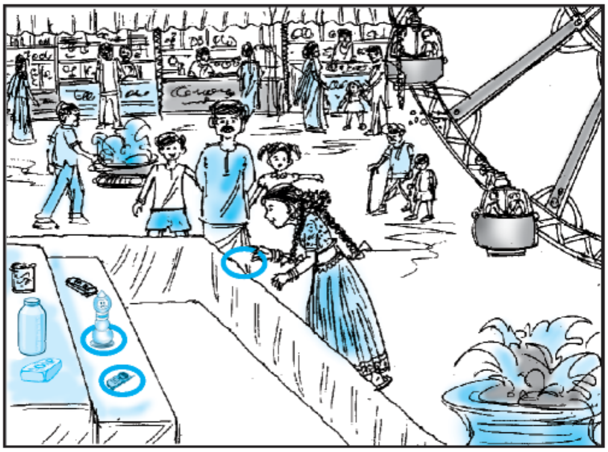
દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ 3

3.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે નીચે આપેલી પરિસ્થિતિ જેવી પરિસ્થિતિમાંથી પસાર થયાં જ હશો.

અખિલા તેના ગામમાં મેળામાં ગઈ હતી. તેને ચકડોળમાં બેસવાનો આનંદ માણવો હતો અને હૂપલા (Hoopla) (જેમાં તમે સ્ટોલમાં રાખેલી વસ્તુઓ પર રિંગ ફેંકો અને જો રિંગ કોઈ પણ વસ્તુને સંપૂર્ણ આવરી લે, તો તે વસ્તુ તમને મળે એવી એક રમત) રમવા માંગતી હતી. તે જેટલી વખત હૂપલા રમી તે સંખ્યા એ ચકડોળ પરની સવારીની સંખ્યાથી અડધી છે. જો પ્રત્યેક વખત ચકડોળમાં બેસવાનો ખર્ચ ₹ 3 અને હૂપલાની પ્રત્યેક રમત રમવાનો ખર્ચ ₹ 4 થતો હોય, તો તમે ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યા કેવી રીતે શોધી શકશો અને તે કેટલી વાર હૂપલાની રમત રમી હશે તે કેવી રીતે નક્કી કરશો? તેણે આ માટે કુલ ₹ 20 ખર્ચ્યા હતા.

કદાચિત્, તમે વિવિધ સ્થિતિની વિચારણા કરીને અજમાવી શકો છો. જો તેણે એક વખત સવારી કરી હોય, તે શક્ય છે ? શું બે વખત સવારી શક્ય છે ? અને આમ આગળ ચાલો અથવા આવી પરિસ્થિતિઓને દર્શાવવા માટે તમે ધોરણ IX ના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી શકો.



ચાલો આ અભિગમ અપનાવીએ.

અખિલાની ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યાને x કહો અને હૂપલા રમવાની સંખ્યાને y કહો. આ પરિસ્થિતિને બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{.... (1)}$$

$$3x + 4y = 20 \quad \text{.... (2)}$$

શું આપણે આ બે સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીશું?

ઉકેલ શોધવાની ઘણી રીતો છે. આપણે આ પ્રકરણમાં તેમનો અભ્યાસ કરીશું.

3.2 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ

ધોરણ IX નો અભ્યાસ યાદ કરો. નીચે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનાં ઉદાહરણો છે :

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

અને $x - 0y = 2$, એટલે કે $x = 2$

L4Q7P2

જો a, b અને c એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોય તો જે સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય તેને ચલ x અને ચલ y માં દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે એમ તમે જાણો છો. (a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોઈ શકે તે શરતને સામાન્ય રીતે $a^2 + b^2 \neq 0$ વડે પણ દર્શાવાય છે).

તમે અભ્યાસ કર્યો છે કે, આવા સમીકરણના ઉકેલનાં મૂલ્યોની એક x અને બીજો y એમ એક જોડ મળે છે. તે સમીકરણની બંને બાજુઓ સમાન બનાવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ $2x + 3y = 5$ ની ડાબી બાજુએ $x = 1$ અને $y = 1$ કિંમત મૂકતાં,

ડાબી બાજુ $= 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5$ અને તે સમીકરણની જમણી બાજુ બરાબર છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 1$ એ $2x + 3y = 5$ નો એક ઉકેલ છે.

હવે, $x = 1$ અને $y = 7$ કિંમત $2x + 3y = 5$ માં મૂકતાં,

$$\text{ડાબી બાજુ} = 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$$

તે સમીકરણની જમણી બાજુ બરાબર નથી.

તેથી, $x = 1$ અને $y = 7$ એ $2x + 3y = 5$ નો ઉકેલ નથી.

ભૌમિતિક રીતે, આનો અર્થ શું છે ? તેનો અર્થ એ છે કે બિંદુ $(1, 1)$ એ સમીકરણ $2x + 3y = 5$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખા પર છે અને $(1, 7)$ તે રેખા પર નથી. તેથી સમીકરણનો દરેક ઉકેલ તે સમીકરણને દર્શાવતી રેખા પરના બિંદુનું નિરૂપણ છે.

હકીકતમાં, આ કોઈ પણ સુરેખ સમીકરણ માટે સત્ય છે, એટલે કે **$ax + by + c = 0$ નો પ્રત્યેક ઉકેલ (x, y) એ સમીકરણને દર્શાવતી રેખા પરના કોઈ બિંદુને સંગત છે અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.**

હવે, ઉપર્યુક્ત સમીકરણ (1) અને (2) નો વિચાર કરો.

આ સમીકરણો અખિલાની મેળાની મુલાકાત વિશેની માહિતી એક સાથે દર્શાવે છે.

આ બંને સુરેખ સમીકરણોમાં x અને y માત્ર બે ચલ છે. આ સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહે છે.

ચાલો આ જોડીનો બીજગણિતની રીતે વિચાર કરીએ.

ચલ x અને y માં દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ છે. અહીં $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલાં છે :

$2x + 3y - 7 = 0$ અને $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ અને $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ અને $17 = y$

શું તમે જાણો છો કે ભૌમિતિક રીતે તે શું સૂચવે છે ?

યાદ કરો, તમે ધોરણ IX માં ભૌમિતિક રીત (એટલે કે આલેખની રીત)નો અભ્યાસ કર્યો છે કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ એ રેખા નિર્દેશ કરે છે. શું તમે હવે કહેશો કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું આલેખાત્મક સ્વરૂપ કેવું દેખાશે ? તે બે રેખાઓ એક સાથે દર્શાવશે.

તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો કે, સમતલમાં બે રેખાઓ માટે નીચેની ત્રણ શક્યતાઓ પૈકી એક અને માત્ર એક સત્ય હોઈ શકે :

(i) બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદશે.

(ii) બે રેખાઓ છેદતી નથી, એટલે કે તે પરસ્પર સમાંતર છે.

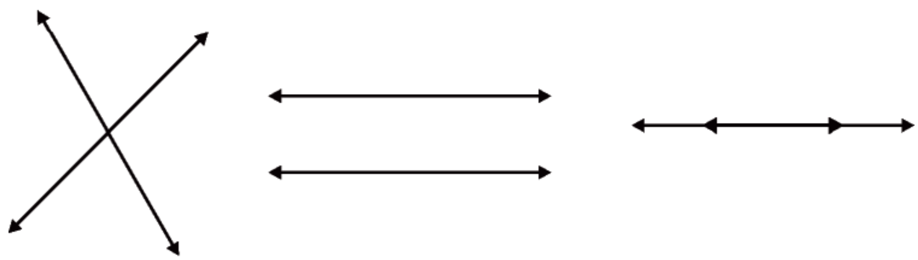
(iii) બે રેખાઓ સંપાતી થશે.

આપણે આ બધી શક્યતાઓને આકૃતિ 3.1માં બતાવી છે.

આકૃતિ 3.1 (a), બંને છેદે છે.

આકૃતિ 3.1 (b), બંને સમાંતર છે.

આકૃતિ 3.1 (c), બંને સંપાતી છે.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 3.1

સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રજૂઆત કરવા બૈજિક અને ભૌમિતિક રીત બંનેનો સાથે-સાથે ઉપયોગ થઈ શકે છે.

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : આપણે વિભાગ 3.1 માંથી ઉદાહરણ લઈએ. અખિલા ₹ 20 લઈને મેળામાં જાય છે અને તે ચકડોળમાં બેસવા માંગે છે અને હૂપલા રમત રમે છે. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે (ભૌમિતિક રીતે) રજૂ કરો.

ઉકેલ : સમીકરણોની જોડીઓ :

$$y = \frac{1}{2}x$$

એટલે કે, $$x - 2y = 0 \quad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \quad (2)$$

આપણે આ સમીકરણોને આલેખાત્મક રીતે દર્શાવીએ. આ માટે આપણને દરેક સમીકરણ માટે ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલની જરૂર છે. આપણે આ ઉકેલો કોષ્ટક 3.1માં આપીએ.

કોષ્ટક 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

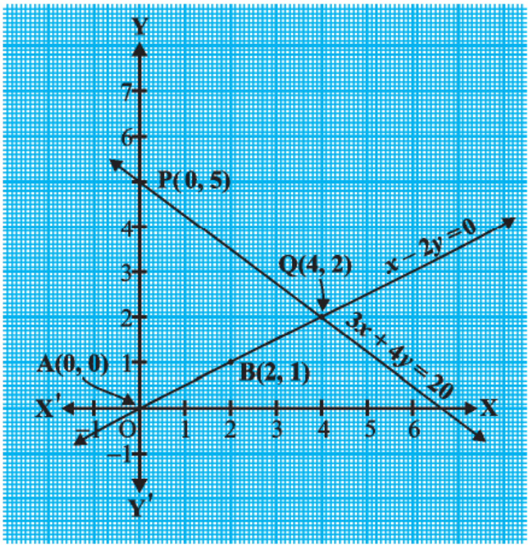
(i)

x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

(ii)

ધોરણ IX માંથી યાદ કરીએ કે, દરેક સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલો છે. તેથી તમે કોઈ પણ બે મૂલ્યો પસંદ કરી શકો છો. આપણે પસંદ કર્યાં છે તે મૂલ્ય પસંદ કરવા જરૂરી નથી. તમે અનુમાન કરી શકો કે, આપણે શા માટે પ્રથમ સમીકરણમાં અને બીજા સમીકરણમાં $x = 0$ પસંદ કર્યું છે ? જ્યારે એક ચલ શૂન્ય હોય છે ત્યારે સમીકરણ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ મળશે અને તે સરળતાથી ઉકેલી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ (2) માં $x = 0$ મૂકતાં, આપણને $4y = 20$ મળે એટલે કે $y = 5$ મળે છે. તે જ રીતે સમીકરણ (2) માં $y = 0$ મૂકતાં આપણને $3x = 20$ મળે. એટલે કે $x = \frac{20}{3}$ મળે છે. પણ $\frac{20}{3}$ એ પૂર્ણાંક નથી. આલેખપત્ર પર તેનું આલેખન સરળતાથી થઈ શકે નહિ. તેથી, આપણે $y = 2$ પસંદ કરીએ છીએ અને આપણને પૂર્ણાંક મૂલ્ય $x = 4$ મળે છે.

કોષ્ટક 3.1માંથી ઉકેલને સંગત બિંદુઓ A(0, 0), B(2, 1) અને P(0, 5), Q(4, 2) દર્શાવો. હવે રેખાઓ AB અને PQ દોરો. તે આકૃતિ 3.2 માં સમીકરણ $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y = 20$ નું નિરુપણ કરે છે.



આકૃતિ 3.2

આકૃતિ 3.2 માં અવલોકન કરો કે બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ પરસ્પર બિંદુ Q (4, 2)માં છેદે છે. પછીના વિભાગમાં આપણે આનો શો અર્થ થાય છે તે અંગે ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 2 : રોમીલાએ સ્ટેશનરીની દુકાનમાંથી 2 પેન્સિલ અને 3 રબર ₹ 9 માં ખરીદ્યાં હતાં. તેની મિત્ર સોનાલીએ રોમીલા પાસેની પેન્સિલોમાં નવીન પ્રકારની પેન્સિલો અને રબર જોયાં અને તેણે પણ તેટલી જ કિંમતોવાળાં 4 પેન્સિલ અને 6 રબર ₹ 18માં ખરીદ્યાં હતા. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે 1 પેન્સિલની કિંમત ₹ x અને 1 રબરની કિંમત ₹ y છે. તેથી સમીકરણોનું બૈજિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે છે.

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

તેને સમકક્ષ આલેખાત્મક નિરુપણ મેળવવા માટે, આપણે દરેક સમીકરણનું નિરૂપણ કરતી રેખા પર બે બિંદુઓ શોધીશું. એટલે કે આપણે દરેક સમીકરણના બે ઉકેલો શોધીએ.

આ ઉકેલ કોષ્ટક 3.2 માં આપવામાં આવ્યા છે.

કોષ્ટક 3.2

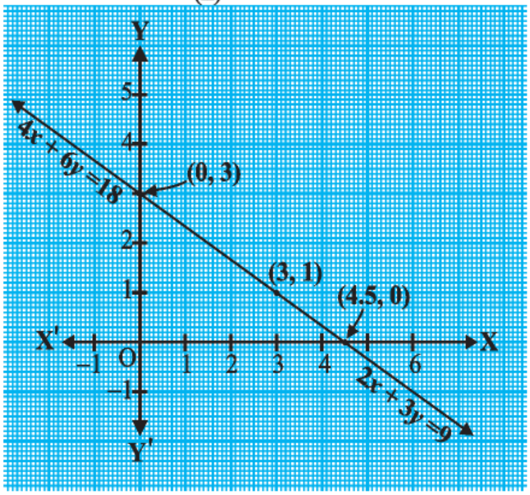
x	0	4.5
$y = \frac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y = \frac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)

આપણે આ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર મૂકીને રેખાઓ દોરીશું. આપણને બે સંપાતી રેખાઓ મળશે. (જુઓ આકૃતિ 3.3.) આમ બનવાનું કારણ એ છે કે, બંને સમીકરણો એકરૂપ છે. એટલે કે એક સમીકરણ પરથી બીજું સમીકરણ તારવી શકાય.



આકૃતિ 3.3

ઉદાહરણ 3 : રેલવેના બે પાટા સમીકરણ $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવેલા છે. આ પરિસ્થિતિનું ભૌમિતિક રીતે નિરૂપણ કરો.

ઉકેલ : સમીકરણો

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

ના બે-બે ઉકેલો કોષ્ટક 3.3 માં આપેલા છે.

કોષ્ટક 3.3

x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

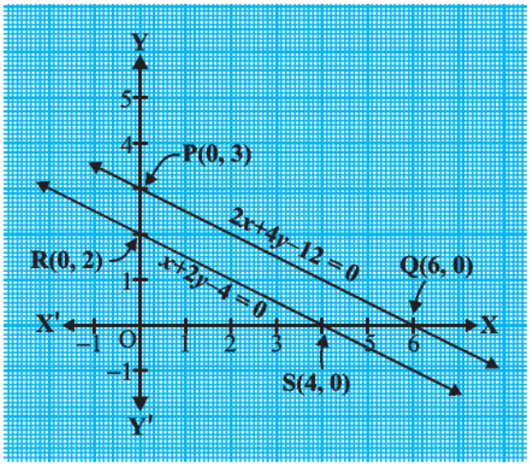
(i)

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

સમીકરણોને આલેખપત્ર પર દર્શાવતાં આપણને બિંદુઓ R (0, 2) અને S (4, 0)ને જોડતી રેખા RS અને બિંદુઓ P (0, 3) અને Q (6, 0)ને જોડતી રેખા PQ મળે છે. આપણે આકૃતિ 3.4 માં અવલોકન કરીએ તો રેખાઓ ક્યાંય છેદતી નથી એટલે કે તે સમાંતર છે.

આપણે સુરેખ સમીકરણયુગ્મ દ્વારા દર્શાવાતી કેટલીક પરિસ્થિતિ જોઈ. આપણે તેમને બૈજિક અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવ્યા છે. હવે પછીના કેટલાક વિભાગમાં આપણે ચર્ચા કરીશું કે, આ બૈજિક અને ભૌમિતિક રજૂઆતોના ઉપયોગથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મની જોડના ઉકેલો કેવી રીતે મેળવાય.



આકૃતિ 3.4

સ્વાધ્યાય 3.1

1. આફતાબ તેની દીકરીને કહે છે, ''સાત વર્ષ પહેલાં મારી ઉંમર તે વખતની તારી ઉંમર કરતાં સાત ગણી હતી હવે પછીનાં ત્રણ વર્ષ પછી મારી ઉંમર તારી તે વખતની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી હશે.'' (શું આ રસપ્રદ છે ?) આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે દર્શાવો.

2. ક્રિકેટ ટીમના પ્રશિક્ષક ₹ 3900 માં 3 બૅટ અને 6 દડાઓ ખરીદે છે. પછી તે બીજું તે જ પ્રકારનું 1 બૅટ અને તે જ પ્રકારના વધુ 3 દડાઓ ₹ 1300 માં ખરીદે છે. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવો.

3. એક દિવસે 2 કિગ્રા સફરજન અને 1 કિગ્રા દ્રાક્ષની કિંમત ₹ 160 હતી. એક મહિના પછી 4 કિગ્રા સફરજન અને 2 કિગ્રા દ્રાક્ષની કિંમત ₹ 300 હતી. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવો.

3.3 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે આલેખની રીત

P7F5V6

આના પહેલાના વિભાગમાં તમે જોઈ ગયાં કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રેખાઓને આલેખપત્ર પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. તમે એ પણ જોઈ ગયાં કે રેખાઓ છેદે અથવા સમાંતર હોય કે સંપાતી હોઈ શકે. દરેક વિકલ્પમાં આપણે સમીકરણયુગ્મને ઉકેલી શકીએ ? અને જો આ શક્ય હોય તો કેવી રીતે બને? આપણે આ પ્રશ્નોના જવાબ ભૌમિતિક દૃષ્ટિકોણથી આપવા પ્રયત્ન કરીશું.

આપણે પહેલાનાં ઉદાહરણોને એક પછી એક જોઈએ.

- ઉદાહરણ 1ની પરિસ્થિતિમાં અખિલા ચકડોળમાં કેટલી વાર બેઠી હતી અને કેટલી વાર હૂપલા રમત રમી હતી, તે દર્શાવે છે.

આકૃતિ 3.2 માં તમે નોંધ્યું છે કે, ભૌમિતિક રીતે આ પરિસ્થિતિ (4, 2) માં છેદતી બે રેખાઓ દર્શાવે છે. તેથી બિંદુ (4, 2) એ બંને સમીકરણો $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y = 20$ થી દર્શાવેલી રેખાઓ ઉપર છે અને આ જ એક માત્ર સામાન્ય બિંદુ છે.

આપણે બૈજિક રીત વડે $x = 4$ અને $y = 2$ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલો છે તેમ ચકાસીએ. દરેક સમીકરણમાં x અને y નાં મૂલ્યોને મૂકતાં, આપણને $4 - 2 \times 2 = 0$ અને $3(4) + 4(2) = 20$ મળે. તેથી આપણે $x = 4, y = 2$ એ બે સમીકરણોના ઉકેલ છે તેમ ચકાસ્યું. બંને રેખાઓનું એક માત્ર સામાન્ય બિંદુ (4, 2) છે. આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો એક અને માત્ર એક ઉકેલ છે.

આમ, અખિલા 4 વખત ચકડોળમાં બેસે છે અને 2 વખત હૂપલા રમત રમે છે.

ઉદાહરણ 2 ની પરિસ્થિતિમાં એક પેન્સિલની કિંમત અને એક રબરની કિંમત કેવી રીતે શોધી શકાય ?

આકૃતિ 3.3 માં પરિસ્થિતિનું ભૌમિતિક નિરૂપણ સંપાતી રેખાઓની જોડ દ્વારા દર્શાવ્યું છે. તે સમીકરણોના ઉકેલો આ રેખાઓનાં સામાન્ય બિંદુ છે.

શું આ રેખાઓ પર કોઈ સામાન્ય બિંદુઓ છે ? આલેખ પરથી આપણે અવલોકન કરીએ કે રેખા પરનું દરેક બિંદુ એ બંને સમીકરણોનો સામાન્ય ઉકેલ છે. તેથી સમીકરણો $2x + 3y = 9$ અને $4x + 6y = 18$ ના ઉકેલોની સંખ્યા અનંત છે. આપણને તે આશ્ચર્ય પમાડતું નથી, કારણ કે, સમીકરણ $4x + 6y = 18$ ને 2 વડે ભાગવાથી આપણને $2x + 3y = 9$ મળશે. તે સમીકરણ (1) જ છે. તેથી, બંને સમીકરણો સમકક્ષ છે. આલેખ પરથી રેખાના દરેક બિંદુ પરથી આપણને પેન્સિલ અને રબરની કિંમત મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિંમત અનુક્રમે ₹ 3 અને ₹ 1 છે તેમ કહી શકાય. અથવા એક પેન્સિલની કિંમત ₹ 3.75 અને એક રબરની કિંમત ₹ 0.50 અને આમ $2x + 3y = 9$ નું સમાધાન કરતાં અસંખ્ય x અને y મળે.

ઉદાહરણ 3 ની પરિસ્થિતિમાં શું તે રેલવેના પાટા એકબીજાને છેદી શકે છે ?

આકૃતિ 3.4 માં, બે સમાંતર રેખાઓ ભૌમિતિક રીતે રજૂ કરવામાં આવેલી છે. રેખાઓ એકબીજીને છેદતી નથી. તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી. આનો અર્થ એ પણ થાય છે કે, બે સમીકરણોને સામાન્ય ઉકેલ નથી.

જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ ન હોય તેવું સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી તેમ કહેવાય. જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ હોય તેવું સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય. જે દ્વિચલ સુરેખ

સમીકરણયુગ્મનાં બંને સમીકરણો સમાન હોય તેને અનંત ભિન્ન ઉકેલો હોય. આવા સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી સમીકરણો છે તેમ કહેવાય. સ્પષ્ટ છે કે જે સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી હોય તે સમીકરણો સુસંગત હોય છે જ.

સારાંશમાં આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રેખાઓનું નિરૂપણ અને ઉકેલના અસ્તિત્વ વિશે નીચે પ્રમાણે કહી શકીએ :

(i) રેખાઓ એક જ બિંદુમાં છેદી શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોની જોડીને એક (અનન્ય) ઉકેલ છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ)

(ii) રેખાઓ સમાંતર હોઈ શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને કોઈ ઉકેલ નથી. (સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.)

(iii) રેખાઓ સંપાતી છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને અનંત ઉકેલો છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ, અવલંબી સમીકરણો)

ચાલો આપણે ઉદાહરણ 1, 2 અને 3 તરફ પાછા વળીએ અને ભૌમિતિક રીતે સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કેવું રેખાયુગ્મ દર્શાવે છે તે નોંધીએ.

(i) $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y - 20 = 0$ **(રેખાઓ છેદે છે.)**

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ અને $4x + 6y - 18 = 0$ **(રેખાઓ સંપાતી છે.)**

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ **(રેખાઓ સમાંતર છે.)**

હવે આપણે ત્રણે ઉદાહરણની $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમતો લખીએ અને તમામને સરખાવીએ.

અહીંયા a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 એ વિભાગ 3.2 માં આવેલા પ્રમાણિત સ્વરૂપનાં સમીકરણોના સહગુણકો છે.

કોષ્ટક 3.4

ક્રમ નં.	રેખાઓની જોડ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	ગુણોત્તરોની સરખામણી	આલેખાત્મક સ્વરૂપ	બૈજિક સ્વરૂપ
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	છેદતી રેખાઓ	માત્ર એક ઉકેલ (અનન્ય)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	સંપાતી રેખાઓ	અનંત ઉકેલો
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ એટલે કે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અને $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$	સમાંતર રેખાઓ	ઉકેલ નથી.

ઉપરના કોષ્ટકમાંથી, તમે જોઈ શકો છો કે જો સમીકરણો

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ***દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ***

(i) છેદતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) **સંપાતી રેખાઓ હોય, તો** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) **સમાંતર હોય, તો** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

વાસ્તવમાં કોઈ પણ રેખાઓની જોડ માટે તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તમે તમારી જાતે પણ કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરી ઉપરની ચકાસણી કરી શકો છો.

આપણે હવે વધુ ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 4 : સમીકરણયુગ્મ

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

સુસંગત છે કે નહિ તે ચકાસો. જો સુસંગત હોય તો આલેખની મદદથી ઉકેલો.

ઉકેલ : સમીકરણો (1) અને (2) ના આલેખ દોરીએ. આ માટે આપણે દરેક સમીકરણના બબ્બે ઉકેલ શોધીશું. (કોષ્ટક 3.5માં દર્શાવેલ)

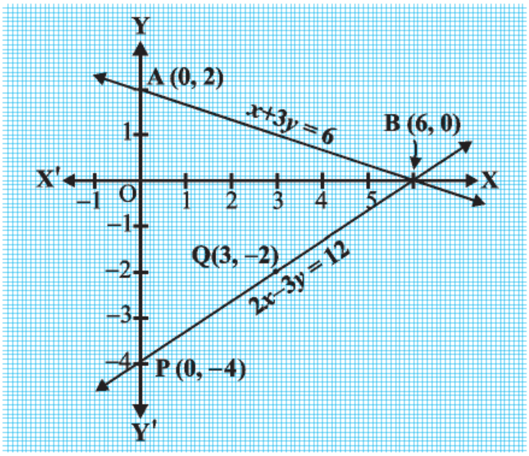
કોષ્ટક 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	–4	–2

આલેખપત્ર ઉપર બિંદુઓ A(0, 2), B(6, 0), P(0, –4) અને Q (3, –2) દર્શાવો. આકૃતિ 3.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને જોડતી રેખાઓ AB અને PQ દોરો.

આપણે નોંધીએ કે, બિંદુ B(6, 0) એ બંને રેખાઓ AB અને PQ ઉપરનું સામાન્ય બિંદુ છે. તેથી, સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ $x = 6$ અને $y = 0$ છે. આથી, આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.



આકૃતિ 3.5

ઉદાહરણ 5 : આલેખની રીતથી નીચેના સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ નથી, અનન્ય ઉકેલ છે અથવા અનંત ઉકેલો છે તે નક્કી કરો.

$$5x - 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \quad (2)$$

ઉકેલ : સમીકરણ (2) ને $\frac{5}{3}$ વડે ગુણતાં, આપણને

$5x - 8y + 1 = 0$ મળશે.

તે, સમીકરણ (1) ને સમાન છે. સમીકરણો (1) અને (2) દર્શાવતી રેખાઓ સંપાતી છે તેમ તેમનું નિરૂપણ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે.

આલેખ પર કેટલાંક બિંદુઓ દર્શાવો અને જાતે ચકાસો.

ઉદાહરણ 6 : ચંપા 'સેલ' માં કેટલાંક પેન્ટ અને સ્કર્ટ ખરીદવા ગઈ હતી. જ્યારે તેને તેના મિત્રોએ પૂછ્યું કે, તેણે દરેકની કેટલી સંખ્યાની ખરીદી કરી હતી, ત્યારે તેણે જવાબ આપ્યો, ''પેન્ટની સંખ્યાના બે ગણામાંથી બે ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યાં. પણ પેન્ટની સંખ્યાના ચાર ગણામાંથી ચાર ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યા.'' ચંપાએ કેટલી સંખ્યામાં પેન્ટ અને કેટલી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યાં તે શોધવા તેના મિત્રોને મદદ કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, ચંપાએ x પેન્ટ તથા y સ્કર્ટ ખરીદ્યા છે. આથી આપેલ માહિતી પરથી સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે :

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

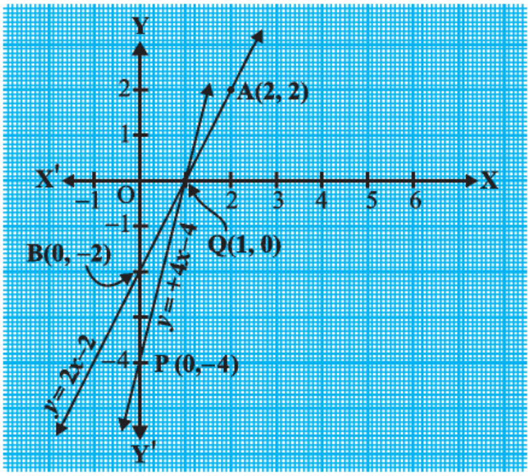
અને $$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ના બે-બે ઉકેલોની મદદથી આલેખપત્ર પર આલેખ દોરો. કોષ્ટક 3.6 માં તેમના ઉકેલો આપેલા છે.

કોષ્ટક 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0



આકૃતિ 3.6

આકૃતિ 3.6 માં A(2, 2) તથા B(0, –2) માંથી પસાર થતી રેખા AB તથા P(0, –4) અને Q(1, 0) માંથી પસાર થતી રેખા PQ દોરો. સમીકરણોના ઉકેલ સમાવતાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાઓ દર્શાવો. તે બે રેખાઓ બિંદુ (1, 0) આગળ છેદે છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 0$ એ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ થશે. એટલે કે તે 1 પેન્ટ ખરીદે છે અને સ્કર્ટ ખરીદતી નથી.

ચકાસો : તમારો જવાબ આપેલા કૂટપ્રશ્નોની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેની સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમનો ઉકેલ આલેખની રીતે શોધો.

   (i) ધોરણ X ના દસ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતના કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લે છે. જો ભાગ લેનાર છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓની સંખ્યા કરતાં 4 વધારે હોય, તો કેટલાં છોકરાઓએ અને કેટલી છોકરીઓએ કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લીધો હશે તે શોધો.

   (ii) 5 પેન્સિલ અને 7 પેનની કુલ કિંમત ₹ 50 છે અને તે જ કિંમતવાળી 7 પેન્સિલ તથા 5 પેનની કુલ કિંમત ₹ 46 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક પેનની કિંમત શોધો.

2. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મથી બનતી રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે છે કે સમાંતર છે અથવા સંપાતી છે, તેમ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ગુણોત્તરોની તુલના કરીને નક્કી કરો :

   (i) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x + 6y - 9 = 0$

   (ii) $9x + 3y + 12 = 0$, $18x + 6y + 24 = 0$

   (iii) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે ગુણોત્તર $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમત પરથી નક્કી કરો :

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. નીચેના પૈકી કયું સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે જણાવો. જો તે સુસંગત હોય, તો ભૌમિતિક રીતે ઉકેલ શોધો :

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. એક લંબચોરસ બગીચાની અર્ધપરિમિતિ 36 મીટર છે તથા તેની લંબાઈ એ તેની પહોળાઈ કરતાં 4 મીટર વધુ છે, તો બગીચાની બાજુઓનાં માપ શોધો.

6. સુરેખ સમીકરણ $2x + 3y - 8 = 0$ આપેલ છે. એવું બીજું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો કે જેથી બનતી જોડીનું ભૌમિતિક નિરૂપણ નીચે પ્રમાણે હોય :

(i) છેદતી રેખાઓ (ii) સમાંતર રેખાઓ (iii) સંપાતી રેખાઓ

7. સમીકરણો $x - y + 1 = 0$ અને $3x + 2y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને x-અક્ષ દ્વારા રચાયેલા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ દર્શાવો અને બનતા ત્રિકોણાકાર પ્રદેશને છાયાંકિત કરો.

3.4 સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવાની બૈજિક રીત

આગળના વિભાગમાં આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આલેખની રીત વિશે ચર્ચા કરી ગયાં. આલેખ પર $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ જેવાં પૂર્ણાંક ન હોય તેવા યામ ધરાવતાં બિંદુઓ આવતાં હોય ત્યારે આ રીત અનુકૂળ નથી. આવાં બિંદુઓ (આલેખપત્ર પર) આલેખવામાં ભૂલ થવાની શક્યતાઓ રહે છે. શું આવા યુગ્મનો ઉકેલ શોધવાની મુશ્કેલી દૂર કરવા બીજી કોઈ અન્ય રીતો છે ? આના માટે ઘણી બૈજિક રીતો છે. હવે આપણે, કેટલીક બૈજિક રીતો દ્વારા ઉકેલ શોધવાની ચર્ચા કરીશું.

Z8G1E6

3.4.1 આદેશની રીત : કેટલાંક ઉદાહરણોની મદદથી આપણે આદેશની રીતની ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 7 : આદેશની રીતનો ઉપયોગ કરી, નીચે આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવો :

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$
$$x + 2y = 3 \quad (2)$$

ઉકેલ :

સોપાન 1 : આ રીતમાં કોઈ પણ એક સમીકરણમાંથી એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવવામાં આવે છે.

ધારો કે સમીકરણ (2) લઈએ.

$x + 2y = 3$ ને

$x = 3 - 2y$ તરીકે લો. (3)

સોપાન 2 : સમીકરણ (1) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$
$$\therefore 21 - 14y - 15y = 2$$
$$\therefore -29y = -19$$
$$\therefore y = \frac{19}{29}$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (3) માં y ની કિંમત મૂકતાં,

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

$\therefore$ ઉકેલ $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$ મળે.

ચકાસણી : તમે બંને સમીકરણોમાં $x = \frac{49}{29}$ અને $y = \frac{19}{29}$ મૂકશો તો જણાશે કે બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

આદેશની રીતને વધુ સ્પષ્ટ રીતે સમજવા માટે નીચેનાં સોપાનો દ્વારા તેનો વિચાર કરીએ.

સોપાન 1 : અનુકૂળ હોય તે રીતે એક સમીકરણ પરથી એક ચલ, ઉદાહરણ તરીકે, y ને બીજા ચલ x ના સ્વરૂપમાં મેળવો.

સોપાન 2 : આ સિવાયના સમીકરણમાં y ની કિંમત મૂકતાં, સમીકરણ એક ચલ x ના સ્વરૂપમાં મળશે અને આપણે તેને ઉકેલી શકીશું.

કેટલીક વખત ઉદાહરણ 9 અને ઉદાહરણ 10 ની જેમ તમે ચલ વિનાનું વિધાન મેળવો તે શક્ય છે. જો આ વિધાન સત્ય હોય તો તમે અનુમાન કરી શકો કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો છે. જો આ વિધાન અસત્ય હોય તો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

સોપાન 3 : સોપાન 1 ની મદદથી બીજા ચલ x ની કિંમતને સોપાન 2 ના સમીકરણમાં મૂકતાં ચલ y (અથવા x) ની કિંમત મળશે.

નોંધ : ***આપણે એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવીને સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવીએ છીએ. તેથી ઉકેલ મેળવવાની આ રીત આદેશની રીત તરીકે ઓળખાય છે.***

ઉદાહરણ 8 : સ્વાધ્યાય 3.1નો પ્રશ્ન નંબર 1 આદેશની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે આફતાબ અને તેની પુત્રીની વર્તમાન ઉંમર (વર્ષમાં) અનુક્રમે s અને t છે. આપેલ માહિતી પરથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને આ પરિસ્થિતિમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$s - 7 = 7(t - 7)$, એટલે કે $s - 7t + 42 = 0$ (1) અને

$s + 3 = 3(t + 3)$, એટલે કે $s - 3t = 6$ (2)

સમીકરણ (2)નો ઉપયોગ કરતાં, $s = 3t + 6$ મળે છે. s ની આ કિંમત સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$$
$$\therefore 4t = 48$$

તેથી $t = 12$.

સમીકરણ (2)માં t ની કિંમત મૂકતાં, આપણને

$s = 3(12) + 6 = 42$ મળે.

તેથી, આફતાબ અને તેની પુત્રીની ઉંમર અનુક્રમે 42 વર્ષ અને 12 વર્ષ છે.

આ સમસ્યા માટે આ ઉકેલ સમીકરણોમાં મૂકી સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તેમ ચકાસી શકાય છે.

ઉદાહરણ 9 : વિભાગ 3.3 માંથી ઉદાહરણ 2 પરથી, 2 પેન્સિલો અને 3 રબરની કિંમત ₹ 9 છે અને 4 પેન્સિલોની અને 6 રબરની કિંમત ₹ 18 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$
$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

આપણે પ્રથમ ચલ x ની કિંમત y ના સ્વરૂપમાં દર્શાવતાં,

સમીકરણ $2x + 3y = 9$ માંથી $x = \frac{9-3y}{2}$ મળે છે. (3)

સમીકરણ (2) માં, x ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{4(9-3y)}{2} + 6y = 18$$
$$\therefore\ 18 - 6y + 6y = 18$$
$$\therefore\ 18 = 18$$

આ વિધાન y ની તમામ કિંમતો માટે સત્ય છે. આપણને y ની કોઈ નિશ્ચિત કિંમત ઉકેલ સ્વરૂપે મળતી નથી. તેથી આપણને x ની નિશ્ચિત કિંમત પણ મળતી નથી. આ પરિસ્થિતિ ઊભી થાય છે, કારણ કે બંને સમીકરણો સમાન છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે. આપણે નોંધીએ કે આલેખની રીતે પણ સમાન ઉકેલો મળે છે. (વિભાગ 3.2માં આકૃતિ 3.3 અનુસાર) આપણે એક પેન્સિલ અને એક રબરની અનન્ય કિંમત શોધી શકતા નથી, કારણ આ પરિસ્થિતિમાં તેને ઘણા સમાન ઉકેલો મળે છે.

ઉદાહરણ 10 : વિભાગ 3.2 ના ઉદાહરણ 3 નો વિચાર કરીએ. શું રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદશે ?

ઉકેલ : દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$
$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી x ને y ના સ્વરૂપમાં સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$x = 4 - 2y$$

હવે, સમીકરણ (2) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$
$$\therefore\ 8 - 12 = 0$$
$$\therefore\ -4 = 0$$

આ વિધાન અસત્ય છે.

તેથી સમીકરણોને એક પણ સામાન્ય ઉકેલ નથી, તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. નીચેના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

(i) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$ (iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$

$9x - 3y = 9$ $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$ (vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$

$\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$ $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ અને $2x - 4y = -24$ નો ઉકેલ શોધો અને એવો 'm' શોધો કે જેથી $y = mx + 3$ થાય.

3. નીચેની સમસ્યા ઉપરથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને તેમનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

(i) બે સંખ્યાનો તફાવત 26 છે અને એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી ત્રણ ગણી છે, તો તે બે સંખ્યા શોધો.

(ii) બે પૂરકકોણો પૈકી મોટો ખૂણો નાના ખૂણા કરતાં $18°$ મોટો હોય, તો તે પૂરકકોણો શોધો.

(iii) ક્રિકેટ ટીમના કોચે 7 બૅટ અને 6 દડાઓ ₹ 3800માં ખરીદ્યા. પછીથી તેણે તે જ કિંમતવાળા 3 બૅટ અને 5 દડાઓ ₹ 1750 માં ખરીદ્યાં. તો એક બૅટની કિંમત અને એક દડાની કિંમત શોધો.

(iv) એક શહેરમાં ટૅક્સીનું ભાડું નિશ્ચિત ભાડા અને અંતરના પ્રમાણમાં સંયુક્ત રીતે લેવાય છે. 10 કિમીના અંતર માટે ₹ 105 અને 15 કિમીની મુસાફરી માટે ₹ 155 ની ચુકવણી કરવી પડે છે. તો નિશ્ચિત ભાડું કેટલું અને પ્રતિ કિમી કેટલા દરે કિંમત ચૂકવી પડે ? મુસાફરે 25 કિમીની મુસાફરી માટે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડશે ?

(v) એક અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 2 ઉમેરતાં તે $\frac{9}{11}$ બને છે. જો અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 3 ઉમેરતાં તે $\frac{5}{6}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(vi) પાંચ વર્ષ પછી જેકબની ઉંમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉંમર (વર્ષમાં) કરતાં ત્રણ ગણી હશે. પાંચ વર્ષ પહેલાં, જેકબની ઉંમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉંમરથી સાત ગણી હોય, તો તેમની વર્તમાન ઉંમર શોધો ?

3.4.2 લોપની રીત :

G9Z1C7

હવે, આપણે એક અન્ય રીતમાં એક ચલનો લોપ (દૂર કરીને) કરવાની રીતનો વિચાર કરીશું. આ રીત આદેશની રીત કરતાં કેટલીક વાર વધારે અનુકૂળ રીત પડે છે. આપણે આ રીત કેવી રીતે કામ કરે છે તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 11 : બે વ્યક્તિની માસિક આવકનો ગુણોત્તર 9:7 છે અને તેમના માસિક ખર્ચનો ગુણોત્તર 4:3 છે. જો દરેક વ્યક્તિ માસિક ₹ 2000 ની બચત કરે, તો તેમની માસિક આવક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે વ્યક્તિની આવક અનુક્રમે ₹ $9x$ અને ₹ $7x$ છે અને તેમનો ખર્ચ અનુક્રમે ₹ $4y$ અને ₹ $3y$ છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવતાં સમીકરણો આ પ્રમાણે છે :

$$9x - 4y = 2000 \qquad (1)$$

અને $$7x - 3y = 2000 \qquad (2)$$

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને 3 વડે ગુણતાં અને સમીકરણ (2) ને 4 વડે ગુણતાં y ના સહગુણકો સમાન બનશે.

આપણને સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$27x - 12y = 6000 \qquad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \qquad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (4) માંથી સમીકરણ (3) બાદ કરતાં, y નો લોપ થશે, કારણ કે y ના સહગુણકો સરખા છે.

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

$$\therefore x = 2000$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (1) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$9(2000) - 4y = 2000$$

$$\therefore y = 4000$$

તેથી, સમીકરણોના ઉકેલ $x = 2000$, $y = 4000$ છે તેથી બંને વ્યક્તિઓની માસિક આવક અનુક્રમે ₹ 18,000 અને ₹ 14,000 છે.

ચકાસણી : 18000 : 14000 = 9 : 7

અને તેમના ખર્ચનો ગુણોત્તર = (18000 – 2000) : (14000 – 2000) = 16000 : 12000 = 4 : 3 મળશે.

નોંધ :

1. ***ઉપરના ઉદાહરણમાં ઉકેલ મેળવવા માટે વપરાયેલ પદ્ધતિને 'લોપની રીત' કહેવામાં આવે છે, કારણ કે આપણે પ્રથમ એક ચલનો લોપ કરીને એક ચલનું સુરેખ સમીકરણ મેળવીએ છીએ. ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે y નો લોપ કર્યો હતો. આપણે x નો લોપ પણ કરી શકીએ.***
   તે રીતનો પ્રયત્ન જાતે કરો.
2. ***તમે આ સમસ્યાનો ઉકેલ શોધવા આદેશની રીત અથવા આલેખની રીતનો પણ ઉપયોગ કરી શક્યા હોત.***

   આમ કરતા જ રહો અને જુઓ કે કઈ રીત વધુ સાનુકૂળ છે.

આપણે લોપની રીતનાં સોપાનોને નીચે પ્રમાણે નોંધીશું :

સોપાન 1 : સૌપ્રથમ બંને સમીકરણોને કોઈ યોગ્ય શૂન્યેતર અચળ સંખ્યાઓ વડે ગુણવાથી (x અથવા y પૈકી કોઈ એકના સહગુણક) એક ચલના સહગુણકો સમાન થાય.

સોપાન 2 : ત્યાર બાદ એક સમીકરણમાં બીજું સમીકરણ ઉમેરો અથવા એક સમીકરણમાંથી બીજું સમીકરણ બાદ કરતાં એક ચલનો લોપ થશે. જો તમને એક ચલનું સમીકરણ મળે તો સોપાન 3 પર જાઓ.

સોપાન 2 માં, આપણને ચલ ન હોય તેવું સત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળશે.

સોપાન 2 માં, આપણને ચલ ન હોય તેવું અસત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. એટલે કે તે સુસંગત નથી.

સોપાન 3 : એક ચલ સુરેખ સમીકરણ ઉકેલતાં આપણને (x અથવા y) કોઈ એક ચલની કિંમત મળે.

સોપાન 4 : મૂળ સમીકરણ પૈકીના કોઈ એક સમીકરણમાં x (અથવા y)ની કિંમત મૂકતાં આપણને બીજા ચલની કિંમત મળે છે.

હવે, તે સમજવા માટે આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો ઉકેલીશું.

ઉદાહરણ 12 : નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મના શક્ય ઉકેલો લોપની રીતનો ઉપયોગ કરી શોધો :

$$2x + 3y = 8 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \qquad (2)$$

ઉકેલ :

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને 2 વડે અને સમીકરણ (2) ને 1 વડે ગુણતાં x ના સહગુણકો સમાન મળશે. આપણને સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે.

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$$\therefore (4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

$\therefore 0 = 9$. આ અસત્ય વિધાન છે.

તેથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી.

ઉદાહરણ 13 : બે અંકોની એક સંખ્યા અને તે સંખ્યાના અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યાનો સરવાળો 66 છે. જો તે સંખ્યાના અંકોનો તફાવત 2 હોય, તો તે સંખ્યા શોધો. આવી કેટલી સંખ્યાઓ છે ?

ઉકેલ : ધારો કે બે અંકોની પ્રથમ સંખ્યાના દશકનો અંક અને એકમનો અંક અનુક્રમે x અને y છે.

તેથી પ્રથમ સંખ્યા દશાંશ રૂપમાં $10x + y$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે $56 = 10(5) + 6$)

જ્યારે અંકોની અદલાબદલી કરતાં x એ એકમનો અંક અને y દશકનો અંક બનશે. આ સંખ્યાનું દશાંશ સ્વરૂપ $10y + x$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે 56 ના અંકોની અદલાબદલી પછીનું સ્વરૂપ $65 = 10(6) + 5$)

આપેલ શરત અનુસાર,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

$$\therefore 11(x + y) = 66$$

$$\therefore x + y = 6 \quad (1)$$

આપણને આપેલ છે કે તે સંખ્યાના બે અંકોનો તફાવત 2 છે.

$$\therefore \quad x - y = 2 \quad (2)$$

$$\text{અથવા } y - x = 2 \quad (3)$$

જો $x - y = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (2) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 4$ અને $y = 2$ મળે. આ સ્થિતિમાં આપણને માંગેલ સંખ્યા 42 મળે.

જો $y - x = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (3) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 2$ અને $y = 4$ મળે.

આ સ્થિતિમાં, આપણને માંગેલ સંખ્યા 24 મળે.

આમ, આપણને બે સંખ્યાઓ 42 અને 24 માંગ્યા પ્રમાણે મળે છે.

ચકાસણી : અહીં $42 + 24 = 66$ અને $4 - 2 = 2$ તથા $24 + 42 = 66$ અને $4 - 2 = 2$ મળે છે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ લોપની રીતે અને આદેશની રીતે શોધો :

   (i) $x + y = 5$ અને $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ અને $2x - 2y = 2$

   (iii) $3x - 5y - 4 = 0$ અને $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ અને $x - \frac{y}{3} = 3$

2. આપેલી સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમના ઉકેલો (જો શક્ય હોય તો) લોપની રીતે શોધો :

(i) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાં 1 ઉમેરતાં અને છેદમાંથી 1 બાદ કરતાં અપૂર્ણાંક કિંમત અતિસંક્ષિપ્તરૂપમાં 1 બને છે. જો માત્ર છેદમાં 1 ઉમેરતાં અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{2}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(ii) પાંચ વર્ષ પહેલાં, નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી ત્રણ ગણી હતી. દસ વર્ષ પછી નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી બે ગણી થશે, તો નૂરી અને સોનુની વર્તમાન ઉંમર કેટલી થશે ?

(iii) બે અંકોની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. વળી સંખ્યાના નવ ગણા કરતાં મળતી સંખ્યા એ અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યા કરતાં બે ગણી છે, તો તે સંખ્યા શોધો.

(iv) મીના ₹ 2000 ઉપાડવા બૅન્કમાં ગઈ હતી. તેણે કૅશિયરને કહ્યું હતું કે મને માત્ર ₹ 50 અને ₹ 100 ની નોટો જ જોઈએ છે. મીનાને કુલ 25 નોટો મળી હતી. તો તેણે ₹ 50 અને ₹ 100 ની પ્રત્યેકની કેટલી કેટલી નોટો મેળવી હશે ?

(v) એક પ્રતિષ્ઠિત પુસ્તકાલય પ્રથમ ત્રણ દિવસનું એક પુસ્તકનું નિશ્ચિત ભાડું લે છે અને પછીના પ્રત્યેક દિવસ દીઠ અતિરિક્ત ભાડું લે છે. સરિતા સાત દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 27 ચૂકવે છે. સુસી પાંચ દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 21 ચૂકવે છે, તો નિશ્ચિત ભાડું અને પ્રત્યેક વધારાના દિવસનું ભાડું શોધો.

3.4.3 ચોકડી ગુણાકારની રીત :

અત્યાર સુધી તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આલેખની રીતે, આદેશની રીતે અને લોપની રીતે કેવી રીતે મેળવવો તે શીખ્યાં.

B3H2T8

હવે આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની એક વધુ બૈજિક રીતનો પરિચય મેળવીશું. ઘણા બધાં કારણોસર સમીકરણોના ઉકેલ માટે આ રીત ઉપયોગી છે. આગળ વધતાં પહેલાં આપણે નીચેની પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

જો 5 નારંગી અને 3 સફરજનની કિંમત ₹ 35 અને 2 નારંગી અને 4 સફરજનની કિંમત ₹ 28 હોય, તો આપણે એક નારંગી અને એક સફરજનની કિંમત શોધીએ.

ધારો કે એક નારંગીની કિંમત ₹ x અને એક સફરજનની કિંમત ₹ y છે. તેથી આપણને આ પ્રમાણે સમીકરણ મળે.

$$5x + 3y = 35,\text{ એટલે કે } 5x + 3y - 35 = 0 \tag{1}$$

$$2x + 4y = 28,\text{ એટલે કે } 2x + 4y - 28 = 0 \tag{2}$$

આપણે, આ સમીકરણોનો ઉકેલ લોપની રીતથી મેળવીએ.

સમીકરણ (1) ને 4 વડે ગુણો અને સમીકરણ (2) ને 3 વડે ગુણો,

જેથી, $$(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \tag{3}$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \tag{4}$$

સમીકરણ (3)માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં

$$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$$

$$\therefore\ x = \frac{-[(4)(-35) - 3(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$$

$$\therefore\ x = \frac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)} \tag{5}$$

જો સમીકરણ (1) અને (2)ને $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, વડે દર્શાવીએ તો, આપણને $a_1 = 5$, $b_1 = 3$, $c_1 = -35$, $a_2 = 2$, $b_2 = 4$, $c_2 = -28$ મળે. તેથી,

સમીકરણ (5) ને $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ તરીકે લખી શકાય.

તે જ રીતે, તમને $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ મળી શકે.

સમીકરણ (5) નું સાદું રૂપ આપતાં, આપણને

$$x = \frac{-84+140}{20-6} = 4$$

તે જ રીતે, $y = \frac{(-35)(2)-(5)(-28)}{20-6} = \frac{-70+140}{14} = 5$

તેથી $x = 4$, $y = 5$ એ આપેલ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ છે.

તેથી એક નારંગીની કિંમત ₹ 4 અને એક સફરજનની કિંમત ₹ 5 છે.

ચકાસણી : 5 નારંગીની કિંમત + 3 સફરજનની કિંમત = ₹ 20 + ₹ 15 = ₹ 35.

2 નારંગીની કિંમત + 4 સફરજનની કિંમત = ₹ 8 + ₹ 20 = ₹ 28.

ચાલો આપણે જોઈએ કે આ પદ્ધતિ કોઈ પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ માટે કેવી રીતે ઉપયોગી છે.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

ઉપરનાં સમીકરણોમાંથી x અને y ની કિંમત મેળવવા માટે આપણે નીચે પ્રમાણેનાં સોપાનોને અનુસરીશું :

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને b_2 વડે અને સમીકરણ (2) ને b_1 વડે ગુણતાં,

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \qquad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2\,y + b_1c_2 = 0 \text{ મળે.} \qquad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં, આપણને,

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x + (b_2b_1 - b_1b_2)\,y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

$$\therefore\ (b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$\text{તેથી, } x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \text{જ્યાં,} \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \qquad (5)$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (1) અથવા (2) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$\text{આપણને, } y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ મળશે.} \qquad (6)$$

હવે, આપણને બે વિકલ્પો મળશે.

વિકલ્પ 1 : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. આ પરિસ્થિતિમાં, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,

તેથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળે.

વિકલ્પ 2 : જો $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, તો આપણે $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ લખીએ, તો

$a_1 = k\,a_2$, $b_1 = k\,b_2$ થશે.

સમીકરણ (1) માં a_1 અને b_1 ની કિંમતો મૂકતાં, આપણને

$k\,(a_2x + b_2y) + c_1 = 0$ મળશે. (7)

સમીકરણ (7) અને (2) બંને સમીકરણોનું સમાધાન માત્ર $c_1 = kc_2$, એટલે કે $\frac{c_1}{c_2} = k$ માટે થાય છે તેમ અવલોકન કરી શકાય.

જો $c_1 = kc_2$, તો સમીકરણ (2) નો કોઈ પણ ઉકેલ સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરશે અને તેથી ઊલટું પણ શક્ય છે.

તેથી, જો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ તો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ યુગ્મ (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે.

જો $c_1 \neq kc_2$, તો સમીકરણ (2) માટેનો કોઈ પણ ઉકેલ સમીકરણ (1) નું સમાધાન નહિ કરે અને તેથી ઊલટું પણ શક્ય છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ (1) અને (2) ની ઉપર્યુક્ત ચર્ચાને સંક્ષિપ્તમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

(i) જ્યારે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ત્યારે આપણને અનન્ય ઉકેલ મળે છે.

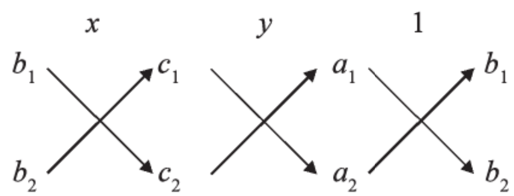
(ii) જ્યારે, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ત્યારે અનંત ઉકેલો મળે છે.

(iii) જ્યારે, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અને $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ત્યારે ઉકેલ નથી.

સમીકરણ (5) અને (6) ના ઉકેલોને તમે નીચે પ્રમાણે પણ નોંધી શકો :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{8}$$

ઉપરના પરિણામ યાદ રાખવા નીચે પ્રમાણેની આકૃતિ તમને ઉપયોગી થશે :



બે સંખ્યાઓ વચ્ચેના તીર પરથી સંકેત મળે છે કે, તેમનો ગુણાકાર કરવાનો છે અને પ્રથમ ગુણાકારથી પ્રાપ્ત સંખ્યામાંથી બીજા ગુણાકારથી પ્રાપ્ત સંખ્યા બાદ કરવાની છે.

આ પદ્ધતિથી સુરેખ સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આપણે આગળ પ્રમાણેનાં સોપાનોને અનુસરીશું.

સોપાન 1 : આપેલાં સમીકરણોને (1) અને (2) સ્વરૂપમાં લખો.

સોપાન 2 : ઉપરની આકૃતિનો ઉપયોગ કરી (8) માં બતાવ્યા પ્રમાણે સમીકરણો લખો.

સોપાન 3 : જો $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, તો x અને y શોધો.

સોપાન 2 પરથી આપણે કહી શકીએ કે, આ પદ્ધતિને શા માટે **ચોકડી ગુણાકારની રીત** કહેવામાં આવે છે.

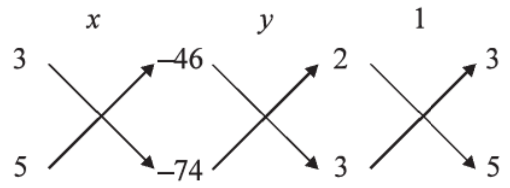
ઉદાહરણ 14 : જો આપણે બૅંગ્લોરના એક બસ સ્ટૅન્ડથી મલ્લેશ્વરમ્‌ની 2 ટિકિટ અને યશવંતપુરની 3 ટીકીટો ₹ 46 માં ખરીદી શકીએ. પરંતુ જો આપણે મલ્લેશ્વરમની 3 ટિકિટો અને યશવંતપુરની 5 ટિકિટો ₹ 74 માં મળે તો, બસ સ્ટૅન્ડથી મલ્લેશ્વરમ્ અને યશવંતપુરનું ભાડું શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બૅંગ્લોરથી મલ્લેશ્વરમ્ સુધીનું ભાડું ₹ x છે અને યશવંતપુરનું ભાડું ₹ y છે. આપેલી માહિતી અનુસાર આપણને નીચે પ્રમાણે સમીકરણો મળશે :

$2x + 3y = 46$, તેથી, $2x + 3y - 46 = 0$ (1)

$3x + 5y = 74$, તેથી, $3x + 5y - 74 = 0$ (2)

ચોકડી ગુણાકારની રીતથી સમીકરણના ઉકેલો મેળવવા આપણે નીચે પ્રમાણે આકૃતિ દોરીએ :



તેથી, $\dfrac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \dfrac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \dfrac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$

$$\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$$

$$\therefore \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

$\therefore \dfrac{x}{8} = 1$ અને $\dfrac{y}{10} = 1$

$\therefore x = 8$ અને $y = 10$

તેથી, બૅંગ્લોરથી મલ્લેશ્વરમ્‌નું ભાડું ₹ 8 અને બૅંગ્લોરથી યશવંતપુરનું ભાડું ₹ 10 છે.

ચકાસણી : તમે ચકાસી શકો છો કે, આપણે શોધેલો સમસ્યાનો ઉકેલ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 15 : p ની કઈ કિંમતથી નીચે આપેલ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ અનન્ય મળે ?

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

ઉકેલ : અહીં, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$

હવે, સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે. માટે $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ આવશ્યક છે.

$$\therefore \frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

$$\therefore p \neq 4$$

તેથી, 4 સિવાયની p ની તમામ કિંમત માટે સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળશે.

ઉદાહરણ 16 : k ની કઈ કિંમત માટે નીચે આપેલા સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળે?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$
$$12x + ky - k = 0$$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$

સુરેખ સમીકરણ યુગ્મને અનંત ઉકેલ હોવા માટે : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

આથી $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$.

આમ $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$ થવું જોઈએ.

$k^2 = 36$ મળે છે.

એટલે કે, $k = \pm 6$

$\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$ પણ આવશ્યક છે.

આપણને $3k = k^2 - 3k$, આવશ્યક છે.

એટલે કે, $6k = k^2$. તેનો અર્થ થાય છે કે $k = 0$ અથવા $k = 6$.

તેથી, $k = 6$ માટે સમીકરણયુગ્મના અનંત ઉકેલો માટેની બંને શરતોનું સમાધાન થાય છે. $k = 6$ માટે સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ છે.

સ્વાધ્યાય 3.5

1. નીચેનાં પૈકી કયાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે, ઉકેલ નથી અથવા અનંત ઉકેલ છે તે જણાવો. જો અનન્ય ઉકેલ હોય તો ચોકડી ગુણાકારની રીતે તેનો ઉકેલ શોધો :

(i) $x - 3y - 3 = 0$
$3x - 9y - 2 = 0$

(ii) $2x + y = 5$
$3x + 2y = 8$

(iii) $3x - 5y = 20$
$6x - 10y = 40$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$
$3x - 3y - 15 = 0$

2. (i) નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને a અને b ની કઈ કિંમતો માટે અનંત ઉકેલો છે?

$$2x + 3y = 7$$
$$(a - b)x + (a + b)y = 3a + b - 2$$

(ii) નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને k ની કઈ કિંમત માટે ઉકેલ ન મળે?

$$3x + y = 1$$
$$(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે અને ચોકડી ગુણાકારની રીતે શોધો :

$$8x + 5y = 9$$
$$3x + 2y = 4$$

4. નીચેના કૂટપ્રશ્નોમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને કોઈ પણ બૈજિક રીતે તેમના ઉકેલ (જો શક્ય હોય તો) શોધો :

(i) એક હોસ્ટેલના વિદ્યાર્થીઓનું ભોજનખર્ચ અંશતઃ અચળ અને અંશતઃ વિદ્યાર્થીઓએ જેટલા દિવસ ભોજન લીધું હોય તે દિવસોની સંખ્યાના પ્રમાણમાં હોય છે. વિદ્યાર્થી A, 20 દિવસ ભોજન લે છે અને તેનું ભોજનખર્ચ ₹ 1000 ચૂકવે છે. વિદ્યાર્થી B, 26 દિવસ ભોજન લે છે અને ભોજનખર્ચ પેટે ₹ 1180 ચૂકવે છે, તો નિશ્ચિત દૈનિકખર્ચ તથા દૈનિક ભોજનખર્ચ શોધો.

(ii) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાંથી 1 બાદ કરવામાં આવે, તો નવા અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{3}$ છે અને તે જ અપૂર્ણાંકના છેદમાં 8 ઉમેરવામાં આવે, તો મળતા અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{4}$ થાય છે, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(iii) યશને એક કસોટીમાં 40 ગુણ મળ્યા હતા. તેને પ્રત્યેક સાચા જવાબના 3 ગુણ મળે છે અને પ્રત્યેક ખોટા જવાબ માટે 1 ગુણ કપાય છે. જો પરીક્ષકે દરેક સત્ય જવાબ માટે 4 ગુણ આપ્યા હોત અને દરેક ખોટા જવાબ માટે 2 ગુણ કાપ્યા હોત, તો યશે 50 ગુણ મેળવ્યા હોત, તો આ કસોટીમાં કેટલા પ્રશ્નો હતા ?

(iv) ધોરીમાર્ગ પર સ્થાન A અને સ્થાન B એકબીજાથી 100 કિમી દૂર છે. એક ગાડી A થી ઊપડે છે અને બીજી ગાડી B થી ઊપડે છે. ગાડીઓ એક જ દિશામાં ભિન્ન, અચળ ઝડપથી ચાલે તો 5 કલાકમાં એકબીજાને મળે છે. તેઓ એકબીજા તરફ ચાલે તો તે 1 કલાકમાં મળે છે, તો બે ગાડીઓની ઝડપ કેટલી હશે?

(v) જો એક લંબચોરસની લંબાઈમાં 5 એકમ ઘટાડો થાય અને પહોળાઈમાં 3 એકમ વધારો થાય, તો લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ 9 ચોરસ એકમ જેટલું ઘટે છે. જો આપણે લંબાઈમાં 3 એકમ અને પહોળાઈમાં 2 એકમ વધારીએ તો ક્ષેત્રફળ 67 ચોરસ એકમ વધે છે. તો લંબચોરસનાં પરિમાણ શોધો.

3.5 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી શકાય તેવાં સમીકરણો

H2K5B4

આ વિભાગમાં આપણે સુરેખ ન હોય પરંતુ યોગ્ય આદેશ વડે સુરેખ સમીકરણોમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય એવાં સમીકરણયુગ્મ જોઈશું. આ માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 17 : આપેલા સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ શોધો :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13,$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

ઉકેલ : આપણે સમીકરણયુગ્મને આ રીતે લખીએ,

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \quad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \quad (2)$$

આ સમીકરણો $ax + by + c = 0$ ના સ્વરૂપમાં નથી. હવે સમીકરણ (1) અને (2) માં,

$\frac{1}{x} = p$ અને $\frac{1}{y} = q$ આદેશ લેતાં,

$$2p + 3q = 13 \quad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \quad (4)$$

તેથી, આપણને સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સ્વરૂપ મળશે.

હવે, આપણે કોઈ પણ પદ્ધતિ દ્વારા આ સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીએ અને તેમ કરતાં $p = 2$, $q = 3$ મળશે.

તમે જાણો છો કે, $p = \frac{1}{x}$ અને $q = \frac{1}{y}$

p અને q ની કિંમત મૂકતાં,

$\frac{1}{x} = 2$ એટલે કે $x = \frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{y} = 3$ એટલે કે $y = \frac{1}{3}$

ચકાસણી : $x = \frac{1}{2}$ અને $y = \frac{1}{3}$ એ આપેલ સમીકરણોમાં મૂકતાં, બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

ઉદાહરણ 18 : નીચેના સમીકરણયુગ્મોને સુરેખ સમીકરણયુગ્મમાં રૂપાંતરિત કરીને ઉકેલો :

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{1}{x-1} = p$ અને $\frac{1}{y-2} = q$.

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \tag{1}$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \tag{2}$$

રૂપાંતરિત સમીકરણો
$$5p + q = 2 \tag{3}$$
$$6p - 3q = 1 \tag{4}$$

સમીકરણ (3) અને (4) સુરેખ સમીકરણયુગ્મના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે. હવે, તમે કોઈ પણ પદ્ધતિ દ્વારા આ સમીકરણો ઉકેલી શકો. ઉકેલતાં આપણને $p = \frac{1}{3}$ અને $q = \frac{1}{3}$ મળશે.

હવે p માટે $\frac{1}{x-1}$ મૂકતાં, $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$ મળે.

$\therefore x - 1 = 3$ એટલે કે $x = 4$

તે જ રીતે q માટે $\frac{1}{y-2}$ મૂકતાં, $\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$

$\therefore y - 2 = 3$ એટલે કે $y = 5$

$x = 4, y = 5$ એ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ છે.

ચકાસણી : સમીકરણ (1) અને (2) માં $x = 4$ અને $y = 5$ મૂકી જોતાં સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તે ચકાસી શકાય.

ઉદાહરણ 19 : એક હોડી નદીના સામા પ્રવાહે 30 કિમી અને પ્રવાહની દિશામાં 44 કિમી અંતર 10 કલાકમાં કાપે છે. તે હોડીને તે જ નદીમાં 40 કિમી સામા પ્રવાહે અને 55 કિમી પ્રવાહની દિશામાં કાપતાં 13 કલાક જેટલો સમય લાગે છે. નદીના પ્રવાહની અને હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ x કિમી/કલાક છે અને પ્રવાહની ઝડપ y કિમી/કલાક છે. તેથી પ્રવાહની દિશામાં હોડીની ઝડપ $(x + y)$ કિમી/કલાક થાય અને સામા પ્રવાહે હોડીની ઝડપ $(x - y)$ કિમી/કલાક થશે.

ઉપરાંત સમય $= \frac{\text{અંતર}}{\text{ઝડપ}}$

તેથી હોડી 30 કિમી પ્રવાહની સામેની દિશામાં જાય ત્યારે લાગતો સમય t_1 કલાકમાં લઈએ તો

$$t_1 = \frac{30}{x-y}$$

જો હોડી 44 કિમી પ્રવાહની દિશામાં જાય ત્યારે લાગતો સમય t_2 કલાકમાં લઈએ તો

$$t_2 = \frac{44}{x+y}$$

વળી, $t_1 + t_2 = 10$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \tag{1}$$

તે જ પ્રમાણે, 40 કિમી સામા પ્રવાહે અને 55 કિમી પ્રવાહની દિશામાં અંતર કાપતાં લાગતો સમય 13 કલાક છે.

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \tag{2}$$

(1) અને (2) માં $\frac{1}{x-y} = u$ અને $\frac{1}{x+y} = v$ લઈએ, (3)

સમીકરણ (1) અને (2)માં આ કિંમતો મૂકતાં આપણને સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મળશે.

$$30u + 44v = 10 \text{ અથવા } 30u + 44v - 10 = 0 \tag{4}$$

$$40u + 55v = 13 \text{ અથવા } 40u + 55v - 13 = 0 \tag{5}$$

ચોકડી ગુણાકારની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{u}{44(-13)-55(-10)} = \frac{v}{40(-10)-30(-13)} = \frac{1}{30(55)-44(40)}$$

$$\therefore \frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

$$\therefore u = \frac{1}{5}, v = \frac{1}{11}$$

હવે, u અને v ની કિંમત સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5} \text{ અને } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$$

$$\therefore x - y = 5 \text{ અને } x + y = 11 \tag{6}$$

આ સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં,

$$2x = 16$$

$$\therefore x = 8$$

(6) માં આપેલ સમીકરણોની બાદબાકી કરતાં,

$2y = 6$

$\therefore\ y = 3$

સ્થિર પાણીમાં હોડીની ઝડપ 8 કિમી/કલાક અને નદીના પ્રવાહની ઝડપ 3 કિમી/કલાક છે.

ચકાસણી : ઉકેલ પ્રશ્નની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 3.6

1. નીચેનાં સમીકરણયુગ્મને યોગ્ય આદેશ વડે સુરેખ સમીકરણયુગ્મમાં રૂપાંતરિત કરીને તેમનો ઉકેલ મેળવો :

(i) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} = 2$, $\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} = \dfrac{13}{6}$

(ii) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = 2$, $\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iii) $\dfrac{4}{x} + 3y = 14$, $\dfrac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{1}{y-2} = 2$, $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{3}{y-2} = 1$

(v) $\dfrac{7x-2y}{xy} = 5$, $\dfrac{8x+7y}{xy} = 15$

(vi) $6x + 3y = 6xy$, $2x + 4y = 5xy$

(vii) $\dfrac{10}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 4$, $\dfrac{15}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\dfrac{1}{3x+y} + \dfrac{1}{3x-y} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{1}{2(3x+y)} - \dfrac{1}{2(3x-y)} = -\dfrac{1}{8}$

2. નીચેની સમસ્યાઓમાંથી સમીકરણયુગ્મ રચો અને તેમનો ઉકેલ શોધો :

(i) રીતુ પ્રવાહની દિશામાં 20 કિમી અંતર 2 કલાકમાં અને પ્રવાહની સામેની દિશામાં 4 કિમી અંતર 2 કલાકમાં કાપે છે. તેની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ અને પ્રવાહની ઝડપ શોધો.

(ii) 2 સ્ત્રીઓ અને 5 પુરુષો સાથે મળીને એક ભરતકામ 4 દિવસમાં પૂરું કરી શકે છે. જો 3 સ્ત્રીઓ અને 6 પુરુષોને તે જ કામ સોંપવામાં આવે તો તે કામ 3 દિવસમાં પૂરું કરે છે. તો એક સ્ત્રીને સ્વતંત્ર રીતે કામ પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે ? એક પુરુષને સ્વતંત્ર રીતે કામ પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે ?

(iii) રૂહી તેના વતન જવા માટે 300 કિમીની મુસાફરી અંશતઃ ટ્રેન દ્વારા અને અંશતઃ બસ દ્વારા કરે છે. જો તે 60 કિમી મુસાફરી ટ્રેન દ્વારા અને બાકીની મુસાફરી બસ દ્વારા કરે તો તેને વતન પહોંચતાં 4 કલાક લાગે છે. જો તે ટ્રેન દ્વારા 100 કિમી અને બાકીની મુસાફરી બસ દ્વારા કરે તો તેને વતન પહોંચતાં 10 મિનિટ વધારે લાગે છે, તો ટ્રેન અને બસની પ્રતિ કલાક સરેરાશ ઝડપ શોધો.

સ્વાધ્યાય 3.7 (વૈકલ્પિક)*

1. બે મિત્રો અની અને બીજુની ઉંમરનો તફાવત 3 વર્ષ છે. અનીના પિતા ધરમની ઉંમર (વર્ષમાં) અનીની ઉંમરથી બમણી અને બીજુની ઉંમર (વર્ષમાં) તેની બહેન કેથી કરતાં બે ગણી છે. જો કેથી અને ધરમની ઉંમરના વર્ષનો તફાવત 30 વર્ષ હોય, તો અની અને બીજુની ઉંમર શોધો.

2. એક વ્યક્તિ તેના મિત્રને કહે છે, 'જો તું મને સો રૂપિયા આપે તો મારી પાસે તારાથી બે ગણા રૂપિયા હશે.' બીજો વ્યક્તિ કહે છે ''જો તું મને દસ રૂપિયા આપે, તો મારી પાસે તારાથી છ ગણા રૂપિયા હશે.'' અનુક્રમે બંનેની મૂડી રકમ જણાવો.

   [ભાસ્કર-II ના બીજગણિતમાંથી] [સૂચન : $x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$]

3. એક ટ્રેન અચળ ઝડપે ચોક્કસ અંતર કાપે છે. જો ટ્રેનની ઝડપમાં 10 કિમી/કલાક વધારો થાય તો, તે મુસાફરી માટે નક્કી સમય કરતાં 2 કલાક ઓછો સમય લે છે અને ટ્રેનની ઝડપમાં 10 કિમી/કલાકનો ઘટાડો કરતાં, તે મુસાફરી માટે નક્કી સમય કરતાં 3 કલાક વધારે સમય લે છે, તો ટ્રેન દ્વારા કપાયેલું કુલ અંતર શોધો.

4. એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને હારમાં ઊભા રાખવામાં આવ્યા છે. દરેક હારમાં 3 વિદ્યાર્થીઓ વધારે ઊભા રાખતાં 1 હાર ઓછી બને છે. 3 વિદ્યાર્થીઓ પ્રત્યેક હારમાં ઓછા ઊભા રાખતાં 2 હાર વધારે બને છે, તો વર્ગખંડમાં રહેલા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

5. જો ΔABCમાં $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ હોય, તો ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનાં માપ શોધો.

6. સમીકરણો $5x - y = 5$ અને $3x - y = 3$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાના આલેખ દોરો. y-અક્ષ અને બંને રેખાઓ દ્વારા બનતાં ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ જણાવો.

7. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ ઉકેલો :

   (i) $px + qy = p - q$
   $qx - py = p + q$

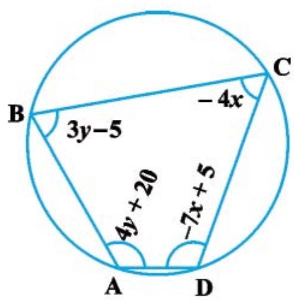
   (ii) $ax + by = c$
   $bx + ay = 1 + c$

   (iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
   $ax + by = a^2 + b^2$

   (iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$
   $(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

   (v) $152x - 378y = -74$
   $-378x + 152y = -604$

8. (આકૃતિ 3.7 જુઓ.) જો ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ હોય, તો તે ચક્રીય ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ શોધો.



આકૃતિ 3.7

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષા માટે ધ્યાનમાં લેવાનો નથી.

3.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. એકના એક જ બે ચલમાં બે સુરેખ સમીકરણોને આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહીશું.

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$, જ્યાં $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

તથા $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

2. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની બે રીતો છે :

(i) આલેખની રીત (ii) બૈજિક રીત

3. આલેખની રીત :

સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો આલેખ એક જ આલેખપત્ર પર બે રેખાઓ દર્શાવે છે.

(i) જો ઉપર્યુક્ત બંને રેખાઓ પરસ્પર છેદે તો સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ હોય અને બે રેખાઓના અનન્ય છેદબિંદુના યામ એ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ દર્શાવે. આ પરિસ્થિતિમાં આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય.

(ii) જો બંને રેખાઓ સંપાતી હોય, તો રેખા પરનાં અનંત બિંદુઓના યામ સમીકરણનો ઉકેલ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો છે તેમ કહેવાય. આ પરિસ્થિતિમાં બંને સમીકરણો સુરેખ અવલંબી છે તેમ કહેવાય.

(iii) જો બંને રેખાઓ સમાંતર હોય, તો તેમનું સામાન્ય બિંદુ ન મળે. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણયુગ્મને કોઈ વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણો સુસંગત નથી તેમ કહેવાય.

4. સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે ત્રણ બૈજિક રીતો છે.

(i) આદેશની રીત (ii) લોપની રીત (iii) ચોકડી ગુણાકારની રીત

5. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પો ઉદ્ભવે છે.

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે અને અવલંબી છે.

6. સુરેખ ન હોય તેવાં કેટલાંક સમીકરણોને યોગ્ય આદેશ પસંદ કરી સુરેખ સમીકરણમાં રૂપાંતર કરી શકાય છે.

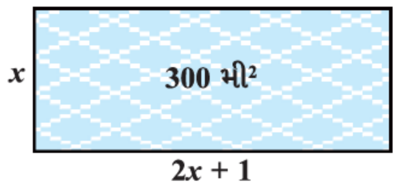
D9D5J9

M8E3D2

દ્વિઘાત સમીકરણ 4

4.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 2 માં તમે વિવિધ પ્રકારની બહુપદીનો અભ્યાસ કર્યો. શૂન્યેતર a માટે $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ દ્વિઘાત બહુપદી છે. જો આ બહુપદીનું મૂલ્ય શૂન્ય લેવામાં આવે, તો આપણને દ્વિઘાત સમીકરણ મળે. વાસ્તવિક જીવનસંબંધી ઘણા બધા પ્રશ્નોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક ધાર્મિક ટ્રસ્ટને 300 ચોરસ મીટર જગામાં જેની લંબાઈ તેની પહોળાઈના બમણા કરતાં 1 મીટર વધારે હોય તેવો એક પ્રાર્થનાખંડ બાંધવો છે. તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી હોવી જોઈએ ? ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, તેની લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર હોવી જોઈએ. આપણે આ માહિતી આકૃતિ 4.1 પ્રમાણે ચિત્ર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ.



આકૃતિ 4.1

હવે, ખંડનું ક્ષેત્રફળ $= (2x + 1) \cdot x$ મી^{2} $= (2x^2 + x)$ મી^{2}

આથી, $2x^2 + x = 300$ (આપેલ છે.)

આમ, $2x^2 + x - 300 = 0$

આથી, ખંડની પહોળાઈ દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

ઘણા લોકો માને છે કે સૌપ્રથમ બેબીલોનવાસીઓએ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવ્યો. ઉદાહરણ તરીકે, બે ધન સંખ્યાના સરવાળા અને ગુણાકાર આપેલ હોય, તો તે સંખ્યાઓ કેવી રીતે મેળવવી તે એ લોકો જાણતાં હતાં અને આ પ્રશ્ન $x^2 - px + q = 0$ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવાને સમકક્ષ છે. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી ***યુક્લિડે Euclid*** લંબાઈ શોધવાની ભૌમિતિક રીત વિકસાવી. તેને આપણે વર્તમાન પરિભાષામાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ કહીએ છીએ. સામાન્ય રીતે, દ્વિઘાત સમીકરણ ઉકેલવાનો શ્રેય મોટે ભાગે પ્રાચીન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓને જાય છે. વાસ્તવમાં, ***બ્રહ્મગુપ્તે Brahmagupta*** (C.E. 598 - C.E.665) $ax^2 + bx = c$ દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલ માટે સ્પષ્ટ સૂત્ર આપ્યું. પછીથી, ***શ્રીધર આચાર્ય Shridharacharya*** (C.E. 1025)એ દ્વિઘાત સૂત્ર તરીકે ઓળખાતું સૂત્ર પ્રસ્થાપિત કર્યું. (તેનો ઉલ્લેખ ભાસ્કર-II માં કરેલ છે.) તેમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે પૂર્ણ વર્ગની

રીતનો ઉપયોગ કરાય છે. એક અરબ ગણિતશાસ્ત્રી ***અલ-ખ્વારિઝમી (Al-khwarizmi)*** (C.E. 800 ની આસપાસ)એ પણ વિવિધ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો અભ્યાસ કર્યો હતો. ***અબ્રાહમ બાર હિયા હા-નાસી (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi)***એ યુરોપમાં C.E. 1145 માં તેણે લખેલ પુસ્તક ***Liber Embadorum*** માં ભિન્ન-ભિન્ન દ્વિઘાત સમીકરણના પૂર્ણ ઉકેલ આપ્યા.

આ પ્રકરણમાં તમે દ્વિઘાત સમીકરણો અને તેમના ઉકેલ મેળવવા માટેની જુદી-જુદી રીત શીખશો. દ્વિઘાત સમીકરણના રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગ પણ જોશો.

4.2 દ્વિઘાત સમીકરણ

I6X1G5

a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તથા $a \neq 0$ હોય, તો ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, $2x^2 + x - 300 = 0$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. આ જ રીતે, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ અને $1 - x^2 + 300 = 0$ પણ દ્વિઘાત સમીકરણો છે.

ખરેખર તો $p(x)$ એ 2 ઘાતની બહુપદી હોય, તો $p(x) = 0$ પ્રકારનું કોઈ પણ સમીકરણ, એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. પરંતુ જ્યારે આપણે $p(x)$ ના પ્રત્યેક પદને ઘાતાંકના ઊતરતા ક્રમમાં લખીએ ત્યારે આપણને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ મળે છે. ***આમ, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહેવાય.***

આપણી આસપાસની દુનિયામાં અનેક જુદી-જુદી સ્થિતિમાં અને ગણિતનાં ભિન્ન ક્ષેત્રોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉદ્ભવ થતો હોય છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ સ્થિતિને ગાણિતિક રીતે વ્યક્ત કરો :

(i) જ્હૉન અને જીવંતી પાસે કુલ 45 લખોટીઓ છે. પ્રત્યેક વ્યક્તિ પાંચ-પાંચ લખોટી ખોઈ કાઢે છે અને હવે તેમની પાસે બાકી રહેલી લખોટીઓની સંખ્યાનો ગુણાકાર 124 છે, આપણે જાણવું છે કે તેમની પાસે શરૂઆતમાં કેટલી લખોટીઓ હતી.

(ii) એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલાંક રમકડાં બનાવે છે. પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (રૂપિયામાં) 55માંથી એક દિવસમાં ઉત્પાદિત થતાં રમકડાંની સંખ્યા બાદ કરીએ તેટલો છે. કોઈ એક ચોક્કસ દિવસે ઉત્પાદન-ખર્ચ ₹ 750 છે. આપણે તે દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા જાણવી છે.

ઉકેલ :

(i) ધારો કે જ્હૉન પાસે x લખોટીઓ છે.

આથી, જીવંતી પાસેની લખોટીઓની સંખ્યા $= 45 - x$ (કેમ ?)

જ્હૉન પાસે 5 લખોટીઓ ખોઈ કાઢ્યા બાદની લખોટીઓની સંખ્યા $= x - 5$

જીવંતી પાસે 5 લખોટી ખોઈ કાઢ્યા પછી લખોટીની સંખ્યા $= 45 - x - 5 = 40 - x$

આથી, તેમનો ગુણાકાર $= (x - 5)(40 - x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

આથી, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ **(ગુણાકાર 124 આપેલ છે.)**

$$\therefore -x^2 + 45x - 324 = 0$$

$$\therefore x^2 - 45x + 324 = 0$$

આથી, જ્હૉન પાસેની લખોટીની સંખ્યા, દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 45x + 324 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. માંગેલ પ્રશ્નની આ ગાણિતિક રજૂઆત છે.

(ii) ધારો કે નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા x છે.

આથી, તે નિશ્ચિત દિવસે પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (₹ માં) = $55 - x$.

આથી, તે દિવસનો રમકડાં બનાવવાનો કુલ ખર્ચ = $x(55 - x)$

આથી, $x(55 - x) = 750$

$\therefore\ 55x - x^2 = 750$

$\therefore\ -x^2 + 55x - 750 = 0$

$\therefore\ x^2 - 55x + 750 = 0$

આથી, નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 55x + 750 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. આ આપેલ પ્રશ્નની ગાણિતિક રજૂઆત છે.

ઉદાહરણ 2 : ચકાસો કે નીચેનાં સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે નહિ :

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

ઉકેલ :

(i) ડા.બા. = $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1$

$= x^2 - 4x + 5$

આથી, $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ને

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ તરીકે લખી શકાય.

$\therefore\ x^2 - 6x + 8 = 0$

$a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(ii) $x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$ અને

$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ છે.

આથી, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$\therefore\ x + 12 = 0$

આ સમીકરણ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું નથી.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

(iii) અહીં, ડા.બા. $= x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

આથી, $x(2x + 3) = x^2 + 1$ ને

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.

આથી, $x^2 + 3x - 1 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે, $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(iv) અહીં, ડા.બા. $= (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12\,x + 8$

આથી, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ને

$x^3 + 6x^2 + 12\,x + 8 = x^3 - 4$ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.

$6x^2 + 12x + 12 = 0$ **અથવા** $x^2 + 2x + 2 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

નોંધ : ચોકસાઈ રાખો. ઉપર (ii)માં આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ જેવું લાગે છે. પરંતુ તે દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

ઉપર (iv)માં આપેલ સમીકરણ ત્રિઘાત સમીકરણ (3 ઘાતવાળું સમીકરણ) જેવું દેખાય છે, દ્વિઘાત સમીકરણ જેવું નહિ. પરંતુ તે દ્વિઘાત સમીકરણમાં પરિવર્તિત થાય છે. આમ જોઈ શકશો કે ઘણી વખત આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે કેમ તે નક્કી કરતાં પહેલાં તેનું સાદું રૂપ આપવું જરૂરી છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચે આપેલ સમીકરણો દ્વિઘાત સમીકરણો છે કે કેમ તે ચકાસો :

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$ (ii) $x^2 - 2x = (-2)\,(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$ (iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x\,(x^2 - 1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. નીચે આપેલ પરિસ્થિતિઓને દ્વિઘાત સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) જમીનના એક લંબચોરસ ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ 528 મી^{2} છે. તેની લંબાઈ (મીટરમાં), પહોળાઈ (મીટરમાં)ના બમણાથી એક મીટર જેટલી વધુ છે. આપણે જમીનના આ ટુકડાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધવી છે.

(ii) બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર 306 છે. આપણે આ પૂર્ણાંક શોધવા છે.

(iii) રોહનની માતા તેના કરતાં 26 વર્ષ મોટાં છે. આજથી 3 વર્ષ પછી તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 360 હશે. આપણે રોહનની હાલની ઉંમર શોધવી છે.

(iv) એક ટ્રેન 480 કિમીનું અંતર અચળ ઝડપથી કાપે છે. જો ઝડપ 8 કિમી/કલાક ઓછી હોય, તો આટલું જ અંતર કાપવા તે 3 કલાક વધુ લે છે, તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

4.3 અવયવીકરણ વડે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

P2B4K5

દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નો વિચાર કરો. જો સમીકરણની ડાબી બાજુમાં x ને બદલે 1 લઈએ તો $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ જ.બા. મળે છે. આપણે કહી શકીએ, કે, દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નું એક બીજ 1 છે. આથી, એમ પણ આપણે કહી શકીએ કે દ્વિઘાત બહુપદી $2x^2 - 3x + 1$ નું એક શૂન્ય 1 છે.

વ્યાપક રીતે, જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ નું બીજ કહેવાય. આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે,

$x = \alpha$ એ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ છે અથવા α દ્વિઘાત સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આપણે નોંધીએ કે, દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો તથા દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

તમે પ્રકરણ 2 માં જોયું કે દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 શૂન્યો હોય. આથી, કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણને વધુમાં વધુ 2 બીજ હોય.

તમે ધોરણ IX માં કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદીના મધ્યમ પદને બે ભાગમાં વહેંચી તેના અવયવ પાડવાની રીત શીખી ગયા. આપણે આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવા કરીશું. જોઈએ, આ કેવી રીતે શક્ય બને છે.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અવયવ પાડીને શોધો.

ઉકેલ : આપણે સૌપ્રથમ મધ્યમપદ $-5x$ ના બે ભાગ $-2x$ અને $-3x$ કરીએ.

[કેમ કે $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) -3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

હવે, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને $(2x - 3)(x - 1) = 0$ લખી શકાય.

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ તથા $(2x - 3)(x - 1) = 0$ માટેનાં x નાં મૂલ્યો સમાન હશે.

અર્થાત્ $2x - 3 = 0$ અથવા $x - 1 = 0$.

હવે $2x - 3 = 0$ પરથી $x = \frac{3}{2}$ અને $x - 1 = 0$ પરથી $x = 1$ મળશે.

આથી, $x = \frac{3}{2}$ અને $x = 1$ આપેલ સમીકરણના ઉકેલ હશે.

બીજા શબ્દોમાં, 1 અને $\frac{3}{2}$ સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ છે.

ચકાસો કે 1 અને $\frac{3}{2}$ આપેલ સમીકરણનાં બીજ છે.

આપણે નોંધીએ કે $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ, $2x^2 - 5x + 3$ ના બે સુરેખ અવયવ પાડી અને દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈને શોધ્યું છે.

ઉદાહરણ 4 : દ્વિઘાત સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : અહીં,
$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1) \\ &= (3x - 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ એ $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ દ્વારા મળતાં x નાં મૂલ્યો છે.

આથી, $3x - 2 = 0$ અથવા $2x + 1 = 0$

અર્થાત્, $x = \frac{2}{3}$ અથવા $x = -\frac{1}{2}$.

આથી, $6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ છે.

આપણે, $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નું સમાધાન કરે છે તે ચકાસીને બીજની ચકાસણી કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 5 : દ્વિઘાત સમીકરણ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

આથી, સમીકરણનાં બીજ $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$ થાય તેવા x નાં મૂલ્યો છે.

આમ, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ પરથી $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

આથી, આ બીજ બે વખત પુનરાવર્તિત અવયવ $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ ને સંગત મળે છે.

આમ, $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ છે.

ઉદાહરણ 6 : વિભાગ 4.1માં ચર્ચા કરેલ પ્રાર્થનાખંડની બાજુઓનાં માપ શોધો.

ઉકેલ : વિભાગ 4.1માં આપણે જોયું કે જો ખંડની પહોળાઈ x મી હોય તો x એ સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે. અવયવીકરણની રીતનો ઉપયોગ કરતાં, આપણે સમીકરણને $2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$ એમ લખી શકીએ.

$$\therefore 2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

$$\therefore (x - 12)(2x + 25) = 0$$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ $x = 12$ અથવા $x = -12.5$ છે. પરંતુ x એ ખંડની પહોળાઈ હોવાથી તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 12 મી અને તેની લંબાઈ $2x + 1 = 25$ મી.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચે આપેલ સમીકરણના ઉકેલ અવયવીકરણની રીતથી મેળવો :

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2. ઉદાહરણ (1)માં આપેલ પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવો.

3. બે એવી સંખ્યાઓ શોધો કે જેમનો સરવાળો 27 અને ગુણાકાર 182 હોય.

4. જેના વર્ગોનો સરવાળો 365 થાય એવી બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ શોધો.

5. એક કાટકોણ ત્રિકોણનો વેધ તેના પાયા કરતાં 7 સેમી નાનો છે. જો કર્ણની લંબાઈ 13 સેમી હોય, તો બાકીની બે બાજુનાં માપ શોધો.

6. એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલીક માટીની વસ્તુઓ બનાવે છે. એક નિશ્ચિત દિવસે જણાયું કે પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કિંમત (રૂપિયામાં), તે દિવસે ઉત્પાદિત વસ્તુના બમણા કરતાં 3 વધુ હતી. જો તે દિવસે ઉત્પાદિત ખર્ચ ₹ 90 હોય તો, ઉત્પાદિત વસ્તુની સંખ્યા અને પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કિંમત શોધો.

4.4 પૂર્ણવર્ગની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

C4A7Y4

આગળના વિભાગમાં આપણે દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલની એક રીત શીખ્યાં. આ વિભાગમાં આપણે તે માટેની બીજી રીત શીખીશું.

નીચેની પરિસ્થિતિ વિચારો :

સુનીતાની અત્યારની ઉંમરથી બે વર્ષ પહેલાંની અને ચાર વર્ષ પછીની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો (વર્ષમાં) ગુણાકાર તેની અત્યારની ઉંમરના બમણાં કરતાં એક વધુ છે. તો તેની અત્યારની ઉંમર કેટલી હશે ?

આનો જવાબ શોધવા, ધારો કે તેની અત્યારની ઉંમર x વર્ષ છે. તો અત્યારથી બે વર્ષ પહેલાં અને ચાર વર્ષ પછીની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર $(x-2)(x+4)$ થાય.

આથી, $(x-2)(x+4) = 2x+1$

$\therefore\ x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

$\therefore\ x^2 - 9 = 0$

આથી, સુનીતાની અત્યારની ઉંમર દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 9 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

આપણે તેને $x^2 = 9$ એમ લખી શકીએ. વર્ગમૂળ લેતાં,

$x = 3$ અથવા $x = -3$ મળે. પરંતુ, ઉંમર ધન સંખ્યા હોવાથી, $x = 3$.

આથી, સુનીતાની અત્યારની ઉંમર 3 વર્ષ છે.

હવે, દ્વિઘાત સમીકરણ $(x+2)^2 - 9 = 0$ નો વિચાર કરો. તેને ઉકેલવા, આપણે $(x+2)^2 = 9$ એમ લખી શકીએ. વર્ગમૂળ લેતાં, આપણને $x + 2 = 3$ અથવા $x + 2 = -3$ મળે.

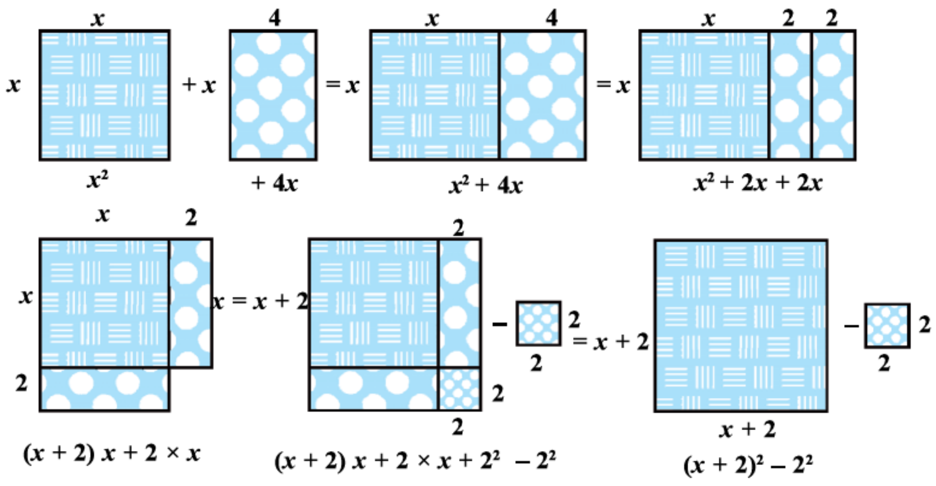
આથી, $x = 1$ અથવા $x = -5$

આમ, સમીકરણ $(x+2)^2 - 9 = 0$ નાં બીજ 1 અને -5 છે.

ઉપરના બંને ઉદાહરણોમાં x ને સમાવતું પદ પૂર્ણ વર્ગનું એક પદ છે અને આથી, વર્ગમૂળ લેતાં આપણે સરળતાથી બીજ શોધી શકીએ છીએ. પરંતુ સમીકરણ $x^2 + 4x - 5 = 0$ નો ઉકેલ શોધવાનું કહે, તો શું થાય ? આપણે ઘણુંખરું અવયવીકરણની રીત ઉપયોગમાં લઈએ, સિવાય કે (કોઈક રીતે !) આપણને સૂઝે કે $x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ નો ઉકેલ $(x+2)^2 - 9 = 0$ ના ઉકેલ બરાબર છે. અલબત્ત, આપણે કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણને $(x+a)^2 - b^2 = 0$ સ્વરૂપે ફેરવી શકીએ અને ત્યાર બાદ સરળતાથી તેનાં બીજ શોધી શકીએ. આવો જોઈએ કે શું આ સંભવ છે ? (જુઓ આકૃતિ 4.2.)

આ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $x^2 + 4x$ ને $(x+2)^2 - 4$ માં ફેરવેલ છે.



આકૃતિ 4.2

આ પ્રક્રિયા નીચે પ્રમાણે થાય છે :

$$x^2 + 4x = \left(x^2 + \frac{4}{2}x\right) + \frac{4}{2}x$$
$$= x^2 + 2x + 2x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,(x + 2) - 2^2$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

આમ, $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ ને પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની આ રીત પ્રમાણે તેને $(x + 2)^2 - 9 = 0$ તરીકે લખી શકાય. આ પ્રક્રિયાને **પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની રીત** કહેવાય છે.

ટૂંકમાં, તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$$x^2 + 4x = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ નીચેની રીતે લખી શકાય.

$$\left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

$\therefore\ (x + 2)^2 - 9 = 0$

હવે, સમીકરણ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ લઈએ. આપણે નોંધીએ કે, x^2નો સહગુણક પૂર્ણવર્ગ નથી. આથી, સમીકરણની બંને બાજુએ 3 વડે ગુણતાં,

$9x^2 - 15x + 6 = 0$

હવે, $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$$

$$= \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

આથી, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ને

$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$ તરીકે લખી શકાય.

$\therefore \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

આથી, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ નાં બીજ અને $\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ નાં બીજ સમાન છે.

$\therefore\ 3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ **અથવા** $3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

(આપણે $3x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$ લખી શકીએ. જ્યાં $\pm$ ધન કે ઋણ દર્શાવે છે.)

$\therefore 3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ અથવા $3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ અથવા $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$\therefore x = 1$ અથવા $x = \frac{4}{6}$

આમ, $x = 1$ અથવા $x = \frac{2}{3}$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ 1 અને $\frac{2}{3}$ છે.

નોંધ : આ પ્રશ્નના ઉકેલની બીજી રીત નીચે પ્રમાણે છે :

સમીકરણ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ અને

$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ સમાન છે.

હવે, $$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

આથી, $3x^2 - 5x + 2 = 0$ નાં બીજ અને $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

આથી $x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6}$ અર્થાત્, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ અથવા $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

ચાલો આપણે આ પ્રક્રિયા દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : ઉદાહરણ 3માં આપેલ સમીકરણને પૂર્ણવર્ગની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ અને $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ સમાન છે.

હવે, $$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ તરીકે પણ લખી શકાય.

આથી સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ નાં બીજ સમાન જ છે.

હવે, $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}=0$ અને $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ સમાન છે.

$\therefore x-\frac{5}{4}=\pm\frac{1}{4}$

$\therefore x=\frac{5}{4}\pm\frac{1}{4}$

$\therefore x=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$ અથવા $x=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ અથવા $x=1$

આથી, સમીકરણના ઉકેલ $x=\frac{3}{2}$ અને 1 છે.

ચાલો, આપણે આ ઉકેલ ચકાસીએ.

$2x^2-5x+3=0$ માં $x=\frac{3}{2}$ લેતાં, $2\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)+3=0$ મળે, જે સત્ય છે.

આ જ રીતે, આપણે ચકાસી શકીએ કે $x=1$ પણ આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 7 માં સમીકરણ $2x^2-5x+3=0$ ને 2 વડે ભાગતાં $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$ મળે છે કે જેથી પ્રથમ પદ પૂર્ણવર્ગ બને છે અને પછી પૂર્ણવર્ગમાં પરિવર્તિત કરવામાં આવે છે અથવા સમીકરણની બંને બાજુને 2 વડે ગુણતાં, પ્રથમ પદ $4x^2=(2x)^2$ મળે અને પછી પૂર્ણવર્ગમાં પરિવર્તિત કરી શકાય.

આ રીત નીચેના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદાહરણ 8 : સમીકરણ $5x^2-6x-2=0$ નાં બીજ પૂર્ણવર્ગની રીતે શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 5 વડે ગુણતાં,

$25x^2-30x-10=0$ મળે.

આથી, $(5x)^2-2\times(5x)\times(3)+3^2-3^2-10=0$

$\therefore (5x-3)^2-9-10=0$

$\therefore (5x-3)^2-19=0$

$\therefore 5x-3=\pm\sqrt{19}$

$\therefore 5x=3\pm\sqrt{19}$

આમ, $x=\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$

આથી, બીજ $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ અને $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ છે.

ચકાસો કે, $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ અને $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ બીજ છે.

ઉદાહરણ 9 : $4x^2 + 3x + 5 = 0$ નાં બીજ પૂર્ણવર્ગની રીતે શોધો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે $4x^2 + 3x + 5 = 0$ અને $(2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$ સમાન છે.

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{71}{16} < 0$$

પરંતુ x ના કોઈ પણ વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$ ઋણ ના હોઈ શકે. (કેમ ?)

આથી, કોઈ જ વાસ્તવિક સંખ્યા x આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ. આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી.

હવે, તમે પૂર્ણવર્ગની રીતનાં ઘણાં ઉદાહરણો જોયાં.

આથી, આપણે વ્યાપક રીતે વિચારીએ.

દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ નો વિચાર કરો. બંને બાજુ શૂન્યેતર a વડે ભાગતાં,

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ મળે.

તે $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ ને સમાન છે.

એટલે કે $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ અને

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$ અર્થાત્

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ નાં બીજ સમાન હશે. (1)

જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, સમીકરણ (1)ની બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

આમ, જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અને $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ છે.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી. ***(કેમ ?)***

આમ, જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ થાય.

દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવાના આ સૂત્રને **દ્વિઘાત સૂત્ર** કહેવાય છે.

ચાલો દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : સ્વાધ્યાય 4.1ના પ્રશ્ન 2(i)ને દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર થાય. હવે, આપણને આપેલ છે કે $x(2x + 1) = 528$ અર્થાત્ $2x^2 + x - 528 = 0$.

$a = 2, b = 1, c = -528$ માટે, આ સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ સ્વરૂપનું છે.

આથી દ્વિઘાત સૂત્ર દ્વારા મળતો ઉકેલ,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)\ (528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$\therefore x = \frac{64}{4}$ અથવા $x = -\frac{66}{4}$

$\therefore x = 16$ અથવા $x = -\frac{33}{2}$

પરંતુ x ઋણ ના હોઈ શકે, કેમ કે તે એક પરિમાણ છે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 16 મીટર અને આથી લંબાઈ 33 મીટર થાય.

તમારે એ ચકાસવું જોઈએ કે આ કિંમતો આપેલ પ્રશ્નની શરતોનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 11 : બે ક્રમિક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો 290 હોય, તો બંને સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે ક્રમિક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ પૈકી નાની સંખ્યા x છે. આથી બીજી સંખ્યા $x + 2$ થાય.

આપેલ પ્રશ્ન મુજબ,

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$\therefore \quad x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\therefore \quad 2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 2x - 143 = 0$$

આ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$\therefore \quad x = 11$ અથવા $x = -13$

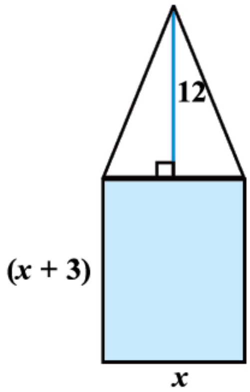
પરંતુ x ધન અયુગ્મ સંખ્યા આપેલ છે.

$\therefore\ x \neq -13$. આથી $x = 11$

આથી, માંગેલ બે ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકો 11 અને 13 છે.

ચકાસો : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$.

ઉદાહરણ 12 : એક એવો લંબચોરસ બગીચો બનાવવો છે કે જેની પહોળાઈ તેની લંબાઈ કરતાં 3 મી ઓછી હોય. તેનું ક્ષેત્રફળ જેનો પાયો લંબચોરસ બગીચાની પહોળાઈ જેટલો હોય અને વેધ 12 મી હોય તેવા પહેલેથી બનેલા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણાકાર બગીચાના ક્ષેત્રફળ કરતાં 4 મી^{2} વધુ હોય લંબચોરસ બગીચાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 4.3).



આકૃતિ 4.3

ઉકેલ : ધારો કે લંબચોરસ બગીચાની પહોળાઈ x મી છે.

આથી, તેની લંબાઈ $= (x + 3)$ મી

આથી, લંબચોરસ બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= x(x + 3)$ મી^{2}

$= (x^2 + 3x)$ મી^{2}

હવે, સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો $= x$ મી

આથી તેનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ મી^{2}

આપણી જરૂરિયાત મુજબ,

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$\therefore\ x^2 - 3x - 4 = 0$$

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ અથવા } -1$$

પરંતુ $x \neq -1$. (કેમ ?)

આથી, $x = 4$.

આમ, બગીચાની પહોળાઈ $= 4$ મી અને લંબાઈ 7 મી થશે.

ચકાસણી : લંબચોરસ બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= 28$ મી^{2}

ત્રિકોણાકાર બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= 24$ મી^{2} $= (28 - 4)$ મી^{2}

ઉદાહરણ 13 : દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી, શક્ય હોય તો નીચેનાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ મેળવો :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

ઉકેલ :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

અહીં, $a = 3,\ b = -5,\ c = 2$

આથી, $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$.

$\therefore\ x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$ અર્થાત્, $x = 1$ અથવા $x = \frac{2}{3}$

આમ, બીજ $\frac{2}{3}$ અને 1 છે.

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$.

અહીં, $a = 1, b = 4, c = 5$

આથી, $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ ઋણ ના હોઈ શકે. આથી, $b^2 - 4ac$ નું વર્ગમૂળ વાસ્તવિક ન મળે.

આથી, આપેલ સમીકરણને એક પણ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$.

અહીં, $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$

આથી, $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$.

$\therefore\ x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ અર્થાત્ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

આથી, બીજ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં સમીકરણનાં બીજ શોધો :

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

ઉકેલ :

(i) સમીકરણ $x + \dfrac{1}{x} = 3$ ને x વડે ગુણતાં,

$$x^2 + 1 = 3x$$

અર્થાત્, $x^2 - 3x + 1 = 0$.

આ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

અહીં, $a = 1, b = -3, c = 1$

આથી, $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

$$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$ (કેમ?)

આથી, બીજ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ અને $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ છે.

(જુઓ કે $x \neq 0$)

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

$x \neq 0, 2$ હોવાથી, સમીકરણને $x(x-2)$ વડે ગુણતાં,

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

આથી, આપેલ સમીકરણ પરિવર્તિત થઈ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ બને. આ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

અહીં, $a = 3, b = -6, c = 2$ આથી, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

$$\therefore\ x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

આથી, બીજ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ અને $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ છે.

નોંધ : જુઓ કે $x \neq 0$ અથવા 2

ઉદાહરણ 15 : એક મોટરબોટની શાંત પાણીમાં ઝડપ 18 કિમી/કલાકની છે. જો પ્રવાહની સામી દિશામાં 24 કિમી અંતર કાપવા લાગતો સમય, પ્રવાહની દિશામાં તેટલું જ અંતર કાપવા લાગતા સમય કરતાં 1 કલાક વધુ હોય, તો પ્રવાહની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પ્રવાહની ઝડપ x કિમી/કલાક છે.

આથી, પ્રવાહની સામી બાજુ જતાં મોટરબોટની ઝડપ = $(18 - x)$ કિમી/કલાક અને

પ્રવાહની દિશામાં જતાં મોટરબોટની ઝડપ = $(18 + x)$ કિમી/કલાક હશે.

પ્રવાહની સામી બાજુ જવા લાગતો સમય = $\frac{\text{અંતર}}{\text{ઝડપ}} = \frac{24}{18-x}$ કલાક

આ જ પ્રમાણે પ્રવાહની દિશામાં જવા લાગતો સમય = $\frac{24}{18+x}$ કલાક

પ્રશ્નની માહિતી પરથી,

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$$\therefore\ 24\,(18 + x) - 24\,(18 - x) = (18 - x)\,(18 + x)$$

$$\therefore\ x^2 + 48x - 324 = 0$$

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2} = \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ અથવા } -54$$

પરંતુ, x એ પ્રવાહની ઝડપ હોવાથી ઋણ હોઈ શકે નહિ. આથી, બીજ $x = -54$ ને અવગણતાં, $x = 6$ મળે. આથી, પ્રવાહની ઝડપ 6 કિમી/કલાક છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ, શક્ય હોય તો પૂર્ણવર્ગની રીતથી મેળવો :

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2. પ્રશ્ન 1માં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી મેળવો.

3. નીચેનાં સમીકરણનાં બીજ શોધો :

(i) $x - \frac{1}{x} = 3,\ x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30},\ x \neq -4, 7$

4. રહેમાનની આજથી ત્રણ વર્ષ પહેલાંની ઉંમરના (વર્ષમાં) વ્યસ્ત અને હવેથી 5 વર્ષ પછીની ઉંમરના વ્યસ્તનો સરવાળો $\frac{1}{3}$ છે. તેની અત્યારની ઉંમર શોધો.

5. એક વર્ગ કસોટીમાં શેફાલીના ગણિત અને અંગ્રેજીના ગુણનો સરવાળો 30 છે. જો તેને ગણિતમાં 2 ગુણ વધુ અને અંગ્રેજીમાં 3 ગુણ ઓછા મળ્યા હોત, તો તેમનો ગુણાકાર 210 થયો હોત. તેણે આ બંને વિષયમાં મેળવેલ ગુણ શોધો.

6. એક લંબચોરસ ખેતરના વિકર્ણનું માપ તેની નાની બાજુના માપથી 60 મીટર વધુ છે. જો મોટી બાજુ, નાની બાજુ કરતાં 30 મીટર વધુ હોય તો, ખેતરની બાજુઓનાં માપ શોધો.

7. બે સંખ્યાઓના વર્ગોનો તફાવત 180 છે. નાની સંખ્યાનો વર્ગ મોટી સંખ્યા કરતાં 8 ગણો છે. બંને સંખ્યાઓ શોધો.

8. એક ટ્રેન એકધારી ઝડપે 360 કિમી અંતર કાપે છે. જો તેની ઝડપ 5 કિમી/કલાક વધુ હોય તો, આટલું જ અંતર કાપતાં તેને 1 કલાક ઓછો સમય લાગે છે. તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

9. પાણીના બે નળ એક સાથે $9\frac{3}{8}$ કલાકમાં એક ટાંકી ભરી શકે છે. મોટા વ્યાસવાળો નળ ટાંકી ભરવા માટે નાના વ્યાસવાળા નળ કરતાં 10 કલાકનો ઓછો સમય લે છે. બંને નળ દ્વારા ટાંકી ભરવાનો અલગ-અલગ સમય શોધો.

10. એક ઝડપી ટ્રેન મૈસૂર અને બેંગ્લોર વચ્ચેનું 132 કિમી અંતર કાપવા ધીમી ટ્રેન કરતાં 1 કલાક ઓછો સમય લે છે. (વચ્ચેનાં સ્ટેશનો પર ઊભા રહેવાનો સમય ધ્યાનમાં ના લો.) જો ઝડપી ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ, ધીમી ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ કરતાં 11 કિમી/કલાક વધુ હોય તો બંને ગાડીની સરેરાશ ઝડપ શોધો.

11. બે ચોરસનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો 468 મી^{2} છે. જો તેમની પરિમિતિનો તફાવત 24 મી હોય તો, બંને ચોરસની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.

4.5 બીજનાં સ્વરૂપ

E2M9Z7

આગળના વિભાગમાં તમે જોયું કે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ છે.}$$

જો, $b^2 - 4ac > 0$ તો, આપણને બે ભિન્ન બીજ $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અને $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ મળે.

જો, $b^2 - 4ac = 0$ તો, $x = \frac{-b}{2a} \pm 0,$

અર્થાત્, $x = \frac{-b}{2a}$ અથવા $x = \frac{-b}{2a}$

આમ, સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને બીજ $\frac{-b}{2a}$ થાય.

આથી, આપણે કહી શકીએ કે આ વિકલ્પમાં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને વાસ્તવિક બીજ સમાન છે.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો એવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા ના મળે, જેનો વર્ગ $b^2 - 4ac$ થાય. આથી, આ વિકલ્પમાં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

$b^2 - 4ac$ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક છે કે નહિ તે નક્કી કરતો હોવાથી, $b^2 - 4ac$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનો **વિવેચક** કહેવાય છે.

આથી દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માટે

(i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 16 : દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ નો વિવેચક શોધો અને તેના પરથી બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

ઉકેલ : આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $a = 2, b = -4, c = 3$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું છે, આથી, વિવેચક

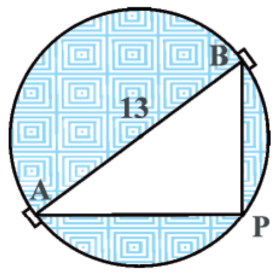
$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણને કોઈ વાસ્તવિક બીજ શક્ય નથી.

ઉદાહરણ 17 : 13 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળાકાર બગીચાની સીમા પરના એક બિંદુએ એક થાંભલો એવી રીતે લગાવેલ છે કે જેથી આ બગીચાના એક વ્યાસનાં બંને અંત્યબિંદુઓ A અને B આગળ બનેલ ફાટકથી થાંભલાના અંતરનો તફાવત 7 મીટર હોય. શું આ શક્ય છે ? જો હા, તો બંને ફાટકથી કેટલે દૂર થાંભલો લગાવવો જોઈએ ?

ઉકેલ : ચાલો પ્રથમ રેખાકૃતિ બનાવીએ. (જુઓ આકૃતિ 4.4.)

ધારો કે P થાંભલાનું જરૂરી સ્થાન છે. ધારો કે થાંભલાથી ફાટક B નું અંતર x મી, અર્થાત્ BP = x મી. હવે, થાંભલાથી બંને ફાટકના અંતરનો તફાવત = AP – BP (અથવા BP – AP) = 7 મી



આકૃતિ 4.4

આથી, AP = $(x + 7)$ મી

હવે, AB વ્યાસ હોવાથી, AB = 13 મી

$\angle APB = 90°$ (કેમ?)

હવે, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી)

$\therefore (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$\therefore x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$\therefore 2x^2 + 14x - 120 = 0$

આથી, થાંભલાનું ફાટક B થી અંતર 'x' એ સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

આથી જો દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તો, થાંભલાનું સ્થાન નક્કી કરવું શક્ય બને. આ શક્ય છે કે કેમ, તે જોવા ચાલો વિવેચક નો વિચાર કરીએ.

વિવેચક $b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બે બીજ વાસ્તવિક બીજ છે અને આથી બગીચાની સીમા પર થાંભલો લગાવવાનું શક્ય છે.

દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ને દ્વિઘાત સૂત્રથી ઉકેલતાં,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

આમ, $x = 5$ અથવા -12 મળે.

પરંતુ, x થાંભલા અને ફાટક B વચ્ચેનું અંતર હોવાથી, તે ધન જ હોવું જોઈએ. આથી, $x = -12$ ને અવગણવું જોઈએ. આથી, $x = 5$

આથી, સીમા પર થાંભલો એ રીતે લગાવવો જોઈએ કે જેથી તેનું ફાટક B થી અંતર 5 મી અને ફાટક A થી અંતર 12 મી હોય.

ઉદાહરણ 18 : સમીકરણ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ નો વિવેચક શોધો. તે પરથી સમીકરણનાં બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો. જો તે વાસ્તવિક હોય તો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3$, $b = -2$, $c = \frac{1}{3}$

આથી, વિવેચક $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બંને બીજ વાસ્તવિક અને સમાન છે.

બીજ $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ અર્થાત્ $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ અર્થાત્ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ છે.

સ્વાધ્યાય 4.4

1. નીચે આપેલાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજનાં સ્વરૂપ શોધો. જો તેમને વાસ્તવિક બીજ હોય તો તે શોધો :

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. નીચેનાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ સમાન હોય તો k નું મૂલ્ય શોધો :

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. જેની લંબાઈ, પહોળાઈ કરતાં બમણી હોય અને ક્ષેત્રફળ 800 મી^{2} હોય એવી લંબચોરસ આંબાવાડી બનાવવી શક્ય છે ? જો તમારો ઉત્તર 'હા' માં હોય તો, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ મેળવો.

4. બે મિત્રોની ઉંમરનો સરવાળો 20 વર્ષ છે. 4 વર્ષ પહેલાં તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 48 હતો. શું આ પરિસ્થિતિ શક્ય છે ? જો હોય તો, તેમની અત્યારની ઉંમર શોધો.

5. જેની પરિમિતિ 80 મી અને ક્ષેત્રફળ 400 મી^{2} હોય, તેવો લંબચોરસ બગીચો બનાવવાનું શક્ય છે ? જો તે શક્ય હોય, તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

4.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાનો અભ્યાસ કર્યો :

1. a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને $a \neq 0$ માટે ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય.

2. જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ કહેવાય. દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો અને દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન હોય.

3. જો આપણે $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ને સુરેખ અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈ મેળવી શકીએ.

4. પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની રીતનો ઉપયોગ કરીને પણ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય.

5. દ્વિઘાત સૂત્ર : દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ તરીકે મળે, જ્યાં $b^2 - 4ac \geq 0$

6. દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માં;

(i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

વાચકને નોંધ

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલોની ચકાસણી મેળવેલ સમીકરણને આધારે કરવાને બદલે મૂળ પ્રશ્નની શરતોને આધારે કરવી જોઈએ. (પ્રકરણ 3 નાં ઉદાહરણો 11, 13, 19 અને પ્રકરણ 4 નાં ઉદાહરણો 10, 11, 12 જુઓ.)

C3L7H3

B2T2C7

સમાંતર શ્રેણી 5

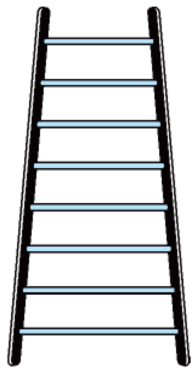
5.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે એ ચોક્કસ નોંધ્યું હશે કે, પ્રકૃતિમાં અનેક વસ્તુઓ, સૂરજમુખીના ફૂલની પાંદડીઓ, મધપૂડાનાં છિદ્રો, મકાઈના ડોડા પરના દાણા, અનાનસ અને દેવદાર (pine cone) પરના કુંતલ વગેરે એક નિશ્ચિત તરાહને અનુસરે છે.

હવે આપણે રોજિંદા જીવનમાં અનુભવવામાં આવતી કેટલીક તરાહ જોઈએ. અત્રે આવાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપેલ છે.

(i) રીનાએ નોકરી માટે અરજી કરી અને નોકરી માટે તેની પસંદગી થઈ. તેનો શરૂઆતનો માસિક પગાર ₹ 8000 છે અને પછી પ્રતિ વર્ષ માસિક પગાર વધારો ₹ 500 નક્કી થાય છે. તેનો ₹ માં માસિક પગાર પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય, ... વર્ષે અનુક્રમે 8000, 8500, 9000, ... હશે.

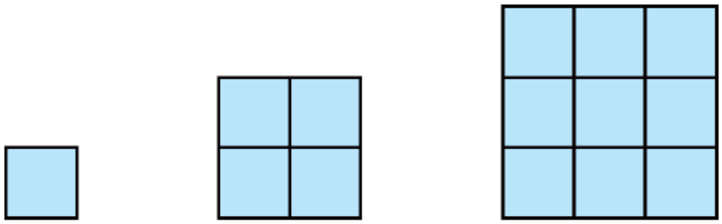
(ii) એક નિસરણીના પગથિયાંની લંબાઈ નીચેથી ઉપર તરફ એકસરખી 2 સેમી ઘટતી જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.1.) સૌથી નીચેના પગથિયાની લંબાઈ 45 સેમી છે. તળિયાથી ટોચ તરફના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ... 8માં પગથિયાની (સેમીમાં) લંબાઈ અનુક્રમે, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31 થાય.



આકૃતિ 5.1

(iii) કોઈ બચત યોજનામાં મૂકેલ રકમ દર 3 વર્ષે $\frac{5}{4}$ ગણી થાય છે. ₹ 8000ના રોકાણની (₹ માં) પાકતી રકમ 3, 6, 9 અને 12 વર્ષને અંતે અનુક્રમે 10,000, 12,500, 15,625 અને 19,531.25 થાય.

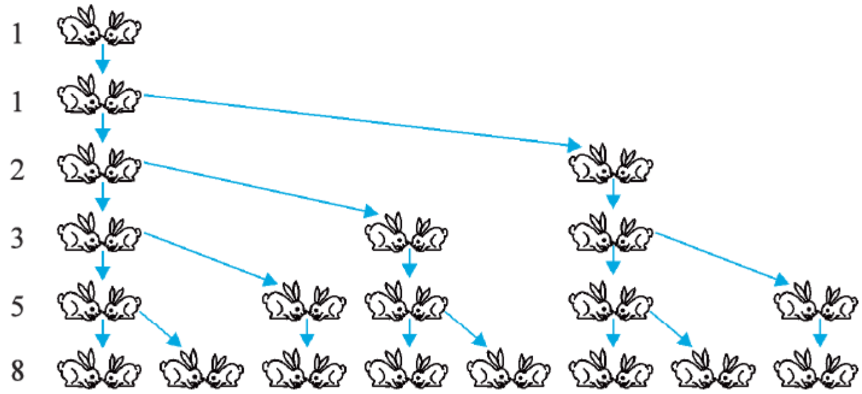
(iv) 1, 2, 3, ... એકમ લંબાઈના ચોરસમાં એકમ લંબાઈના ચોરસની સંખ્યા અનુક્રમે 1^2, 2^2, 3^3, ... છે. (જુઓ આકૃતિ 5.2.)



આકૃતિ 5.2

(v) શકીલા જ્યારે તેની પુત્રી 1 વર્ષની હતી ત્યારે તેના ગલ્લામાં ₹ 100 મૂકે છે અને પછી તે દરેક વર્ષે તેમાં ₹ 50નો ઉમેરો કરે છે. તેના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા... જન્મદિવસે તેના ગલ્લાની (₹ માં) રકમ અનુક્રમે 100, 150, 200, 250, ... હતી.

(vi) સસલાંનું એક જોડું પ્રથમ મહિને પ્રજનન કરવા માટે પરીપક્વ નથી. સસલાંની પ્રત્યેક નવી જોડ બીજા અને આવનારા દરેક મહિને એક જોડ સસલાંને જન્મ આપે છે (જુઓ આકૃતિ 5.3). માની લો કે, કોઈ સસલું મૃત્યુ પામતું નથી, તો પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ..., છઠ્ઠા મહિનાના પ્રારંભે સસલાંની જોડની સંખ્યા અનુક્રમે, 1, 1, 2, 3, 5, 8 હશે.



આકૃતિ 5.3

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાં આપણે કેટલીક તરાહ જોઈ શકીએ છીએ. કેટલાકમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે પુરોગામી પદમાં કોઈ અચળ સંખ્યા ઉમેરી પછીનું પદ મેળવી શકાય છે. કેટલાકમાં અચળ સંખ્યા વડે ગુણવાથી, જ્યારે બીજા કેટલાકમાં તે ક્રમિક સંખ્યાના વર્ગ સ્વરૂપે વગેરે રીતે જણાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે જેમાં પુરોગામી પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરવાથી અનુગામી પદ મળે છે, એવી એક તરાહની ચર્ચા કરીશું. આપણે એ પણ જોઈશું કે તેનું n મું પદ અને n ક્રમિક પદોનો સરવાળો કેવી રીતે શોધી શકાય અને આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ કેટલાક રોજિંદા પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા કરીશું.

J7Q6L1

5.2 સમાંતર શ્રેણી :

નીચે આપેલ સંખ્યાઓની યાદી પર વિચાર કરો :

(i) 1, 2, 3, 4, ...

(ii) 100, 70, 40, 10, ...

(iii) – 3, –2, –1, 0, ...

(iv) 3, 3, 3, 3, ...

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, ...

યાદીમાં આપેલ દરેક સંખ્યાને **પદ** કહેવાય.

ઉપરની યાદીમાં એક પદ આપેલ હોય તો પછીનું પદ તમે લખી શકશો ? જો હા, તો કેવી રીતે ? કદાચ કોઈ તરાહ કે નિયમનો ઉપયોગ કરી તમે તે કરી શકો.

ચાલો, આપણે અવલોકન કરીએ અને નિયમ લખીએ:

(i) માં પ્રત્યેક પદ, તેના આગળના પદથી 1 વધુ છે.

(ii) માં પ્રત્યેક પદ, તેના આગળના પદથી 30 ઓછું છે.

(iii) માં પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં 1 ઉમેરો.

(iv) માં પ્રત્યેક પદ 3 છે અર્થાત્ દરેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં 0 ઉમેરો (કે, તેમાંથી 0 બાદ કરો).

(v) માં પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં -0.5 ઉમેરો (અર્થાત્, તેમાંથી 0.5 બાદ કરો.)

ઉપરની યાદીમાં આપે જોયું કે પ્રત્યેક પદ મેળવવા તેની આગળના પદમાં કોઈ નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરવામાં આવે છે. સંખ્યાઓની આવી યાદી માટે કહી શકાય કે આ પદો **સમાંતર શ્રેણી (Arithmetic Progression અથવા A.P.)** બનાવે છે.

*આમ, **જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયના પ્રત્યેક પદ, આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરી મેળવી શકાય તેવી સંખ્યાઓની યાદી એ સમાંતર શ્રેણી છે.***

*આ નિશ્ચિત સંખ્યાને **સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત** કહેવાય છે. યાદ રાખો કે, તે **ધન, ઋણ અથવા શૂન્ય** હોઈ શકે છે.*

ચાલો, આપણે સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ પદને a_1, બીજા પદને a_2, ... n માં પદને a_n વડે દર્શાવીએ અને સામાન્ય તફાવતને d વડે દર્શાવીએ. આથી, સમાંતર શ્રેણી $a_1, a_2, a_3 ..., a_n$ માટે

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$

સમાંતર શ્રેણીનાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે છે :

(a) એક શાળામાં સવારની સભામાં એક હારમાં ઊભેલા કેટલાક વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઇ (સેમીમાં) 147, 148, 149, ..., 157 છે.

(b) કોઈ શહેરના જાન્યુઆરી મહિનાના એક સપ્તાહના ન્યૂનતમ તાપમાનની વધતા ક્રમમાં નોંધણી (ડિગ્રી સેલ્સિયસમાં) –3.1, –3.0, –2.9, –2.8, –2.7, –2.6, –2.5 છે.

(c) ₹ 1000 ની લોનના અચળ 5 ટકાના દરે પૈસા ચૂકવ્યા બાદ બાકી રહેતી રકમ (₹ માં) 950, 900, 850, 800, ..., 50 છે.

(d) કોઈ શાળામાં 1 થી 12 ધોરણના પ્રથમ ક્રમે આવેલ વિદ્યાર્થીઓને (₹ માં) અપાતી રોકડ ઇનામની રકમ 200, 250, 300, 350, ..., 750 છે.

(e) જો પ્રત્યેક મહિને ₹ 50ની બચત કરાય તો 10 મહિનામાં થયેલ બચતની રકમ (₹ માં) દર માસના અંતે 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500 હશે.

ઉપરની યાદી શા માટે સમાંતર શ્રેણી છે. એ સમજાવવાનું તમારા ઉપર સ્વાધ્યાય તરીકે છોડવામાં આવે છે.

તમે જોઈ શકો છો કે,

પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લેતાં, $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$ સમાંતર શ્રેણી દર્શાવે છે. આને સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ કહેવાય છે.

આપણે નોંધીએ કે ઉપરનાં ઉદાહરણો (a) થી (e) માં પદની સંખ્યા ***નિશ્ચિત (finite)*** છે. આવી સમાંતર શ્રેણીને ***સાન્ત (finite)*** સમાંતર શ્રેણી કહેવાય. વળી આપણે નોંધીએ કે આ પ્રત્યેક સમાંતર શ્રેણીમાં અંતિમ પદ છે. આ વિભાગમાં આપેલ ઉદાહરણ (i) થી (v) માંની એક પણ સમાંતર શ્રેણી સાન્ત શ્રેણી નથી. આથી, તેને ***અનંત સમાંતર શ્રેણી (Infinite Arithmetic Progression)*** *કહેવાય.* આવી સમાંતર શ્રેણીમાં અંતિમ પદ ના મળે.

હવે, એક સમાંતર શ્રેણી જાણવા કેટલી ન્યૂનતમ માહિતીની જરૂર પડે? શું પ્રથમ પદ જાણવું પૂરતું છે? કે માત્ર સામાન્ય તફાવતની જાણકારી પૂરતી છે? તમે જોઈ શકશો કે આ બંને માહિતી, પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d બંને જ્ઞાત હોય તે જરૂરી છે.

ઉદાહરણ તરીકે પ્રથમ પદ $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = 3$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી,

$$6, 9, 12, 15, \ldots, \text{ બને.}$$

અને $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = -3$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી,

$$6, 3, 0, -3, \ldots, \text{ બને.}$$

આ જ રીતે, જ્યારે,

$a = -7$, $d = -2$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$, $d = 0.1$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2$, $d = 0$, ત્યારે સમાંતર શ્રેણી $2, 2, 2, 2, \ldots$

આમ, જો a અને d આપેલ હોય તો સમાંતર શ્રેણી લખી શકાય. તેનાથી વિપરીત પ્રક્રિયા માટે શું કહી શકો? અર્થાત્, જો તમને સંખ્યાઓની યાદી આપેલ હોય તો તમે કહી શકો કે તે એક સમાંતર શ્રેણી છે અને તે શ્રેણીના a અને d શોધી શકો? પ્રથમ પદ a હોવાથી, તે સહેલાઈથી લખી શકાય. આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પદમાં અચળ સંખ્યા ઉમેરી પછીનું પદ મેળવી શકાય. તે ઉમેર્યા બાદ કોઈ પણ પદમાંથી આગળના પદની બાદબાકી કરતાં d મળી શકે, અર્થાત્, આ રીતે મળેલ પદ સમાંતર શ્રેણી માટે સમાન હોવું જોઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે સંખ્યાઓની યાદી

$$6, 9, 12, 15, \ldots, \text{ માટે}$$

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$

$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$

$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

અહીં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો તફાવત પ્રત્યેક વિકલ્પમાં 3 છે. આથી, આપેલ પદ સમાંતર શ્રેણીનાં પદ છે. તેનું પ્રથમ પદ $a = 6$ અને સામાન્ય તફાવત $d = 3$ છે.

સંખ્યાઓની યાદી

$$6, 3, 0, -3, \ldots, \text{ માટે}$$

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$$

$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3,$$

$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

આ જ પ્રમાણે, આ પણ એક સમાંતર શ્રેણી છે. તેનું પ્રથમ પદ 6 અને સામાન્ય તફાવત –3 છે.

વ્યાપક રીતે, સમાંતર શ્રેણી $a_1, a_2, ... a_n$ માટે, a_{k+1} અને a_k એ અનુક્રમે $k+1$ માં અને k માં પદ હોય, તો

$$d = a_{k+1} - a_k$$

આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં d શોધવા પ્રત્યેક $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3 ...$ જાણવાની જરૂર નથી. આમાંથી કોઈ પણ એકની કિંમત શોધવી પર્યાપ્ત છે.

1, 1, 2, 3, 5, ... આ યાદીના આંકડા તપાસો. અહીં, કોઈ પણ બે ક્રમિક પદ વચ્ચેનો તફાવત સરખો નથી. આથી, તે સમાંતર શ્રેણી નથી.

આપણે નોંધીએ કે, 6, 3, 0, -3, ... સમાંતર શ્રેણીમાં d શોધવા આપણે 3 માંથી 6 ની બાદબાકી કરી, નહીં કે 6 માંથી 3 ની બાદબાકી. અર્થાત્ d શોધવા $(k + 1)$ માં પદમાંથી k માં પદની બાદબાકી કરવી જોઈએ. પછી ભલે $(k + 1)$ મું પદ નાનું કેમ ના હોય.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા આ સંકલ્પના વધુ સ્પષ્ટ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણી $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, ...$ માટે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d લખો.

ઉકેલ : અહીં, $a = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

આપણે નોંધીએ કે, **જો આપણે જાણતા હોઈએ કે, આપેલ પદો સમાંતર શ્રેણીમાં છે, તો કોઈ પણ બે ક્રમિક પદના તફાવત દ્વારા d શોધી શકીએ.**

ઉદાહરણ 2 : નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી છે? જો તે સમાંતર શ્રેણી હોય તો તેના પછીનાં બે પદ લખો :

(i) 4, 10, 16, 22, ... (ii) 1, – 1, – 3, – 5, ...

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, ... (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

ઉકેલ : (i) અહીં,

$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

અર્થાત્, $a_{k+1} - a_k$ હંમેશાં સમાન રહે છે.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે અને સામાન્ય તફાવત $d = 6$ છે.

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, આ જ તરાહ આગળ પણ ચાલશે.

પછીનાં બે પદ : $22 + 6 = 28$ અને $28 + 6 = 34$

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$
$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

અર્થાત્, $a_{k+1} - a_k$ હંમેશાં સમાન રહે છે.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે તથા સામાન્ય તફાવત $d = -2$ છે.

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, આ જ તરાહ આગળ પણ ચાલશે.

પછીનાં બે પદ : $-5 + (-2) = -7$ અને $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 \;\; -2 = -4$

આમ, $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$. આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

અહીં, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ પરંતુ $a_2 - a_1 \neq a_4 - a_3$.

આથી, આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલ સ્થિતિમાંથી કઈ સ્થિતિમાં સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી બને અને કેમ?

(i) ટૅક્સીનું ભાડું; પ્રથમ કિલોમીટર માટે ₹ 15 અને પછીના વધારાના પ્રત્યેક કિલોમીટર માટે ₹ 8 છે.

(ii) નળાકારમાં રહેલ હવાનું પ્રમાણ; હવા કાઢવાના પંપ દ્વારા દર વખતે નળાકારની બાકી રહેલ હવાનો $\frac{1}{4}$ ભાગ બહાર કાઢે છે.

(iii) પ્રત્યેક મીટરના ખોદકામ બાદ એક કૂવો ખોદવા માટે લાગતો ખર્ચ; પ્રથમ મીટરના ₹ 150 અને પછીના પ્રત્યેક મીટર દીઠ ₹ 50 પ્રમાણે વધતો જાય છે.

(iv) 8 % ના વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ દરથી શરૂઆતની રકમ ₹ 10000 મૂકેલ હોય, તો દર વર્ષે ખાતામાં જમા થતી રકમ

2. જ્યારે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d નાં મૂલ્યો નીચે પ્રમાણે હોય ત્યારે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદ શોધો :

(i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

(iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. નીચે આપેલ સમાંતર શ્રેણી માટે, પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો :

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. નીચેનામાંથી કઈ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે? જો તે સમાંતર શ્રેણી બનાવે તો સામાન્ય તફાવત d અને પછીનાં ત્રણ પદ લખો :

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$

(vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$

(viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) 1, 3, 9, 27, ...

(x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

(xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ

ચાલો આપણે વિભાગ 5.1માં આપેલ ઉદાહરણમાં આપેલ માહિતી પ્રમાણે જ્યાં રીના એક નોકરી માટે અરજી કરે છે અને નિયુક્તિ પામે છે તે ઉદાહરણનો ફરી વિચાર કરીએ. તેને શરૂઆતમાં માસિક ₹ 8000 અને પછીના વર્ષે ₹ 500 નો ઈજાફો (વેતન વધારો) આપવાનું નક્કી થાય છે. પાંચમા વર્ષે તેનો માસિક પગાર કેટલો હશે?

C5P9V9

આનો જવાબ શોધવા, બીજા વર્ષે તેનો માસિક પગાર કેટલો હશે તે જોઈએ.

બીજા વર્ષનો માસિક પગાર ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500 હશે. આ જ રીતે, આપણે ત્રીજા, ચોથા અને પાંચમા વર્ષે પગારની માહિતી મેળવવા માટે આગળના વર્ષના માસિક પગારની રકમમાં ₹ 500 ઉમેરી શકાય.

આમ, ત્રીજા વર્ષે મળતો માસિક પગાર = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ $(8000 + 2 \times 500)$

= ₹ $[8000 + (\mathbf{3 - 1}) \times 500]$ (ત્રીજા વર્ષ માટે)

= ₹ 9000

ચોથા વર્ષે મળતો માસિક પગાર = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ $(8000 + 3 \times 500)$

= ₹ $[8000 + (\mathbf{4 - 1}) \times 500]$ (ચોથા વર્ષ માટે)

= ₹ 9500

પાંચમા વર્ષે મળતો માસિક પગાર = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)

= ₹ $(8000 + 4 \times 500)$

= ₹ $[8000 + (\mathbf{5 - 1}) \times 500]$ (પાંચમા વર્ષ માટે)

= ₹ 10000

જુઓ કે આપણને મળતી સંખ્યાઓની યાદી,

8000, 8500, 9000, 9500, 10,000, ... છે.

આ સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. (કેમ?)

હવે, ઉપરની સંખ્યાઓની યાદી જોઈ તમે કહી શકશો કે છઠ્ઠા વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? પંદરમા વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? અને માની લઈએ કે તે હજુ નોકરી કરે છે, તો 25માં વર્ષે તેનું માસિક વેતન કેટલું હશે? આનો જવાબ મેળવવા તમે દરેક વખતે આગળના વર્ષના વેતનમાં ₹ 500 ઉમેરશો. શું આ પ્રક્રિયાને આપણે વધુ ટૂંકી બનાવી શકીએ? ચાલો જોઈએ. જે રીતે વેતનના આંકડા ઉપર મેળવ્યા તે પરથી તમને થોડો ખ્યાલ તો આવ્યો જ હશે.

15માં વર્ષે મળતું માસિક વેતન = 14માં વર્ષે મળતું વેતન + ₹ 500

$$= ₹ \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + \ldots + 500}_{13 \text{ વખત}}\right] + ₹\ 500$$

$$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹\ [8000 + (15 - 1) \times 500] = ₹\ 15{,}000$$

અર્થાત્, પ્રથમ માસિક વેતન + (15 – 1) × વાર્ષિક વેતન વધારો

આ જ રીતે, તેને 25માં વર્ષે મળતું માસિક વેતન

$$= ₹\ [8000 + (25 - 1) \times 500] = ₹\ 20{,}000$$

= પ્રથમ વેતન + (25 – 1) × વાર્ષિક વેતન વધારો

આ ઉદાહરણ પરથી તમને સમાંતર શ્રેણીનું 15મું પદ અથવા 25મું પદ અને વ્યાપક રીતે n મું પદ કઈ રીતે લખવું તેનો ખ્યાલ આવ્યો હશે.

ધારો કે, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ સમાંતર શ્રેણી છે. તેનું પ્રથમ પદ a_1 એ a અને સામાન્ય તફાવત d છે.

તો, બીજું પદ, $a_2 = a + d = a + (2 - 1)\, d$

ત્રીજું પદ, $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)\, d$

ચોથું પદ, $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)\, d$

. . . .

. . . .

આમ, આપણે કહી શકીએ કે n મું પદ $a_n = a + (n - 1)\, d$.

આથી, ***પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $a_n = a + (n - 1)\, d$ દ્વારા મળે.***

a_n ને સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ પણ કહેવાય છે. જો સમાંતર શ્રેણીમાં m પદો હોય તો a_m તેનું અંતિમ પદ દર્શાવે છે. તેને ઘણી વખતે l દ્વારા પણ દર્શાવાય છે.

ચાલો, કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સમાંતર શ્રેણી 2, 7, 12, ... નું 10 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ અને $n = 10$

હવે, $a_n = a + (n - 1)\, d$

$a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનું 10 મું પદ 47 છે.

ઉદાહરણ 4 : સમાંતર શ્રેણી 21, 18, 15... નું કયું પદ -81 હશે? વળી કોઈ પદ 0 હશે? સકારણ જવાબ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ અને ધારો કે $a_n = -81$

આપણે n નું મૂલ્ય શોધવું છે.

$a_n = a + (n - 1)\, d$ હોવાથી,

$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$

$$\therefore\ -81 = 24 - 3n$$

$$\therefore\ -105 = -3n$$

$$\therefore\ n = 35$$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનું 35મું પદ −81 થાય.

હવે, આપણે એ જાણવું છે કે $a_n = 0$ થાય તેવો ધન પૂર્ણાંક n શક્ય છે? જો આવો ધન પૂર્ણાંક n શક્ય હોય તો,

$$21 + (n - 1)(-3) = 0$$

$$\therefore\ 3(n - 1) = 21$$

$$\therefore\ n = 8$$

આથી, આઠમું પદ 0 બને.

ઉદાહરણ 5 : જેનું ત્રીજું પદ 5 અને 7 મું પદ 9 હોય એવી સમાંતર શ્રેણી શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5$ (1)

અને $a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9$ (2)

સુરેખ સમીકરણયુગ્મ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં,

$a = 3$ અને $d = 1$ મળે.

આથી, માંગેલ સમાંતર શ્રેણી 3, 4, 5, 6, 7, ... છે.

ઉદાહરણ 6 : ચકાસો કે 301 એ 5, 11, 17, 23, ... સંખ્યાની યાદીનું કોઈ પદ છે કે નહીં?

ઉકેલ : અહીં,

$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$, $a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

$a_{k+1} - a_k$ નું મૂલ્ય $k = 1, 2, 3$ વગેરે માટે સમાન હોવાથી આપેલ સંખ્યાની યાદી સમાંતર શ્રેણી છે.

હવે, $a = 5$ અને $d = 6$.

ધારો કે, સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ 301 છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

આથી, $$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

$$\therefore\ 301 = 6n - 1$$

$$\therefore\ n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

પરંતુ, n ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા જ હોવો જોઈએ. (કેમ?)

આથી, આપેલ યાદીનું કોઈ પણ પદ 301 ના હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 7 : બે અંકની કેટલી સંખ્યાઓ 3 વડે વિભાજ્ય હશે ?

ઉકેલ : 3 વડે વિભાજ્ય બે અંકની સંખ્યાઓ :

12, 15, 18,..., 99 છે.

શું આ સમાંતર શ્રેણી છે ? હા. અહીં, $a = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$.

$a_n = a + (n - 1)\,d$ હોવાથી,

$$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

$$\therefore \quad 87 = (n - 1) \times 3$$

$$\therefore \quad n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$\therefore \quad n = 29 + 1 = 30$$

આમ, 3 વડે વિભાજ્ય બે અંકના પૂર્ણાંકોની સંખ્યા 30 છે.

ઉદાહરણ 8 : સમાંતર શ્રેણી 10, 7, 4,..., –62 માં છેલ્લેથી (પ્રથમ પદ તરફ) 11મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$.

$$l = a + (n - 1)\,d$$

છેલ્લેથી 11મું પદ શોધવા, આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં કેટલાં પદ છે તે શોધીશું.

$$-62 = 10 + (n - 1)(-3)$$

$$\therefore \; -72 = (n - 1)(-3)$$

$$\therefore \; n - 1 = 24$$

$$\therefore n = 25$$

આમ, આપેલ સમાંતર શ્રેણીમાં 25 પદ છે.

છેલ્લેથી 11મું પદ એ 15મું પદ બને. (આપણે નોંધીએ કે તે 14મું પદ નહિ હોય. કેમ ?)

આથી, $\quad a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

આથી, છેલ્લેથી 11મું પદ -32 છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ :

જો આપેલ સમાંતર શ્રેણીના પદ ઊલટા ક્રમમાં લખીએ, તો $a = -62$ અને $d = 3$ (કેમ ?)

આથી, આ પ્રશ્ન a અને d નાં મૂલ્યો પરથી 11મું પદ શોધવાનો બને.

આથી, $\quad a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

આથી, છેલ્લેથી માંગેલ 11 માં પદનું મૂલ્ય -32 થાય.

ઉદાહરણ 9 : ₹ 1000ની રકમ 8 % વાર્ષિક સાદા વ્યાજ પર મૂકવામાં આવે છે. દરેક વર્ષને અંતે મળતા વ્યાજની ગણતરી કરો. શું આ વ્યાજ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે ? જો હા, તો 30 વર્ષના અંતે મળતા વ્યાજની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સાદા વ્યાજની ગણતરી માટે

સાદું વ્યાજ $= \dfrac{P \times R \times T}{100}$ સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

આથી, પ્રથમ વર્ષના અંતે વ્યાજ = ₹ $\dfrac{1000 \times 8 \times 1}{100}$

= ₹ 80

બીજા વર્ષના અંતે વ્યાજ = ₹ $\dfrac{1000 \times 8 \times 2}{100}$

= ₹ 160

ત્રીજા વર્ષના અંતે વ્યાજ = ₹ $\dfrac{1000 \times 8 \times 3}{100}$

= ₹ 240

આ જ રીતે, ચોથા, પાંચમા વગેરે વર્ષ માટે વ્યાજ મેળવી શકાય.

આથી, પહેલા, બીજા, ત્રીજા ... વર્ષના અંતે મળતા વ્યાજ (₹ માં) અનુક્રમે 80, 160, 240, ... છે.

આ એક સમાંતર શ્રેણી છે કારણ કે બે ક્રમિક પદનો તફાવત 80 છે. અર્થાત્ $d = 80$. વળી, $a = 80$.

આથી, 30 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ શોધવા આપણે a_{30} શોધીશું.

$$a_{30} = a + (30 - 1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

આમ, 30 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ ₹ 2400 હશે.

ઉદાહરણ 10 : ફૂલોની એક ક્યારીમાં પ્રથમ હારમાં 23 ગુલાબના છોડ, બીજી હારમાં 21 ગુલાબના છોડ, ત્રીજી હારમાં 19 ગુલાબના છોડ, વગેરે છે. તેની છેલ્લી હારમાં 5 ગુલાબના છોડ છે. આ ક્યારામાં કુલ કેટલી હાર હશે ?

ઉકેલ : પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય, ... હારમાં ગુલાબના છોડની સંખ્યા

23, 21, 19, ..., 5 છે.

આ સંખ્યાઓ એક સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. (કેમ ?)

ધારો કે હારની સંખ્યા n છે.

અહીં, $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$, $a_n = 5$

હવે, $a_n = a + (n - 1)\,d$

આથી, $5 = 23 + (n - 1)(-2)$

$\therefore\ -18 = (n - 1)(-2)$

$\therefore\ n = 10$

આથી, ફૂલની ક્યારીમાં 10 હાર છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. નીચેના કોષ્ટકમાં સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a, સામાન્ય તફાવત d અને n મું પદ a_n છે. ખાલી જગા પૂરો :

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	...
(ii)	–18	...	10	0
(iii)	...	–3	18	–5
(iv)	–18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

2. નીચેનામાંથી સાચો જવાબ શોધો અને ચકાસો :

(i) સમાંતર શ્રેણી 10, 7, 4, ... નું 30 મું પદ .... છે.

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) –87

(ii) સમાંતર શ્રેણી $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$ નું 11 મું પદ .... છે.

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. નીચેની સમાંતર શ્રેણીમાં ખાલી ખાનાનાં પદ શોધો :

(i) 2, $\square$, 26

(ii) $\square$, 13, $\square$, 3

(iii) 5, $\square$, $\square$, $9\frac{1}{2}$

(iv) –4, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 6

(v) $\square$, 38, $\square$, $\square$, $\square$, –22

4. સમાંતર શ્રેણી 3, 8, 13, 18, ... નું કેટલામું પદ 78 થાય ?

5. નીચેની સમાંતર શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા શોધો :

(i) 7, 13, 19, ..., 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13, ..., –47

6. સમાંતર શ્રેણી 11, 8, 5, 2 ... નું કોઈ પદ –150 હોઈ શકે ?

7. સમાંતર શ્રેણીનું 11 મું પદ 38 અને 16 મું પદ 73 હોય તો તેનું 31મું પદ શોધો.

8. એક સમાંતર શ્રેણીમાં 50 પદ છે. જો ત્રીજું પદ 12 અને છેલ્લું પદ 106 હોય, તો તેનું 29 મું પદ શોધો.

9. જો સમાંતર શ્રેણીનું ત્રીજું અને નવમું પદ અનુક્રમે 4 અને –8 હોય, તો તે શ્રેણીનું કયું પદ 0 થાય ?

10. કોઈ સમાંતર શ્રેણીમાં 17 મું પદ 10 માં પદ કરતાં 7 વધુ છે. તેનો સામાન્ય તફાવત શોધો.

11. સમાંતર શ્રેણી 3, 15, 27, 39, ... નું કયું પદ 54 માં પદ કરતાં 132 વધુ હશે ?

12. બે સમાંતર શ્રેણીના સામાન્ય તફાવત સમાન છે. તેમના 100 માં પદનો તફાવત 100 હોય તો 1000 મા પદનો તફાવત કેટલો હશે ?

13. ત્રણ અંકની કેટલી સંખ્યા 7 વડે વિભાજ્ય હશે ?

14. 10 અને 250 વચ્ચે 4 ના કેટલા ગુણિત હશે ?

15. n ના કયા મૂલ્ય માટે બે સમાંતર શ્રેણીઓ 63, 65, 67,... અને 3, 10, 17, ...ના n માં પદ સમાન થાય ?

16. એવી સમાંતર શ્રેણી શોધો કે જેનું ત્રીજું પદ 16 અને 7 મું પદ 5 માં પદથી 12 વધુ હોય.

17. 3, 8, 13, ..., 253 સમાંતર શ્રેણી હોય, તો તેનું છેલ્લેથી 20 મું પદ શોધો.

18. એક સમાંતર શ્રેણીના ચોથા અને આઠ માં પદનો સરવાળો 24 છે. અને છઠ્ઠા અને દસ માં પદનો સરવાળો 44 છે. આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદ શોધો.

19. સુબ્બા રાવે 1995 માં ₹ 5000 ના વાર્ષિક વેતનથી કામ શરૂ કર્યું અને તેમને દર વર્ષે માસિક ₹ 200 ની વેતન વૃદ્ધિ મળે છે. કયા વર્ષે તેમનું વેતન ₹ 7000 થશે ?

20. રામકલી વર્ષના પ્રથમ અઠવાડિયે ₹ 5 ની બચત કરે છે. અને પછી તેની અઠવાડિક બચતમાં ₹ 1.75 નો વધારો કરે છે. જો n માં અઠવાડિયે તેની બચત ₹ 20.75 હોય તો n નું મૂલ્ય શોધો.

5.4 સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો

આવો આપણે વિભાગ 5.1 માં આપેલ પરિસ્થિતિનો ફરી વિચાર કરીએ, તેમાં શકીલા તેની પુત્રીના ગલ્લામાં, તે જ્યારે 1 વર્ષની હતી ત્યારે ₹ 100 મૂકે છે અને બીજા જન્મદિવસે ₹ 150 મૂકે છે, ત્રીજા જન્મ દિવસે ₹ 200 મૂકે છે, અને આ રીતે આગળ વધે છે. તે જ્યારે 21 વર્ષની હશે ત્યારે ગલ્લામાં કેટલા રૂપિયા જમા થયા હશે ?

P3N5I7

અહીં, ગલ્લામાં મૂકાતી રકમ (₹ માં) પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા,... જન્મદિવસે અનુક્રમે 100, 150, 200, 250, ... હશે. અને આ જ ક્રમ 21માં જન્મદિવસ સુધી ચાલશે. 21માં જન્મદિવસે ગલ્લાની કુલ રકમ શોધવા આપણે ઉપરની યાદી પ્રમાણે 21 સંખ્યાઓ લખી તેનો સરવાળો કરવો જોઈએ. તમને નથી લાગતું કે આ કંટાળાજનક અને સમય દુર્વ્યય કરનાર ક્રિયા છે ? શું આપણે આ પ્રક્રિયાને ટૂંકી બનાવી શકીએ ? જો આપણે સરવાળો શોધવાની કોઈ રીત શોધી શકીએ તો જ આ શક્ય છે. ચાલો જોઈએ.

ગોસ (જેના વિશે આપણે પ્રકરણ 1માં વાંચી ગયાં છીએ) જ્યારે 10 વર્ષના હતા ત્યારે તેમણે આપેલ પ્રશ્નના ઉકેલ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું. તેમને 1 થી 100 સુધીના ધન પૂર્ણાંકનો સરવાળો કરવાનું કહેવામાં આવેલું. તેમણે તરત જ જવાબ આપ્યો કે સરવાળો 5050 છે. શું તમે વિચારી શકો કે તેમણે આ કેવી રીતે વિચાર્યું હશે ? તેમણે

$S = 1 + 2 + 3 + . . . + 99 + 100$ લખ્યું.

અને પૂર્ણાંકોનો ક્રમ બદલી,

$S = 100 + 99 + ... + 3 + 2 + 1$ એમ લખ્યું.

બંનેનો સરવાળો કરતાં,

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + ... + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + ... + 101 + 101 \quad \text{(100 વખત)}$$

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$ અર્થાત્ સરવાળો = 5050

આપણે આ જ સંકલ્પનાનો ઉપયોગ સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, ...$ નાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો શોધીશું :

આ સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $a + (n - 1) d$ છે.

ધારો કે S આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + . . . + [a + (n - 1) d] \quad (1)$$

પદનો ક્રમ બદલી પુનઃ લખતાં,

$$S = [a + (n - 1) d] + [a + (n - 2) d] + . . . + (a + d) + a \quad (2)$$

(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+....+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{(n \text{ વખત})}$$

અથવા $2S = n [2a + (n - 1) d]$ (કારણ કે પદોની સંખ્યા n છે અને બધા સમાન છે.)

અથવા $S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

આથી, સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદનો સરવાળો નીચેના સૂત્રથી મળે છે.

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

આપણે તેને $S = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1) d]$ તરીકે પણ લખી શકીએ.

અર્થાત્
$$S = \frac{n}{2} (a + a_n) \quad (3)$$

હવે, જો સમાંતર શ્રેણીમાં પદોની કુલ સંખ્યા n હોય, તો અંતિમ પદ $a_n = l$

(3) પરથી, આપણે કહી શકીએ કે

$$S = \frac{n}{2} (a + l) \quad (4)$$

જ્યારે સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ અને અંતિમ પદ આપેલ હોય અને સામાન્ય તફાવત આપેલ ના હોય ત્યારે આ પરિણામ ઉપયોગી બને છે.

હવે, આપણે શરૂઆતમાં તથા ઉપર ઉપસ્થિત કરેલા પ્રશ્ન પર પાછા ફરીએ. શકીલાની પુત્રીના ગલ્લાની રકમ તેના પહેલા, બીજા, ત્રીજા, ચોથા, ... જન્મદિવસે અનુક્રમે (₹ માં) 100, 150, 200, 250, ... હતી.

આ એક સમાંતર શ્રેણી છે. આપણે તેની 21મી વર્ષગાંઠે કુલ કેટલા રૂપિયા ભેગા થયા હશે તે જાણવું છે. અર્થાત્, સમાંતર શ્રેણીનાં 21 પદનો સરવાળો કરવાનો છે.

અહીં, $a = 100$, $d = 50$ અને $n = 21$ માટે સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

આપણને $$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50]$$ મળે.

$$\therefore S = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

આમ, 21 માં જન્મ દિવસે ગલ્લામાં ભેગી થયેલી રકમ કુલ ₹ 12600 હશે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવાથી ગણતરી સરળ નથી બની?

હવેથી આપણે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદના સરવાળાને S ને બદલે S_n થી દર્શાવીશું. આપણે સમાંતર શ્રેણીનાં 20 પદોનો સરવાળો દર્શાવવા માટે S_{20} લખીશું. પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્રમાં કુલ ચાર રાશિ S, a, d અને n નો ઉપયોગ થાય છે. જો આપણે તે પૈકી ત્રણ જાણતા હોઈએ તો ચોથી રાશિ શોધી શકાય.

નોંધ : સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ, તેનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળા તથા પ્રથમ $(n-1)$ પદોના સરવાળાના તફાવત જેટલું હોય છે. અર્થાત્ $\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ :

ઉદાહરણ 11 : સમાંતર શ્રેણી 8, 3, –2,... નાં પ્રથમ 22 પદનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

આથી, $$S_{22} = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

આથી, આપેલ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 22 પદોનો સરવાળો –979 છે.

ઉદાહરણ 12 : સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 14 પદોનો સરવાળો 1050 હોય અને તેનું પ્રથમ પદ 10 હોય, તો તે શ્રેણીનું 20 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

હવે, $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

આથી, $$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d]$$

$$= 140 + 91d$$

$$\therefore 910 = 91d$$

$$\therefore d = 10$$

આથી, $a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$. અર્થાત્ 20 મું પદ 200 છે.

ઉદાહરણ 13 : સમાંતર શ્રેણી 24, 21, 18,.... નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 78 થાય.

ઉકેલ : અહીં, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. આપણે n નું મૂલ્ય શોધવું છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

અહીં, $78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)]$

$= \frac{n}{2}(51 - 3n)$

$\therefore\ 3n^2 - 51n + 156 = 0$

$\therefore\ n^2 - 17n + 52 = 0$

$\therefore\ (n-4)(n-13) = 0$

$\therefore\ n = 4$ અથવા 13

n નાં બંને મૂલ્યો શક્ય છે આથી, માંગેલ પદની સંખ્યા 4 અથવા 13 થાય.

નોંધ :

1. આ ઉદાહરણમાં પ્રથમ ચાર પદનો સરવાળો = પ્રથમ 13 પદનો સરવાળો = 78
2. આ બંને જવાબ શક્ય છે કેમ કે 5 માં પદથી 13 માં પદનાં મૂલ્યોનો સરવાળો 0 બને છે. આ શક્ય છે કેમ કે a નું મૂલ્ય ધન અને d નું મૂલ્ય ઋણ છે. આથી, કેટલાંક પદ ધન અને બાકીનાં પદ ઋણ બનશે અને આથી કુલ સરવાળો 0 બનાવશે.

ઉદાહરણ 14 : સરવાળો શોધો :

(i) પ્રથમ 1000 ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (ii) પ્રથમ n ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

ઉકેલ :

(i) ધારો કે, $S_{1000} = 1 + 2 + 3 + ... + 1000$

સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્ર,

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$

આથી, પ્રથમ 1000 ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો 500500 થાય.

(i) ધારો કે, $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

અહીં, $a = 1$ અને અંતિમ પદ $l = n$ છે.

આથી, $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ અથવા $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

આથી, **પ્રથમ n ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો**

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ મળશે.}$$

ઉદાહરણ 15 : જો n મું પદ $a_n = 3 + 2n$ હોય, તો સંખ્યાઓની આ યાદીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : $a_n = 3 + 2n$, હોવાથી,

$$a_1 = 3 + 2 = 5$$
$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$
$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$
$$\vdots$$

આથી, સંખ્યાઓની યાદી 5, 7, 9, 11,... બને.

અહીં, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ વગેરે.

આથી, તે સમાંતર શ્રેણી બને છે. સામાન્ય તફાવત $d = 2$.

S_{24} શોધવા, $n = 24, a = 5, d = 2$

$$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12[10 + 46]$$
$$= 672$$

આમ, શ્રેણીનાં પ્રથમ 24 પદોનો સરવાળો 672 થશે.

નોંધ : $a_n - a_{n-1}$

$= (3 + 2n) - [3 + 2(n - 1)]$

$= 2n - 2n + 2 = 2$

$\therefore$ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે તથા સામાન્ય તફાવત $= 2$

ઉદાહરણ 16 : ટીવી સેટના ઉત્પાદકે ત્રીજા વર્ષે 600 ટીવી અને 7 માં વર્ષે 700 ટીવી બનાવ્યાં છે. તે માને છે કે દરેક વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા એક સમાન વધતી હોવી જોઈએ. તો

(i) પ્રથમ વર્ષનું ઉત્પાદન (ii) 10 માં વર્ષનું ઉત્પાદન

(iii) પ્રથમ 7 વર્ષમાં કુલ ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : દરેક વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા સમાન રીતે વધતી હોવાથી,

પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય... વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા એક સમાંતર શ્રેણી બનાવશે.

ધારો કે n મા વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા a_n છે.

આથી, $a_3 = 600$ અને $a_7 = 700$

અથવા $a + 2d = 600$ અને $a + 6d = 700$

સમીકરણો ઉકેલતાં, આપણને $d = 25$ અને $a = 550$ મળે છે.

આથી, પ્રથમ વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા 550 હશે.

(ii) હવે, $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

આથી, 10 માં વર્ષે ઉત્પાદિત ટીવીની સંખ્યા 775 છે.

(iii) વળી, $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

આથી, પ્રથમ 7 વર્ષમાં ઉત્પાદિત ટીવીની કુલ સંખ્યા 4375 છે.

સ્વાધ્યાય 5.3

1. નીચે આપેલ સમાંતર શ્રેણી માટે માંગ્યા પ્રમાણે સરવાળો શોધો :

(i) 2, 7, 12, ... 10 પદ સુધી (ii) –37, –33, –29,... 12 પદ સુધી

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, ..., 100 પદ સુધી (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, ...$ 11 પદ સુધી

2. નીચેના સરવાળા શોધો : (સમાંતર શ્રેણી આપેલ છે.)

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ... + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + ... + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + ... + (-230)$

3. સમાંતર શ્રેણીમાં

(i) $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$ આપેલ હોય, તો n અને S_n શોધો.

(ii) $a = 7$, $a_{13} = 35$ આપેલ હોય, તો d અને S_{13} શોધો.

(iii) $a_{12} = 37$, $d = 3$ આપેલ હોય, તો a અને S_{12} શોધો.

(iv) $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$ આપેલ હોય, તો d અને a_{10} શોધો.

(v) $d = 5$, $S_9 = 75$ આપેલ હોય, તો a અને a_9 શોધો.

(vi) $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$ આપેલ હોય, તો n અને a_n શોધો.

(vii) $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$ આપેલ હોય, તો n અને d શોધો.

(viii) $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$ આપેલ હોય, તો n અને a શોધો.

(ix) $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$ આપેલ હોય, તો d શોધો.

(x) $l = 28$, $S = 144$ હોય અને પદોની સંખ્યા 9 હોય, તો a શોધો.

4. સમાંતર શ્રેણી 9, 17, 25, ... નાં કેટલાં પદનો સરવાળો 636 થાય ?

5. સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 5, અંતિમ પદ 45 અને સરવાળો 400 છે. શ્રેણીનાં પદોની સંખ્યા અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

6. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ પદ અને અંતિમ પદ અનુક્રમે 17 અને 350 છે. જો સામાન્ય તફાવત 9 હોય તો તેમાં કેટલાં પદ હશે અને તેમનો સરવાળો કેટલો થશે ?

7. જે સમાંતર શ્રેણીમાં $d = 7$ અને 22 મું પદ 149 હોય, તેનાં 22 પદોનો સરવાળો શોધો.

8. સમાંતર શ્રેણીનું બીજું અને ત્રીજું પદ અનુક્રમે 14 અને 18 હોય તો તેનાં પ્રથમ 51 પદોનો સરવાળો શોધો.

9. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 7 પદોનો સરવાળો 49 અને 17 પદોનો સરવાળો 289 હોય તો, તેનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધો.

10. a_n નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

સાબિત કરો કે, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. વળી, દરેકમાં પ્રથમ 15 પદોનો સરવાળો શોધો.

11. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $4n - n^2$ હોય, તો તેનું પ્રથમ પદ કયું હશે (અર્થાત્ S_1) ? પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો કેટલો હશે ? બીજું પદ કયું હશે ? આ જ રીતે ત્રીજું, 10 મું અને n મું પદ શોધો.

12. 6 વડે વિભાજ્ય પ્રથમ 40 ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

13. 8 ના પ્રથમ 15 ગુણિતોનો સરવાળો શોધો.

14. 0 અને 50 વચ્ચેના અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

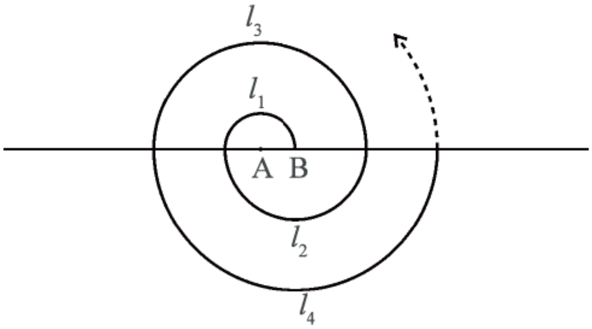
15. નિર્માણ કામ માટે થયેલ કરારમાં નિશ્ચિત તારીખ કરતાં વિલંબથી પૂરા થતા કામ માટે નીચે પ્રમાણેના દંડની જોગવાઈ છે :

પ્રથમ દિવસ માટે ₹ 200, બીજા દિવસ માટે ₹ 250, ત્રીજા દિવસ માટે ₹ 300 વગેરે. પ્રત્યેક દિવસ માટે દંડની રકમ આગળના દિવસ કરતાં ₹ 50 વધુ છે. જો કોન્ટ્રાક્ટર 30 દિવસનો વિલંબ કરે તો તેણે ભરવી પડતી દંડની રકમ શોધો.

16. કોઈ એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓના સમગ્ર શૈક્ષણિક પ્રદર્શન માટે અપાતા 7 ઈનામો માટે કુલ ₹ 700 ની જોગવાઈ કરવાની છે. જો પ્રત્યેક ઈનામ આગળના ઈનામ કરતાં ₹ 20 ઓછું હોય, તો પ્રત્યેક ઈનામની રકમ શોધો.

17. એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓ વાયુ પ્રદૂષણ ઓછું કરવા માટે શાળાની અંદર અને બહાર વૃક્ષ વાવવાનું વિચારે છે. એવું નક્કી કરાયું કે પ્રત્યેક ધોરણનો પ્રત્યેક વિભાગ તે જે ધોરણમાં ભણતા હોય તેટલાં વૃક્ષ વાવશે. દાખલા તરીકે ધોરણ I નો વિભાગ 1 વૃક્ષ, ધોરણ II નો વિભાગ 2 વૃક્ષ અને આવું ધોરણ XII સુધી ચાલશે. દરેક ધોરણમાં ત્રણ વિભાગ છે. આ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા કેટલાં વૃક્ષનું વાવેતર થશે ?

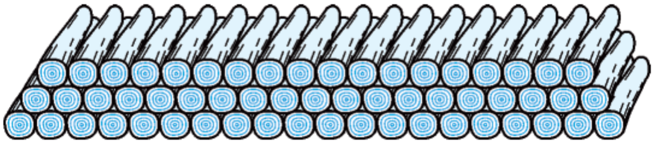
18. વારાફરતી A અને B ને કેન્દ્ર લઈ ક્રમિક અર્ધવર્તુળોની મદદથી એક કુંતલ (Spiral) બનાવેલ છે. તેની શરૂઆત A થી થાય છે. આકૃતિ 5.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રિજ્યાઓ 0.5 સેમી, 1.0 સેમી, 1.5 સેમી, 2.0 સેમી ... હોય તો આવા 13 ક્રમિક અર્ધવર્તુળોથી બનતા કુંતલની લંબાઈ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 5.4

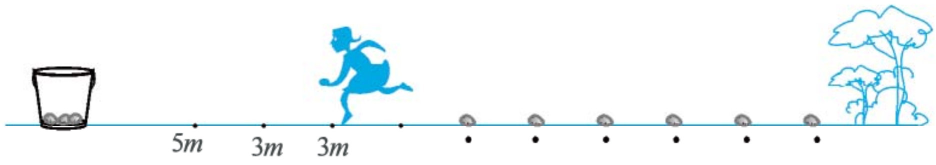
[**સૂચન :** ક્રમિક અર્ધવર્તુળની લંબાઈ $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ અને કેન્દ્રો અનુક્રમે A, B, A, B ... છે.]

19. લાકડાના 200 ગોળવા નીચે પ્રમાણે ગોઠવવામાં આવે છે : તળિયાની હારમાં 20 ગોળવા, તેની ઉપરની હારમાં 19 ગોળવા, તેની ઉપરની હારમાં 18 ગોળવા વગેરે. (જુઓ આકૃતિ 5.5.) આવા 200 ગોળવા ગોઠવવા માટે કેટલી હાર થશે અને સૌથી ઉપરની હારમાં કેટલા ગોળવા થશે ?



આકૃતિ 5.5

20. એક બટાકા ઉપાડવાની હરીફાઈમાં આરંભ બિંદુ પર એક ડોલ રાખેલ છે અને ત્યાર બાદ તેનાથી 5મી દૂર પ્રથમ બટાકું મૂકેલ છે ત્યાર પછી દર ત્રણ મીટરે એક બટાકું સીધી રેખામાં ગોઠવેલ છે. આવાં 10 બટાકા રેખા પર મૂકેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 5.6.)



આકૃતિ 5.6

દરેક હરીફે બાલદી પાસેથી દોડી પોતાની નજીકનું બટાકું ઉપાડી, પાછા આવી બાલદીમાં નાંખવાનું છે. ત્યારબાદ આ જ પ્રમાણે બીજું, ત્રીજું એમ છેલ્લું બટાકું બાલદીમાં મૂકાય ત્યાં સુધી દોડવાનું છે. હરીફે કેટલું અંતર દોડવું પડે ?

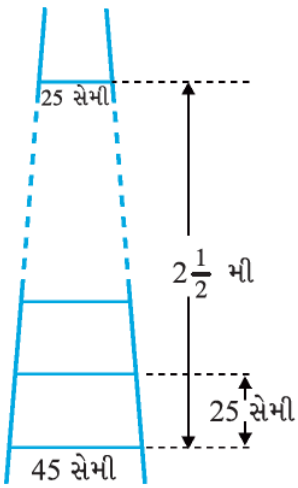
[**સૂચન :** પ્રથમ અને દ્વિતીય બટાકું ઉપાડવા હરીફ દ્વારા કપાતું અંતર (મીટરમાં) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

સ્વાધ્યાય 5.4 (વૈકલ્પિક)*

1. સમાંતર શ્રેણી 121, 117, 113, ... નું પ્રથમ ઋણ પદ કયું હશે ? (**સૂચન :** $a_n < 0$ થાય તેવો સૌથી નાનો n શોધો.)

2. કોઈ સમાંતર શ્રેણીના ત્રીજા અને સાતમાં પદનો સરવાળો 6 છે અને તેનો ગુણાકાર 8 છે. આ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 16 પદનો સરવાળો શોધો.

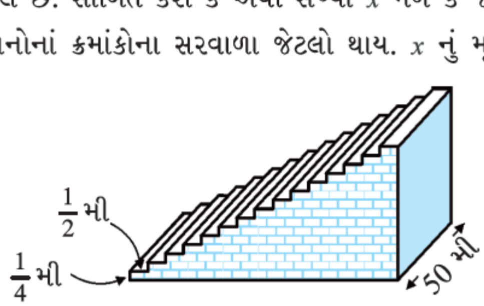
3. એક સીડીના બે ક્રમિક પગથિયાં વચ્ચેનું અંતર 25 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 5.7). સૌથી નીચેના પગથિયાની લંબાઈ 45 સેમી છે અને એકધારા ઘટાડા સાથે સૌથી ઉપરના પગથિયાની લંબાઈ 25 સેમી છે. સૌથી ઉપરના અને સૌથી નીચેના પગથિયા વચ્ચેનું અંતર $2\frac{1}{2}$ મીટર હોય, તો પગથિયામાં વપરાયેલ કુલ લાકડાની લંબાઈ શોધો. [**સૂચન :** પગથિયાંની સંખ્યા $= \frac{250}{25} + 1$]



આકૃતિ 5.7

4. એક હારમાં આવેલા મકાનોને ક્રમશઃ 1 થી 49 ક્રમાંક આપેલ છે. સાબિત કરો કે એવી સંખ્યા x મળે કે જેથી તેની આગળના મકાનના ક્રમાંકોનો સરવાળો તે પછીના મકાનોનાં ક્રમાંકોના સરવાળા જેટલો થાય. x નું મૂલ્ય શોધો. [**સૂચન :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. ફૂટબોલના એક મેદાનમાં 15 પગથિયાંવાળી નાની અગાસી છે. તે પ્રત્યેકની લંબાઈ 50 મી છે અને તે નક્કર કોંક્રિટનાં બનાવેલ છે. દરેક પગથિયાંની ઊંચાઈ



આકૃતિ 5.8

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના દૃષ્ટિકોણથી નથી.

$\frac{1}{4}$ મી તથા પહોળાઈ $\frac{1}{2}$ મી છે. (જુઓ આકૃતિ 5.8) આ અગાસી બનાવવા માટે કુલ કેટલા ઘનફળ કોંક્રિટની જરૂર પડશે?

[**સૂચન :** પ્રથમ પગથિયું બનાવવા જરૂરી કોંક્રિટનું ઘનફળ $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50$ મી^{3}]

5.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. જેમાં પ્રથમ પદ સિવાયનું પ્રત્યેક પદ તેની આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરી મેળવી શકાય એવી સંખ્યાઓની યાદી **સમાંતર શ્રેણી** છે. નિશ્ચિત સંખ્યા d ને **સામાન્ય તફાવત** કહેવાય છે. સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ છે.
2. આપેલ સંખ્યાઓની યાદી $a_1, a_2, a_3, \ldots$ માટે જો $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots,$ સમાન સંખ્યા આવે અર્થાત્ જો તમામ ભિન્ન k માટે $a_{k+1} - a_k$ સમાન હોય, તો તે શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી કહેવાય.
3. સમાંતર શ્રેણી માટે જો પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો તેનું n મું પદ (અથવા વ્યાપક પદ) $a_n = a + (n - 1)\, d$ દ્વારા મળે.
4. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}\, [2a + (n - 1)\, d\,]$ દ્વારા મળે.
5. સમાંતર શ્રેણીનું છેલ્લું પદ (ધારો કે n મું પદ) l હોય તો બધાં જ પદોનો સરવાળો

   $S_n = \frac{n}{2}\, (a + l)$ દ્વારા મળે.

વાચકને નોંધ

જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $b = \frac{a+c}{2}$ અને b ને a તથા c નો સમાંતર મધ્યક કહેવાય.

B9L1L1

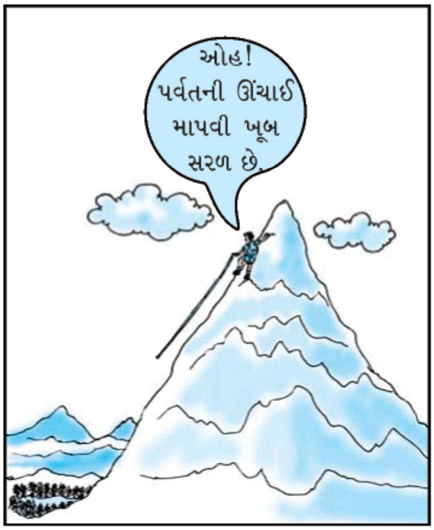
E1Y9I6

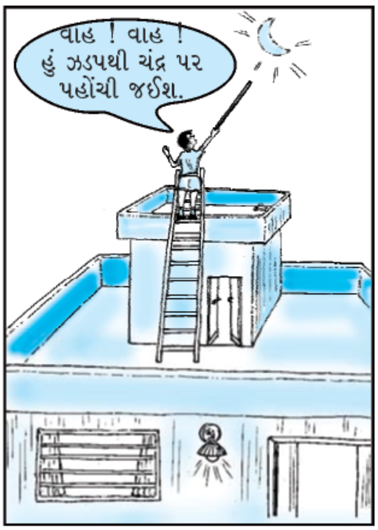
ત્રિકોણ 6

6.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે અગાઉના ધોરણમાં ત્રિકોણ અને તેના ઘણા ગુણધર્મોથી પરિચિત થયાં છો. ધોરણ IX માં તમે ત્રિકોણની એકરૂપતા વિશે વિગતવાર અભ્યાસ કર્યો છે. યાદ કરો કે જ્યારે, બે આકૃતિઓના આકાર અને કદ સમાન હોય ત્યારે, તે બે આકૃતિઓ એકરૂપ છે તેવું કહેવાય. આ પ્રકરણમાં આપણે જેના આકાર સમાન હોય, પરંતુ તેમનાં કદ સમાન હોય કે ન પણ હોય તેવી આકૃતિઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું. ***જે બે આકૃતિઓના આકાર સમાન હોય (કદ સમાન હોય તે જરૂરી નથી) તેમને સમરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.*** ખાસ કરીને, આપણે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની ચર્ચા કરીશું અને આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ અગાઉ શીખેલ પાયથાગોરસ પ્રમેયની સરળ સાબિતી આપવા માટે કરીશું.

તમે અનુમાન કરી શકો કે પર્વતો (જેમકે, માઉન્ટ એવરેસ્ટ)ની ઊંચાઈઓ અને દૂરની વસ્તુઓ (જેમકે, ચંદ્ર) નાં અંતર કેવી રીતે શોધી શકાય ? શું તમને એવું લાગે છે કે આ માપો માપપટ્ટીથી સીધાં જ માપવામાં આવ્યા છે? ખરેખર





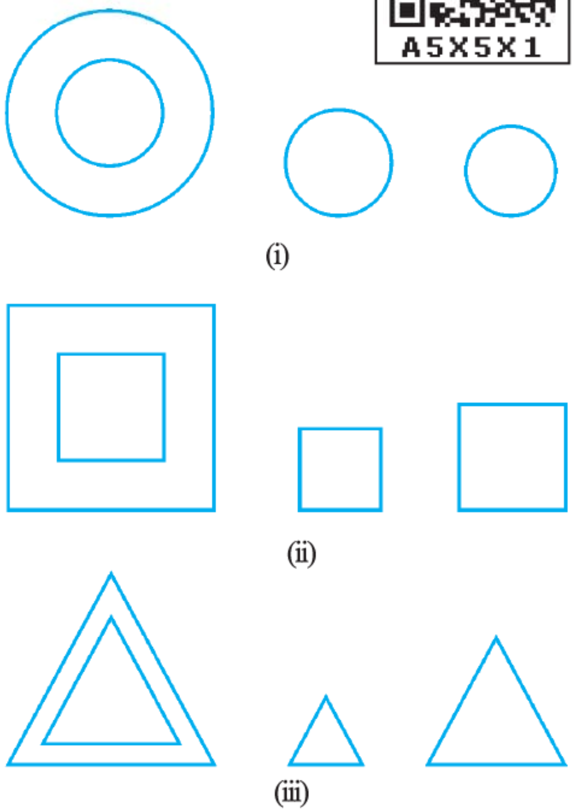
તો આ બધી ઊંચાઈઓ અને અંતરો આકૃતિઓની સમરૂપતાના સિદ્ધાંત પર આધારિત પરોક્ષ માપનની સંકલ્પનાથી શોધવામાં આવ્યાં છે. (જુઓ ઉદાહરણ 7, સ્વાધ્યાય 6.3 નો પ્રશ્ન 15 અને આ પુસ્તકનું પ્રકરણ 8 અને 9)

6.2 સમરૂપ આકૃતિઓ

A5X5X1

તમે ધોરણ IX માં જોયું છે કે, સમાન ત્રિજ્યાવાળાં તમામ વર્તુળો એકરૂપ હોય છે. સમાન બાજુવાળા બધા ચોરસો એકરૂપ હોય છે અને સમાન બાજુવાળા બધા સમબાજુ ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.

હવે આપણે કોઈ બે (અથવા વધારે) વર્તુળો વિશે વિચાર કરીએ. (જુઓ, આકૃતિ 6.1 (i)). તેઓ એકરૂપ છે ? તે બધાની ત્રિજ્યા સમાન ન હોવાથી તેઓ એકબીજાને એકરૂપ નથી. તે પૈકી કેટલાંક એકરૂપ છે અને કેટલાંક નથી. પરંતુ, તે બધાના આકાર સમાન છે. તેથી તે બધી આકૃતિઓને આપણે સમરૂપ આકૃતિઓ કહીશું. બે સમરૂપ આકૃતિઓના આકાર સરખા હોય છે, પરંતુ કદ સમાન હોય કે ન પણ હોય તે શક્ય છે. તેથી બધાં વર્તુળો સમરૂપ છે. બે (અથવા વધારે) ચોરસ કે બે (અથવા વધારે) સમબાજુ ત્રિકોણ વિશે તમને શું લાગે છે ? જુઓ આકૃતિ 6.1 (ii) અને (iii) ? જેમ વર્તુળોમાં જોયું, તેમ અહીં બધા ચોરસ અને બધા સમબાજુ ત્રિકોણ પણ સમરૂપ છે.

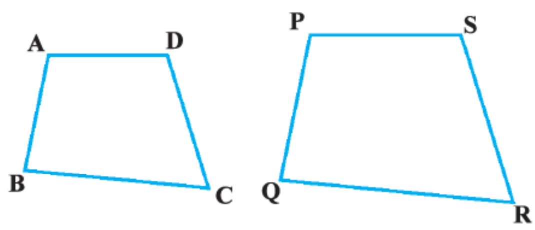


આકૃતિ 6.1

ઉપરની ચર્ચા પરથી કહી શકાય ***બધી એકરૂપ આકૃતિઓ સમરૂપ આકૃતિઓ છે, પરંતુ બધી સમરૂપ આકૃતિઓ એકરૂપ હોય તે જરૂરી નથી.***

એક વર્તુળ અને એક ચોરસ સમરૂપ થઈ શકે ? એક ત્રિકોણ અને ચોરસ સમરૂપ થઈ શકે ? આ પ્રશ્નોના જવાબ તમે તેમની અનુરૂપ આકૃતિઓ (જુઓ આકૃતિ 6.1.) જોઈને જ આપી શકશો.

સ્પષ્ટ રીતે, આ આકૃતિઓ સમરૂપ નથી. **(શા માટે ?)**



આકૃતિ 6.2

બે ચતુષ્કોણો ABCD અને PQRS વિશે શું કહી શકાય ? (આકૃતિ 6.2) તે સમરૂપ છે ? આ આકૃતિઓ સમરૂપ લાગે છે, પરંતુ તેમના વિશે ચોક્કસ ન કહી શકાય. તેથી એ જરૂરી બને છે કે, આકૃતિઓની સમરૂપતાની કોઈ વ્યાખ્યા હોય અને વ્યાખ્યા આધારિત કેટલાક માપદંડ નક્કી કરી શકાય કે આપેલી બે આકૃતિઓ સમરૂપ છે કે નહિ.

આના માટે આકૃતિ 6.3 માં આપેલ ચિત્રો જુઓ.

આકૃતિ 6.3

તમે તરત જ કહેશો કે તે ચિત્રો એક જ સ્મારક (તાજમહેલ)નાં છે પરંતુ, તેમનાં કદ ભિન્ન છે. તમે કહેશો કે આ ત્રણ ચિત્રો સમરૂપ છે ? હા, તે સમરૂપ છે.

કોઈ એક જ વ્યક્તિનાં 10 વર્ષની ઉંમરનાં તેમજ 40 વર્ષની ઉંમરના એક જ કદનાં બે ચિત્રો માટે શું કહી શકાય ? આ ચિત્રો સમરૂપ છે ? આ ચિત્રોનાં કદ સમાન છે, પરંતુ સ્પષ્ટપણે તેમના આકાર સમાન નથી. તેથી તે સમરૂપ નથી.

જ્યારે કોઈ તસવીરકાર કોઈ એક નેગેટિવમાંથી જુદા-જુદા કદના ફોટાની નકલ કાઢે છે, ત્યારે તે શું કરે છે ? તમે ટિકિટ પ્રમાણેનું કદ, પાસપોર્ટ પ્રમાણેનું કદ અને પોસ્ટકાર્ડ પ્રમાણેના કદની નકલો વિશે સાંભળ્યું હશે. તે સામાન્ય રીતે 35 મિમિ જેવી નાના કદની ફિલ્મ પર ફોટા લે છે અને પછી તેની 45 મિમિ (કે 55 મિમિ)ના કદમાં મોટવણી કરે છે. આમ, જો આપણે નાની નકલના કોઈ રેખાખંડને અનુરૂપ મોટી નકલના સંગત રેખાખંડ લઈએ તો તે મોટી નકલના અનુરૂપ રેખાખંડના $\frac{45}{35}$ (કે $\frac{55}{35}$) ગણા થશે.

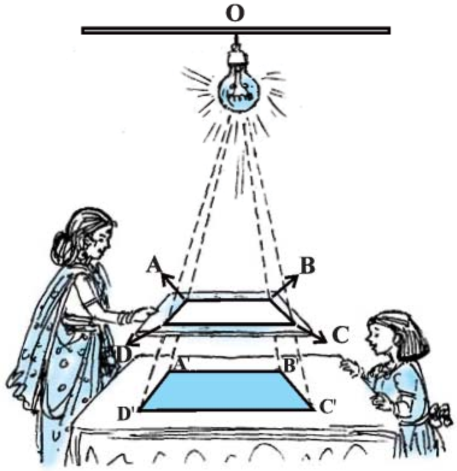
આનો અર્થ ખરેખર એવો છે કે નાની નકલના દરેક રેખાખંડને 35 : 45 (કે 35 : 55) ગુણોત્તરમાં મોટો કરી શકાય છે. એવું પણ કહી શકાય કે મોટી નકલના દરેક રેખાખંડને 45 : 35 (કે 55 : 35) ગુણોત્તરમાં નાનો બનાવી શકાય. વધુમાં, જો તમે જુદા-જુદા કદની બે નકલોના અનુરૂપ રેખાખંડોના ઢાળ (કે ખૂણાઓ) વિશે વિચારો તો તેમના ઢાળ (કે ખૂણાઓ) હંમેશાં સમાન છે. બે આકૃતિઓ અને વિશેષ કરીને બે બહુકોણોની સમરૂપતાનો આ સાર છે. આપણે કહી શકીએ :

જો (i) સમાન બાજુવાળા બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો તે બહુકોણો સમરૂપ છે.

આપણે ધ્યાન આપીએ કે બહુકોણ માટે સંગત બાજુઓના ગુણોત્તર ને ***સ્કેલમાપન (નિર્દેશક અપૂર્ણાંક)*** કહેવામાં આવે છે. તમે દુનિયાનો નકશો (જેમ કે, વૈશ્વિક નકશો) અને મકાનોના બાંધકામ માટે બનાવેલી રૂપરેખા વિશે સાંભળ્યું હશે. તે યોગ્ય સ્કેલમાપન અને ચોક્કસ રૂઢિને ધ્યાનમાં રાખી બનાવવામાં આવે છે.

આકૃતિઓની સમરૂપતા વધારે સ્પષ્ટ રીતે સમજવા, ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક પ્રકાશિત બલ્બને છત પરના બિંદુ O પર લગાડો અને તેની બરાબર નીચે વર્ગનું ટેબલ ગોઠવો. ચાલો આપણે એક સીધા પૂંઠામાંથી એક બહુકોણ, જેમકે, ચતુષ્કોણ ABCD કાપીએ અને આ પૂંઠાને પ્રકાશિત બલ્બ અને ટેબલ વચ્ચે ટેબલની સપાટીને સમાંતર ગોઠવીએ. તેથી ABCDનો પડછાયો ટેબલ પર પડશે. આ પડછાયાની બહારની રેખા A′B′C′D′ આંકી લો. (જુઓ આકૃતિ 6.4.)



આકૃતિ 6.4

આપણે નોંધ કરીએ કે ચતુષ્કોણ A'B'C'D' એ ચતુષ્કોણ ABCD નું વિસ્તૃત (કે વિપુલ) સ્વરૂપ છે અને તે પ્રકાશ સીધી રેખામાં ગતિ કરે છે એ પ્રકાશના ગુણધર્મને કારણે છે. તમે એ પણ નોંધ્યું હશે કે A' કિરણ OA પર છે. B' કિરણ OB પર છે, C' કિરણ OC પર છે અને D' કિરણ OD પર છે. આથી ચતુષ્કોણો A'B'C'D' અને ABCD ના આકાર સરખા છે, પરંતુ કદ જુદાં છે.

તેથી ચતુષ્કોણો, A'B'C'D' અને ચતુષ્કોણ ABCD સમરૂપ છે. આપણે એમ કહી શકીએ કે ચતુષ્કોણ ABCD એ ચતુષ્કોણ A'B'C'D' ને સમરૂપ છે.

આપણે એ પણ નોંધીશું કે, શિરોબિંદુ A' એ શિરોબિંદુ A ને સંગત છે, શિરોબિંદુ B' એ શિરોબિંદુ B ને સંગત છે, શિરોબિંદુ C' એ શિરોબિંદુ C ને સંગત છે અને શિરોબિંદુ D' એ શિરોબિંદુ D ને સંગત છે.

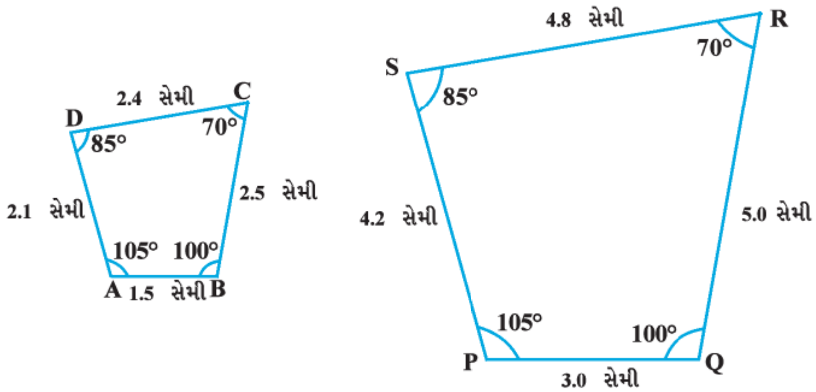
સંકેતમાં આ સંગતતાઓને $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$, $D' \leftrightarrow D$ થી દર્શાવી શકાય. હકીકતમાં, બે ચતુષ્કોણોના ખૂણાઓ તથા બાજુઓ માપીને, તમે ચકાસી શકો કે,

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ અને

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$

આ પરથી ફરીથી સ્પષ્ટ થાય છે કે ***જો (i) બે બહુકોણના બધા જ અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની બધી અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો સમાન સંખ્યાની બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ થાય.***

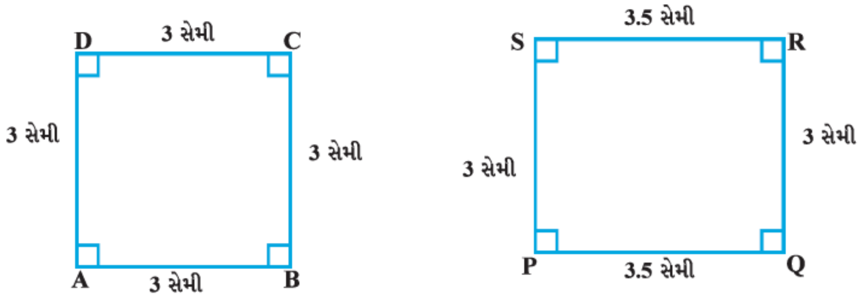
ઉપર પ્રમાણે, તમે સહેલાઈથી કહી શકશો કે આકૃતિ 6.5 માંના ચતુષ્કોણો ABCD અને PQRS સમરૂપ છે.



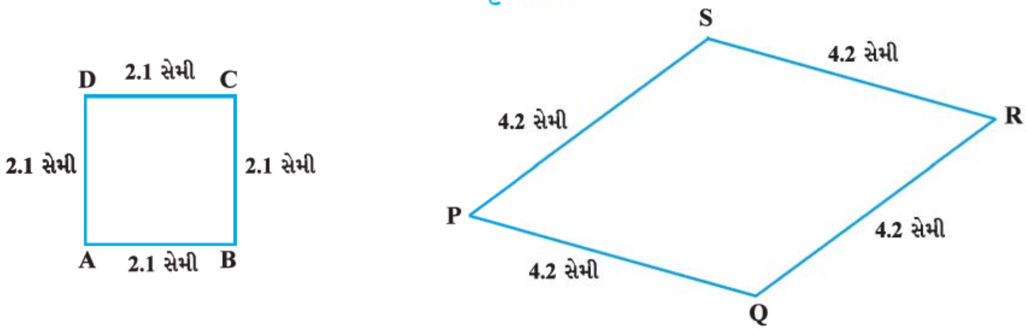
આકૃતિ 6.5

નોંધ : તમે જોઈ શકશો કે, જો એક બહુકોણ બીજા બહુકોણને સમરૂપ હોય અને બીજો બહુકોણ ત્રીજા બહુકોણને સમરૂપ હોય, તો પહેલો બહુકોણ ત્રીજા બહુકોણને સમરૂપ છે.

તમે નોંધ્યું હશે કે આકૃતિ 6.6 માંના બે ચતુષ્કોણો (ચોરસ અને લંબચોરસ)માં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે, પરંતુ, તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન નથી.



આકૃતિ 6.6



આકૃતિ 6.7

એ જ રીતે તમે નોંધ્યું હશે કે, આકૃતિ 6.7 માંના બે ચતુષ્કોણો (ચોરસ અને સમબાજુ ચતુષ્કોણ)ની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર સમાન છે. પરંતુ, તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન નથી. ફરીથી બે બહુકોણો (ચતુષ્કોણો) સમરૂપ નથી.

આમ, બે બહુકોણોની સમરૂપતા માટેની ઉપર દર્શાવેલી બે શરતો (i) અને (ii) પૈકી કોઈ એકના પાલન થવાથી બહુકોણો સમરૂપ છે તેમ કહી શકાય નહીં.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. કૌંસમાં આપેલ શબ્દો પૈકી સાચા શબ્દનો ઉપયોગ કરીને ખાલી જગા પૂરો :

(i) બધાં વર્તુળો .... છે. (એકરૂપ, સમરૂપ)

(ii) બધા ચોરસો .... છે. (સમરૂપ, એકરૂપ)

(iii) બધા .... ત્રિકોણો સમરૂપ છે. (સમદ્વિબાજુ, સમબાજુ)

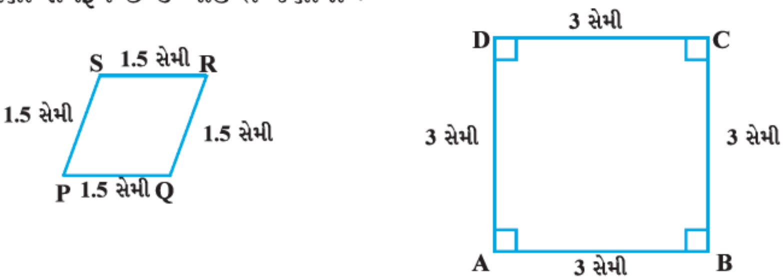
(iv) જો (અ) બે બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ .... હોય. (બ) તેમની અનુરૂપ બાજુઓ .... હોય, તો સમાન સંખ્યાની બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ છે.(સમાન, સમપ્રમાણમાં)

2. નીચેની જોડીઓનાં બે જુદાં-જુદાં ઉદાહરણો આપો :

(i) સમરૂપ આકૃતિઓ

(ii) સમરૂપ ન હોય તેવી આકૃતિઓ

3. નીચેના ચતુષ્કોણો સમરૂપ છે કે નહિ તે જણાવો :



આકૃતિ 6.8

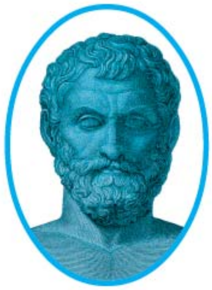
6.3 ત્રિકોણોની સમરૂપતા

R7G5V2

બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા વિશે શું કહી શકો ?

તમને યાદ હશે કે ત્રિકોણ પણ બહુકોણ છે. તેથી સમરૂપતા માટેની શરતો બે ત્રિકોણની સમરૂપતા માટે પણ દર્શાવી શકાય. તે આ પ્રમાણે છે.

જો (i) બે ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (એટલે કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય) તો, તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.



Thales
(B.C.E.640-B.C.E.546)

આપણે જાણીએ છીએ કે, જો બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તેમને સમકોણિક ત્રિકોણો કહેવાય છે. પ્રખ્યાત ગ્રીક ગણિતજ્ઞ **થેલ્સે** બે સમકોણિક ત્રિકોણો વિશે અગત્યનું પરિણામ આપ્યું હતું. તે નીચે પ્રમાણે છે :

બે સમકોણિક ત્રિકોણોમાં પ્રત્યેક અનુરૂપ બાજુઓની જોડના ગુણોત્તર સમાન હોય છે.

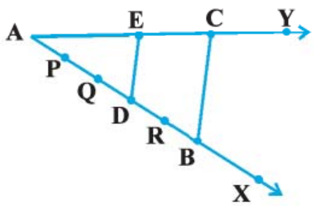
એવું માનવામાં આવે છે કે તેના માટે તેણે ***સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયના*** પરિણામનો ઉપયોગ કર્યો હતો. (તે હવે ***થેલ્સના પ્રમેય*** તરીકે જાણીતું છે.)

સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયને સમજવા માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 2 : કોઈ પણ ખૂણો (XAY) દોરો અને તેના ભુજ AX પર બિંદુઓ (કહો કે, પાંચ બિંદુઓ) P, Q, D, R અને B એવી રીતે દર્શાવો કે,

AP = PQ = QD = DR = RB.

હવે, B માંથી ભુજ AYને C માં છેદતી કોઈ રેખા દોરો (જુઓ આકૃતિ 6.9.)



આકૃતિ 6.9

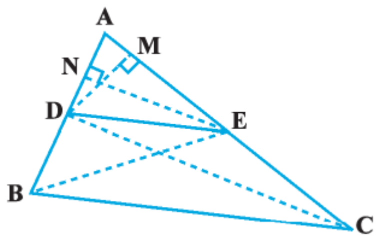
તદ્દુપરાંત, બિંદુ D માંથી AC ને E માં છેદતી તથા BC ને સમાંતર હોય તેવી રેખા દોરો.

તમારી રચના પરથી તમે અવલોકન કર્યું $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$? AE અને EC માપો. $\frac{AE}{EC}$ માટે શું કહી શકાય ?

અવલોકન કરો કે, $\frac{AE}{EC}$ પણ $\frac{3}{2}$ થશે.

આમ, તમે જોઈ શકશો કે, Δ ABCમાં, DE $\parallel$ BC અને $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. શું આ યોગાનુયોગ માત્ર છે ? ના, તે નીચેના પ્રમેયના કારણે છે. ***(આ પ્રમેય સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેય તરીકે જાણીતું છે.)***

પ્રમેય 6.1 : જો ત્રિકોણની કોઈ એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા બાકીની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો તે બાજુઓ પર કપાતા રેખાખંડો તે બાજુઓનું સમપ્રમાણમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 6.10

સાબિતી : અહીં આપેલું છે કે, ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC ને સમાંતર રેખા બાકીની બે બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.10.)

આપણે સાબિત કરવાનું છે કે, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

BE અને CD જોડો અને $DM \perp AC$ અને $EN \perp AB$ દોરો.

હવે, Δ ADE નું ક્ષેત્રફળ (= $\frac{1}{2}$ પાયો × વેધ) = $\frac{1}{2}$ AD × EN

ધોરણ IXમાં શીખ્યાં હતાં તે પ્રમાણે Δ ADEનું ક્ષેત્રફળ *ar* (ADE) વડે દર્શાવાય છે, તે યાદ કરો.

તેથી, $ar\,(ADE) = \frac{1}{2}\, AD \times EN$

એ જ રીતે $ar\,(BDE) = \frac{1}{2}\, DB \times EN$

$ar\,(ADE) = \frac{1}{2}\, AE \times DM$ અને $ar\,(DEC) = \frac{1}{2}\, EC \times DM$

તેથી, $$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN}$$

$$= \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

અને $$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM}$$

$$= \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

હવે નોંધો કે, Δ BDE અને Δ DEC એક જ પાયા DE પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડ BC અને DE વચ્ચે આવેલાં છે.

તેથી, $ar\,(BDE) = ar\,(DEC)$ (3)

તેથી, (1), (2) અને (3) પરથી

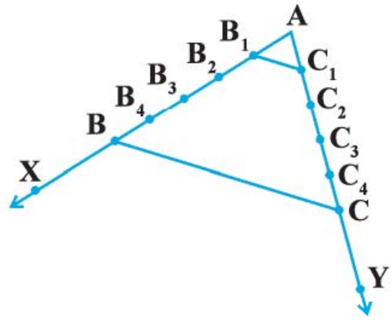
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ■

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે ? (પ્રતીપના અર્થ માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ.)

આ ચકાસવા માટે, ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 3 : તમારી નોંધપોથીમાં $\angle XAY$ દોરો અને કિરણ AX પર, બિંદુઓ B_1, B_2, B_3, B_4 અને B એવી રીતે લો કે, જેથી $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.

એ જ રીતે કિરણ AY પર બિંદુઓ C_1, C_2, C_3, C_4 અને C એવી રીતે લો કે, જેથી $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. હવે, B_1C_1 અને BC જોડો (જુઓ આકૃતિ 6.11.)



આકૃતિ 6.11

જુઓ $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (દરેક $\frac{1}{4}$ બરાબર છે.)

તમે એ પણ જોઈ શકશો કે રેખાઓ B_1C_1 અને BC એકબીજાને સમાંતર છે.

એટલે કે $B_1C_1 \parallel BC$ (1)

એ જ રીતે, B_2C_2, B_3C_3 અને B_4C_4 જોડીને જોઈ શકો કે,

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(=\frac{2}{3}\right)$ અને $B_2C_2 \parallel BC$ (2)

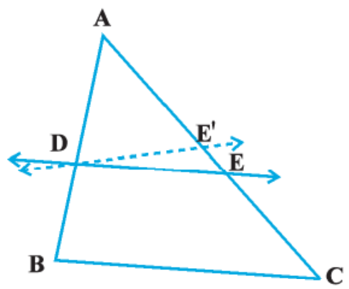
$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(=\frac{3}{2}\right)$ અને $B_3C_3 \parallel BC$ (3)

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(=\frac{4}{1}\right)$ અને $B_4C_4 \parallel BC$ (4)

(1), (2), (3) અને (4) પરથી જોઈ શકાય છે કે જો એક રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે.

તમે આ પ્રવૃત્તિનું કોઈ અલગ માપનો ખૂણો XAY દોરી અને તેના ભુજ AX અને AY પર ગમે તેટલા સમાન ભાગ પાડીને પુનરાવર્તન કરો. દરેક વખતે સમાન પરિણામ મળશે. આથી, આપણને નીચેનું પ્રમેય મળે. તે પ્રમેય 6.1નું પ્રતીપ છે.

પ્રમેય 6.2 : જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.



આકૃતિ 6.12

આ પ્રમેય સાબિત કરવા કોઈ રેખા DE એવી લો જેથી $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ થાય. અને ધારો કે, DE એ BC ને સમાંતર નથી. (જુઓ આકૃતિ 6.12.)

જો DE, BC ને સમાંતર ન હોય તો, D માંથી BC ને સમાંતર રેખા DE' દોરો.

તેથી, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (શા માટે ?)

તેથી, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (શા માટે ?)

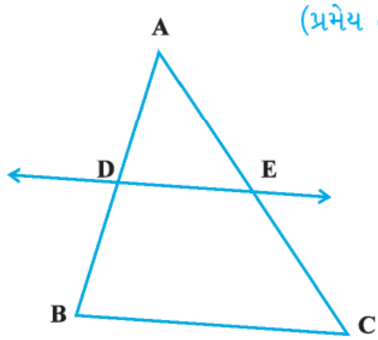
ઉપરના પરિણામમાં બંને બાજુ 1 ઉમેરતાં, જોઈ શકાય કે, E અને E' એક જ હોવા જોઈએ. (શા માટે ?)

હવે, જેમાં ઉપરના પ્રમેયોનો ઉપયોગ થતો હોય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ :

ઉદાહરણ 1 : જો કોઈ એક રેખા Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે તથા BC ને સમાંતર છે, તો સાબિત કરો કે $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (જુઓ, આકૃતિ 6.13.)

ઉકેલ : DE || BC (આપેલ છે.)

તેથી, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (પ્રમેય 6.1)



આકૃતિ 6.13

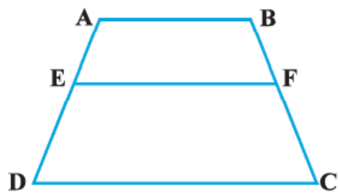
અથવા $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

અથવા $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

અથવા $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

તેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ઉદાહરણ 2 : સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC છે. બિંદુઓ E અને F અનુક્રમે તેની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ AD અને BC પર એવાં છે કે, જેથી EF, AB ને સમાંતર હોય. (જુઓ આકૃતિ 6.14.) સાબિત કરો $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

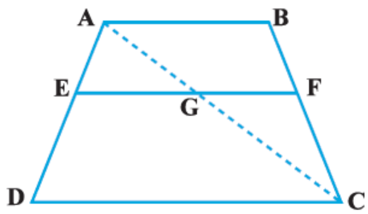


આકૃતિ 6.14

ઉકેલ : EF ને G માં છેદતી રેખા AC દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.15)

AB || DC અને EF || AB (આપેલ છે.)

તેથી, EF || DC (કોઈ એક રેખાને સમાંતર રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય.)



આકૃતિ 6.15

હવે, Δ ADC માં,

EG || DC (કારણ કે, EF || DC)

તેથી, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (પ્રમેય 6.1) (1)

એ જ રીતે, Δ CAB પરથી,

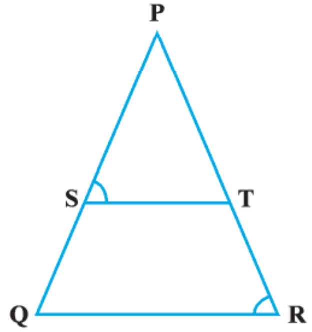
$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

એટલે કે, $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.16 માં, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ અને $\angle PST = \angle PRQ$ તો, સાબિત કરો કે Δ PQR સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 6.16

ઉકેલ : અહીં આપેલ છે કે $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

તેથી, ST || QR (પ્રમેય 6.2)

તેથી, $\angle PST = \angle PQR$ (અનુકોણો) (1)

એવું પણ આપેલ છે કે

$\angle PST = \angle PRQ$ (2)

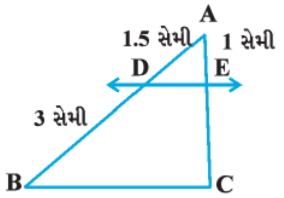
તેથી, $\angle PRQ = \angle PQR$ ((1) અને (2) પરથી)

તેથી, PQ = PR (સમાન ખૂણાની સામેની બાજુ)

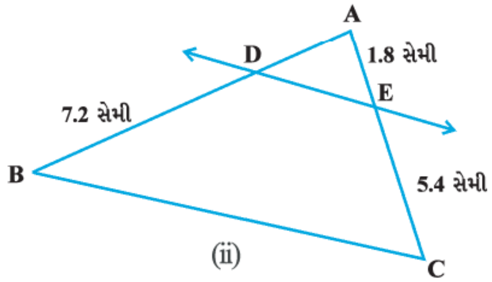
એટલે કે, PQR સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. આકૃતિ 6.17 (i) અને (ii) માં, DE || BC. (i) માં EC શોધો. (ii) માં AD શોધો.



(i)



(ii)

આકૃતિ 6.17

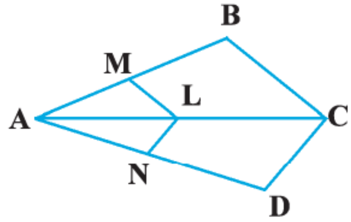
2. બિંદુઓ E અને F એ Δ PQRની બાજુઓ અનુક્રમે PQ અને PR પર આવેલાં છે. નીચેના દરેક વિકલ્પમાં EF || QR છે કે કેમ તે જણાવો :

(i) PE = 3.9 સેમી, EQ = 3 સેમી, PF = 3.6 સેમી અને FR = 2.4 સેમી

(ii) PE = 4 સેમી, QE = 4.5 સેમી, PF = 8 સેમી અને RF = 9 સેમી

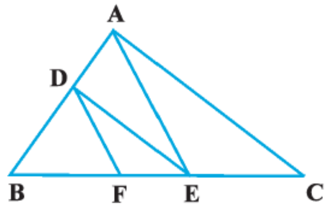
(iii) PQ = 1.28 સેમી, PR = 2.56 સેમી, PE = 0.18 સેમી
અને PF = 0.36 સેમી

3. આકૃતિ 6.18 માં, જો LM || CB અને LN || CD હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$.



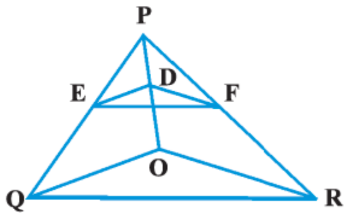
આકૃતિ 6.18

4. આકૃતિ 6.19 માં, જો DE || AC અને DF || AE હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$.



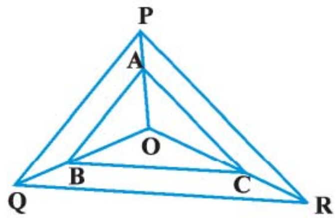
આકૃતિ 6.19

5. આકૃતિ 6.20 માં, DE || OQ અને DF || OR. સાબિત કરો EF || QR.



આકૃતિ 6.20

6. આકૃતિ 6.21 માં AB || PQ અને AC || PR બને તે રીતે બિંદુઓ A, B અને C અનુક્રમે OP, OQ અને OR પર આવેલાં છે. તો સાબિત કરો કે, BC || QR.



આકૃતિ 6.21

7. પ્રમેય 6.1 નો ઉપયોગ કરીને, સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની એકબાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર રેખા, ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે. (યાદ કરો, તમે ધોરણ IX માં આ પરિણામ સાબિત કર્યું છે.)

8. પ્રમેય 6.2 નો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની બે બાજુઓના મધ્યબિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે. (યાદ કરો તમે ધોરણ IXમાં આ પરિણામ સાબિત કર્યું છે.)

9. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC અને તેના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

10. ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે અને તેથી $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ થાય છે, તો સાબિત કરો કે, ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

6.4 ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો સિદ્ધાંત

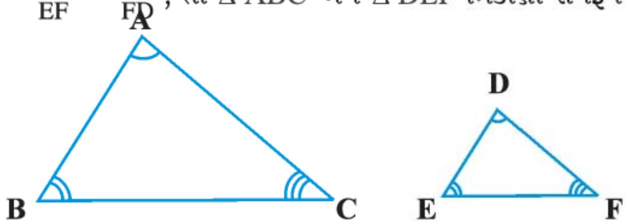
અગાઉના વિભાગમાં, આપણે જોયું છે કે જો (i) બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

M6Q5E9

એટલે કે, Δ ABC અને Δ DEF માં

જો (i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ અને

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, તો Δ ABC અને Δ DEF ત્રિકોણો સમરૂપ છે. (જુઓ આકૃતિ 6.22.)



આકૃતિ 6.22

અહીં, તમે જોશો કે A ને સંગત D, B ને સંગત E અને C ને સંગત F છે. સંકેતમાં આ બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાને 'Δ ABC ~ Δ DEF' એમ લખીશું અને તેને 'ત્રિકોણ ABC સમરૂપ ત્રિકોણ DEF' એમ વાંચીશું. સંકેત ~ નો અર્થ છે 'ને સમરૂપ છે.' યાદ કરો ધોરણ IX માં સંકેત $\cong$ નો ઉપયોગ 'ને એકરૂપ છે.' તેવું દર્શાવવા કરેલો.

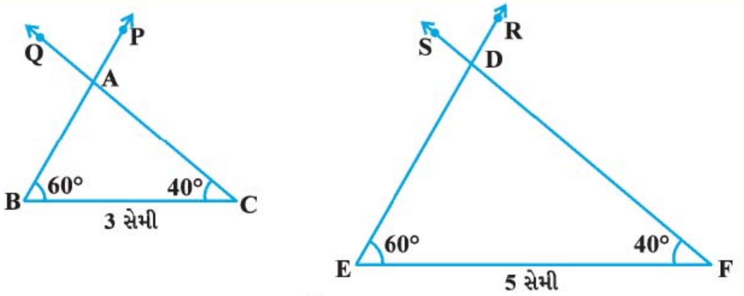
એ નોંધવું પડશે કે જેમ બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા દર્શાવી છે એમ બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાને તેના શિરોબિંદુઓની સાચી સંગતતાના સંકેતમાં દર્શાવીને અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, આકૃતિ 6.22 ના ત્રિકોણો ABC અને DEF માટે આપણે ΔABC ~ ΔEDF કે ΔABC ~ ΔFED લખી શકતા નથી. તેમ છતાં આપણે ΔBAC ~ ΔEDF લખી શકીએ.

હવે સ્વાભાવિક રીતે એક પ્રશ્ન થાય.

બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા ચકાસવા, કહો કે, ABC અને DEF માટે તેમના બધા જ અનુરૂપ ખૂણાઓની સમાનતાનો સંબંધ ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$) અને બધી જ અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરોની સમાનતાનો સંબંધ $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ હંમેશાં ચકાસવો જરૂરી છે ?

ચાલો વિચાર કરીએ. તમને યાદ હશે કે ધોરણ IX માં તમે બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા માટેના કેટલાક સિદ્ધાંત મેળવ્યા હતા, જેમાં બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ભાગો (કે ઘટકો)ની ફક્ત ત્રણ જોડ સમાયેલી હતી. અહીં આપણે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે સમાયેલા સિદ્ધાંત માટે ઘટકોની છ જોડના બદલે ઓછી સંખ્યામાં અનુરૂપ ઘટકોની જોડના સબંધમાં ચોક્કસ સિદ્ધાંત મેળવીએ. હવે, આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 4 : બે જુદી-જુદી લંબાઈના રેખાખંડો BC અને EF અનુક્રમે 3 સેમી અને 5 સેમી લંબાઈના દોરો. ત્યારબાદ અનુક્રમે બિંદુ B અને C પર $60°$ અને $40°$ માપના ખૂણાઓ PBC અને QCB રચો. ઉપરાંત, બિંદુઓ E અને F પર અનુક્રમે $60°$ અને $40°$ ના ખૂણાઓ REF અને SFE રચો. (જુઓ આકૃતિ 6.23.)



આકૃતિ 6.23

ધારો કે કિરણો BP અને CQ એકબીજાને A માં છેદે છે. અને કિરણો ER અને FS એકબીજાને D માં છેદે છે.

ત્રિકોણો ABC અને DEF માં, તમે જોશો કે, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ અને $\angle A = \angle D$. એટલે કે, આ બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. તેમની અનુરૂપ બાજુઓ માટે શું કહી શકાય ?

તમારું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો. $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$. $\frac{AB}{DE}$ અને $\frac{CA}{FD}$ માટે શું કહી શકો ? AB, DE, CA અને FD માપીને તમે જોઈ શકશો કે, $\frac{AB}{DE}$ અને $\frac{CA}{FD}$ પણ 0.6 થાય છે. (અથવા જો માપવામાં કોઈ ક્ષતિ હોય તો 0.6ની નજીક છે.)

આમ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

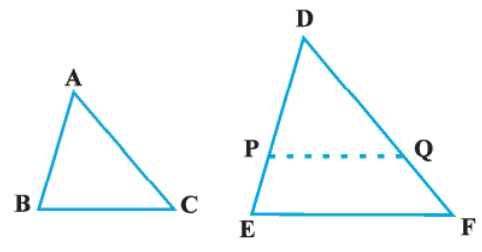
તમે, અનુરૂપ ખૂણાઓની જોડીઓ સમાન હોય તેવા બીજા ત્રિકોણો રચીને આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી શકો. દરેક સમયે તમે જોશો કે તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન છે. (અથવા સમપ્રમાણમાં છે.)

આ પ્રવૃત્તિથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે નીચેની શરત મળે છે.

પ્રમેય 6.3 : ***જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓની જોડના ગુણોત્તર સમાન હોય (અથવા બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય) અને તેથી તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.***

આ શરત બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેની ખૂખૂખૂ (ખૂણો-ખૂણો-ખૂણો) શરત તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમેયને ત્રિકોણો ABC અને DEF માં, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ લઈ સાબિત કરી શકાય છે (જુઓ આકૃતિ 6.24.)



આકૃતિ 6.24

DP = AB અને DQ= AC દોરો અને PQ જોડો.

તેથી, $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (કેમ ?)

આના પરથી, $\angle B = \angle P = \angle E$ અને તેથી, PQ || EF (કેવી રીતે ?)

તેથી, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (કેમ ?)

એટલે કે, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (કેમ ?)

એ જ રીતે, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ અને તેથી, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

નોંધ : જો કોઈ એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાના ગુણધર્મ પ્રમાણે તેમનો ત્રીજો ખૂણો પણ સમાન થાય. તેથી ખૂખૂખૂ સમરૂપતાની શરતને આમ લખી શકાય.

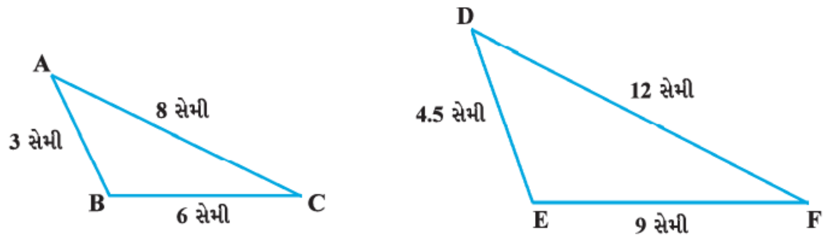
જો કોઈ એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. આ શરતને બે ત્રિકોણો માટેની સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

તમે જોયું હશે કે, જો કોઈ એક ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના ત્રણે ય ખૂણાઓને સમાન હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય (ગુણોત્તરો સમાન હોય છે.) આના પ્રતીપ વિધાન માટે શું કહી શકાય ? શું પ્રતીપ સાચું છે ?

બીજા શબ્દોમાં, જો કોઈ એક ત્રિકોણની બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બાજુઓને સમપ્રમાણમાં હોય, તો તેના અનુરૂપ ખૂણાઓ પણ એકરૂપ હોય છે તે સાચું છે ?

તે એક પ્રવૃત્તિ દ્વારા જોઈએ.

પ્રવૃત્તિ 5 : બે ત્રિકોણો ABC અને DEF એવાં દોરો કે જેમાં, AB = 3 સેમી, BC = 6 સેમી, CA = 8 સેમી, DE = 4.5 સેમી, EF = 9 સેમી અને FD = 12 સેમી (જુઓ આકૃતિ 6.25.)



આકૃતિ 6.25

તેથી, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ થશે. (દરેક $\frac{2}{3}$ ને સમાન છે.)

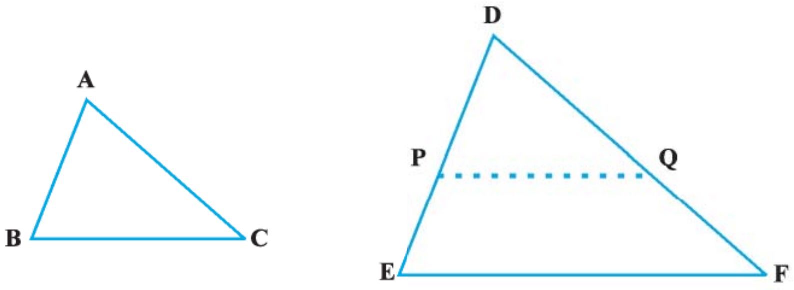
હવે, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ અને $\angle F$ માપો અને તમે જોઈ શકશો કે,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ એટલે કે, બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે.

બીજા આવા કેટલાક ત્રિકોણો (જેની બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય) લઈને આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી જુઓ. દરેક વખતે જોઈ શકાશે તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. તેના પરથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની નીચેની શરત મળે છે.

પ્રમેય 6.4 : જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણની બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના સમપ્રમાણમાં હોય (એટલે કે, ગુણોત્તરો સમાન હોય), તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને તેથી બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય. આ શરત બે ત્રિકોણો માટે બાબાબા (બાજુ-બાજુ-બાજુ) શરત તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમેય બે ત્રિકોણો ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) (જુઓ આકૃતિ 6.26) લઈને સિદ્ધ કરી શકાય.



આકૃતિ 6.26

DP = AB અને DQ = AC દોરો અને PQ જોડો.

સ્પષ્ટ છે કે, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ અને તેથી, PQ || EF (કેવી રીતે ?)

તેથી, $\angle P = \angle E$ અને $\angle Q = \angle F$

તેથી, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

તેથી, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (કેમ ?)

તેથી, BC = PQ (કેમ ?)

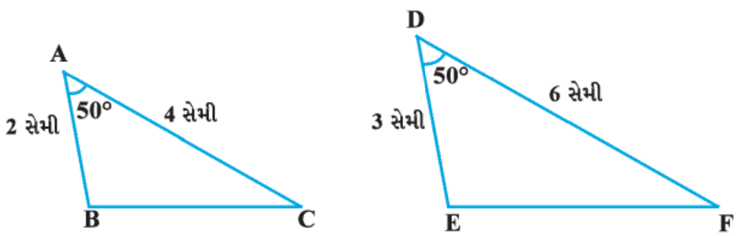
આમ, $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DPQ$ (કેમ ?)

તેથી, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ (કેવી રીતે ?)

નોંધ : તમને યાદ હશે કે બે બહુકોણો સમરૂપ છે તે માટે બે શરતો પૈકી કોઈ એક (i) અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. (ii) અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન છે તે પર્યાપ્ત નથી. તેમ છતાં પ્રમેય 6.3 અને 6.4ના આધારે તમે હવે કહી શકશો કે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા દર્શાવવા માટે બંને શરતો ચકાસવી જરૂરી નથી. તેમાં એક શરત પરથી બીજી શરત સિદ્ધ થાય.

હવે આપણે ધોરણ IX માં જેનો અભ્યાસ કર્યો હતો, બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા વિશેની જુદી-જુદી શરતો યાદ કરીએ. તમે કદાચ બાબાબા સમરૂપતાની બાબાબા એકરૂપતા સાથે સરખામણી કરી હશે. આ પરિણામ આપણને ત્રિકોણોની સમરૂપતાને ત્રિકોણોની એકરૂપતા સાથે સરખાવવા સૂચવે છે. આના માટે એક પ્રવૃત્તિ કરીએ.

પ્રવૃત્તિ 6 : જેમાં, AB = 2 સેમી, $\angle A = 50°$, AC = 4 સેમી, DE = 3 સેમી, $\angle D = 50°$ અને DF = 6 સેમી હોય તેવા બે ત્રિકોણો ABC અને DEF દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.27.)



આકૃતિ 6.27

અહીં, તમે જોયું હશે કે $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (દરેક $\frac{2}{3}$ ને સમાન છે.) અને $\angle A$ (બાજુઓ AB અને ACનો અંતર્ગત ખૂણો છે) = $\angle D$ (બાજુઓ DE અને DFનો અંતર્ગત ખૂણો છે.) એટલે કે, કોઈ એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો

બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન છે અને જે બાજુઓને અંતર્ગત આ ખૂણાઓ છે તેમનો ગુણોત્તર સમાન છે. (એટલે કે તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય.)

હવે, આપણે $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ અને $\angle F$ માપીએ, તમે જોશો કે, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$. એટલે કે, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$. તેથી ખૂખૂખૂ સમરૂપતા પરથી, $\Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF$.

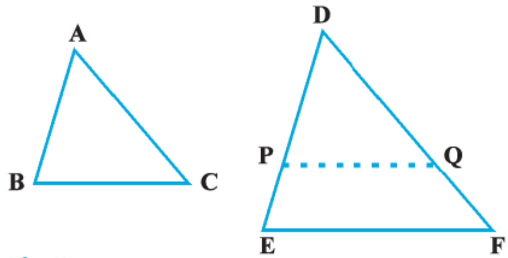
તમે જેમાં કોઈ એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને જે ત્રિકોણની બાજુઓને આપેલા ખૂણા અંતર્ગત હોય તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય એવા બીજા ત્રિકોણો દોરીને પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી શકો.

દરેક સમયે, તમે જોશો કે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. તેથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની નીચેની શરત આ પ્રમાણે મળે છે.

પ્રમેય 6.5 : ***જો કોઈ ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને આ ખૂણાઓ જે બાજુઓને અંતર્ગત હોય તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.***

આ શરત બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેના બાખૂબા (બાજુ-ખૂણો-બાજુ) નિયમ તરીકે ઓળખાય છે.

અગાઉની જેમ, આ પ્રમેય બે ત્રિકોણો ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) અને $\angle A = \angle D$ લઈને સાબિત કરી શકાય. (જુઓ આકૃતિ 6.28.)



આકૃતિ 6.28

$DP = AB$ અને $DQ = AC$ દોરો અને PQ જોડો.

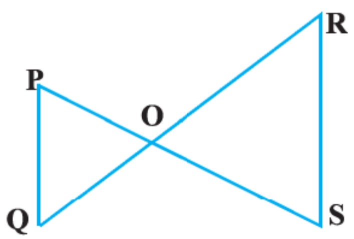
હવે, $PQ \parallel EF$ અને $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DPQ$ (કેવી રીતે ?)

તેથી, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ અને $\angle C = \angle Q$

તેથી, $\Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF$ (કેમ ?)

હવે, આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 6.29 માં, જો $PQ \parallel RS$ તો સાબિત કરો કે $\Delta POQ \sim \Delta SOR$



આકૃતિ 6.29

ઉકેલ : $PQ \parallel RS$ (આપેલ છે.)

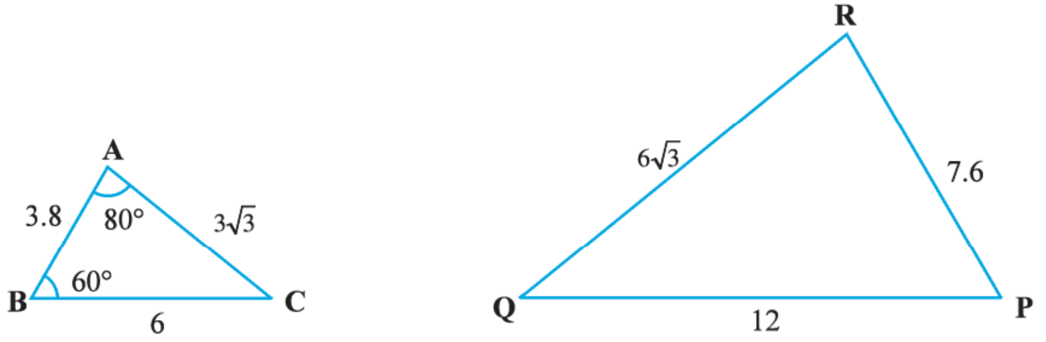
તેથી, $\angle P = \angle S$ (યુગ્મકોણો)

અને $\angle Q = \angle R$

તેમજ, $\angle POQ = \angle SOR$ (અભિકોણો)

તેથી, $\Delta\ POQ \sim \Delta\ SOR$ (ખૂખૂખૂ સમરૂપતા)

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 6.30 નું નિરીક્ષણ કરો અને $\angle P$ શોધો.



આકૃતિ 6.30

ઉકેલ : Δ ABC અને Δ PQRમાં,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},\ \text{અને}\ \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

એટલે કે, $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

તેથી, $\Delta\ ABC \sim \Delta\ RQP$ (બાબાબા સમરૂપતા)

$\therefore\ \angle C = \angle P$ (સમરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

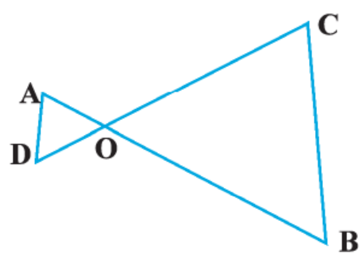
પરંતુ, $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$

$= 180° - 80° - 60°$

$= 40°$

તેથી, $\angle P = 40°$

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 6.31 માં, $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, તો સાબિત કરો કે, $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$



આકૃતિ 6.31

ઉકેલ : $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (આપેલ છે.)

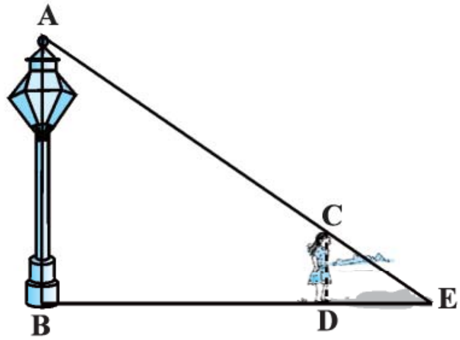
તેથી, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

વળી, એ જુઓ, $\angle AOD = \angle COB$ (અભિકોણો) (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી, $\Delta\ AOD \sim \Delta\ COB$ (બાખૂબા સમરૂપતા)

તેથી, $\angle A = \angle C$ અને $\angle D = \angle B$ (સમરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

ઉદાહરણ 7 : 90 સેમી ઊંચાઈવાળી એક છોકરી વીજળીના થાંભલાના તળીયેથી 1.2 મી/સેની ઝડપથી દૂર જઈ રહી છે. જો વીજળીનો ગોળો જમીનના સમતલથી 3.6 મીટર ઊંચે હોય તો ચાર સેકન્ડ પછી તેના પડછાયાની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 6.32

ઉકેલ : ધારો કે AB એ વીજ થાંભલો છે અને CD વીજ થાંભલાથી 4 સેકન્ડ ચાલ્યા પછીની પરિસ્થિતિમાં છોકરીનું સ્થાન દર્શાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.32.)

આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય કે DE છોકરીનો પડછાયો છે. ધારો કે, DE એ x મીટર છે.

હવે, BD = 1.2 × 4 = 4.8 મીટર

જુઓ કે, Δ ABE અને Δ CDE માં,

$\angle B = \angle D$ (દરેક 90° નો છે. કારણ કે લાઈટનો થાંભલો અને છોકરી જમીન પર શિરોલંબ છે.)

અને $\angle E = \angle E$ (એક જ ખૂણો)

તેથી, $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (ખૂખૂ સમરૂપતા)

તેથી, $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{AB}{CD}$

એટલે કે, $\dfrac{4.8+x}{x} = \dfrac{3.6}{0.9}$ (90 સેમી = $\dfrac{90}{100}$ મી = 0.9 મી)

એટલે કે, $4.8 + x = 4x$

એટલે કે, $3x = 4.8$

એટલે કે, $x = 1.6$

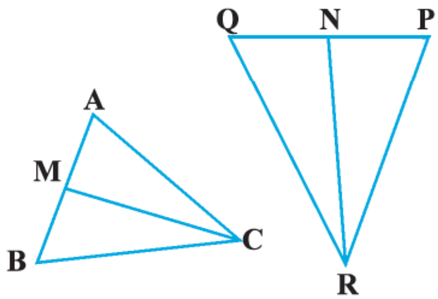
તેથી 4 સેકન્ડ ચાલ્યા પછી છોકરીનો પડછાયો 1.6 મીટર લાંબો હોય.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 6.33માં, CM અને RN અનુક્રમે Δ ABC અને Δ PQR ની મધ્યગાઓ છે. જો Δ ABC ~ Δ PQR હોય, તો સાબિત કરો કે,

(i) Δ AMC ~ Δ PNR

(ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

(iii) Δ CMB ~ Δ RNQ



આકૃતિ 6.33

ઉકેલ : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

તેથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

અને $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ અને $\angle C = \angle R$ (2)

પરંતુ, $AB = 2\ AM$ અને $PQ = 2PN$

(કેમ કે, CM અને RN મધ્યગાઓ છે.)

તેથી, (1) પરથી, $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

એટલે કે, $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

પરંતુ, $\angle MAC = \angle NPR$ [(2) પરથી] (4)

તેથી, (3) અને (4) પરથી,

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (બાખૂબા સમરૂપતા) (5)

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ [(5) પરથી] (6)

પરંતુ, $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [(1) પરથી] (7)

તેથી, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) અને (7) પરથી] (8)

(iii) ફરીથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) પરથી]

તેથી, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8) પરથી] (9)

પરંતુ, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2BM}{2QN}$

એટલે કે, $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

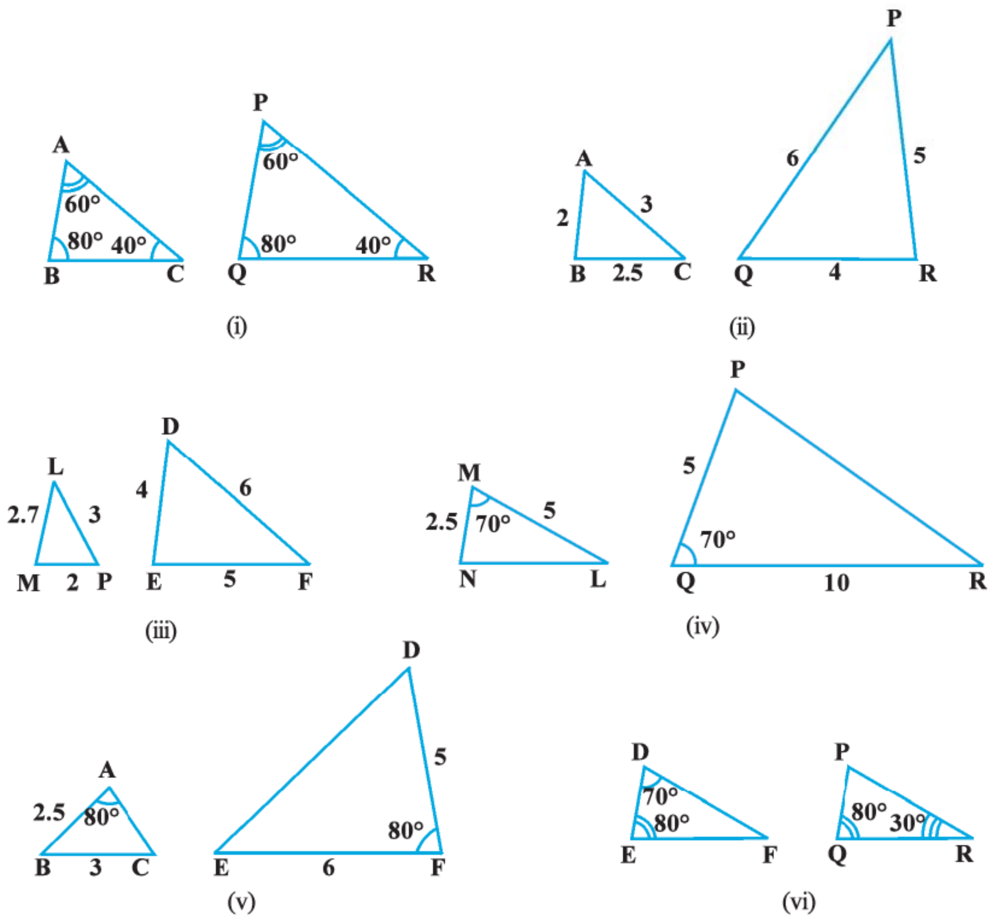
એટલે કે, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) અને (10) પરથી]

તેથી, $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (બાબાબા સમરૂપતા)

[**નોંધ :** ભાગ (i) સાબિત કરવા પૈકી ઉપયોગમાં લીધેલ રીતનો ઉપયોગ કરીને પણ ભાગ (iii) સાબિત કરી શકાય.]

સ્વાધ્યાય 6.3

1. આકૃતિ 6.34 માં આપેલ ત્રિકોણો પૈકી કઈ જોડીના ત્રિકોણો સમરૂપ છે તે જણાવો. પ્રશ્નનો જવાબ આપવા કઈ સમરૂપતાની શરતનો ઉપયોગ કર્યો તે લખો. અને સમરૂપ ત્રિકોણની જોડીઓને સંકેતમાં લખો :

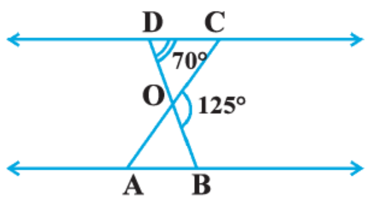


આકૃતિ 6.34

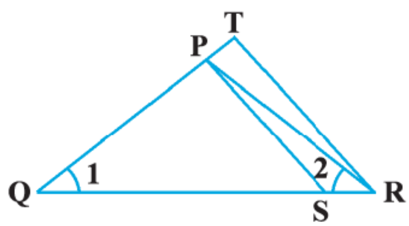
2. આકૃતિ 6.35માં, Δ ODC ~ Δ OBA, $\angle$BOC = 125° અને $\angle$CDO = 70° હોય, તો $\angle$DOC, $\angle$DCO અને $\angle$OAB શોધો.

3. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC છે. વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. હવે ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

4. આકૃતિ 6.36 માં, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ અને $\angle 1 = \angle 2$. સાબિત કરો કે Δ PQS ~ Δ TQR.



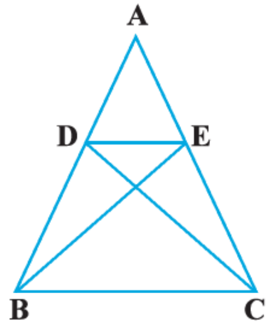
આકૃતિ 6.35



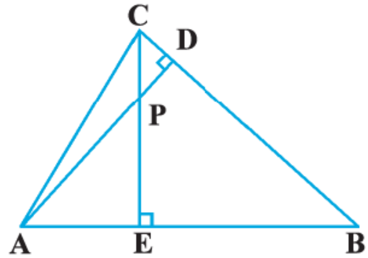
આકૃતિ 6.36

5. Δ PQR ની બાજુઓ PR અને QR પર બિંદુઓ S અને T એવાં છે કે, જેથી, $\angle P = \angle RTS$. સાબિત કરો કે, $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

6. આકૃતિ 6.37 માં, જો $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



આકૃતિ 6.37



આકૃતિ 6.38

7. આકૃતિ 6.38 માં, Δ ABC ના વેધ AD અને CE એકબીજાને P બિંદુ માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

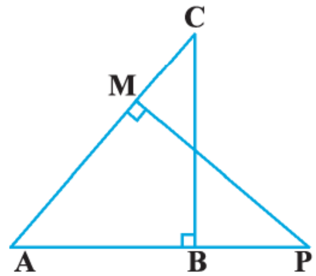
(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

8. બિંદુ E એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની લંબાવેલ બાજુ AD પરનું બિંદુ છે. BE એ CD ને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

9. આકૃતિ 6.39 માં, ત્રિકોણ ABC અને AMP કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને તેમાં ખૂણા B અને M કાટખૂણા છે. સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$



આકૃતિ 6.39

10. Δ ABCના $\angle ACB$નો દ્વિભાજક CD, બાજુ AB ને D માં તથા Δ EFG ના $\angle EGF$નો દ્વિભાજક GH, બાજુ FE ને H માં છેદે છે. જો $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

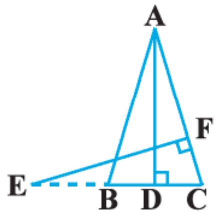
(i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

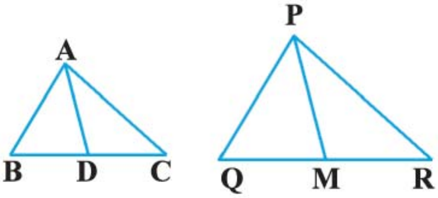
11. આકૃતિ 6.40 માં E એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC ની લંબાવેલ બાજુ CB પર આવેલ બિંદુ છે તથા AB = AC. જો $AD \perp BC$ અને $EF \perp AC$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

$\Delta ABD \sim \Delta ECF$.



આકૃતિ 6.40

12. Δ ABC ની બાજુઓ AB અને BC તથા મધ્યગા AD અનુક્રમે Δ PQRની બાજુઓ PQ અને PR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે (જુઓ, આકૃતિ 6.41) સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



આકૃતિ 6.41

13. બિંદુ D એ Δ ABC ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે, $\angle ADC = \angle BAC$. સાબિત કરો કે $CA^2 = CB \cdot CD$

14. Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC તથા મધ્યગા AD એ અનુક્રમે Δ PQRની બાજુઓ PQ અને PR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

15. એક 6 મીટર ઊંચા શિરોલંબ વાંસનો જમીન પર પડતો પડછાયો 4 મીટર લાંબો છે. એ જ વખતે એક મિનારાનો પડછાયો 28 મીટર લાંબો છે. મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

16. જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ તથા AD અને PM અનુક્રમે Δ ABC અને Δ PQR ની મધ્યગા હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

6.5 સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ

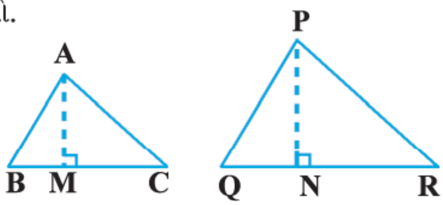
તમે જાણો છો કે, બે સમરૂપ ત્રિકોણોની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય છે. તેમનાં ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તર અને અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર વચ્ચેના સંબંધ વિશે તમે શું કલ્પના કરી શકો છો ? તમે જાણો છો કે, ક્ષેત્રફળ ચોરસ એકમમાં માપવામાં આવે છે. તેથી, તમે કદાચ એવી કલ્પના કરી હશે કે, આ ગુણોત્તર અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હશે. આ ખરેખર સત્ય છે અને તે હવે આપણે પછીના પ્રમેયમાં સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 6.6 : બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હોય છે.

સાબિતી : અહીં બે ત્રિકોણો Δ ABC અને Δ PQR આપ્યા છે અને $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (જુઓ આકૃતિ 6.42.)

અહીં એ સાબિત કરવું છે કે, $\frac{ABC}{PQR} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

બે ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, ત્રિકોણોના વેધ AM અને PN દોરો.



આકૃતિ 6.42

હવે, $ABC = \frac{1}{2} BC \times AM$

અને $PQR = \frac{1}{2} QR \times PN$

તેથી, $\frac{ABC}{PQR} = \frac{\frac{1}{2}BC \times AM}{\frac{1}{2}QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN}$ (1)

હવે, Δ ABM અને Δ PQN માં,

$\angle B = \angle Q$ (કારણ કે $\Delta ABC \sim \Delta PQR$)

અને $\angle M = \angle N$ (કાટખૂણા છે.)

તેથી, $\Delta\, ABM \sim \Delta\, PQN$ (ખૂણો ખૂણો સમરૂપતા)

તેથી, $\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AB}{PQ}$ (2)

વળી, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ (3)

તેથી, $\dfrac{ABC}{PQR} = \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AM}{PN}$ [(1) અને (3) પરથી]

$= \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AB}{PQ}$ [(2) પરથી]

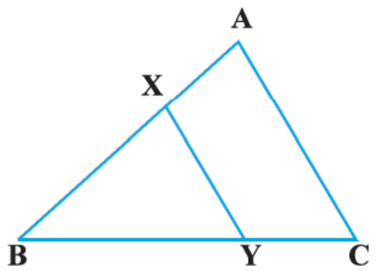
$= \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2$

હવે, (3) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{ABC}{PQR} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2 \quad ■$$

જેમાં આ પ્રમેયનો ઉપયોગ થાય તેવાં ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિ 6.43 માં રેખાખંડ XY એ ΔABC ની બાજુ AC ને સમાંતર છે અને તે ત્રિકોણનું સમાન ક્ષેત્રફળના ભાગોમાં વિભાજન કરે છે. ગુણોત્તર $\dfrac{AX}{AB}$ શોધો.



આકૃતિ 6.43

ઉકેલ : અહીં $XY \parallel AC$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\angle BXY = \angle A$ અને $\angle BYX = \angle C$ (અનુકોણો)

તેથી, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, XBY$ (ખૂણો ખૂણો સમરૂપતા)

તેથી, $\dfrac{ABC}{XBY} = \left(\dfrac{AB}{XB}\right)^2$ (પ્રમેય 6.6) (1)

વળી, $ABC = 2XBY$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\dfrac{ABC}{XBY} = \dfrac{2}{1}$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1}, \text{ એટલે કે, } \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

અથવા $\quad \frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

અથવા $\quad 1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

અથવા $\quad \frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$

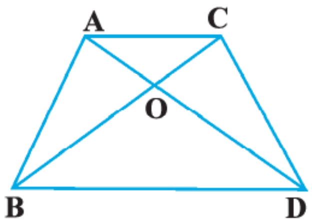
એટલે કે, $\quad \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

સ્વાધ્યાય 6.4

1. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ છે. તેમનાં ક્ષેત્રફળો અનુક્રમે 64 સેમી^{2} અને 121 સેમી^{2} છે. જો EF = 15.4 સેમી હોય, તો BC શોધો.

2. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || CD છે. તેના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. જો AB = 2CD હોય, તો Δ AOB અને Δ COD નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

3. આકૃતિ 6.44માં, ABC અને DBC એક જ પાયા BC પરના બે ત્રિકોણો છે. જો AD એ BC ને O માં છેદે, તો સાબિત કરો કે $\frac{ABC}{DBC} = \frac{AO}{DO}$.



આકૃતિ 6.44

4. જો બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળો સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે એકરૂપ છે.

5. D, E અને F અનુક્રમે Δ ABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. Δ DEF અને Δ ABC નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

6. સાબિત કરો કે, બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ મધ્યગાના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હોય છે.

7. સાબિત કરો કે, ચોરસની કોઈ એક બાજુ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, તે ચોરસના વિકર્ણ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળથી અડધું હોય છે.

સાચા જવાબ પર (✓) નિશાની કરો અને ચકાસણી કરો.

8. જેમાં D એ BC નું મધ્યબિંદુ છે, એવા બે સમબાજુ ત્રિકોણો ABC અને BDE છે. ત્રિકોણો ABC અને BDE નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

   (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4

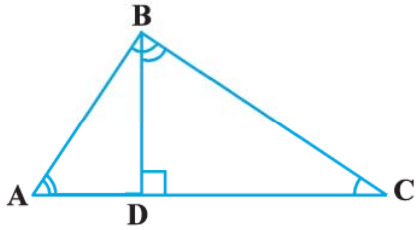
9. બે સમરૂપ ત્રિકોણોની બાજુઓનો ગુણોત્તર 4:9 છે. આ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

   (A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 પાયથાગોરસ પ્રમેય

A7C7U6

તમે અગાઉના ધોરણથી પાયથાગોરસ પ્રમેયથી પરિચિત છો. તમે કેટલીક પ્રવૃત્તિઓથી આ પ્રમેયને ચકાસ્યો છે અને કેટલાક પ્રશ્નો ઉકેલવા તેનો ઉપયોગ કર્યો છે. તમે ધોરણ IX માં આ પ્રમેયની સાબિતી જોઈ ગયાં છો. હવે આપણે આ પ્રમેયને બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની સંકલ્પનાના ઉપયોગથી સાબિત કરીશું. આ સાબિત કરવા માટે કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પર તેની સામેના શિરોબિંદુથી રચાતા વેધથી બનતા બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા પર આધારિત પરિણામનો ઉપયોગ કરીશું.



આકૃતિ 6.45

હવે, કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લઈએ. તેમાં ખૂણો B કાટખૂણો છે. BD એ કર્ણ AC પરનો વેધ છે. (જુઓ, આકૃતિ 6.45.)

Δ ADB અને Δ ABC માં તમે જોઈ શકશો

$\angle A = \angle A$

અને $\angle ADB = \angle ABC$ (કેમ ?)

તેથી, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (કેમ ?) (1)

એ જ રીતે, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (કેવી રીતે ?) (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી, વેધ BD ની બંને બાજુ પરના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ છે.

તેથી $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ અને $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

હોવાથી, $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (વિભાગ 6.2ની નોંધ પરથી)


પાયથાગોરસ
(B.C.E.569 - B.C.E.479)

ઉપરની ચર્ચા પરથી નીચેનો પ્રમેય મળે છે :

પ્રમેય 6.7 : ***જો કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણો બનાવતા શિરોબિંદુથી કર્ણ પર વેધ દોરેલ હોય, તો વેધની બંને તરફના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય છે અને એકબીજાને સમરૂપ હોય છે.***

હવે પાયથાગોરસનો પ્રમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રમેય 6.8 : ***કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.***

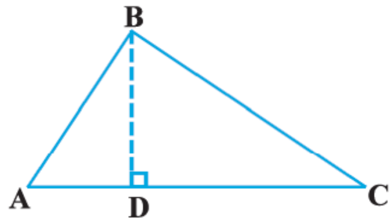
સાબિતી : Δ ABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે એમ આપ્યું છે.

એ સાબિત કરવું છે કે, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

અહીં, $BD \perp AC$ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.46.)

હવે, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (બાજુઓ સમપ્રમાણમાં છે.)



આકૃતિ 6.46

અથવા, $AD \cdot AC = AB^2$ (1)

તેમજ $\Delta\, BDC \sim \Delta\, ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$

અથવા $CD \cdot AC = BC^2$ (2)

(1) અને (2) નો સરવાળો લેતાં,

$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ■

ઉપરનું પ્રમેય અગાઉ પ્રાચીન ***ભારતીય ગણિતજ્ઞ બોધાયને*** (લગભગ B.C.E. 800) નીચેના સ્વરૂપમાં આપ્યું હતું.

લંબચોરસના વિકર્ણથી બનતા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ અને તેની બાજુઓથી બનતા (જેમ કે, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ) ચોરસોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો સમાન હોય છે.

આ કારણે, આ પ્રમેયને કેટલીક વાર ***બોધાયન પ્રમેય*** તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

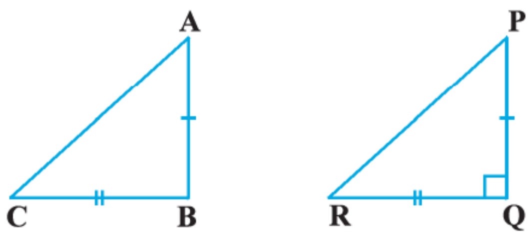
પાયથાગોરસના પ્રતીપ વિશે શું કહી શકો ? તમે અગાઉના ધોરણમાં ચકાસ્યું છે કે, તે સત્ય છે. તેને પ્રમેયના સ્વરૂપમાં સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 6.9 : ***ત્રિકોણમાં જો કોઈ એક બાજુનો વર્ગ, બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય તો, પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય.***

સાબિતિ : અહીં, ત્રિકોણ ABC માં, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ આપેલ છે.

એ સાબિત કરવું છે કે, $\angle B = 90°$

સાબિત કરવા, જેમાં એક ખૂણો Q કાટખૂણો હોય તેવો $\Delta\, PQR$ એવો રચીએ કે જેથી, $PQ = AB$ અને $QR = BC$. (જુઓ આકૃતિ 6.47.)



આકૃતિ 6.47

હવે, Δ PQR પરથી,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય, જેમાં $\angle Q = 90°$)

અથવા $PR^2 = AB^2 + BC^2$ (રચના પરથી) (1)

પરંતુ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (આપેલ છે.) (2)

તેથી, $AC = PR$ [(1) અને (2) પરથી] (3)

હવે, Δ ABC અને Δ PQR માં,

$AB = PQ$ (રચના પરથી)

$BC = QR$ (રચના પરથી)

$AC = PR$ (ઉપર (3)માં સાબિત કર્યું.)

તેથી, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (બાબાબા એકરૂપતા)

તેથી, $\angle B = \angle Q$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

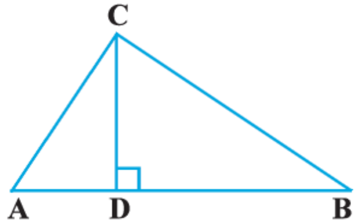
પરંતુ, $\angle Q = 90°$ (રચના પરથી)

તેથી, $\angle B = 90°$ ■

નોંધ : આ પ્રમેયની બીજી સાબિતી માટે પરિશિષ્ટ 1 પણ જુઓ.

હવે આપણે આ પ્રમેયનો ઉપયોગ સમજવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : આકૃતિ 6.48 માં, $\angle ACB = 90°$ અને $CD \perp AB$. સાબિત કરો કે, $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.



આકૃતિ 6.48

ઉકેલ : $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

અથવા $AC^2 = AB \cdot AD$ (1)

એ જ રીતે, $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

અથવા $BC^2 = BA \cdot BD$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

ઉદાહરણ 11 : એક નિસરણી દીવાલને અઢેલીને એવી રીતે ગોઠવી છે કે જેથી તેનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 2.5 મીટર દૂર રહે અને તેનો ઉપરનો છેડો જમીનથી 6 મીટર ઊંચે એક બારીને અડકે. નિસરણીની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, AB નિસરણી છે અને CA દિવાલ છે. અને A બારી છે. (જુઓ આકૃતિ 6.49.)

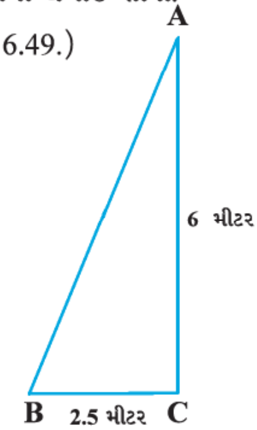
$$BC = 2.5 \text{ મીટર અને } CA = 6 \text{ મીટર}$$

પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= (2.5)^2 + (6)^2$$
$$= 42.25$$

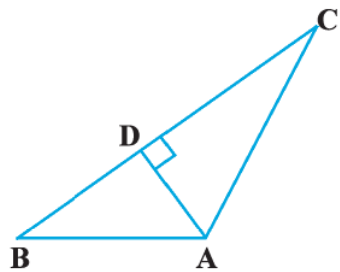
તેથી, $AB = 6.5$

આમ, નિસરણીની લંબાઈ 6.5 મી છે.



આકૃતિ 6.49

ઉદાહરણ 12 : આકૃતિ 6.50 માં, જો $AD \perp BC$ તો સાબિત કરો કે, $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



આકૃતિ 6.50

ઉકેલ : Δ ADC પરથી,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય) (1)

Δ ADB પરથી,

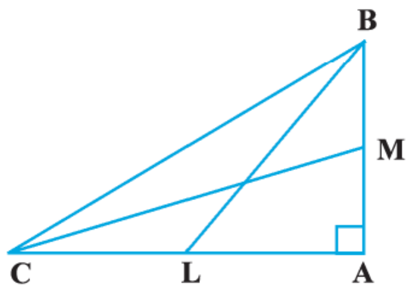
$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય) (2)

(2) માંથી (1) બાદ કરતાં,

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

અથવા $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

ઉદાહરણ 13 : ખૂણો A કાટખૂણો હોય તેવા ત્રિકોણ ABC માં BL અને CM મધ્યગાઓ છે. સાબિત કરો કે, $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$



આકૃતિ 6.51

ઉકેલ : BL અને CM એ ΔABC ની મધ્યગાઓ છે તથા $\angle A = 90°$ (જુઓ આકૃતિ 6.51.)

Δ ABC પરથી,

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય)

Δ ABL પરથી,

$BL^2 = AL^2 + AB^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય)

અથવા $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ (L એ AC નું મધ્યબિંદુ છે.)

અથવા $BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

અથવા $4\,BL^2 = AC^2 + 4\,AB^2$ (2)

Δ CMA પરથી

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

અથવા $CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ (M એ ABનું મધ્યબિંદુ છે.)

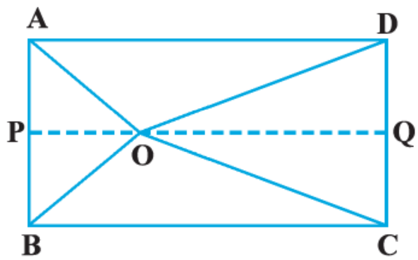
અથવા $CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$

અથવા $4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2$ (3)

(2) અને (3)નો સરવાળો લેતાં, $4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,(AC^2 + AB^2)$

$4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$ [(1) પરથી]

ઉદાહરણ 14 : O એ લંબચોરસ ABCD ના અંદરના ભાગનું કોઈ બિંદુ હોય (જુઓ, આકૃતિ 6.52), તો સાબિત કરો કે, $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$



આકૃતિ 6.52

ઉકેલ : P એ AB પર અને Q એ DC પર આવે તે રીતે O માંથી PQ || BC દોરો.

હવે, PQ || BC

તેથી, $PQ \perp AB$ અને $PQ \perp DC$ ($\angle B = 90°$ અને $\angle C = 90°$)

તેથી, $\angle BPQ = 90°$ અને $\angle CQP = 90°$

તેથી, BPQC અને APQD બંને લંબચોરસો છે.

હવે, Δ OPB પરથી,

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad (1)$$

એ જ રીતે, Δ OQD પરથી,

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad (2)$$

Δ OQC પરથી,

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad (3)$$

અને Δ OAP પરથી,

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (4)$$

(1) અને (2) નો સરવાળો લેતાં,

$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$

$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$ (કારણ કે, BP = CQ અને DQ = AP)

$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$

$= OC^2 + OA^2$ [(3) અને (4) પરથી]

સ્વાધ્યાય 6.5

1. નીચે ત્રિકોણની બાજુઓ આપેલી છે. તે પૈકી કયા ત્રિકોણો કાટકોણ ત્રિકોણો છે તે નક્કી કરો. જે કાટકોણ ત્રિકોણ હોય, તેના કર્ણની લંબાઈ શોધો.

(i) 7 સેમી, 24 સેમી, 25 સેમી

(ii) 3 સેમી, 8 સેમી, 6 સેમી

(iii) 50 સેમી, 80 સેમી, 100 સેમી

(iv) 13 સેમી, 12 સેમી, 5 સેમી

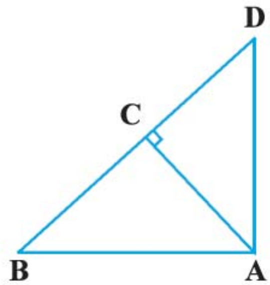
2. ત્રિકોણ PQR માં $\angle P$ કાટખૂણો છે અને M એ QR પરનું એવું બિંદુ છે કે જેથી $PM \perp QR$. સાબિત કરો કે $PM^2 = QM \cdot MR$

3. આકૃતિ 6.53 માં, ત્રિકોણ ABD માં $\angle A$ કાટખૂણો છે અને $AC \perp BD$. સાબિત કરો કે

(i) $AB^2 = BC \cdot BD$

(ii) $AC^2 = BC \cdot DC$

(iii) $AD^2 = BD \cdot CD$



આકૃતિ 6.53

4. સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે. સાબિત કરો કે $AB^2 = 2AC^2$

5. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં $AC = BC$. જો $AB^2 = 2AC^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે, ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

6. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ $2a$ છે. તેના દરેક વેધ શોધો.

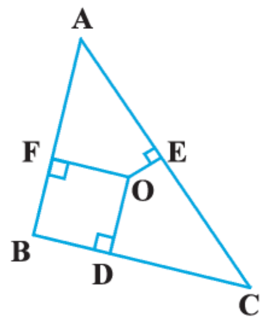
7. સાબિત કરો કે, સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓના વર્ગોનો સરવાળો તેના વિકર્ણોના વર્ગોના સરવાળા જેટલો થાય છે.

8. આકૃતિ 6.54 માં, O ત્રિકોણ ABC ની અંદરનું બિંદુ છે. $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ અને $OF \perp AB$

સાબિત કરો કે,

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$,

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.



આકૃતિ 6.54

9. 10 મીટર લાંબી એક નિસરણી જમીનથી 8 મીટર ઊંચે આવેલી એક બારીને અડકે છે. નિસરણીના નીચેના છેડાનું દીવાલના તળિયેથી અંતર શોધો.

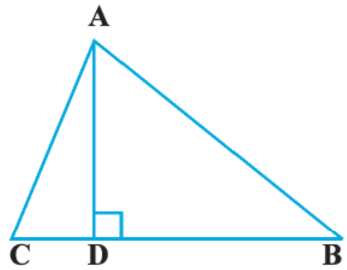
10. 18 મીટર ઊંચા શિરોલંબ થાંભલાના ઉપરના છેડાથી 24 મીટર લાંબા તારનો એક છેડો જોડાયેલો છે. તે તારનો બીજો છેડો એક ખીલા સાથે જોડાયેલો છે. થાંભલાના આધારથી કેટલા અંતરે ખીલો લગાડવામાં આવે તો તાર તંગ રહે ?

11. એક વિમાન એક વિમાન મથકની ઉત્તર દિશામાં 1000 કિમી/કલાકની ઝડપથી ઊડે છે. એ જ સમયે, બીજું એક વિમાન એ જ વિમાનમથકની પશ્ચિમ દિશામાં 1200 કિમી/કલાકની ઝડપે ઊડે છે. $1\frac{1}{2}$ કલાક પછી આ વિમાનો એકબીજાથી કેટલા દૂર હશે ?

12. 6 મીટર અને 11 મીટર ઊંચાઈના બે થાંભલા સમતલ જમીન પર આવેલા છે. જો થાંભલાના નીચેના છેડા વચ્ચેનું અંતર 12 મીટર હોય તો તેમના ઉપરના છેડા વચ્ચેનું અંતર શોધો.

13. ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે અને D અને E અનુક્રમે તેની બાજુઓ CA અને CB પરનાં બિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે,

$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$



આકૃતિ 6.55

14. A માંથી Δ ABC ની બાજુ BC પર દોરેલો લંબ BC ને D માં એવી રીતે છેદે છે કે DB = 3CD (જુઓ આકૃતિ 6.55.) સાબિત કરો કે,

$2\ AB^2 = 2\ AC^2 + BC^2$

15. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC પર D એવું બિંદુ છે કે જેથી, BD = $\frac{1}{3}$ BC. સાબિત કરો કે,

$9\ AD^2 = 7\ AB^2$

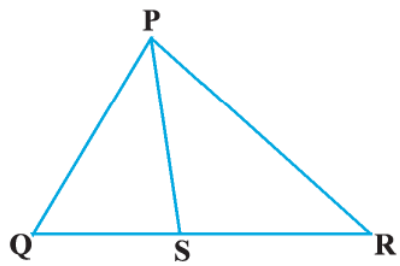
16. સમબાજુ ત્રિકોણમાં સાબિત કરો કે, કોઈ પણ બાજુના વર્ગના 3 ગણા એ તેના કોઈ પણ વેધના વર્ગના 4 ગણા બરાબર છે.

17. સાચા જવાબ પર (✓) નિશાની કરો અને ચકાસો.

Δ ABC માં, AB = $6\sqrt{3}$ સેમી, AC = 12 સેમી અને BC = 6 સેમી હોય, તો ખૂણો B .... :

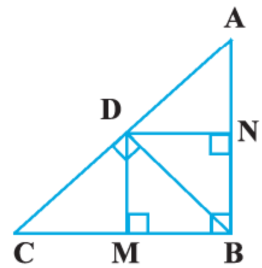
(A) 120° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

સ્વાધ્યાય 6.6 (વૈકલ્પિક)*



આકૃતિ 6.56

1. આકૃતિ 6.56 માં, PS એ Δ PQR ના $\angle QPR$ નો દ્વિભાજક છે. સાબિત કરો કે $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$.



આકૃતિ 6.57

2. આકૃતિ 6.57 માં, Δ ABC માં BD $\perp$ AC, DM $\perp$ BC અને DN $\perp$ AB થાય તેવું બિંદુ D કર્ણ AC પર છે, સાબિત કરો કે,

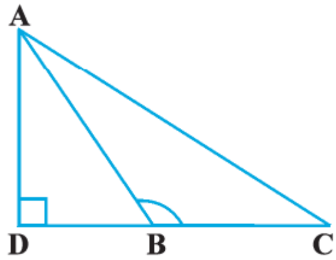
(i) $DM^2 = DN \cdot MC$

(ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના દૃષ્ટિકોણથી નથી.

3. આકૃતિ 6.58માં, ત્રિકોણ ABC માં, $\angle ABC > 90°$ અને $AD \perp$ લંબાવેલ CB, સાબિત કરો કે.

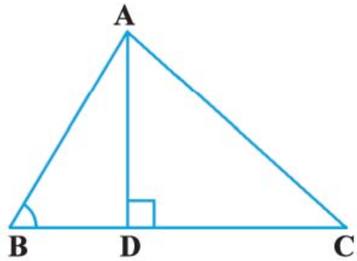
$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$



આકૃતિ 6.58

4. આકૃતિ 6.59માં, ત્રિકોણ ABC માં, $\angle ABC < 90°$ અને $AD \perp BC$ છે. સાબિત કરો કે,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, BC \cdot BD$



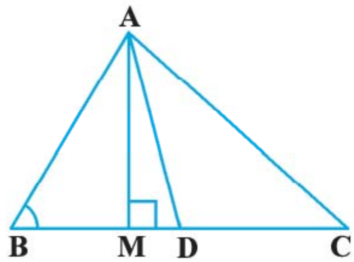
આકૃતિ 6.59

5. આકૃતિ 6.60 માં, AD એ ત્રિકોણ ABC ની મધ્યગા છે અને $AM \perp BC$. સાબિત કરો કે,

(i) $AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2\, AD^2 + \frac{1}{2}\, BC^2$



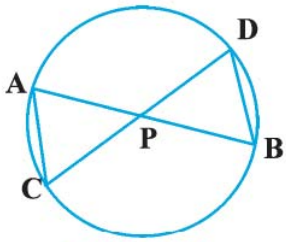
આકૃતિ 6.60

6. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના વર્ગોનો સરવાળો તેની બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

7. આકૃતિ 6.61માં, બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજાને બિંદુ P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta\, APC \sim \Delta\, DPB$

(ii) $AP \cdot PB = CP \cdot DP$

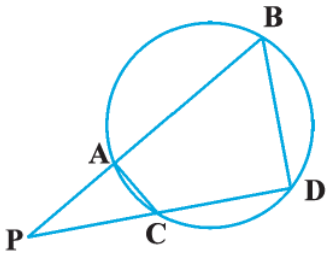


આકૃતિ 6.61

8. આકૃતિ 6.62માં, એક વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD (લંબાવીએ તો) વર્તુળના બહારના ભાગમાં એકબીજાને P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

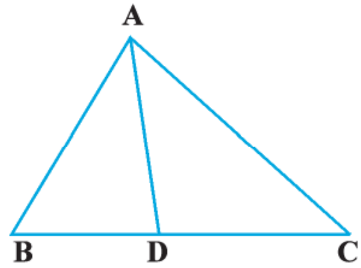
(i) $\Delta\, PAC \sim \Delta\, PDB$

(ii) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



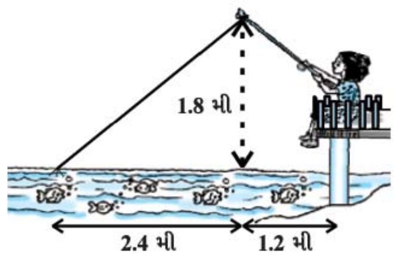
આકૃતિ 6.62

9. આકૃતિ 6.63માં, D એ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે જેથી $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. સાબિત કરો કે AD એ $\angle BAC$ નો દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ 6.63

10. નાઝીમા પાણીના પ્રવાહમાં માછલીઓ પકડી રહી છે. તેનો માછલી પકડવાના સળિયાનો છેડો પાણીની સપાટીથી 1.8 મીટર ઊંચે છે અને દોરીના નીચેના છેડા પરનો આંકડો પાણીની સપાટી પર એવી રીતે સ્થિર છે કે, નાઝીમાથી તેનું અંતર 3.6 મીટર છે અને સળિયાના છેડાનું પાણીની સપાટીથી અંતર 2.4 મીટર છે. એવું માની લઈએ કે, (સળિયાના છેડાથી આંકડા સુધી) તેની દોરી તંગ છે તો, તેણે કેટલી દોરી બહાર કાઢી છે ? (આકૃતિ 6.64 જુઓ.) જો તે દોરીને 5 સેમી/સે ના દરથી અંદર ખેંચે, તો 12 સેકન્ડ પછી નાઝીમાનું આંકડાથી સમક્ષિતિજ અંતર કેટલું હશે ?



આકૃતિ 6.64

6.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે :

1. સમાન આકાર ધરાવતી પરંતુ જેના માટે સમાન કદ હોય તે જરૂરી નથી તેવી બે આકૃતિઓને સમરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.
2. બધી એકરૂપ આકૃતિઓ સમરૂપ છે પરંતુ પ્રતીપ સાચું નથી.
3. જો (i) કોઈ બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય, (એટલે કે, સમપ્રમાણમાં હોય) તો સમાન સંખ્યામાં બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ છે.
4. જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા, બાકીની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો આ બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન થાય છે.
5. જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય.
6. જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરો સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય (ખૂખૂખૂ-સમરૂપતા).
7. જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે (ખૂખૂ સમરૂપતા).
8. જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય, તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને તેથી ત્રિકોણો સમરૂપ છે, (બાબાબા સમરૂપતા).

9. જો કોઈ ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને આ ખૂણાઓ જે બાજુઓને અંતર્ગત હોય તે સમપ્રમાણમાં હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે (બાખૂબા સમરૂપતા)

10. બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ જેટલો હોય છે.

11. જો કાટકોણ ત્રિકોણના કાટખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર વેધ દોરવામાં આવે, તો વેધની બંને તરફના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને તેમજ એકબીજાને સમરૂપ હોય છે.

12. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે (પાયથાગોરસ પ્રમેય).

13. જો ત્રિકોણમાં કોઈ એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય.

વાચકને નોંધ

જો બે કાટકોણ ત્રિકોણોમાં, કોઈ એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને કોઈ એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને કોઈ એક બાજુને સમપ્રમાણમાં હોય તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. આને કાકબા સમરૂપતા તરીકે ઓળખી શકીએ. તમે પ્રકરણ 8ના ઉદાહરણ 2 માં આ સમરૂપતાનો ઉપયોગ કર્યો હોત, તો સાબિતી સરળ બની હોત.

T6H8D6

Y4S5Q6

યામ ભૂમિતિ 7

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે શીખ્યાં કે, સમતલમાં કોઈ બિંદુનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણને પરસ્પર લંબ યામાક્ષોની જોડની જરૂર પડે છે. y-અક્ષથી કોઈ બિંદુના અંતરને x-યામ અથવા **કોટિ** કહે છે. x-અક્ષથી કોઈ બિંદુના અંતરને y-યામ અથવા **ભુજ** કહે છે. x-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(x, 0)$ સ્વરૂપમાં અને y-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(0, y)$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

આપણે એક રમત રમીએ આલેખપત્ર પર પરસ્પર લંબ હોય તેવા અક્ષોની જોડી લો. હવે નીચે દર્શાવેલાં બિંદુઓનું નિરૂપણ કરો અને સૂચના પ્રમાણે જોડો : બિંદુ A(4, 8), B(3, 9), C(3, 8), D(1, 6), E(1, 5), F(3, 3), G(6, 3), H(8, 5), I(8, 6), J(6, 8), K(6, 9), L(5, 8) ને ક્રમશઃ જોડી L ને A સાથે જોડો. હવે બિંદુઓ P(3.5, 7), Q (3, 6) અને R(4, 6) ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી એક ત્રિકોણ રચાશે. વળી બિંદુઓ X(5.5, 7), Y(5, 6) અને Z(6, 6) ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી એક ત્રિકોણ બનશે. હવે S(4, 5), T(4.5, 4) અને U(5, 5)ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી ત્રિકોણ બનશે. અંતમાં S ને બિંદુઓ (0, 5) અને (0, 6) સાથે તથા U ને બિંદુઓ (9, 5) અને (9, 6) સાથે જોડો. તમને કેવું ચિત્ર મળશે ?

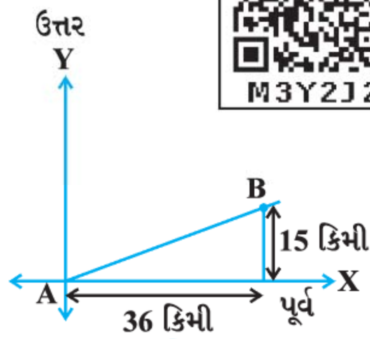
વળી, તમે જોયું છે કે, $ax + by + c = 0$ (a, b બંને એક સાથે શૂન્ય નથી.) સ્વરૂપના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરતાં એક રેખા મળે છે. વધુમાં પ્રકરણ 2 માં આપણે $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ નો પરવલય સ્વરૂપનો આલેખ જોયો હતો. ખરેખર તો યામભૂમિતિનો વિકાસ આકૃતિઓની ભૂમિતિ સમજવા માટે એક બીજગણિતીય ઉપકરણ તરીકે કરવામાં આવ્યો છે. તે આપણને બીજગણિતનો ઉપયોગ કરીને ભૂમિતિનો અભ્યાસ કરવા અને ભૂમિતિની મદદથી બીજગણિત સમજવામાં મદદરૂપ થાય છે. આ કારણે યામભૂમિતિ, ભૌતિકશાસ્ત્ર, ઇજનેરી, નૌકાશાસ્ત્ર, ભૂકંપશાસ્ત્ર, કલા જેવાં વિવિધ ક્ષેત્રોમાં વ્યાપક રીતે વપરાય છે.

આ પ્રકરણમાં, આપણે જેમના યામ આપેલા હોય એવાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધતાં શીખીશું અને આપેલાં ત્રણ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું. આપણે આપેલાં બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ કેવી રીતે શોધી શકાય તેનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

7.2 અંતરસૂત્ર

ચાલો, આપણે નીચેની પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

એક શહેર A થી શહેર B પૂર્વમાં 36 કિમી અને ઉત્તરમાં 15 કિમી અંતરે આવેલ છે. ખરેખર માપ્યા વગર તમે શહેર A અને શહેર B વચ્ચેનું અંતર કેવી રીતે શોધી શકો? ચાલો આપણે જોઈએ. આ પરિસ્થિતિને આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આલેખમાં દર્શાવી શકાય. તમે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી અંતરની ગણતરી કરી શકો.



આકૃતિ 7.1

હવે, ધારો કે બે બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલાં હોય, તો આપણે તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ? ઉદાહરણ તરીકે બે બિંદુઓ A (4, 0) અને B (6, 0) લો. આકૃતિ 7.2 માં બિંદુઓ A અને B x-અક્ષ પર આવેલાં છે.

આકૃતિ પરથી તમે જોઈ શકો કે, OA = 4 એકમ અને OB = 6 એકમ છે.

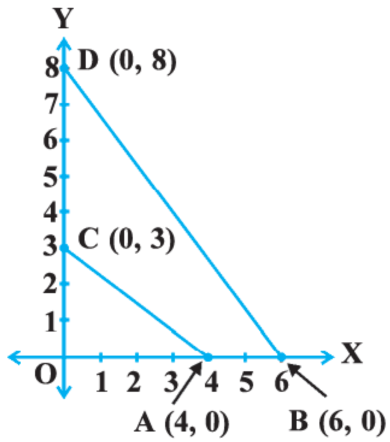
આથી, B થી A સુધીનું અંતર,

AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 એકમ

માટે, જો બે બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલાં હોય, તો આપણે સરળતાથી તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ.

હવે, ધારો કે આપણે બે બિંદુઓ y-અક્ષ પર લઈએ. શું આપણે તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ ? ધારો કે, બિંદુઓ C (0, 3) અને D (0, 8) y-અક્ષ પર આવેલાં છે. તે જ રીતે આપણે મેળવી શકીએ કે,

CD = 8 – 3 = 5 એકમ (જુઓ આકૃતિ 7.2.)

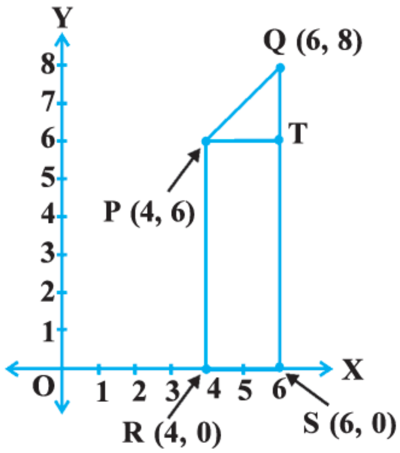


આકૃતિ 7.2

હવે, તમે A થી C નું અંતર શોધી શકો ? (આકૃતિ 7.2માં) OA = 4 એકમ અને OC = 3 એકમ હોવાથી, A થી C સુધીનું અંતર AC = $\sqrt{3^2+4^2}$ = 5 એકમ. આ જ પ્રમાણે તમે B થી D સુધીનું અંતર BD = 10 એકમ મેળવી શકો.

હવે, જો આપણે અક્ષો પર ન હોય તેવાં બે બિંદુઓ વિચારીએ તો, શું આપણે તે બંને વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ ? હા ! આપણે તે મેળવવા માટે પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શકીએ. ચાલો, આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

આકૃતિ 7.3 માં બિંદુઓ P (4, 6) અને Q (6, 8) પ્રથમ ચરણમાં આવેલાં છે. આ બંને વચ્ચેનું અંતર શોધવા માટે આપણે કેવી રીતે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું ? ચાલો, આપણે P અને Q માંથી x-અક્ષ પરના લંબ અનુક્રમે PR અને QS દોરીએ. વળી, P માંથી QS ને T માં છેદતો QS પરનો લંબ દોરીએ. આથી, R અને S ના યામ અનુક્રમે (4, 0) અને (6, 0) થાય. માટે, RS = 2 એકમ. વળી, QS = 8 એકમ અને TS = PR = 6 એકમ.



આકૃતિ 7.3

આથી, QT = 2 એકમ અને PT = RS = 2 એકમ.

હવે, પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં

આપણને $PQ^2 = PT^2 + QT^2$

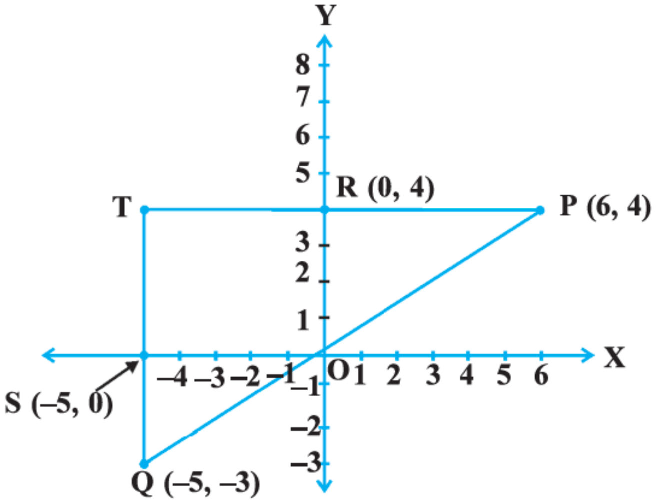
$= 2^2 + 2^2 = 8$

આથી, $PQ = 2\sqrt{2}$ એકમ મળે.

અલગ-અલગ ચરણમાં રહેલાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર આપણે કેવી રીતે મેળવીશું ?

બે બિંદુઓ P (6, 4) અને Q (–5, –3)નો વિચાર કરો. (જુઓ આકૃતિ 7.4.)

x-અક્ષ પરનો લંબ QS દોરો. બિંદુ P માંથી QS પર (લંબાવતાં...) લંબ PT પણ દોરો. તે y-અક્ષ ને R બિંદુએ છેદે છે.

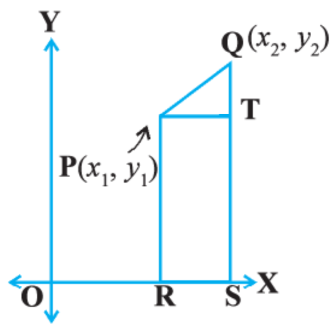


આકૃતિ 7.4

આથી PT = 11 એકમ અને QT = 7 એકમ (શા માટે ?)

કાટકોણ ત્રિકોણ PTQ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં આપણને $PQ = \sqrt{11^2+7^2} = \sqrt{170}$ એકમ મળે.

ચાલો, હવે આપણે કોઈ પણ બે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર શોધીએ. x-અક્ષ પરના લંબ PR અને QS દોરીએ. બિંદુ P માંથી QS પરનો લંબ દોરતાં તે QS ને બિંદુ T માં મળે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.5.)



આકૃતિ 7.5

તેથી $OR = x_1$, $OS = x_2$ આથી, $RS = x_2 - x_1 = PT$

વળી, $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$ આથી, $QT = y_2 - y_1$

હવે, Δ PTQ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$PQ^2 = PT^2 + QT^2$ મળે.

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

આથી, $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

નોંધ કરો કે અંતર હંમેશાં અનૃણ હોય. આથી આપણે માત્ર ધન વર્ગમૂળ જ લઈશું. માટે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

આને **અંતરસૂત્ર** કહે છે.

નોંધ :

1. ખાસ કરીને, બિંદુ P (x, y)નું ઊગમબિંદુ O $(0, 0)$થી અંતર $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ દર્શાવી શકાય.

2. આપણે, $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ પણ લખી શકીએ (શા માટે ?)

3. આ સાબિતી આપણે P તથા Q ને પ્રથમ ચરણમાં લઈને આપી છે, પરંતુ તેમની કોઈ પણ સ્થિતિ માટે સૂત્ર યથાર્થ છે.

ઉદાહરણ 1 : બિંદુઓ (3, 2), (–2, –3) અને (2, 3) એક ત્રિકોણ બનાવશે ? જો હા, તો રચાયેલ ત્રિકોણનો પ્રકાર જણાવો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓ P (3, 2), Q (–2, –3) અને R (2, 3) માટે અંતર PQ, QR અને PR શોધવા માટે અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ.

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (આશરે)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (આશરે)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (આશરે)}$$

કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધારે હોવાથી બિંદુઓ P, Q અને R ત્રિકોણ રચશે. વળી, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ હોવાથી પાયથાગોરસના પ્રતિપ્રમેયના વિધાન પરથી કહી શકાય કે, $\angle P = 90°$. માટે ત્રિકોણ PQR એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

ઉદાહરણ 2 : બિંદુઓ A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) અને D (– 4, 4) એ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) અને D (– 4, 4) એ આપેલાં બિંદુઓ છે. ABCD ચોરસ છે તે દર્શાવવા માટેનો એક રસ્તો એ છે કે ચોરસની બધી બાજુઓ સમાન હોય તથા તેના વિકર્ણો પણ સમાન હોય એ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીએ. હવે,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

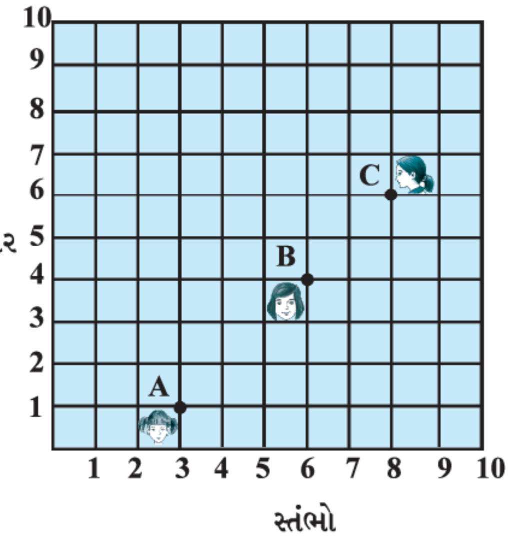
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

AB = BC = CD = DA અને AC = BD હોવાથી ચતુષ્કોણ ABCDની ચારેય બાજુઓ સમાન છે અને તેના વિકર્ણો AC અને BD પણ સમાન છે. આથી, ABCD એ એક ચોરસ છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ : આપણે ચારેય બાજુઓ તથા એક વિકર્ણ AC ઉપર પ્રમાણે શોધીએ. અહીં, $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. આથી પાયથાગોરસના પ્રમેયના પ્રતીપ અનુસાર $\angle D = 90°$ થાય. એક ચતુષ્કોણ કે જેની ચારેય બાજુઓ સમાન હોય તથા જેનો એક ખૂણો 90° હોય તે ચોરસ છે. માટે ABCD એક ચોરસ છે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 7.6 એક વર્ગખંડમાં પાટલીઓની ગોઠવણી દર્શાવે છે. અસીમા, ભારતી અને કેમેલિયા અનુક્રમે A (3, 1), B (6, 4) અને C (8, 6) સ્થાન પર બેઠેલાં છે. તમે કલ્પી શકો છો કે, તે એક જ રેખામાં બેઠેલાં છે ? તમારા ઉત્તર માટેનું કારણ દર્શાવો.



આકૃતિ 7.6

ઉકેલ : અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણી પાસે ...

$$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

હોવાથી, આપણે કહી શકીએ કે, બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ છે. આથી, અસીમા, ભારતી અને કેમેલિયા એક જ હરોળમાં બેઠા છે.

ઉદાહરણ 4 : બિંદુ (x, y) એ બિંદુઓ (7, 1) અને (3, 5) થી સમાન અંતરે છે તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે $P(x, y)$ એ બિંદુઓ A (7, 1) અને B (3, 5) થી સમાન અંતરે છે.

આપણને AP = BP આપેલ છે.

આથી, $AP^2 = BP^2$ થાય.

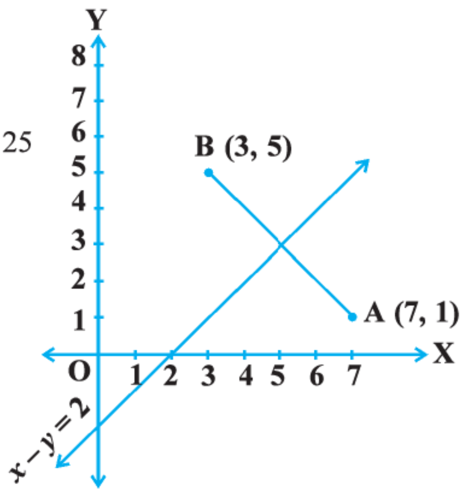
$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore\ x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore\ x - y = 2$$

એ માંગેલ સંબંધ છે.

નોંધ : આપણે નોંધીએ કે, સમીકરણ $x - y = 2$ નો આલેખ રેખા છે. તમારા ભૂમિતિના અગાઉના અભ્યાસ પરથી, તમે જાણો છો કે, બિંદુ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુ AB ના લંબદ્વિભાજક પરનું બિંદુ હોય. આથી, $x - y = 2$ નો આલેખ એ AB નો લંબદ્વિભાજક છે. (જુઓ આકૃતિ 7.7.)



આકૃતિ 7.7

ઉદાહરણ 5 : બિંદુઓ A (6, 5) અને B (– 4, 3) થી સમાન અંતરે આવેલ હોય તેવું y-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, y-અક્ષ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(0, y)$ સ્વરૂપમાં હોય. આથી, ધારો કે P $(0, y)$ એ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલ છે. તેથી

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$\therefore\ 36 + 25 - 10y + y^2 = 16 + 9 - 6y + y^2$$

$$\therefore\ 4y = 36$$

$$\therefore\ y = 9$$

આથી, માંગેલ બિંદુ (0, 9) છે.

ચાલો, આપણે ઉકેલ ચકાસીએ : $AP = \sqrt{(6-0)^2+(5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2+(3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

નોંધ : ઉપરની નોંધનો અભ્યાસ કરતાં જણાશે કે, (0, 9) એ AB ના લંબદ્વિભાજક અને y-અક્ષનું છેદબિંદુ છે.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચે આપેલ બિંદુઓની જોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

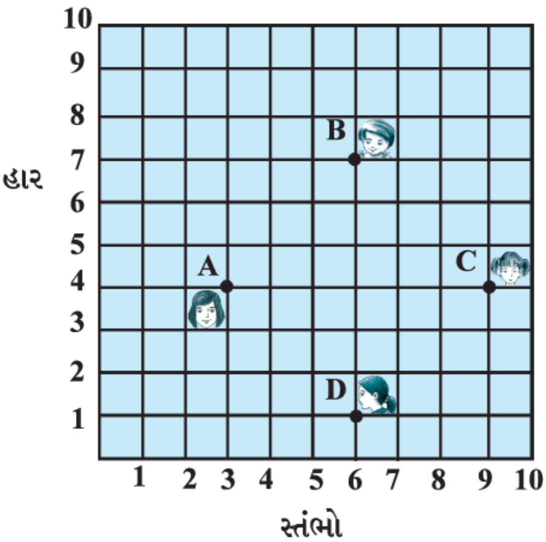
   (i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$

2. બિંદુઓ (0, 0) અને (36, 15) વચ્ચેનું અંતર શોધો. હવે, તમે વિભાગ 7.2 માં જેની ચર્ચા કરેલ તે બે શહેરો A અને B વચ્ચેનું અંતર શોધી શકો.

3. બિંદુઓ (1, 5), (2, 3) અને (–2, –11) અસમરેખ છે તેમ પ્રસ્થાપિત કરો.

4. ચકાસો કે, (5, –2), (6, 4) અને (7, –2) એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

5. એક વર્ગખંડમાં ચાર મિત્રો આકૃતિ 7.8માં દર્શાવેલ બિંદુઓ A, B, C અને D દ્વારા દર્શાવેલ સ્થાન પર બેઠા છે. ચંપા અને ચમેલી વર્ગમાં આવી અને થોડી મિનિટોના અવલોકન બાદ ચંપાએ ચમેલીને પૂછ્યું કે "શું તું એવું માને છે કે, ABCD ચોરસ છે ? ચમેલી અસહમત થાય છે. અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરી કોણ સાચું છે તે શોધો.



આકૃતિ 7.8

6. નીચે દર્શાવેલાં બિંદુઓથી જો ચતુષ્કોણ રચાતો હોય તો તેનો પ્રકાર જણાવો અને તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :

   (i) (–1, –2), (1, 0), (–1, 2), (–3, 0)

   (ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

   (iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. જે (2, –5) અને (–2, 9) થી સમાન અંતરે હોય તેવું x-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

8. બિંદુઓ P (2, – 3) અને Q (10, y) વચ્ચેનું અંતર 10 એકમ હોય તો, y ની કિંમત શોધો.

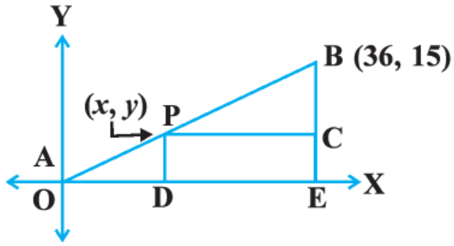
9. જો Q (0, 1) એ P (5, –3) અને R (x, 6) થી સમાન અંતરે હોય તો, x ની કિંમત શોધો. અંતર QR અને PR પણ શોધો.

10. બિંદુ (x, y) એ બિંદુઓ (3, 6) અને (–3, 4) થી સમાન અંતરે હોય, તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

7.3 વિભાજન સૂત્ર

R8T6T4

ચાલો, વિભાગ 7.2 ની પરિસ્થિતિ યાદ કરીએ. ધારો કે એક ટેલિફોન કંપની પોતાના પ્રસારણ ટાવર P ને A અને B ની વચ્ચે એવી રીતે સ્થાપવા માંગે છે કે, જેથી ટાવર P થી B નું અંતર એ P થી A ના અંતર કરતાં બમણું હોય. જો P એ AB પર આવેલ હોય, તો તે AB ને 1:2 ગુણોત્તરમાં વિભાગે. (જુઓ આકૃતિ 7.9). જો આપણે A ને ઊગમબિંદુ O તરીકે લઈએ અને બંને અક્ષો પર 1 એકમને 1 કિમી તરીકે લઈએ. B ના યામ (36, 15) થાય. ટાવરનું સ્થાન જાણવા માટે આપણે P ના યામ જાણવા જ પડે. આ યામ આપણે કેવી રીતે શોધી શકીએ ?



આકૃતિ 7.9

ધારો કે, P ના યામ (x, y) છે. P અને B માંથી x-અક્ષ પર દોરેલા લંબ તેને અનુક્રમે D અને E માં મળે છે. P માંથી BE ને લંબ PC દોરો. બાદમાં, પ્રકરણ 6માં ભણી ગયા છો તે સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત પ્રમાણે ΔPOD અને Δ BPC સમરૂપ થશે.

માટે, $\dfrac{OD}{PC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$ અને $\dfrac{PD}{BC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$

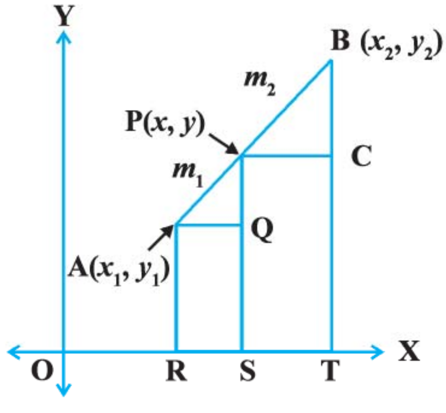
તેથી, $\dfrac{x}{36-x} = \dfrac{1}{2}$ અને $\dfrac{y}{15-y} = \dfrac{1}{2}$

આ સમીકરણો પરથી $x = 12$ અને $y = 5$ મળે.

તમે ચકાસી શકો કે, P(12, 5) હોય, તો OP : PB = 1 : 2 ની સ્થિતિ બને.

હવે, આ ઉદાહરણ દ્વારા વ્યાપક સૂત્ર મેળવવા માટેની જે સમજ તમે વિકસાવી છે તેનો ઉપયોગ કરીશું.

કોઈ પણ બે બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2)નો વિચાર કરો અને ધારો કે, P (x, y) એ ABનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 7.10

તેથી $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{m_1}{m_2}$ (જુઓ આકૃતિ 7.10.)

x-અક્ષ પર લંબ AR, PS અને BT દોરો. AQ અને PC એ x-અક્ષને સમાંતર દોરો. બાદમાં સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત મુજબ,

$$\Delta\, PAQ \sim \Delta\, BPC$$

માટે, $$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \qquad (1)$$

હવે,

$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

આ કિંમતોને પરિણામ (1)માં મૂકતાં, આપણને,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \text{ મળે.}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ લેતાં, આપણને } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \text{ મળે.}$$

આ જ પ્રમાણે $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ લેતાં, આપણને $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ મળે.

આથી, બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2)ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ P (x, y)ના યામ,

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \text{ મળે.} \qquad (2)$$

આ સૂત્ર વિભાજન સૂત્ર તરીકે ઓળખાય છે.

y-અક્ષ પર A, P અને B માંથી લંબ દોરીને પણ આ સૂત્ર ઉપરની પ્રક્રિયા અનુસાર મેળવી શકાય.

જો P એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો P ના યામ

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right) \text{ થાય.}$$

એક અગત્યનું તારણ : રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ રેખાખંડનું 1:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. માટે, A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ P ના યામ

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

ચાલો આપણે વિભાજન સૂત્ર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણો ગણીએ.

ઉદાહરણ 6 : બિંદુઓ (4, –3) અને (8, 5) ને જોડતા રેખાખંડનું 3:1 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, P (x, y) એ માંગેલ બિંદુ છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3 \text{ મળે.}$$

માટે, (7, 3) એ માંગેલ બિંદુ છે.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુ (– 4, 6) એ બિંદુઓ A (– 6, 10) અને B (3, – 8) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે ?

ઉકેલ : ધારો કે, (– 4, 6) એ AB નું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

યાદ કરો કે, જો $(x, y) = (a, b)$ તો $x = a$ અને $y = b$

આથી, $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ અને $6 = \dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

હવે, $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ પરથી,

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$
$$7m_1 = 2m_2$$
$$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

તમે ચકાસી શકો છો કે, આ ગુણોત્તર y-યામનું પણ સમાધાન કરે છે.

હવે, $\dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}$ (m_2 વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

માટે, બિંદુ (– 4, 6) એ બિંદુઓ A (– 6, 10) અને B (3, – 8) ને જોડતા રેખાખંડનું 2 : 7 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

વૈકલ્પિક રીતે : ગુણોત્તર $m_1 : m_2$ ને $\dfrac{m_1}{m_2} : 1$ અથવા $k : 1$ પણ લખી શકાય. ધારો કે, (– 4, 6) એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right) \text{ મળે.} \qquad (2)$$

આથી, $-4 = \dfrac{3k - 6}{k + 1}$

$$\therefore -4k - 4 = 3k - 6$$
$$\therefore 7k = 2$$
$$\therefore k : 1 = 2 : 7$$

તમે y-યામ માટે પણ આ પરિણામ ચકાસી શકો.

આથી, બિંદુ $(-4, 6)$ એ બિંદુઓ A $(-6, 10)$ અને B $(3, -8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું $2:7$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

નોંધ : જો A, P અને B સમરેખ છે તેમ આપેલું હોય તો તમે અંતર PA અને PB શોધી PA અને PBનો ગુણોત્તર મેળવી આ ગુણોત્તર પણ શોધી શકો, જો કે વિભાજન માટે સમરેખતા આવશ્યક છે.

ઉદાહરણ 8 : બિંદુઓ A $(2, -2)$ અને B $(-7, 4)$ ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓ (અહીં, બિંદુઓ રેખાખંડનું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.) ના યામ શોધો.

આકૃતિ 7.11

ઉકેલ : ધારો કે, P અને Q એ AB ને ત્રિભાગતાં બિંદુઓ છે.

જેથી, AP = PQ = QB (જુઓ આકૃતિ 7.11.)

માટે, P એ AB નું 1:2 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. આથી, વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતા બિંદુ P ના યામ,

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) = (-1, 0)$$

હવે, Q એ AB નું 2:1 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે. માટે, Q ના યામ,

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) = (-4, 2)$$

આથી, A અને B ને જોડતા રેખાખંડના ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ $(-1, 0)$ અને $(-4, 2)$ થાય.

નોંધ : આપણે Q ને PBના મધ્યબિંદુ તરીકે લઈને પણ તેના યામ મેળવી શકીએ. આ માટે આપણે મધ્યબિંદુના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તેના યામ મેળવી શકીએ.

ઉદાહરણ 9 : y-અક્ષ એ બિંદુઓ $(5, -6)$ અને $(-1, -4)$ ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે, તે શોધો અને આ છેદબિંદુ પણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $k : 1$ માંગેલ ગુણોત્તર છે. આથી, વિભાજનસૂત્રની મદદથી ABનું $k : 1$ માં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ,

$$\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right) \text{ થાય.}$$

આ બિંદુ y-અક્ષ પર આવેલું છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે, y-અક્ષ પરના બિંદુનો x-યામ 0 હોય.

માટે, $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

આથી, $k = 5$

આમ, માંગેલ ગુણોત્તર $5 : 1$ થશે. કિંમત $k = 5$ $\left(\frac{-4k-6}{k+1}\right)$ માં મૂકતાં આપણને છેદબિંદુ $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ મળશે.

ઉદાહરણ 10 : જો બિંદુઓ A $(6, 1)$, B $(8, 2)$, C $(9, 4)$ અને D $(p, 3)$ એ આ જ ક્રમમાં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો p ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

આથી, AC ના મધ્યબિંદુના યામ = BD ના મધ્યબિંદુના યામ

$$\therefore \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$\therefore p = 7$$

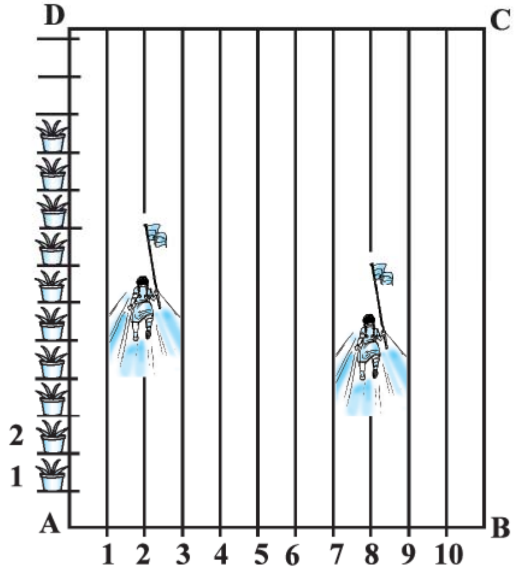
સ્વાધ્યાય 7.2

1. બિંદુઓ $(-1, 7)$ અને $(4, -3)$ ને જોડતા રેખાખંડનું $2 : 3$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.

2. બિંદુઓ $(4, -1)$ અને $(-2, -3)$ ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ મેળવો.

3. તમારી શાળાના લંબચોરસ આકારના મેદાન ABCD માં રમતગમત દિવસની પ્રવૃત્તિઓ યોજેલ છે. ચોક પાઉડરની મદદથી એક એક મીટરના અંતરે રેખાઓ દોરેલી છે. આકૃતિ 7.12 માં દર્શાવ્યા અનુસાર AD પર પ્રત્યેક 1 મીટરના અંતરે હોય તેવા 100 ફૂલના કુંડાં મૂક્યા છે.

નિહારીકા બીજી હરોળમાં દોડે છે અને તેણે AD નું $\frac{1}{4}$ ભાગનું અંતર કાપ્યું છે અને ત્યાં લીલો ધ્વજ ફરકાવે છે. પ્રિત આઠમી હરોળમાં દોડે છે અને તેણે AD નું $\frac{1}{5}$ ભાગ અંતર કાપ્યું છે અને ત્યાં લાલ ધ્વજ ફરકાવે છે. આ બંને ધ્વજ વચ્ચેનું અંતર કેટલું થશે ? જો રશ્મિએ આ બંને ધ્વજને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ પર વાદળી ધ્વજ ફરકાવવાનો હોય તો તે ધ્વજને ક્યાં ફરકાવશે ?



આકૃતિ 7.12

4. બિંદુ $(-1, 6)$ એ બિંદુઓ $(-3, 10)$ અને $(6, -8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે ?

5. x-અક્ષ બિંદુઓ A $(1, -5)$ અને B $(-4, 5)$ ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો. વિભાજન બિંદુના યામ પણ શોધો.

6. જો $(1, 2)$, $(4, y)$, $(x, 6)$ અને $(3, 5)$ એ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ હોય તો x અને y શોધો.

7. AB વર્તુળનો વ્યાસ છે. વર્તુળનું કેન્દ્ર $(2, -3)$ છે અને B $(1, 4)$ છે. તો બિંદુ A ના યામ શોધો.

8. જો A અને B અનુક્રમે $(-2, -2)$ અને $(2, -4)$ હોય, જેથી $AP = \frac{3}{7} AB$ થાય અને બિંદુ P રેખાખંડ AB પર આવેલ હોય, તેવા બિંદુ P ના યામ શોધો.

9. A $(-2, 2)$ અને B $(2, 8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું ચાર સમાન ભાગમાં વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ શોધો.

10. સમબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ $(3, 0)$, $(4, 5)$, $(-1, 4)$ અને $(-2, -1)$ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

[**સૂચન :** સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ (તેના વિકર્ણોનો ગુણાકાર)]

7.4 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

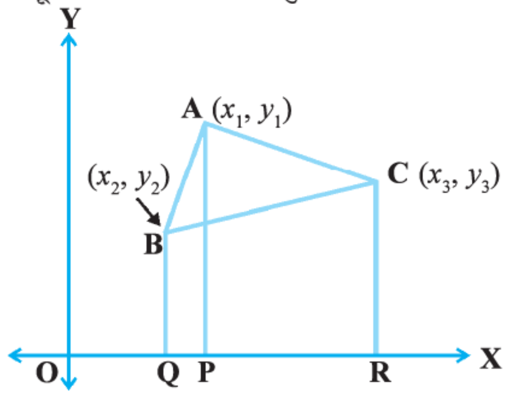
અગાઉના ધોરણમાં તમે ત્રિકોણનો પાયો અને તેના પરનો વેધ આપેલ હોય ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધતાં શીખ્યા છો. તમે આ માટે નીચેનું સૂત્ર વાપર્યું છે :

K8D3D6

$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેધ}$$

ધોરણ IX માં તમે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે હેરોનું સૂત્ર પણ શીખ્યાં છો. હવે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુના યામ આપેલાં હોય તો તમે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? સારું, તમે અંતરસૂત્રની મદદથી ત્રણ બાજુઓની લંબાઈ શોધી શકો અને ત્યાર બાદ હેરોના સૂત્રની મદદથી ક્ષેત્રફળ શોધી શકો. પરંતુ, ખાસ કરીને જો બાજુઓના માપ અસંમેય સંખ્યા મળે તો આ કંટાળાજનક છે. ચાલો, આપણે જોઈએ કે કોઈ સરળ માર્ગ છે ?

ધારો કે, જેનાં શિરોબિંદુઓ A (x_1, y_1) B (x_2, y_2) C (x_3, y_3) હોય તેવો કોઈ ત્રિકોણ ABC છે. A, B અને C માંથી x-અક્ષ પર લંબ અનુક્રમે AP, BQ અને CR દોરો. સ્પષ્ટપણે ABQP, APRC અને BQRC બધા સમલંબ ચતુષ્કોણ થશે. (જુઓ આકૃતિ 7.13.)



આકૃતિ 7.13

હવે, આકૃતિ 7.13 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ = સમલંબ ચતુષ્કોણ ABQPનું ક્ષેત્રફળ + સમલંબ ચતુષ્કોણ APRCનું ક્ષેત્રફળ – સમલંબ ચતુષ્કોણ BQRCનું ક્ષેત્રફળ

તમે આ પણ જાણો છો કે,

$$\text{સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}\ (\text{સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો})\ (\text{તેમની વચ્ચેનું અંતર})$$

આથી,

$$\Delta \text{ ABC નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}(BQ + AP)\, QP + \frac{1}{2}(AP + CR)\, PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\, QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

આમ, Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ આ સૂત્રથી મળતાં મૂલ્યની સંખ્યાત્મક કિંમત થાય.

$$\Delta \text{ ABC નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \text{ નું સંખ્યાત્મક મૂલ્ય}$$

ચાલો, આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 11 : જેનાં શિરોબિંદુઓ (1, – 1), (– 4, 6) અને (–3, – 5) હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : A (1, – 1), B (– 4, 6) અને C (–3, – 5) શિરોબિંદુઓ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$= \frac{1}{2}\,[1\,(6 + 5) + (-4)\,(-5 + 1) + (-3)\,(-1 - 6)]$$

$$= \frac{1}{2}\,(11 + 16 + 21) = 24$$

આથી, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 24 ચોરસ એકમ થાય.

ઉદાહરણ 12 : બિંદુઓ A (5, 2), B (4, 7) અને C (7, – 4) દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : શિરોબિંદુઓ A (5, 2), B (4, 7) અને C (7, – 4) દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$= \frac{1}{2}\,[\,5\,(7 + 4) + 4\,(-4 - 2) + 7\,(2 - 7)]$$

$$= \frac{1}{2}\,[55 - 24 - 35] = \frac{-4}{2} = -2$$

ક્ષેત્રફળ એ માપ હોવાથી તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, આપણે –2 ની સંખ્યાત્મક કિંમત 2 લઈશું.

માટે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = 2 ચોરસ એકમ.

ઉદાહરણ 13 : બિંદુઓ P (–1.5, 3), Q (6, –2) અને R (–3, 4) થી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}\,[\,-1.5\,(-2 - 4) + 6\,(4 - 3) + (-3)\,(3 + 2)]$$

$$= \frac{1}{2}\,(9 + 6 - 15) = 0$$

શું આપણી પાસે 0 ચોરસ એકમ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ હોઈ શકે ? આનો અર્થ શું થાય ?

જો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 0 ચોરસ એકમ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ સમરેખ હોય.

ઉદાહરણ 14 : બિંદુઓ A (2, 3), B (4, k) અને C (6, –3) સમરેખ હોય, તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 0 જ થાય.

$$\therefore\ \frac{1}{2}\,[\,2\,(k + 3) + 4\,(-3 - 3) + 6\,(3 - k)] = 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\,[\,-4k] = 0$$

$$\therefore\ k = 0$$

ચાલો, માટે આપણે આપણો ઉત્તર ચકાસીએ.

Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\,[2\,(0 + 3) + 4\,(-3 - 3) + 6\,(3 - 0)] = 0$

ઉદાહરણ 15 : જો A (–5, 7), B (–4, –5), C (–1, – 6) અને D (4, 5) ક્રમમાં એ એક ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : B થી D ને જોડવાથી, તમને Δ ABD અને Δ BCD એમ બે ત્રિકોણો મળશે.

હવે, Δ ABD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\,[-5\,(-5-5) + (-4)\,(5-7) + 4\,(7+5)]$

$= \frac{1}{2}\,(50 + 8 + 48) = \frac{106}{2}$ = 53 ચોરસ એકમ

તથા, Δ BCD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\,[-4\,(-6-5) - 1\,(5+5) + 4\,(-5+6)]$

$= \frac{1}{2}\,[44 - 10 + 4]$ = 19 ચોરસ એકમ

આથી, ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ = 53 + 19 = 72 ચોરસ એકમ

નોંધ : બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, આપણે જેમાં સામાન્ય ક્ષેત્રફળ ન હોય તેવા ત્રિકોણીય પ્રદેશોમાં વિભાજન કરીએ અને તેનું ક્ષેત્રફળ આ પ્રદેશોનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. જેનાં શિરોબિંદુઓ નીચે પ્રમાણે છે તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) (2, 3), (–1, 0), (2, – 4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)

2. નીચે આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ હોય તો પ્રત્યેકમાં 'k' ની કિંમત શોધો :

(i) (7, –2), (5, 1), (3, k) (ii) (8, 1), (k, – 4), (2, –5)

3. જેનાં શિરોબિંદુઓ (0, –1), (2, 1) અને (0, 3) હોય તેવા ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અને આપેલ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

4. એક ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ (– 4, – 2), (– 3, – 5), (3, – 2) અને (2, 3) હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. તમે ધોરણ IX (પ્રકરણ 9, પ્રશ્ન નં.3)માં શીખ્યા છો કે ત્રિકોણની મધ્યગા ત્રિકોણનું બે સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે. જેનાં શિરોબિંદુઓ A (4, –6), B (3, –2) અને C (5, 2) હોય, તેવા Δ ABC માટે આ પરિણામ ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 7.4 (વૈકલ્પિક)*

1. રેખા $2x + y - 4 = 0$ બિંદુઓ A (2, –2) અને B (3, 7) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે તે નક્કી કરો.

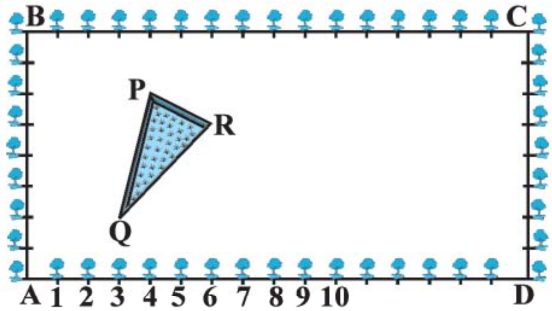
2. જો બિંદુઓ (x, y), (1, 2) અને (7, 0) સમરેખ હોય, તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

3. બિંદુઓ (6, –6), (3, –7) અને (3, 3)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું કેન્દ્ર શોધો.

4. ચોરસનાં બે સામસામેનાં શિરોબિંદુઓ (– 1, 2) અને (3, 2) છે, તો બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.

5. કૃષિનગરની માધ્યમિક શાળાના ધોરણ Xના વિદ્યાર્થીઓને બાગાયત પ્રવૃત્તિ માટે એક લંબચોરસ મેદાન ફાળવવામાં આવ્યું છે. તેની ફરતી બાજુએ ગુલમહોરના રોપા એક-એક મીટરના અંતરે વાવેલા છે. આકૃતિ 7.14માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આ મેદાનમાં ઘાસની એક ત્રિકોણીય લોન છે. વિદ્યાર્થીઓને બાકીના ભાગ પર ફૂલોના છોડનાં બીજ વાવવાનાં છે.



આકૃતિ 7.14

(i) A ને ઊગમબિંદુ લઈ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

(ii) જો C ઊગમબિંદુ હોય, તો Δ PQR નાં શિરોબિંદુઓના યામ શું થાય ? આ બંને કિસ્સાઓમાં ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?

6. Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A (4, 6), B (1, 5) અને C (7, 2) છે. બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે એક રેખા D અને E માં એવી રીતે છેદે છે જેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$. તો Δ ADEનું ક્ષેત્રફળ મેળવો અને Δ ABC ના ક્ષેત્રફળ સાથે તેની તુલના કરો. (પ્રમેય 6.2 અને પ્રમેય 6.6 યાદ કરો.)

7. A (4, 2), B (6, 5) અને C (1, 4) એ Δ ABCનાં શિરોબિંદુઓ છે.

(i) A માંથી દોરેલ મધ્યગા BC ને D માં મળે છે. બિંદુ D ના યામ શોધો.

(ii) AP : PD = 2:1 થાય એવું બિંદુ P એ AD પર છે તો P ના યામ શોધો.

(iii) BQ : QE = 2 : 1 અને CR : RF = 2:1 હોય તેવાં બિંદુઓ Q અને R અનુક્રમે મધ્યગા BE અને CF પર છે, તો Q અને R ના યામ શોધો.

(iv) તમે શું અવલોકન કર્યું ?

(v) જો A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) અને C (x_3, y_3) એ Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ હોય તો આપેલ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના યામ શોધો.

[**નોંધ :** ત્રણે ય મધ્યગાઓના છેદબિંદુને મધ્યકેન્દ્ર કહે છે અને તે દરેક મધ્યગાનું 2:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.]

8. બિંદુઓ A (– 1, – 1), B (–1, 4), C (5, 4) અને D (5, –1) થી લંબચોરસ ABCD રચાય છે. P, Q, R અને S અનુક્રમે AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. ચતુષ્કોણ PQRS ચોરસ છે ? લંબચોરસ છે ? કે સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? તમારો જવાબ ચકાસો.

7.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે :

1. P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ છે.

2. બિંદુ P (x, y) નું ઊગમબિંદુથી અંતર $\sqrt{x^2 + y^2}$ છે.

3. A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું m_1: m_2 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ P (x, y) ના યામ $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ થાય.

4. બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ છે.

5. બિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) થી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\frac{1}{2}$ $[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$ની સંખ્યાત્મક કિંમત છે.

વાચકને નોંધ

વિભાગ 7.3 માં A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતર્વિભાજન કરતા બિંદુ P ના યામ (x, y) કેવી રીતે મળે તેની ચર્ચા કરી છે.

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \; y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

PA : PB = $m_1 : m_2$ છે તેની નોંધ કરો.

પરંતુ જો, P, A અને B ની વચ્ચે ન હોય પરંતુ રેખા AB પર રેખાખંડ AB ની બહાર હોય તો આપણે કહીએ છીએ કે P એ A અને B ને જોડતા રેખાખંડનું બહિર્વિભાજન કરે છે. આવા વિકલ્પમાં વિભાજન સૂત્રનો આપણે ઉચ્ચ વર્ગમાં અભ્યાસ કરીશું.

W2Q4B7

S4C2A8

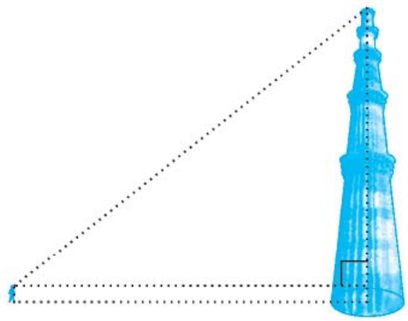
ત્રિકોણમિતિનો પરિચય 8

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.
– J.F. Herbart (1890)

8.1 પ્રાસ્તાવિક

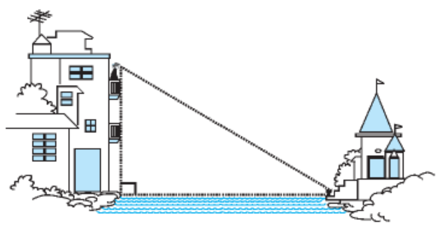
તમે અગાઉના ધોરણમાં ત્રિકોણ અને વિશિષ્ટ વિકલ્પમાં કાટકોણ ત્રિકોણનો અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છો. હવે આપણી આસપાસમાંથી જ જેમાં કાટકોણ ત્રિકોણ બનતો હોય તેવી કલ્પના કરી શકાય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ. ઉદાહરણ તરીકે :

1. ધારો કે, એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓ કુતુબમિનારની મુલાકાત લઈ રહ્યા છે. હવે જો કોઈ એક વિદ્યાર્થી મિનારની ટોચ તરફ જુએ તો અહીં આકૃતિ 8.1માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણની કલ્પના કરી શકાય. શું આ મિનારની ઊંચાઈ વાસ્તવિક રીતે માપ્યા વગર વિદ્યાર્થી શોધી શકશે ?



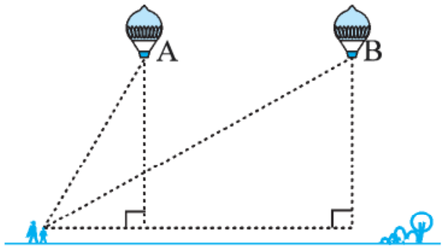
આકૃતિ 8.1

2. ધારો કે, એક છોકરી નદીના કિનારા પર રહેલા તેના ઘરની અગાસીમાં બેઠી છે. તે નદીના બીજા કિનારા પર આવેલા મંદિરનાં પગથિયાં પર રહેલા ફૂલોનાં કૂંડાંને જુએ છે. આ પરિસ્થિતિમાં પણ આકૃતિ 8.2માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણ બનતો હોય તેવી કલ્પના કરી શકાય છે. જો તમે જાણતા હો કે, નિરીક્ષણ કરનાર વ્યક્તિ કેટલી ઊંચાઈ પર બેઠી છે, તો શું તમે નદીની પહોળાઈ શોધી શકશો ?



આકૃતિ 8.2

3. ધારો કે, ગરમ હવાવાળું એક બલૂન હવામાં ઊડી રહ્યું છે. આકાશમાં રહેલા આ બલૂનને એક છોકરી જુએ છે અને તેની જાણ કરવા તે પોતાની માતા પાસે દોડીને જાય છે. આ બલૂનને જોવા તેની માતા પણ તરત જ ઘરની બહાર આવે છે. હવે ધારો કે, છોકરીએ જ્યારે આ બલૂનને પ્રથમવાર જોયું ત્યારે તે બિંદુ A પર હતું અને હવે જ્યારે માતા અને પુત્રી બંને સાથે બલૂનને જુએ છે ત્યારે બલૂન બિંદુ B સુધી પહોંચી ગયું છે. શું તમે બિંદુ B નું જમીનથી શિરોલંબઅંતર શોધી શકશો ?



આકૃતિ 8.3

ઉપર્યુક્ત બધી જ પરિસ્થિતિઓમાં ગણિતશાસ્ત્રની એક શાખામાં આવતી ગાણિતિક પદ્ધતિઓના ઉપયોગથી અંતર અને ઊંચાઈ શોધી શકાય છે આ શાખાને ત્રિકોણમિતિ કહે છે. અંગ્રેજી શબ્દ 'Trigonometry' ત્રણ ગ્રીક શબ્દો, 'Tri' (એટલે કે, ત્રણ), 'Gon' (એટલે કે, બાજુ) અને 'metron' (એટલે કે, માપ)ના સંયોજનથી બનેલ છે. ખરેખર તો ***ત્રિકોણમિતિ,*** ત્રિકોણની બાજુઓ તથા ખૂણાઓ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ છે. પ્રાચીન સમયમાં ત્રિકોણમિતિ પર થયેલ કાર્યનો ઉલ્લેખ ઇજિપ્ત અને બેબિલોનમાં મળે છે. પ્રાચીન સમયમાં ખગોળશાસ્ત્રીઓ ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ પૃથ્વીથી તારાઓ અને ગ્રહોનું અંતર શોધવા માટે કરતા હતા. આજે પણ યંત્રશાસ્ત્ર અને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં વપરાતી પ્રૌદ્યોગિકીની નવીન પદ્ધતિઓ ત્રિકોણમિતિની સંકલ્પનાઓ પર આધારિત છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે કાટકોણ ત્રિકોણમાં રહેલા લઘુકોણોની સાપેક્ષમાં તેની બાજુઓના ગુણોત્તરો વિશે ચર્ચા કરીશું. આપણે તેને ખૂણાઓ માટેના ***ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર*** કહીશું. આ ગુણોત્તરનો વિસ્તાર બીજા ખૂણાઓ માટે પણ કરી શકાય છે. છતાં પણ આપણે અહીં આપણી ચર્ચા ફક્ત લઘુકોણ સુધી જ સીમિત રાખીશું. આપણે અહીં 0° અને 90° માપના ખૂણાઓના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પણ વ્યાખ્યાયિત કરીશું, તેમજ કેટલાક વિશિષ્ટ ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો મેળવીશું તથા આ ગુણોત્તરોને સંબંધિત કેટલાક નિત્યસમ સ્થાપિત કરીશું. તેમને આપણે ***ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ*** કહીશું.

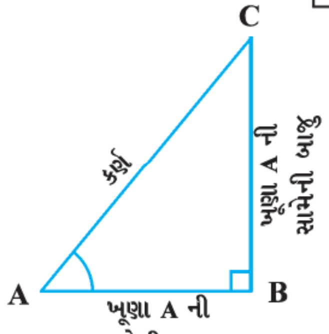
F1V4U7

8.2 ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

વિભાગ 8.1માં તમે વિભિન્ન પરિસ્થિતિઓમાં કાલ્પનિક રીતે બનતા કાટકોણ ત્રિકોણ વિશે જોયું.

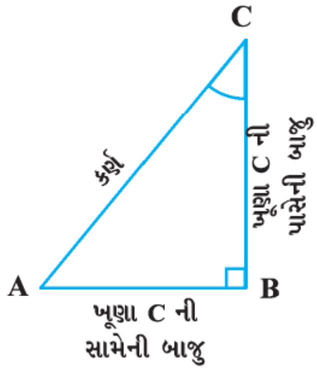
ચાલો, આકૃતિ 8.4 માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લો.

અહીં, ∠CAB (ટૂંકમાં ∠A) લઘુકોણ છે. ખૂણા A ને સાપેક્ષ બાજુ BC ની સ્થિતિ વિશે ધ્યાન આપો. તે ખૂણા A ની સામે છે. આપણે તેને ખૂણા A ની ***સામેની બાજુ (Opposite side)*** કહીશું. બાજુ AC ***કાટકોણ ત્રિકોણનો કર્ણ (Hypotenuse)*** છે અને બાજુ AB, ∠A નો ભાગ છે તેથી, તેને ખૂણા A ની ***પાસેની બાજુ (Adjacent side)*** કહીશું.



આકૃતિ 8.4

ધ્યાન આપો, અહીં ખૂણા A ની જગ્યાએ ખૂણો C લઈએ તો બાજુઓની સ્થિતિ બદલાઈ જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 8.5.)



આકૃતિ 8.5

અગાઉના ધોરણમાં તમે ‘ગુણોત્તર’ની સંકલ્પના વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. હવે આપણે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ સંબંધિત કેટલાક ગુણોત્તરોને વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને તે ગુણોત્તરોને આપણે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો કહીશું.

કાટકોણ ત્રિકોણ ABCમાં (જુઓ આકૃતિ 8.4.) ખૂણા A માટેના ***ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો*** નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે :

$$\angle A \text{ નો } \textit{sine} = \frac{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ નો } \textit{cosine} = \frac{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ નો } \textit{tangent} = \frac{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}}{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ નો } \textit{cosecant} = \frac{1}{\angle A \text{ નો sine}} = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ નો } \textit{secant} = \frac{1}{\angle A \text{ નો } \textit{cosine}} = \frac{\text{કર્ણ}}{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ નો } \textit{cotangent} = \frac{1}{\angle A \text{ નો } \textit{tangent}} = \frac{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}}{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}} = \frac{AB}{BC}$$

ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યાયિત ગુણોત્તરોને ટૂંકમાં અનુક્રમે *sin* A, *cos* A, *tan* A, *cosec* A, *sec* A અને *cot* A સ્વરૂપે લખાય છે. ધ્યાન આપો, અહીં ગુણોત્તરો ***cosec A, sec A અને cot A*** અનુક્રમે ***sin A, cos A અને tan A*** ના વ્યસ્ત ગુણોત્તરો છે.

અહીં તમે એ પણ જોઈ શકો છો કે,

$$tan\ A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{sin\ A}{cos\ A} \quad \text{અને } cot\ A = \frac{cos\ A}{sin\ A}.$$

આમ, કાટકોણ ત્રિકોણમાં રહેલા લઘુકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો, ત્રિકોણના ખૂણાઓ તથા બાજુઓની લંબાઈ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

તમે કાટકોણ ત્રિકોણના ખૂણા C માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કરવાનો પ્રયત્ન કરી શકશો ? (જુઓ આકૃતિ 8.5.)

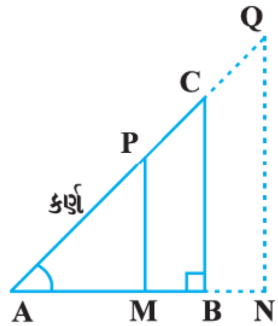
The first use of the idea of ***'sine'*** in the way we use it today was in the work *Aryabhatiyam* by ***Aryabhata,*** in C.E. 500. ***Aryabhata*** used the word ***ardha-jya*** for the half-chord, which was shortened to ***jya*** or ***jiva*** in due course. When the ***Aryabhatiyam*** was translated into Arabic, the word ***jiva*** was retained as it is. The word ***jiva*** was translated into ***sinus,*** which means curve, when the Arabic version was translated into Latin. Soon the word ***sinus***, also used as ***sine,*** became common in mathematical texts throughout Europe. An English Professor of astronomy ***Edmund Gunter*** (C.E.1581– C.E.1626), first used the abbreviated notation ***'sin'***.

Aryabhata
C.E. 476 – 550

The origin of the terms ***'cosine'*** and ***'tangent'*** was much later. The ***cosine*** function arose from the need to compute the ***sine*** of the complementary angle. ***Aryabhata*** called it ***kotijya***. The name ***cosinus*** originated with ***Edmund Gunter***. In C.E.1674, the English Mathematician ***Sir Jonas Moore*** first used the abbreviated notation ***'cos'***.

નોંધ : ધ્યાન આપો, અહીં *sin* A નો ઉપયોગ 'ખૂણા A ના *sine*' ના સંક્ષિપ્તરૂપે કરવામાં આવેલ છે. *sin* A એ *sin* અને A નો ગુણાકાર નથી. *sin* ને A થી અલગ કરીએ તો તેનો કોઈ જ અર્થ નથી. તે જ પ્રમાણે *cos* A એ *cos* અને A નો ગુણાકાર નથી. તેવી જ રીતે બીજા ગુણોત્તરો માટે પણ આવું જ અર્થઘટન કરી શકાય.

હવે જો આપણે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ના કર્ણ AC પર બિંદુ P લઈએ અથવા લંબાવેલ બાજુ AC પર એક બિંદુ Q લઈએ અને AB પર લંબ PM દોરીએ અથવા લંબાવેલ બાજુ AB પર લંબ QN દોરીએ (જુઓ, આકૃતિ 8.6) તો Δ PAM માં $\angle$A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અને Δ CAB માં $\angle$A માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અથવા Δ QAN માં $\angle$A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોમાં શું અંતર હોય ?



આકૃતિ 8.6

આનો ઉત્તર મેળવવા સૌપ્રથમ આ ત્રિકોણોનું નિરીક્ષણ કરો. શું Δ PAM અને Δ CAB સમરૂપ છે ? પ્રકરણ-6માં આપેલ સમરૂપતાની શરત (ખૂખૂ) યાદ કરો. આ સિદ્ધાંત પ્રમાણે તમે જોઈ શકો છો કે, ત્રિકોણ PAM અને ત્રિકોણ CAB સમરૂપ છે.

આમ, સમરૂપ ત્રિકોણના ગુણધર્મ પ્રમાણે અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણ હોય છે.

આમ, આપણી પાસે $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$ છે.

તેના પરથી આપણને $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = sin\ A$ મળશે.

તે જ પ્રમાણે $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = cos\ A$, $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = tan\ A$ વગેરે મળશે.

આ દર્શાવે છે કે, Δ PAM માં $\angle$A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો અને Δ CAB માં $\angle$A માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો એક જ છે.

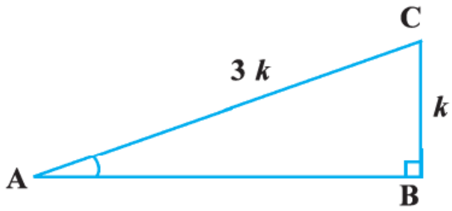
આ જ પ્રમાણે તમે ચકાસી શકો છો કે, Δ QAN માં પણ sin A (તથા અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો)નું મૂલ્ય સમાન જ મળે છે.

આપણા આ અવલોકનથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, ***જો ખૂણાનું માપ સમાન રહે તો તે ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યોમાં ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ સાથે કોઈ પરિવર્તન થતું નથી.***

નોંધ : આપણી સુવિધા માટે આપણે $(sin\ A)^2$, $(cos\ A)^2$ વગેરેને બદલે અનુક્રમે $sin^2\ A$, $cos^2\ A$ વગેરે લખીશું. પરંતુ $cosec\ A = (sin\ A)^{-1} \neq sin^{-1}\ A$ (જેને sin ઈનવર્સ A વંચાય છે.) sin^{-1} A નો અર્થ જુદો થાય છે. તેની ચર્ચા આપણે પછીના ધોરણમાં કરીશું. આ જ પ્રમાણે ઉપર્યુક્ત વિધાનો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો માટે પણ લાગુ પડશે. કેટલીકવાર ખૂણો દર્શાવવા ગ્રીક અક્ષર θ (થીટા) પણ ઉપયોગમાં લેવાય છે.

આપણે લઘુકોણ માટેના છ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વ્યાખ્યાયિત કર્યા. જો આપણે કોઈ એક ગુણોત્તર જાણતા હોઈએ તો શું બીજા ગુણોત્તરો શોધી શકીશું ? ચાલો, જોઈએ.

જો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $sin\ A = \frac{1}{3}$ હોય, તો આનો અર્થ એ થાય કે $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, એટલે કે, ત્રિકોણની બાજુઓ BC અને AC ની લંબાઈનો ગુણોત્તર 1:3 છે. (જુઓ આકૃતિ 8.7.) તેથી કોઈ એક ધન સંખ્યા k માટે જો BC બરાબર k લઈએ તો AC બરાબર $3k$ થાય. ખૂણા A માટેના બીજા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવા માટે આપણે ત્રીજી બાજુ AB ની લંબાઈ શોધવી પડે. તમને પાયથાગોરસનું પ્રમેય યાદ છે? ચાલો તેના ઉપયોગથી આપણે AB ની લંબાઈ શોધીએ.



આકૃતિ 8.7

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\ k)^2$$

માટે, $AB = \pm\ 2\sqrt{2}\ k$

તેથી આપણને $AB = 2\sqrt{2}\ k$ મળે (AB = $-\ 2\sqrt{2}\ k$ કેમ નહિ ?)

હવે, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

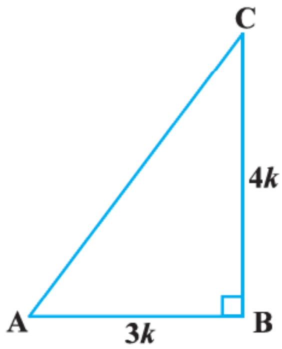
આ જ પ્રમાણે તમે ખૂણા A માટેના અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પણ શોધી શકશો.

નોંધ : કાટકોણ ત્રિકોણમાં, લાંબામાં લાંબી બાજુ કર્ણ હોવાથી $\sin A$ અને $\cos A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 થી ઓછું હશે. (કોઈ વિશેષ સ્થિતિમાં જ તે 1 હશે.)

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : જો $\tan A = \frac{4}{3}$ હોય, તો $\angle A$ ના અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ કાટકોણ ΔABC દોરો. (જુઓ આકૃતિ 8.8).



આકૃતિ 8.8

હવે, આપણે જાણીએ છીએ કે, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

માટે, જો કોઈ ધન સંખ્યા k માટે $BC = 4k$ હોય, તો $AB = 3k$

હવે, પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

તેથી, $AC = 5\,k$ મળે.

હવે, આપણે તેમની વ્યાખ્યાને આધારે બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો લખીએ.

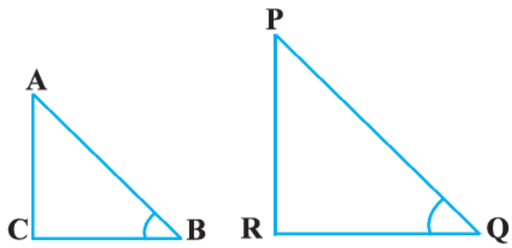
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

માટે, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ અને $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$

ઉદાહરણ 2 : લઘુકોણ B તથા Q માટે $\sin B = \sin Q$ છે. સાબિત કરો કે $\angle B = \angle Q$

ઉકેલ : ચાલો, આપણે જેમાં $\sin B = \sin Q$ હોય, એવા બે કાટકોણ ΔABC અને ΔPQR લઈએ. (જુઓ આકૃતિ 8.9.)



આકૃતિ 8.9

અહીં, $\sin B = \frac{AC}{AB}$

અને $\sin Q = \frac{PR}{PQ}$

તેથી, $\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$

માટે, $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k$ (ધારો) (1)

હવે, પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

અને $$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

તેથી, $$\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{k^2 PQ^2 - k^2 PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}}$$

$$= \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \qquad (2)$$

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

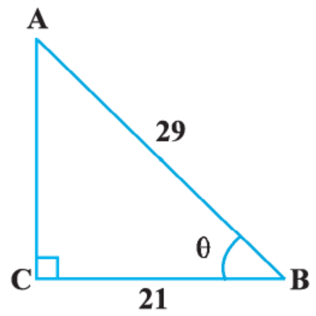
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

આમ, પ્રમેય 6.4 પ્રમાણે Δ ACB ~ Δ PRQ. તેથી, $\angle B = \angle Q$

ઉદાહરણ 3 : જેમાં $\angle C$ કાટખૂણો હોય, તેવો કોઈ Δ ACB લો. AB = 29 એકમ, BC = 21 એકમ અને $\angle ABC = \theta$ (જુઓ આકૃતિ 8.10) હોય, તો નિમ્નલિખિત મૂલ્ય શોધો :

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$,

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$.



આકૃતિ 8.10

ઉકેલ : Δ ACB માં,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29-21)(29+21)}$$

$$= \sqrt{(8)(50)}$$

$$= \sqrt{400}$$

= 20 એકમ

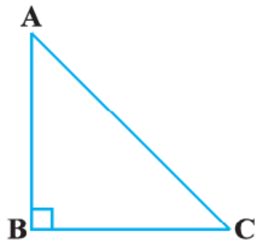
તેથી, $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$

હવે, (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{21^2+20^2}{29^2} = \frac{441+400}{841} = 1$

અને (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

ઉદાહરણ 4 : કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂણો B કાટખૂણો છે. જો $tan\, A = 1$ તો ચકાસો કે $2\, sin\, A\, cos\, A = 1$

ઉકેલ : Δ ABC માં,



આકૃતિ 8.11

$tan\, A = \frac{BC}{AB} = 1$ (જુઓ આકૃતિ 8.11.)

એટલે કે BC = AB

ધારો કે કોઈ ધન સંખ્યા k માટે $AB = BC = k$,

હવે, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

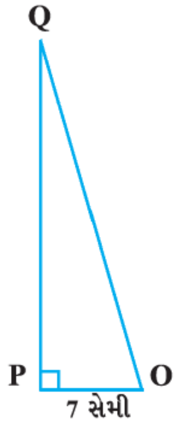
$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

માટે, $sin\, A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $cos\, A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

તેથી, $2\, sin\, A\, cos\, A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ સિદ્ધ થાય છે.

ઉદાહરણ 5 : Δ OPQ માં, P કાટખૂણો છે, OP = 7 સેમી અને OQ – PQ = 1 સેમી (જુઓ આકૃતિ 8.12), sin Q અને cos Q નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : Δ OPQ માં,



આકૃતિ 8.12

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$\therefore (1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (કેમ ?)

$\therefore 1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

$\therefore 1 + 2PQ = 7^2$ (કેમ ?)

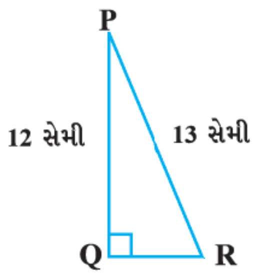
$\therefore$ PQ = 24 સેમી અને OQ = 1 + PQ = 25 સેમી

તેથી, $sin\, Q = \frac{7}{25}$ અને $cos\, Q = \frac{24}{25}$

સ્વાધ્યાય 8.1

1. Δ ABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. AB = 24 સેમી, BC = 7 સેમી હોય, તો નીચેના ગુણોત્તરોનું મૂલ્ય શોધો :
   (i) $sin\, A$, $cos\, A$
   (ii) $sin\, C$, $cos\, C$

2. આકૃતિ 8.13 માં, $tan\, P - cot\, R$ શોધો.



આકૃતિ 8.13

3. જો $sin\, A = \frac{3}{4}$ હોય, તો $cos\, A$ અને $tan\, A$ ની ગણતરી કરો.

4. જો $15\, cot\, A = 8$ હોય, તો $sin\, A$ અને $sec\, A$ શોધો.

5. જો $sec\, \theta = \frac{13}{12}$ હોય, તો બાકીના બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધો.

6. $\angle A$ અને $\angle B$ એવા લઘુકોણો છે કે, જેથી $\cos A = \cos B$. સાબિત કરો કે $\angle A = \angle B$

7. જો $\cot \theta = \frac{7}{8}$ હોય તો, (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2 \theta$ શોધો.

8. જો $3 \cot A = 4$ હોય, તો નક્કી કરો કે $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ છે કે નહિ.

9. Δ ABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. જો $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો નિમ્નલિખિત મૂલ્ય શોધો.

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

10. Δ PQR માં $\angle Q$ કાટખૂણો છે અને PR + QR = 25 સેમી અને PQ = 5 સેમી હોય, તો $\sin P$, $\cos P$ અને $\tan P$ શોધો.

11. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે નહિ તે કારણ આપી જણાવો :

(i) $\tan A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 કરતાં ઓછું હોય છે.

(ii) A માપવાળા કોઈક ખૂણા માટે $\sec A = \frac{12}{5}$ સત્ય છે.

(iii) ખૂણા A ના *cosecant* ને સંક્ષિપ્તમાં $\cos A$ તરીકે લખાય છે.

(iv) *cot* અને A નો ગુણાકાર $\cot A$ છે.

(v) θ માપવાળા કોઈ એક ખૂણા માટે $\sin \theta = \frac{4}{3}$ શક્ય છે.

8.3 વિશિષ્ટ માપના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

A8P8S8

ભૂમિતિમાં તમે 30°, 45°, 60° અને 90° માપના ખૂણાઓની રચનાથી પરિચિત છો. આ વિભાગમાં આપણે આ ખૂણાઓ અને 0° માપના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોના મૂલ્ય મેળવીશું.

45° ના ખૂણા માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

Δ ABC માં ખૂણો B કાટખૂણો છે. હવે જો કોઈ એક ખૂણો 45° હોય તો બીજો લઘુકોણ પણ 45°નો થાય.

અર્થાત્, $\angle A = \angle C = 45°$

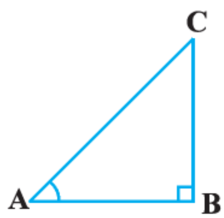
(જુઓ આકૃતિ 8.14.)

માટે, BC = AB (કેમ ?)

ધારો કે, BC = AB = a

પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

માટે, $AC = a\sqrt{2}$



આકૃતિ 8.14

ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની વ્યાખ્યાઓનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$\sin 45° = \frac{\text{45° ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{45° ખૂણાની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{\text{45° ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{45° ખૂણાની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

અને $\quad cosec\ 45° = \dfrac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \dfrac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$,

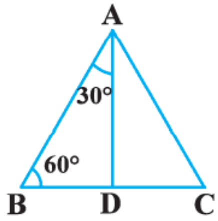
$\cot 45° = \dfrac{1}{\tan 45°} = 1$ મળે.

30° અને 60° ના ખૂણા માટે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

હવે આપણે 30° અને 60° ના ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો મેળવીએ. કોઈ એક સમબાજુ ત્રિકોણ ABC લો. સમબાજુ ત્રિકોણમાં દરેક ખૂણો 60° નો હોવાથી,

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

બિંદુ A માંથી બાજુ BC પર લંબ AD દોરો (જુઓ આકૃતિ 8.15.)



આકૃતિ 8.15

હવે, $\quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (કેમ ?)

માટે, $\quad BD = DC$

અને $\quad \angle BAD = \angle CAD$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

હવે તમે જોઈ શકો છો કે,

Δ ABD જેમાં ખૂણો D કાટખૂણો હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $\angle BAD = 30°$ તથા $\angle ABD = 60°$ (જુઓ આકૃતિ 8.15.)

તમે જાણો છો કે, ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવા માટે, આપણે ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ શોધવી પડશે. તેથી, ધારો કે, $\quad AB = 2a$

માટે, $\quad BD = \frac{1}{2} BC = a$

અને $\quad AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$,

માટે, $\quad AD = a\sqrt{3}$

હવે, આપણને

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\tan 30° = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ મળે.

અને $cosec\ 30° = \frac{1}{sin 30°} = 2$, $sec\ 30° = \frac{1}{cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

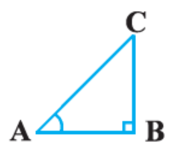
$$cot\ 30° = \frac{1}{tan 30°} = \sqrt{3}$$

તે જ પ્રમાણે, $sin\ 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\ 60° = \frac{1}{2}$, $tan\ 60° = \sqrt{3}$,

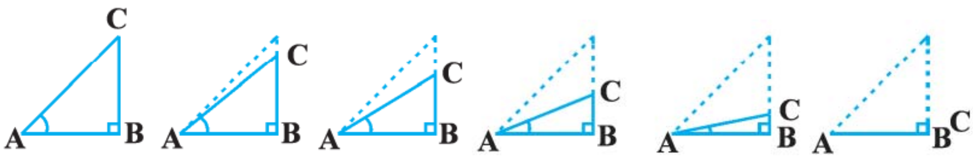
$cosec\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $sec\ 60° = 2$ અને $cot\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

0° અને 90° માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

હવે આપણે જોઈએ કે જો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂણા A નું માપ શૂન્ય થાય ત્યાં સુધી ક્રમશઃ ઓછું કરીએ, (જુઓ આકૃતિ 8.16.) તો ખૂણા Aના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પર શું પ્રભાવ પડે. જેમ જેમ $\angle A$ નું માપ નાનું થતું જશે તેમ-તેમ બાજુ BC ની લંબાઈ ઘટતી જશે. બિંદુ C , બિંદુ B ની નજીક આવતું જશે અને જ્યારે $\angle A$નું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે ત્યારે AC એ AB ને લગભગ સમાન થઈ જશે (જુઓ આકૃતિ 8.17.)



આકૃતિ 8.16



આકૃતિ 8.17

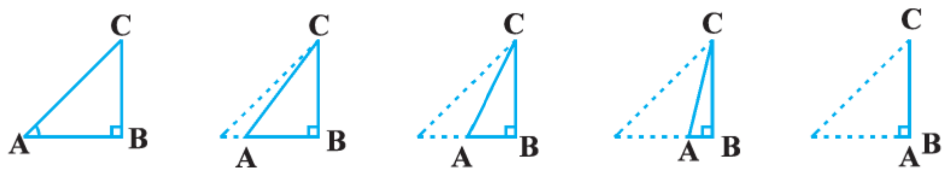
જ્યારે $\angle A$ નું માપ શૂન્યની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે BC ની લંબાઈ પણ શૂન્યની નજીક હશે. ત્યારે $sin\ A = \frac{BC}{AC}$ નું મૂલ્ય પણ શૂન્યની નજીક હશે. અને જ્યારે $\angle A$ નું માપ શૂન્યની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે લગભગ AC અને AB સમાન હશે તેથી, $cos\ A = \frac{AB}{AC}$ નું મૂલ્ય 1 ની એકદમ નજીક હશે.

આની મદદથી આપણે જ્યારે A = 0° હોય, ત્યારે *sin* A અને *cos* A નાં મૂલ્યોને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીશું. અહીં $\boldsymbol{sin\ 0° = 0}$ અને $\boldsymbol{cos\ 0° = 1}$ વ્યાખ્યાયિત થાય છે. આના ઉપયોગથી આપણને

$tan\ 0° = \frac{sin 0°}{cos 0°} = 0$, $cot\ 0° = \frac{1}{tan 0°}$ = અવ્યાખ્યાયિત (કેમ ?)

$sec\ 0° = \frac{1}{cos 0°} = 1$ અને $cosec\ 0° = \frac{1}{sin 0°}$ પુનઃ અવ્યાખ્યાયિત છે. (કેમ?)

ચાલો, હવે આપણે જોઈએ કે જો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂણા A નું માપ 90° થાય ત્યાં સુધી ક્રમશઃ વધારતા જઈએ તો આ સ્થિતિમાં ખૂણા A ના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો પર શું પ્રભાવ પડે. જેમ-જેમ ∠A નું માપ મોટું થશે તેમ-તેમ ∠C નાનો થતો જશે. માટે ઉપર્યુક્ત પરિસ્થિતિ પ્રમાણે બાજુ AB ની લંબાઈ ઘટશે. બિંદુ A બિંદુ B ની નજીક આવશે અને જ્યારે ∠A નું માપ 90° ની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે ∠C નું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે અને બાજુ AC બાજુ BC ને લગભગ સંપાતી થશે. (જુઓ આકૃતિ 8.18.)



આકૃતિ 8.18

જ્યારે ∠C નું માપ 0° ની એકદમ નજીક હશે, ત્યારે ∠A નું માપ 90° ની અત્યંત નજીક હશે. બાજુ AC અને બાજુ BC ની લંબાઈ લગભગ સમાન થશે અને તેથી *sin* A નું મૂલ્ય 1ની અત્યંત નજીક હશે. અને જ્યારે ∠A નું માપ 90° ની અત્યંત નજીક હશે, ત્યારે ∠C નું માપ 0° ની અત્યંત નજીક હશે અને બાજુ AB નું માપ લગભગ શૂન્ય થશે તેથી *cos* A નું મૂલ્ય શૂન્યની એકદમ નજીક હશે.

આમ, આપણે **$\sin 90° = 1$** અને **$\cos 90° = 0$** વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

હવે, તમે 90° માટેના બીજા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો શોધવાનો પ્રયત્ન કેમ નથી કરતા ?

હવે, આપણે ઝડપી સંદર્ભ માટે 0°, 30°, 45°, 60° અને 90° માપના બધા જ ગુણોત્તરોના મૂલ્ય કોષ્ટક 8.1 માં દર્શાવીશું.

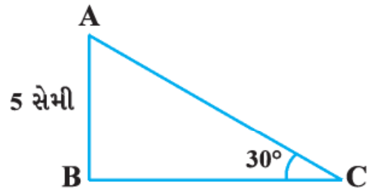
કોષ્ટક 8.1

∠A	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત
cosec A	અવ્યાખ્યાયિત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયિત
cot A	અવ્યાખ્યાયિત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

નોંધ : ઉપર્યુક્ત કોષ્ટકમાં તમે જોઈ શકો છો કે જેમ-જેમ $\angle A$ નું માપ $0°$ થી વધીને $90°$ થાય છે તેમ-તેમ $\sin A$ નું માપ 0 થી વધીને 1 થાય છે તથા $\cos A$ નું માપ 1 થી ઘટીને 0 થાય છે.

ચાલો આપણે ઉપર્યુક્ત કોષ્ટકની કિંમતોનો ઉપયોગ કેટલાંક ઉદાહરણમાં કરીએ :

ઉદાહરણ 6 : Δ ABCમાં B કાટખૂણો છે, AB = 5 સેમી અને $\angle ACB = 30°$ (જુઓ આકૃતિ 8.19). તો બાજુ BC અને AC ની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 8.19

ઉકેલ : બાજુ BC ની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે બાજુ BC અને બાજુ AB ને સમાવતા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર પસંદ કરીશું. અહીં, ખૂણા C માટે બાજુ BC પાસેની બાજુ છે તથા AB ખૂણા C ની સામેની બાજુ છે.

માટે, $\frac{AB}{BC} = \tan C$ એટલે કે $\frac{5}{BC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

આથી, $BC = 5\sqrt{3}$ સેમી મળશે.

બાજુ AC ની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે $\sin 30° = \frac{AB}{AC}$ લઈશું. (કેમ ?)

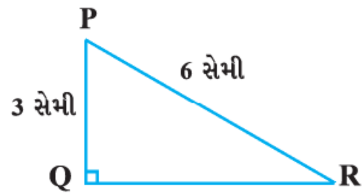
એટલે કે, $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

$\therefore$ AC = 10 સેમી

જુઓ કે, ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં ત્રીજી બાજુની લંબાઈ શોધવા માટે આપણે બીજા વિકલ્પ તરીકે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

એટલે કે, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$ સેમી = 10 સેમી

ઉદાહરણ 7 : Δ PQRમાં, Q કાટખૂણો છે (જુઓ આકૃતિ 8.20). PQ = 3 સેમી અને PR = 6 સેમી હોય, તો $\angle QPR$ અને $\angle PRQ$ શોધો.



આકૃતિ 8.20

ઉકેલ : PQ = 3 સેમી અને PR = 6 સેમી આપેલ છે.

હવે $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

$\therefore \sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

તેથી $\angle PRQ = 30°$

માટે, $\angle QPR = 60°$ (કેમ ?)

તમે અહીં જોઈ શકો છો કે, કાટકોણ ત્રિકોણમાં જો કોઈ એક બાજુ અને અન્ય કોઈ એક ભાગ (કોઈ એક લઘુકોણ અથવા તો કોઈ એક બાજુ) આપેલ હોય, તો ત્રિકોણની બાકીની બાજુ અને ખૂણાઓનાં માપ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 8 : જો $sin\ (A - B) = \frac{1}{2}$, $cos\ (A+B) = \frac{1}{2}$, $0° < A + B \le 90°$, $A > B$, તો A અને B શોધો.

ઉકેલ : $sin\ (A - B) = \frac{1}{2}$ હોવાથી $A - B = 30°$ (કેમ ?) (1)

અને $cos\ (A + B) = \frac{1}{2}$ હોવાથી $A + B = 60°$ (કેમ ?) (2)

(1) અને (2) નો ઉકેલ શોધતાં,

આપણને $A = 45°$ અને $B = 15°$ મળે.

સ્વાધ્યાય 8.2

1. કિંમત શોધો :

(i) $sin\ 60°\ cos\ 30° + sin\ 30°\ cos\ 60°$

(ii) $2\ tan^2\ 45° + cos^2\ 30° - sin^2\ 60°$

(iii) $\dfrac{cos\ 45°}{sec\ 30° + cosec\ 30°}$

(iv) $\dfrac{sin\ 30° + tan\ 45° - cosec\ 60°}{sec\ 30° + cos\ 60° + cot\ 45°}$

(v) $\dfrac{5cos^2\ 60° + 4\ sec^2\ 30° - tan^2\ 45°}{sin^2\ 30° + cos^2\ 30°}$

2. સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તેની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $\dfrac{2\ tan\ 30°}{1 + tan^2\ 30°} = ...$

(A) $sin\ 60°$ (B) $cos\ 60°$ (C) $tan\ 60°$ (D) $sin\ 30°$

(ii) $\dfrac{1 - tan^2\ 45°}{1 + tan^2\ 45°} = ...$

(A) $tan\ 90°$ (B) 1 (C) $sin\ 45°$ (D) $0°$

(iii) જ્યારે A = ... હોય, ત્યારે $sin\ 2A = 2\ sin\ A$ સત્ય હોય.

(A) $0°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$

(iv) $\dfrac{2\ tan\ 30°}{1 - tan^2\ 30°} = ...$

(A) $cos\ 60°$ (B) $sin\ 60°$ (C) $tan\ 60°$ (D) $sin\ 30°$

3. જો $tan\ (A + B) = \sqrt{3}$ અને $tan\ (A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0° < A + B \le 90°$, $A > B$, તો A અને B શોધો.

4. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $sin\ (A + B) = sin\ A + sin\ B$.

(ii) જેમ-જેમ θ નું મૂલ્ય વધે, તેમ તેમ $sin\ \theta$ નું મૂલ્ય વધે છે.

(iii) જેમ-જેમ θ નું મૂલ્ય વધે, તેમ તેમ $cos\ \theta$ નું મૂલ્ય વધે છે.

(iv) θ ના દરેક મૂલ્ય માટે $sin\ \theta = cos\ \theta$ થાય.

(v) $A = 0°$ માટે $cot\ A$ અવ્યાખ્યાયિત છે.

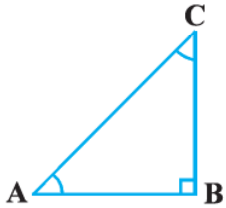
8.4 કોટિકોણના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

M5B3H4

તમને યાદ હશે કે, જો બે ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 90° હોય તો બંને ખૂણાઓને એકબીજાના કોટિકોણ કહે છે. Δ ABC માં, $\angle$B કાટખૂણો હોય, તો શું તમને અહીં કોટિકોણની એક જોડ મળશે ? (જુઓ આકૃતિ 8.21.)

$\angle A + \angle C = 90°$ હોવાથી, તે બંને કોટિકોણની જોડ બનાવે છે. આપણી પાસે,

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \frac{BC}{AC}, & \cos A &= \frac{AB}{AC}, & \tan A &= \frac{BC}{AB} \\ \operatorname{cosec} A &= \frac{AC}{BC}, & \sec A &= \frac{AC}{AB}, & \cot A &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$



આકૃતિ 8.21

હવે, આપણે $\angle C = 90° - \angle A$ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો લખીએ.

આપણી સુવિધા માટે આપણે $90° - \angle A$ ને $90° - A$ તરીકે લખીશું.

ખૂણા 90° – A માટે સામેની બાજુ અને પાસેની બાજુ કઈ હશે ?

તમે જોઈ શકો છો કે, ખૂણા $90° - A$ માટે, સામેની બાજુ AB છે અને પાસેની બાજુ BC છે.

માટે,

$$\left.\begin{aligned} \sin (90° - A) &= \frac{AB}{AC}, & \cos (90° - A) &= \frac{BC}{AC}, & \tan (90° - A) &= \frac{AB}{BC} \\ \operatorname{cosec} (90° - A) &= \frac{AC}{AB}, & \sec (90° - A) &= \frac{AC}{BC}, & \cot (90° - A) &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

હવે (1) અને (2) માં દર્શાવેલ ગુણોત્તરોની સરખામણી કરતાં આપણે જોઈશું કે :

$$\sin (90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \text{ અને } \cos (90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

અને $$\tan (90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A \text{ અને } \cot (90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

$$\sec (90° - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A \text{ અને } \operatorname{cosec} (90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

આમ, 0° અને 90° ની વચ્ચે આવેલા ખૂણા A ના દરેક મૂલ્ય માટે,

$\sin (90° - A) = \cos A$, $\quad\cos (90° - A) = \sin A$,

$\tan (90° - A) = \cot A$, $\quad\cot (90° - A) = \tan A$,

$\sec (90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\quad\operatorname{cosec} (90° - A) = \sec A$,

હવે, $A = 0°$ અને $A = 90°$ માટે આ સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસો.

નોંધ : $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°$ અને $\sec 90°$, $\operatorname{cosec} 0°$, $\tan 90°$ તથા $\cot 0°$ અવ્યાખ્યાયિત છે.

હવે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈશું.

ઉદાહરણ 9 : કિંમત શોધો : $\frac{tan\ 65^\circ}{cot\ 25^\circ}$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$cot\ A = tan\ (90^\circ - A)$

માટે $cot\ 25^\circ = tan\ (90^\circ - 25^\circ) = tan\ 65^\circ$

એટલે કે, $\frac{tan\ 65^\circ}{cot\ 25^\circ} = \frac{tan\ 65^\circ}{tan\ 65^\circ} = 1$

ઉદાહરણ 10 : જો 3A એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $sin\ 3A = cos\ (A - 26^\circ)$ હોય, તો A ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપણે $sin\ 3A = cos\ (A - 26^\circ)$ આપેલ છે. (1)

હવે, $sin\ 3A = cos\ (90^\circ - 3A)$ હોવાથી આપણે પરિણામ (1) ને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ.

$cos\ (90^\circ - 3A) = cos\ (A - 26^\circ)$

હવે, $90^\circ - 3A$ અને $A - 26^\circ$ બંને લઘુકોણ હોવાથી,

$90^\circ - 3A = A - 26^\circ$

તેથી, $A = 29^\circ$ મળે.

ઉદાહરણ 11 : $cot\ 85^\circ + cos\ 75^\circ$ ને 0° અને 45° વચ્ચેના માપવાળા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરીને દર્શાવો.

ઉકેલ : $cot\ 85^\circ + cos\ 75^\circ = cot\ (90^\circ - 5^\circ) + cos\ (90^\circ - 15^\circ)$

$= tan\ 5^\circ + sin\ 15^\circ$

સ્વાધ્યાય 8.3

1. કિંમત શોધો :

(i) $\frac{sin\ 18^\circ}{cos\ 72^\circ}$ (ii) $\frac{tan\ 26^\circ}{cot\ 64^\circ}$ (iii) $cos\ 48^\circ - sin\ 42^\circ$ (iv) $cosec\ 31^\circ - sec\ 59^\circ$

2. સાબિત કરો :

(i) $tan\ 48^\circ\ tan\ 23^\circ\ tan\ 42^\circ\ tan\ 67^\circ = 1$

(ii) $cos\ 38^\circ\ cos\ 52^\circ - sin\ 38^\circ\ sin\ 52^\circ = 0$

3. જો 2A એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $tan\ 2A = cot\ (A - 18^\circ)$ હોય, તો A ની કિંમત શોધો.

4. જો $tan\ A = cot\ B$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $A + B = 90^\circ$

5. જો 4A એ લઘુકોણનું માપ હોય તથા $sec\ 4A = cosec\ (A - 20^\circ)$ હોય, તો A ની કિંમત શોધો.

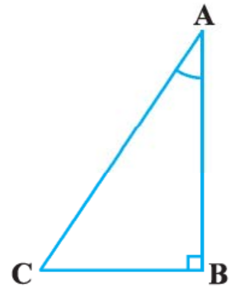
6. જો A, B અને C એ Δ ABC ના ખૂણા હોય, તો સાબિત કરો કે, $sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = cos\ \frac{A}{2}$

7. $sin\ 67^\circ + cos\ 75^\circ$ ને 0° અને 45° વચ્ચેના માપવાળા ખૂણાના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવો.

8.5 ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમો

K9Q4B8

તમને યાદ હશે કે, જો સમીકરણમાં આવતા ચલના દરેક મૂલ્ય માટે સમીકરણ સત્ય હોય, તો સમીકરણને નિત્યસમ કહી શકાય. તે જ પ્રમાણે, જ્યારે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને સમાવતા સમીકરણમાં આવતા ખૂણાઓના પ્રત્યેક મૂલ્ય માટે સમીકરણ સત્ય હોય, ત્યારે તે સમીકરણને **ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ** કહેવાય.



આકૃતિ 8.22

આ વિભાગમાં આપણે એક ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ સાબિત કરીશું અને તેનો ઉપયોગ બીજા કેટલાંક ઉપયોગી ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ સાબિત કરવા કરીશું.

Δ ABC માં $\angle$ B કાટખૂણો છે (જુઓ આકૃતિ 8.22.) અહીં

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \tag{1}$$

પરિણામ (1)ના દરેક પદને AC^2 વડે ભાગતાં, આપણને

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \text{ મળે.}$$

માટે, $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$

$\therefore \quad (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

$$\therefore \quad \cos^2 A + \sin^2 A = 1 \tag{2}$$

આ, $0° \le A \le 90°$ માં આપેલ દરેક A માટે સત્ય છે. તેથી, તે ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ છે.

હવે, પરિણામ (1) ને AB^2 વડે ભાગતાં આપણને,

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2} \text{ મળે.}$$

$$\therefore \left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \tag{3}$$

શું આ સમીકરણ $A = 0°$ માટે સત્ય છે ? હા, છે. જો $A = 90°$ હોય તો ? $A = 90°$ માટે *tan* A અને *sec* A વ્યાખ્યાયિત નથી. આમ, પરિણામ (3) જ્યાં $0° \le A < 90°$ માં આવેલ પ્રત્યેક A માટે સત્ય છે.

હવે જોઈએ કે, પરિણામ (1) ને BC^2 વડે ભાગીએ તો શું મળે.

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\therefore \quad cot^2\, A + 1 = cosec^2\, A \tag{4}$$

આપણે નોંધીએ કે, A = 0° માટે *cosec* A અને *cot* A વ્યાખ્યાયિત નથી. આમ, પરિણામ (4) એ $0° < A \le 90°$ માં આવેલ પ્રત્યેક A માટે સત્ય છે.

આ નિત્યસમોના ઉપયોગથી દરેક ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરને અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરના સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય, એટલે કે જો કોઈ એક ગુણોત્તરની કિંમત જ્ઞાત હોય તો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોની કિંમત શોધી શકાય.

હવે આપણે જોઈશું કે નિત્યસમના ઉપયોગથી આ કેવી રીતે શોધી શકાય. ધારો કે, આપણને $tan\, A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ આપેલ છે. માટે, $cot\, A = \sqrt{3}$

હવે, $sec^2\, A = 1 + tan^2\, A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. આથી, $sec\, A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ અને $cos\, A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

અને $sin\, A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. માટે, $cosec\, A = 2$

ઉદાહરણ 12 : ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો *cos* A, *tan* A અને *sec* A ને *sin* A ના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : $cos^2\, A + sin^2\, A = 1$ હોવાથી,

$cos^2\, A = 1 - sin^2\, A$, એટલે કે,

$cos\, A = \pm\sqrt{1-sin^2 A}$

માટે, $cos\, A = \sqrt{1-sin^2 A}$ મળે (કેમ ?)

આમ, $tan\, A = \frac{sin A}{cos A} = \frac{sin A}{\sqrt{1-sin^2 A}}$

અને, $sec\, A = \frac{1}{cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 A}}$

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે $sec\, A\, (1 - sin\, A)\, (sec\, A + tan\, A) = 1$

ઉકેલ : ડા.બા. $= sec\, A\, (1 - sin\, A)\, (sec\, A + tan\, A) = \left(\frac{1}{cos A}\right)(1 - sin\, A)\left(\frac{1}{cos A}+\frac{sin A}{cos A}\right)$

$$= \frac{(1-sin A)(1+sin A)}{cos^2 A}$$

$$= \frac{1-sin^2 A}{cos^2 A}$$

$$= \frac{cos^2 A}{cos^2 A} = 1 = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે, $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 15 : નિત્યસમ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ નો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

ઉકેલ : અહીં $\tan\theta$ અને $\sec\theta$ ને સમાવતા નિત્યસમનો ઉપયોગ કરવાનો હોવાથી, સૌપ્રથમ આપણે ડા.બા.ના (આપણે જેને સાબિત કરવા માગીએ છીએ તે નિત્યસમની) અંશ અને છેદમાં રહેલા દરેક પદને $\cos\theta$ વડે ભાગીશું અને ડા.બા.નું $\sec\theta$ અને $\tan\theta$ ના સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરીશું.

$$\text{ડા.બા.} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$$

$$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1}$$

$$= \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta}$$

$$= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

આ તો આપણે જે નિત્યસમ સાબિત કરવા માંગતા હતા તેની જ.બા. છે.

સ્વાધ્યાય 8.4

1. ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો sin A, sec A અને tan A ને cot A નાં પદોમાં દર્શાવો.

2. ખૂણા A ના બધા જ ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોને sec A નાં પદોમાં દર્શાવો.

3. કિંમત શોધો :

(i) $\dfrac{sin^2 63° + sin^2 27°}{cos^2 17° + cos^2 73°}$

(ii) $sin\ 25°\ cos\ 65° + cos\ 25°\ sin\ 65°$

4. સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તમારી પસંદગીની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $9\ sec^2 A - 9\ tan^2 A$ = ...

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + tan\ \theta + sec\ \theta)(1 + cot\ \theta - cosec\ \theta)$ = ...

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(sec\ A + tan\ A)(1 - sin\ A)$ = ...

(A) sec A (B) sin A (C) $cosec$ A (D) cos A

(iv) $\dfrac{1 + tan^2 A}{1 + cot^2 A}$ = ...

(A) sec^2 A (B) –1 (C) cot^2 A (D) tan^2 A

5. નીચેના નિત્યસમોમાં જેમના માટે પદાવલિ વ્યાખ્યાયિત કરી છે તે ખૂણા લઘુકોણ છે. આ નિત્યસમો સાબિત કરો :

(i) $(cosec\ \theta - cot\ \theta)^2 = \dfrac{1 - cos\theta}{1 + cos\theta}$

(ii) $\dfrac{cos A}{1 + sin A} + \dfrac{1 + sin A}{cos A} = 2\ sec\ A$

(iii) $\dfrac{tan\ \theta}{1 - cot\ \theta} + \dfrac{cot\theta}{1 - tan\theta} = 1 + sec\ \theta\ cosec\ \theta$

[**સૂચન :** પદાવલિને $sin\ \theta$ અને $cos\ \theta$ ના સ્વરૂપે લખો.]

(iv) $\dfrac{1 + sec A}{sec A} = \dfrac{sin^2 A}{1 - cos A}$ [**સૂચન :** ડા.બા. અને જ.બા. નું અલગ-અલગ સાદું રૂપ આપો.]

(v) નિત્યસમ $cosec^2 A = 1 + cot^2 A$ નો ઉપયોગ કરીને $\dfrac{cos A - sin A + 1}{cos A + sin A - 1} = cosec\ A + cot\ A$ સાબિત કરો.

(vi) $\sqrt{\dfrac{1 + sin A}{1 - sin A}} = sec\ A + tan\ A$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[**સૂચન :** ડા.બા. અને જ.બા. નું અલગ-અલગ સાદું રૂપ આપો.]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યાં :

1. જેમાં કાટખૂણો B હોય તેવા, કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં,

$$\sin A = \frac{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ખૂણા A ની સામેની બાજુ}}{\text{ખૂણા A ની પાસેની બાજુ}}$$

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$, $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

3. જો આપણે લઘુકોણના કોઈ એક ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનું મૂલ્ય જાણતાં હોઈએ, તો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્ય સરળતાથી શોધી શકાય છે.

4. $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ અને $90°$ માપના ખૂણાઓ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્ય

5. $\sin A$ અને $\cos A$ નું મૂલ્ય ક્યારેય 1 થી વધારે ન હોય અને $\sec A$ અને $\operatorname{cosec} A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં 1 અથવા 1 થી વધારે જ હોય.

6. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$

$\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$

$\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A$.

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$0° \le A < 90°$ હોય તેવા પ્રત્યેક A માટે $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

$0° < A \le 90°$ હોય તેવા પ્રત્યેક A માટે $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

J4P7P6

V3H9G7

ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગો 9

9.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળના પ્રકરણમાં તમે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વિશે અભ્યાસ કર્યો. તમે તમારી આસપાસના વ્યવહારમાં ત્રિકોણમિતિ કેવી રીતે ઉપયોગી બને છે તેનો આ પ્રકરણમાં અભ્યાસ કરશો. જેનો અભ્યાસ સમગ્ર વિશ્વના વિદ્વાનો દ્વારા કરવામાં આવ્યો હોય તેવા અત્યંત પ્રાચીન વિષયોમાંનો એક વિષય ત્રિકોણમિતિ છે. પ્રકરણ VIII માં આપણે ચર્ચા કરી ચૂક્યાં છીએ કે, ત્રિકોણમિતિની શોધ તેની ખગોળશાસ્ત્રમાં ઊભી થતી આવશ્યકતાને ધ્યાનમાં રાખીને કરવામાં આવી. ત્યારથી આજ સુધી ખગોળશાસ્ત્રીઓ તેનો ઉપયોગ પૃથ્વીથી ગ્રહોનું તેમજ તારાઓનું અંતર શોધવામાં કરતા આવ્યા છે. ત્રિકોણમિતિ ભૂગોળ તથા નૌકાયનમાં પણ ઉપયોગી છે. ત્રિકોણમિતીય જ્ઞાનનો ઉપયોગ ભૌગોલિક નકશા બનાવવા તથા રેખાંશ અને અક્ષાંશને સાપેક્ષ કોઈ એક દ્વીપની સ્થિતિ જાણવા કરવામાં આવે છે.

Surveyors have used trigonometry for centuries. One such large surveying project of the nineteenth century was the ***'Great Trigonometric Survey'*** of British India for which the two largest-ever theodolites were built. During the survey in 1852, the highest mountain in the world was discovered. From a distance of over 160 *km*, the peak was observed from six different stations. In 1856, this peak was named after ***Sir George Everest,*** who had commissioned and first used the giant theodolites (see the figure alongside). The theodolites are now on display in the ***Museum of the Survey of India in Dehradun.***

A Theodolite

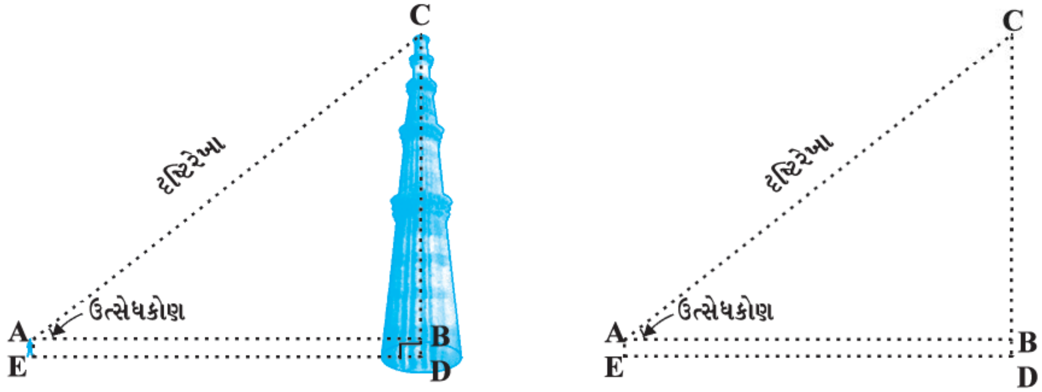
(Surveying instrument, which is based on the Principles of trigonometry, is used for measuring angles with a rotating telescope)

આપણે આ પ્રકરણમાં પ્રત્યક્ષ માપન વિના વિભિન્ન વસ્તુઓની ઊંચાઈ તથા તેમની વચ્ચેનાં અંતર કેવી રીતે શોધી શકાય તેની ચર્ચા કરીશું.

W1Z2V3

9.2 ઊંચાઈ અને અંતર

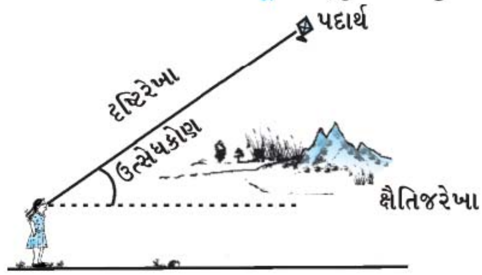
ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.1 તરીકે પુનઃ દર્શાવેલ આગળના પ્રકરણની આકૃતિ 8.1 ની ચર્ચા કરીએ.



આકૃતિ 9.1

આ આકૃતિમાં, વિદ્યાર્થીની આંખથી મિનારાની ટોચ સુધી લંબાવેલ રેખા AC ને દૃષ્ટિરેખા કહે છે. વિદ્યાર્થી મિનારાની ટોચનું નિરીક્ષણ કરે છે. આથી, દૃષ્ટિરેખાએ ક્ષૈતિજરેખા સાથે બનાવેલ ખૂણા BAC ને, વિદ્યાર્થીની આંખ આગળનો મિનારાની ટોચનો *ઉત્સેધકોણ* ***(angle of elevation)*** કહે છે.

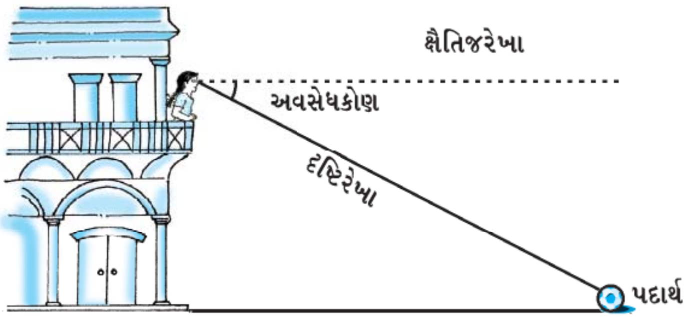
આમ, દૃષ્ટિરેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે. નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો નિરીક્ષણ બિંદુને સાપેક્ષ ઉત્સેધકોણ એટલે, દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખાથી બનતો ખૂણો જેમાં નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી ઉપર હોય અર્થાત્, એવી સ્થિતિ કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને ઊંચું કરવું પડે ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજ રેખા વચ્ચે બનતો ખૂણો. (*જુઓ આકૃતિ 9.2.*)



આકૃતિ 9.2

ચાલો, હવે આપણે આકૃતિ 8.2 માં આપેલ સ્થિતિની ચર્ચા કરીએ. બાલ્કનીમાં બેઠેલી છોકરી મંદિરનાં પગથિયાં પર રાખેલ કૂંડાનું નિરીક્ષણ કરે છે. આ સ્થિતિમાં દૃષ્ટિરેખા, ક્ષૈતિજરેખાથી નીચે છે. દૃષ્ટિરેખાએ ક્ષૈતિજરેખા સાથે બનાવેલ આ પ્રકારના ખૂણાને *અવસેધકોણ* ***(angle of depression)*** કહે છે.

આમ, *નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો નિરીક્ષણ બિંદુ આગળનો અવસેધકોણ એટલે જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી નીચે હોય, ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખાથી બનતો ખૂણો. અર્થાત્, એવી સ્થિતિ કે જેમાં આપણે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે આપણું મસ્તક નીચે નમાવવું પડે, ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખા વચ્ચે બનતો ખૂણો.* (*જુઓ આકૃતિ 9.3.*)



આકૃતિ 9.3

હવે, તમે આકૃતિ 9.3માં બનેલી દૃષ્ટિરેખા અને આ પ્રકારે બનેલા ખૂણાને ઓળખી શકશો ? આ ખૂણો ઉત્સેધકોણ છે કે અવસેધકોણ ?

ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.1 ને ફરીથી જોઈએ. જો તમે મિનારા CD ની ઊંચાઈ, પ્રત્યક્ષ માપન વિના શોધવા માગતા હો, તો તમારા માટે કઈ માહિતી આવશ્યક હશે ? આ માટે નીચે દર્શાવેલ તથ્યોનું જ્ઞાન આવશ્યક હશે :

(i) અંતર DE, વિદ્યાર્થી અને મિનારાના પાયા વચ્ચેનું અંતર

(ii) મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ, $\angle BAC$

(iii) વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ, AE

હવે, જો ઉપરોક્ત ત્રણેય માહિતીથી આપણે પરિચિત હોઈએ, તો મિનારાની ઊંચાઈ કેવી રીતે શોધી શકાય ?

આકૃતિમાં CD = CB + BD. અહીં, BD = AE વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ છે.

BC શોધવા માટે આપણે $\angle BAC$ અથવા $\angle A$ ના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીશું.

ΔABC માં, $\angle A$ ની સામેની બાજુ BC છે. હવે, અહીં કયા-કયા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરી શકાય ? જેમાં બે મૂલ્યોનો ઉપયોગ થતો હોય, એક આપેલ હોય અને બીજું શોધવાનું હોય એવા ગુણોત્તર ઉપયોગી થાય. આપણી જરૂરિયાત *tan* A અથવા *cot* A નો ઉપયોગ કરવાથી પૂરી થઈ શકે, કારણ કે, આ બંને ગુણોત્તરમાં AB અને BC નો સમાવેશ થયેલ છે.

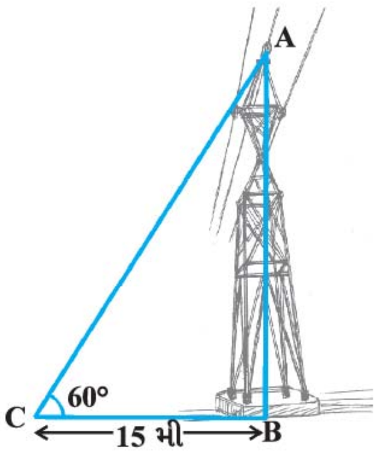
માટે, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ અથવા $\cot A = \frac{AB}{BC}$ નો ઉકેલ મેળવતાં આપણને BC નું મૂલ્ય મળશે. હવે BC અને AE નો સરવાળો કરતાં મિનારાની ઊંચાઈ મળશે.

હવે, કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ દ્વારા આપણે હમણાં જ જેની ચર્ચા કરી હતી તે પદ્ધતિની સમજૂતી મેળવીએ.

ઉદાહરણ 1 : જમીન પર એક ટાવર શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. તેના પાયાથી 15 મીટર દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ સમસ્યાને દર્શાવતી એક સરળ આકૃતિ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 9.4.) અહીં AB ટાવર દર્શાવે છે,

CB એ બિંદુ C નું ટાવરથી અંતર છે અને $\angle ACB$ ઉત્સેધકોણ છે. આપણે અહીં ટાવરની ઊંચાઈ શોધવાની છે, અર્થાત્ AB શોધવું છે. અહીં ત્રિકોણ ACBમાં ખૂણો B કાટકોણ છે. સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર *tan* 60° (અથવા *cot* 60°) પસંદ કરીશું કારણ કે, તે ગુણોત્તરમાં AB અને BC બંને રહેલા છે.



આકૃતિ 9.4

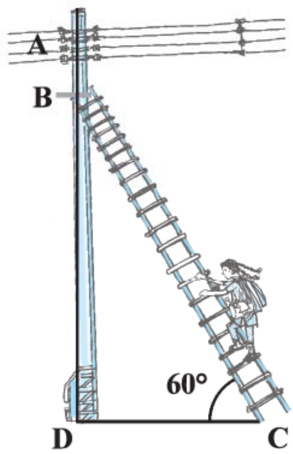
હવે, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

$\therefore AB = 15\sqrt{3}$

$\therefore$ ટાવરની ઊંચાઈ $15\sqrt{3}$ મીટર છે.

ઉદાહરણ 2 : એક ઈલેક્ટ્રિશિયનને 5 મી ઊંચાઈવાળા થાંભલા પર 'ફૉલ્ટ'નું સમારકામ કરવાનું છે. આ માટે તેણે ટોચથી 1.3 મી નીચે સુધી પહોંચીને સમારકામ કરવાનું છે. (જુઓ આકૃતિ 9.5.) આ માટે તે સમક્ષિતિજ રેખા સાથે 60° માપનો ખૂણો રહે તે રીતે એક નિસરણી થાંભલા સાથે ત્રાંસી ટેકવે છે અને ઇચ્છિત જગ્યાએ પહોંચે છે, તો નિસરણીની લંબાઈ કેટલી હશે ? તદુપરાંત નિસરણીને થાંભલાના પાયાથી કેટલે દૂર રાખવી પડશે ? (અહીં, $\sqrt{3} = 1.73$ લઈ શકાય.)



આકૃતિ 9.5

ઉકેલ : આકૃતિ 9.5 માં, ઈલેક્ટ્રિશિયનને થાંભલા AD પરના બિંદુ B સુધી પહોચવું પડે.

આથી, $BD = AD - AB = (5 - 1.3)$ મી $= 3.7$ મી

અહીં, BC નિસરણી દર્શાવે છે અને તેની લંબાઈ શોધવાની છે. અર્થાત્ કાટકોણ ત્રિકોણ BDCના કર્ણની લંબાઈ શોધવાની છે.

હવે, તમે કહી શકો કે આપણે કયા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરીશું ?

તે ગુણોત્તર sin 60 હોવો જોઈએ.

માટે, $\frac{BD}{BC} = \sin 60^\circ$ અથવા $\frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28$ મી (આસન્ન મૂલ્ય)

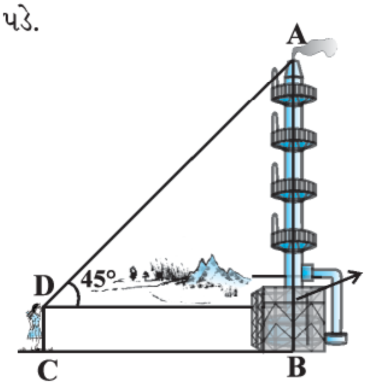
આમ, નિસરણીની લંબાઈ 4.28 મી હોવી જોઈએ.

હવે, $\frac{DC}{BD} = cot\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14$ મી (આસન્ન મૂલ્ય)

આથી, તેને નિસરણીના નીચેના છેડાને થાંભલાથી 2.14 મી દૂર રાખવો પડે.

ઉદાહરણ 3 : 1.5 મી ઊંચાઈવાળી એક નિરીક્ષક એક ચીમનીથી 28.5 મી દૂર ઊભેલ છે. તેની આંખથી ચીમનીની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45° છે. ચીમનીની ઊંચાઈ કેટલી હશે ?



આકૃતિ 9.6

ઉકેલ : અહીં, AB ચીમની છે. CD નિરીક્ષક અને $\angle ADE$ ઉત્સેધકોણ છે. (જુઓ આકૃતિ 9.6.) અહીં, જેમાં ખૂણો E કાટકોણ હોય તેવો એક ત્રિકોણ ADE છે અને આપણે અહીં ચીમનીની ઊંચાઈ શોધવા માગીએ છીએ.

આપણી પાસે, $AB = AE + BE = AE + 1.5$

અને $DE = CB = 28.5$ મી છે.

AE શોધવા માટે આપણે એવો ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર પસંદ કરીશું, જેમાં AE અને DE બંને હોય. ચાલો ઉત્સેધકોણનો *tangent* પસંદ કરીએ.

હવે, $tan\ 45° = \frac{AE}{DE}$

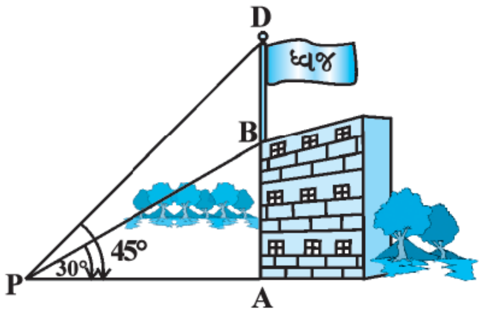
$\therefore \quad 1 = \frac{AE}{28.5}$

$\therefore \quad AE = 28.5$

તેથી, ચીમનીની ઊંચાઈ $AB = (28.5 + 1.5)$ મી $= 30$ મી

ઉદાહરણ 4 : જમીન પરના બિંદુ P થી એક 10 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° છે. ઈમારતની ટોચ પર ધ્વજ ફરકાવવામાં આવ્યો છે અને બિંદુ P થી આ ધ્વજસ્તંભની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 45° છે, તો ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ તથા ઈમારતનું બિંદુ P થી અંતર શોધો. ($\sqrt{3} = 1.732$ લઈ શકાય.)

ઉકેલ : આકૃતિ 9.7 માં, AB ઈમારતની ઊંચાઈ દર્શાવે છે BD ધ્વજસ્તંભ દર્શાવે છે અને P એ જમીન પરનું બિંદુ દર્શાવે છે. ધ્યાન રાખો, અહીં બે કાટકોણ ત્રિકોણ PAB અને PAD બને છે. અહીં ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ અર્થાત્ DB અને ઈમારતનું બિંદુ P થી અંતર અર્થાત્ AP શોધવાનું છે.



આકૃતિ 9.7

આપણે ઈમારતની ઊંચાઈ AB જાણીએ છીએ તેથી સૌપ્રથમ આપણે કાટકોણ ΔPAB નો વિચાર કરીશું.

અહીં, $\tan 30° = \frac{AB}{AP}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$$

$$\therefore AP = 10\sqrt{3}$$

અર્થાત્, ઇમારતનું બિંદુ P થી અંતર $10\sqrt{3}$ મી = 17.32 મી છે.

હવે, ધારો કે DB = x મી છે, તેથી AD = $(10 + x)$ મી થાય.

હવે, કાટકોણ ΔPAD માં,

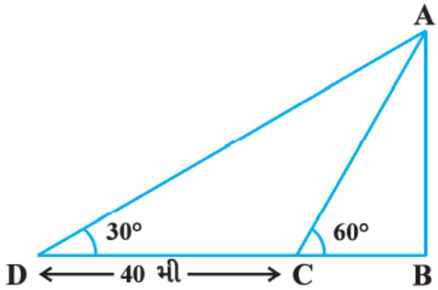
$$\tan 45° = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

માટે, $1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

અર્થાત્, $x = 10(\sqrt{3}-1) = 7.32$

આમ, ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ 7.32 મી છે.

ઉદાહરણ 5 : સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60°થી ઘટીને 30° થતાં, સમતલ જમીન પર ઊભેલ ટાવરના પડછાયાની લંબાઈમાં 40 મીટર જેટલો વધારો થાય છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.



આકૃતિ 9.8

ઉકેલ : આકૃતિ 9.8 માં, AB ટાવર તથા સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° હોય, ત્યારે ટાવરનો પડછાયો BC અને સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° હોય, ત્યારે ટાવરનો પડછાયો DB છે.

ધારો કે, AB ની ઊંચાઈ 'h' મી અને BC 'x' મી છે, પ્રશ્નમાં જણાવ્યા પ્રમાણે DB, BC કરતાં 40 મી વધારે છે.

આથી, DB = $(40 + x)$ મી

હવે, આપણી પાસે બે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC અને ABD છે.

Δ ABC માં, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad (1)$$

Δ ABD માં, $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40} \quad (2)$$

હવે, (1) પરથી, $h = x\sqrt{3}$

h ના આ મૂલ્યને (2) માં મૂકતાં આપણને $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40$, એટલે કે, $3x = x + 40$

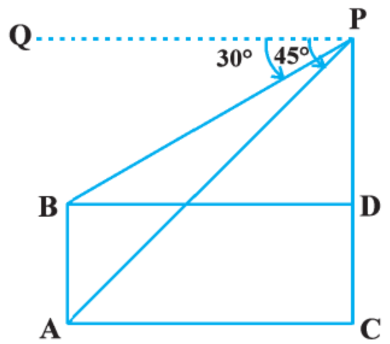
$$\therefore x = 20$$

$$\text{તેથી, } h = 20\sqrt{3} \qquad ((1) \text{ પરથી})$$

આમ, ટાવરની ઊંચાઈ $20\sqrt{3}$ મી છે.

ઉદાહરણ 6 : એક બહુમાળી ઈમારતની ટોચ પરથી અવલોકન કરતાં એક 8 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચ અને તળિયાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 45° માલૂમ પડે છે, તો બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ અને બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.9 માં, PC એ બહુમાળી ઈમારત દર્શાવે છે તથા AB એ 8 મી ઊંચી ઈમારત દર્શાવે છે. આપણને અહીં બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ અર્થાત્ PC અને બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર અર્થાત્ AC શોધવામાં રસ છે.



આકૃતિ 9.9

ધ્યાનથી આકૃતિનું અવલોકન કરો. તમે જોઈ શકો છો કે, બે સમાંતર રેખા PQ અને BD ની છેદિકા PB છે. આથી, $\angle QPB$ અને $\angle PBD$ યુગ્મકોણ થાય. તેથી તે સમાન છે. એટલે કે, $\angle PBD = 30°$. આ જ રીતે, $\angle PAC = 45°$ થાય.

કાટકોણ ΔPBD માં,

$$\tan 30° = \frac{PD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ અથવા } BD = PD\sqrt{3}$$

કાટકોણ ΔPAC માં,

$$\tan 45° = \frac{PC}{AC} = 1$$

$$\therefore PC = AC$$

પરંતુ, $PC = PD + DC$. માટે $PD + DC = AC$

અહીં, $AC = BD$ અને $DC = AB = 8$ મી હોવાથી, આપણને $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ મળે. (કેમ?)

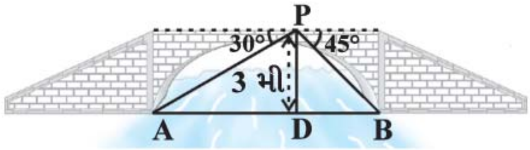
$$\therefore PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1) \text{ મી}$$

આમ, બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}$ મી $= 4(3+\sqrt{3})$ મી

અને બંને ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર પણ $4(3+\sqrt{3})$ મી હશે.

ઉદાહરણ 7 : નદી પર રહેલા પુલના એક બિંદુથી નદીના બંને કિનારાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 45° માલૂમ પડે છે. જો નદીની સપાટીથી પુલની ઊંચાઈ 3મી હોય તો નદીની પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.10 માં, બિંદુઓ A અને B નદીના સામસામેના બે કિનારા દર્શાવે છે. આથી નદીની પહોળાઈ AB થાય. નદીની સપાટીથી 3 મી ઊંચાઈએ આવેલા પુલ પરનું એક બિંદુ P છે, અર્થાત્ DP = 3 મી.



આકૃતિ 9.10

અહીં, નદીની પહોળાઈ એટલે કે, Δ APBની એક બાજુ AB ની લંબાઈ, શોધવાની છે.

હવે, $AB = AD + DB$

કાટકોણ ત્રિકોણ APD માં, $\angle A = 30°$

$$\therefore\ \tan 30° = \frac{PD}{AD}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$$ અથવા $AD = 3\sqrt{3}$ મી

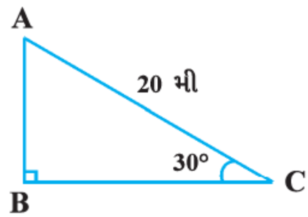
અને કાટકોણ Δ PBD માં, $\angle B = 45°$. આથી, $BD = PD = 3$ મી

હવે, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3\,(1 + \sqrt{3})$ મી

આમ, નદીની પહોળાઈ $3\,(\sqrt{3} + 1)$ મી છે.

સ્વાધ્યાય 9.1

1. સર્કસના તંબુમાં, જમીન સાથે શિરોલંબ સ્થિતિમાં રહેલા થાંભલાની ટોચથી જમીન સાથે ખેંચીને બાંધેલા 20 મી લાંબા દોરડા પર એક કલાકાર ચઢી રહ્યો છે. જો દોરડું જમીન સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે તો થાંભલાની ઊંચાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 9.11.)



આકૃતિ 9.11

2. વાવાઝોડાને કારણે એક ઝાડ એવી રીતે ભાંગીને વળી જાય છે, જેથી તેની ટોચ, જમીન સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે તે રીતે જમીનને સ્પર્શે છે. ઝાડની જમીનને સ્પર્શતી ટોચ અને ઝાડના થડ વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય, તો ઝાડની ઊંચાઈ શોધો.

3. એક ઠેકેદારે બાળકોને રમવા માટે, બગીચામાં બે લપસણી લગાવવાની છે. આ માટે તે 5 વર્ષથી ઓછી ઉંમરનાં બાળકો માટે, જમીનથી ઉપરનો છેડો 1.5 મી રહે અને જમીન સાથે 30° નો ખૂણો બનાવે તેવી અને તેનાથી વધારે ઉંમરનાં બાળકો માટે 3 મીની ઊંચાઈથી સીધો ઢાળ હોય તથા જમીન સાથે 60° નો ખૂણો બનાવતી હોય તેવી લપસણીઓ પસંદ કરે છે. તો બંને લપસણીઓની લંબાઈ શોધો.

4. ટાવરના પાયાથી 30 મી દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

5. એક પતંગ જમીનથી 60 મી ની ઊંચાઈ પર ઊડી રહેલ છે. આ પતંગની દોરીનો એક છેડો ક્ષણભર માટે જમીન પરના એક બિંદુ સાથે બાંધેલ છે. આ સ્થિતિમાં દોરીનો જમીન સાથેનો ખૂણો 60° છે. જો દોરીમાં કોઈ ઢીલ નથી તેવું માની લેવામાં આવે તો દોરીની લંબાઈ શોધો.

6. 1.5 મી ઊંચો એક છોકરો એક 30 મી ઊંચી ઇમારતથી કોઈક અંતરે ઊભેલ છે. હવે જ્યારે તે ઇમારત તરફ ચાલવાનું શરૂ કરે છે ત્યારે કેટલાક સમય પછી તેની આંખથી ઇમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° થી વધીને 60° થાય છે. તો તે ઈમારત તરફ કેટલું અંતર ચાલ્યો હશે ?

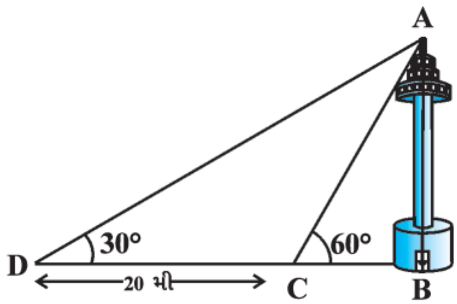
7. જમીન પર આવેલ એક બિંદુથી એક 20 મી ઊંચી ઇમારતની ટોચ પર રહેલ એક સંચાર ટાવરના તળિયા અને ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 45° અને 60° છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

8. એક ઊંચી બેઠક પર 1.6 મી ઊંચી એક પ્રતિમા ગોઠવેલ છે. જમીન પરના એક બિંદુએથી પ્રતિમાની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° અને બેઠકની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45° છે. તો બેઠકની ઊંચાઈ શોધો.

9. એક ટાવરના તળિયાથી એક ઇમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે અને ઇમારતના તળિયાથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° છે. જો ટાવરની ઊંચાઈ 50 મી હોય તો ઇમારતની ઊંચાઈ શોધો.

10. એક 80 મી પહોળા માર્ગની બંને બાજુએ સમાન ઊંચાઈના બે સ્તંભ શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. માર્ગ પર વચ્ચે આવેલ કોઈ એક બિંદુએથી બંને સ્તંભની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ 60° અને 30° જણાય છે. તો દરેક સ્તંભની ઊંચાઈ શોધો તથા બંને સ્તંભનું નિરીક્ષણ બિંદુથી અંતર શોધો.

11. નહેરના એક કિનારા પર ટીવીનો ટાવર શિરોલંબ ઊભો કરવામાં આવેલ છે. ટાવરની સામેના બીજા કિનારા પર રહેલા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે. ટાવરના તળિયા અને નિરીક્ષણ બિંદુને જોડતી રેખા પર આવેલ અને નિરીક્ષણ બિંદુથી 20 મી દૂર બીજા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. (જુઓ આકૃતિ 9.12.) તો ટાવરની ઊંચાઈ અને નહેરની પહોળાઈ શોધો.

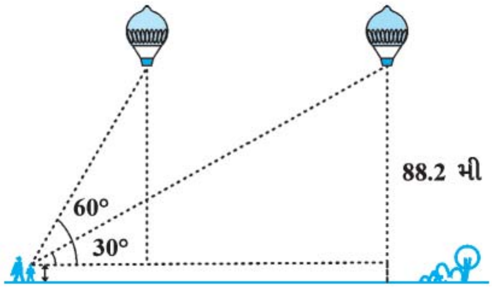


આકૃતિ 9.12

12. 7 મી ઊંચી ઇમારત પરથી એક 'કેબલ' ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° અને ટાવરના તળિયાનો અવસેધકોણ 45° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

13. દરિયાની સપાટીથી 75 મી ઊંચી દીવાદાંડી પરથી અવલોકન કરતાં, દરિયામાં રહેલા બે વહાણના અવસેધકોણનાં માપ 30° અને 45° માલૂમ પડે છે. જો એક વહાણ બીજાની બરાબર પાછળ હોય અને બંને વહાણ દીવાદાંડીની એક જ બાજુ પર આવેલ હોય તો બંને વહાણ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

14. 1.2 મી ઊંચાઈવાળી એક છોકરીને, જમીનથી 88.2 મી ઊંચાઈ પર રહેલું એક બલૂન જોવા મળે છે. પવનને કારણે તે સમક્ષિતિજ રેખામાં ગતિ કરે છે. કોઈ એક સમયે છોકરીને તેના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° મળે છે. થોડા સમય બાદ બલૂનના ઉત્સેધકોણનું માપ ઘટીને 30° થાય છે (જુઓ આકૃતિ 9.13), તો આ સમય દરમિયાન બલૂને કાપેલું અંતર શોધો.



આકૃતિ 9.13

15. એક સુરેખ માર્ગ ટાવર તરફ જાય છે. ટાવરની ટોચ પર રહેલ એક વ્યક્તિ, ટાવર તરફ અચળ ઝડપથી આવતી એક મોટરકારના અવસેધકોણનું માપ 30° નોંધે છે. 6 સેકન્ડ પછી આ કારના અવસેધકોણનું માપ 60° થાય છે, તો હવે કારને ટાવર સુધી પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે ?

16. ટાવરના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા પર તળિયાથી 4 મી અને 9 મી દૂર આવેલાં બે બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ કોટિકોણનાં માપ છે. સાબિત કરો કે, ટાવરની ઊંચાઈ 6 મી છે.

9.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. (i) દૃષ્ટિરેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે.

(ii) નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો ઉત્સેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી ઊંચે હોય અર્થાત્ એવી સ્થિતિમાં હોય કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને ઊંચું કરવું પડે ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખા વડે બનતો ખૂણો.

(iii) નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો અવસેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી નીચે હોય, અર્થાત્ એવી સ્થિતિમાં હોય કે, જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને નીચે નમાવવું પડે ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજરેખા વડે બનતો ખૂણો.

2. પદાર્થની ઊંચાઈ અથવા લંબાઈ અથવા બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.

A6L6E2

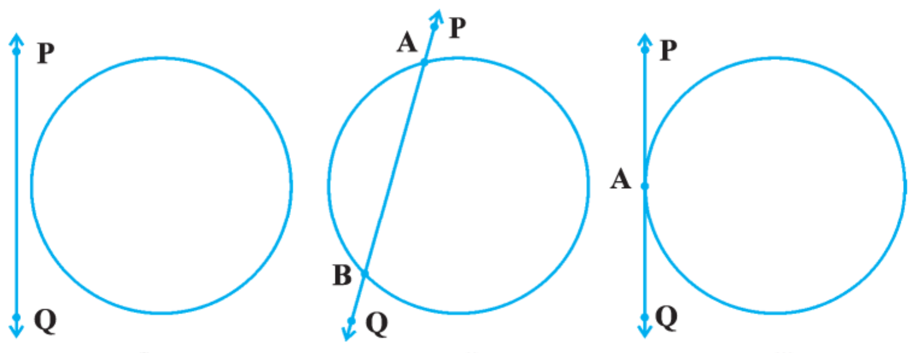
F6B5N7

વર્તુળ 10

10.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે એ પ્રમાણે એક સમતલના એક ચોક્કસ બિંદુ (કેન્દ્ર)થી અચળ અંતરે (ત્રિજ્યા) આવેલાં બિંદુઓનો સમૂહ વર્તુળ છે. તમે વર્તુળ સંબંધિત જુદાં-જુદાં પદો જેવાં કે, જીવા, વૃત્તખંડ, વૃત્તાંશ, ચાપ વગેરે જેવાંનો પણ અભ્યાસ કર્યો છે. ચાલો, હવે જ્યારે કોઈ સમતલમાં વર્તુળ અને રેખા આપેલાં હોય, ત્યારે ઊભી થતી જુદી-જુદી પરિસ્થિતિઓ જોઈએ.

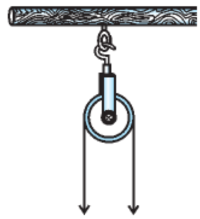
હવે, કોઈ એક વર્તુળ અને રેખા PQ નો વિચાર કરો. નીચે આકૃતિ 10.1 માં ત્રણ શક્યતા આપેલી છે :



આકૃતિ 10.1

આકૃતિ 10.1 (i) માં, રેખા PQ અને વર્તુળને કોઈ સામાન્ય બિંદુ નથી. આ કિસ્સામાં રેખા **PQ** વર્તુળને ***છેદતી નથી*** એમ કહીશું. આકૃતિ 10.1 (ii) માં રેખા PQ અને વર્તુળને બે સામાન્ય બિંદુઓ A અને B છે. આ વિકલ્પમાં રેખા PQ ને વર્તુળની ***છેદિકા*** કહે છે. આકૃતિ 10.1 (iii) માં ***રેખા અને વર્તુળમાં ફક્ત એક જ બિંદુ સામાન્ય છે. આ વિકલ્પમાં રેખાને વર્તુળનો સ્પર્શક કહે છે.***

કૂવામાંથી પાણી કાઢવા ઉપયોગમાં લેવામાં આવતી કૂવા પર લગાડેલી ગરગડી તમે કદાચ જોઈ હશે. આકૃતિ 10.2 જુઓ. અહીં, જો ગરગડીની બંને બાજુઓમાં રહેલી દોરીને કિરણ સમજવામાં આવે, તો તેમને ગરગડીને દર્શાવતાં વર્તુળના સ્પર્શક તરીકે ગણી શકાય.



આકૃતિ 10.2

ઉપર જે પ્રકારો આપ્યા છે તે સિવાય રેખાની કોઈ સ્થિતિ વર્તુળના સંદર્ભે હોય ? તમે જોશો કે, રેખાની અન્ય સ્થિતિ વર્તુળના સંદર્ભમાં ન હોય. આ પ્રકરણમાં આપણે, વર્તુળના સ્પર્શકના અસ્તિત્વ વિશે અભ્યાસ કરીશું અને તેના કેટલાક ગુણધર્મોનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

10.2 વર્તુળનો સ્પર્શક

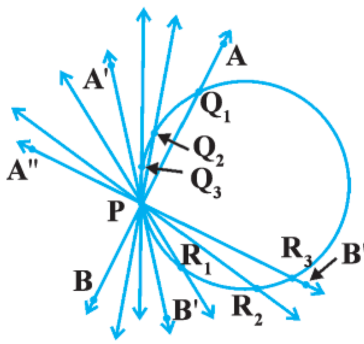
D3I2T4

અગાઉના વિભાગમાં, તમે જોયું કે, ***વર્તુળનો સ્પર્શક* (tangent) વર્તુળને ફક્ત એક જ બિંદુમાં છેદતી એક રેખા છે.***

વર્તુળના કોઈ બિંદુએ સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ સમજવા માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક વર્તુળાકાર તાર લો. અને એક સીધો તાર AB વર્તુળાકાર તારના બિંદુ P પર એવી રીતે લગાડો કે, જેથી તેને સમતલમાં બિંદુ P ની આસપાસ ફેરવી શકાય. આ પ્રણાલીને ટેબલ પર મૂકો અને સીધા તારની અલગ- અલગ સ્થિતિ મેળવવા તાર AB ને બિંદુ P ની આસપાસ હળવેથી ફેરવો. (જુઓ આકૃતિ 10.3 (i).)

જુદી-જુદી પરિસ્થિતિમાં આ તાર વર્તુળાકાર તારને P અને બીજાં બિંદુઓ Q_1 કે Q_2 કે Q_3 વગેરે બિંદુઓમાં છેદશે. કોઈ એક સ્થિતિમાં, તમે જોશો કે, તે વર્તુળને ફક્ત એક બિંદુ P માં છેદશે. (AB ની A'B' સ્થિતિ જુઓ.) આ દર્શાવે છે કે, વર્તુળના બિંદુ P આગળ સ્પર્શક અસ્તિત્વ ધરાવે છે. AB ને વધુ ફેરવતાં તમે જોશો કે, AB ની બીજી બધી સ્થિતિમાં, તે વર્તુળને P અને બીજાં બિંદુઓ જેમ કે, R_1 કે R_2 કે R_3 વગેરેમાં છેદશે. તેથી તમે જોશો કે, ***વર્તુળના કોઈ એક બિંદુએ એક અને ફક્ત એક જ સ્પર્શક છે.***



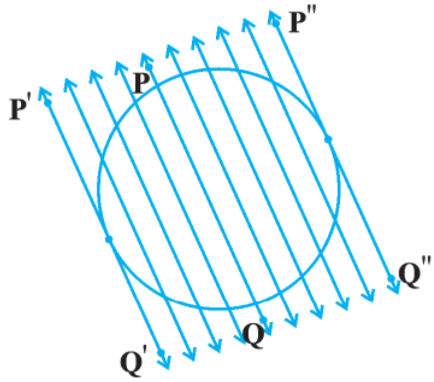
આકૃતિ 10.3 (i)

જ્યારે ઉપરની પ્રવૃત્તિ કરતા હોઈએ, ત્યારે તમે એ જોયું જ હશે કે જેમ સ્થિતિ AB એ સ્થિતિ A'B' તરફ પ્રસ્થાન કરે છે, તેમ રેખા AB અને વર્તુળનું સામાન્ય બિંદુ Q_1 ધીમે ધીમે સામાન્ય બિંદુ P ની નજીક અને નજીક આવે છે. છેવટે, તે AB ની સ્થિતિ A'B' થઈને બિંદુ P માં સંપાતિ થાય છે. ફરીથી નોંધો કે, જો A"B" ને P ની આસપાસ જમણી તરફ ફેરવીએ તો શું થશે ? સામાન્ય બિંદુ R_3 ધીમે-ધીમે P ની નજીક અને નજીક આવશે. અને છેવટે તે P માં સંપાતિ થશે. આમ, આપણે શું જોયું?

જેમાં બે અંત્યબિંદુઓ તેની અનુરૂપ જીવામાં સંપાતિ હોય છે એવી છેદિકાનો વિશિષ્ટ કિસ્સો એ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

* Tangent શબ્દ લેટિન શબ્દ Tangere પરથી આવ્યો છે. તેનો અર્થ સ્પર્શવું એવો થાય છે અને તે ડેનિશ ગણિતશાસ્ત્રી થોમસ ફિનેકે C.E. 1583માં દાખલ કર્યો હતો.

પ્રવૃત્તિ 2 : કાગળના સમતલ પર એક વર્તુળ અને વર્તુળની છેદિકા PQ દોરો. છેદિકાની બંને તરફ તેને સમાંતર રેખાઓ દોરો. તમે જોઈ શકશો કે, રેખાઓ દ્વારા કપાતી જીવાની લંબાઈ ધીમે-ધીમે ઘટતી જાય છે. એટલે કે, વર્તુળ અને રેખાનાં છેદબિંદુ વધુ ને વધુ નજીક આવતા જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 10.3 (ii).) કોઈ એક વિકલ્પમાં, તે લંબાઈ છેદિકાની એક બાજુએ શૂન્ય બની જાય છે અને કોઈ બીજા વિકલ્પમાં તે છેદિકાની બીજી બાજુએ શૂન્ય બની જાય છે. આકૃતિ 10.3 (ii) માં છેદિકાની સ્થિતિ P'Q' અને P''Q'' જુઓ. તે આપેલી વર્તુળના છેદિકા PQ ને સમાંતર સ્પર્શક છે. આ માહિતી તમને એ જોવામાં પણ ઉપયોગી છે કે, આપેલી છેદિકાને સમાંતર હોય તેવા બે થી વધારે સ્પર્શક ન હોય.



આકૃતિ 10.3 (ii)

તમે જોયું છે કે, જ્યારે તમે પ્રવૃત્તિ 1 કરતા હો ત્યારે આ પ્રવૃત્તિ એ પણ પ્રસ્થાપિત કરે છે કે, અનુરૂપ જીવાનાં બંને અંત્યબિંદુઓ સંપાતી હોય ત્યારે છેદિકા એ સ્પર્શક બને છે.

વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને સ્પર્શબિંદુ કહે છે. (આકૃતિ 10.1 (iii) માં બિંદુ A) અને સ્પર્શક વર્તુળને તે બિંદુમાં સ્પર્શે છે તેમ કહેવાય.

હવે તમારી આસપાસ જુઓ. તમે સાઈકલ કે લારી ફરતી જોઈ છે ? તેનાં પૈડાં જુઓ. પૈડાંના બધા સળિયા તેની ત્રિજ્યાના સ્થાને છે. હવે પૈડું જમીન પર ફરે છે તેની સ્થિતિ પર ધ્યાન આપો. તમે ક્યાંય કોઈ સ્પર્શક જોયો છે ? (જુઓ આકૃતિ 10.4.) ખરેખર તો પૈડું દર્શાવતા વર્તુળને સ્પર્શક હોય, તેવી રેખા પર પૈડું ફરે છે. અહીં એ પણ નોંધો કે, દરેક સ્થિતિમાં સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યા જમીન પરના સ્પર્શક સાથે કાટખૂણો બનાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.4.) હવે, આપણે સ્પર્શકના આ ગુણધર્મને સાબિત કરીશું.


આકૃતિ 10.4

પ્રમેય 10.1 : ***વર્તુળના કોઈ બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક, સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.***

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ અને વર્તુળના બિંદુ P આગળ સ્પર્શક XY આપેલાં છે.

અહીં એવું સાબિત કરવાનું છે કે, OP એ XY ને લંબ છે.

XY પર P સિવાયનું કોઈ બિંદુ Q લો અને O તથા Q ને જોડતી રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 10.5.)

બિંદુ Q વર્તુળની બહારનું બિંદુ જ હોઈ શકે. (કેમ ?)

જો Q વર્તુળની અંદર હોય, તો XY છેદિકા બને અને વર્તુળનો સ્પર્શક ન બને.

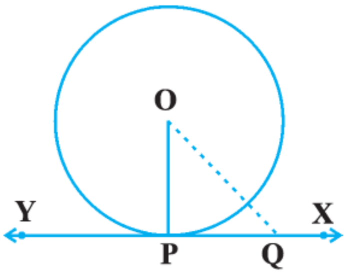
તેથી, OQ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા OP કરતાં મોટી છે.

એટલે કે, $OQ > OP$

બિંદુ P સિવાય, રેખા XY નાં બધાં બિંદુઓ માટે આ બને છે. OP એ O થી XY પરનાં બિંદુઓથી બધાં અંતરો પૈકી ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર છે.

તેથી, OP એ XY ને લંબ છે. (પરિશિષ્ટ A1 ના પ્રમેય A 1.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે)

■



આકૃતિ 10.5

નોંધ :

1. ઉપરના પ્રમેય પરથી, આપણે એ તારણ પણ કાઢીએ કે, વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુએ એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક છે.

2. સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી અને ત્રિજ્યાને સમાવતી રેખાને તે સ્પર્શબિંદુ આગળનો વર્તુળનો અભિલંબ પણ કહે છે.

સ્વાધ્યાય 10.1

1. વર્તુળને કેટલા સ્પર્શક હોય ?

2. ખાલી જગ્યા પૂરો :

   (i) સ્પર્શક વર્તુળને .... બિંદુ/બિંદુઓમાં છેદે.

   (ii) વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદતી રેખાને .... કહે છે.

   (iii) વર્તુળને વધુમાં વધુ .... સમાંતર સ્પર્શક હોય.

   (iv) વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને .... કહે છે.

3. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કોઈ બિંદુ P આગળ દોરેલ એક સ્પર્શક PQ, કેન્દ્ર O માંથી પસાર થતી રેખાને Q બિંદુએ છેદે છે. OQ = 12 સેમી હોય, તો PQ ની લંબાઈ :

   (A) 12 સેમી (B) 13 સેમી (C) 8.5 સેમી (D) $\sqrt{119}$ સેમી

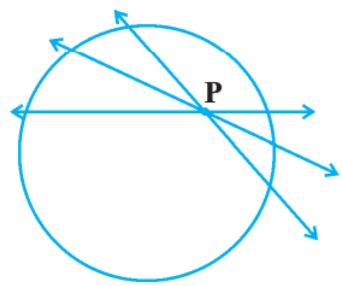
4. એક વર્તુળ અને આપેલ રેખાને સમાંતર હોય તેવી બે રેખાઓ દોરો, જે પૈકી એક વર્તુળનો સ્પર્શક અને બીજી વર્તુળની છેદિકા હોય.

10.3 સમતલના કોઈ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની સંખ્યા

G2N9Z3

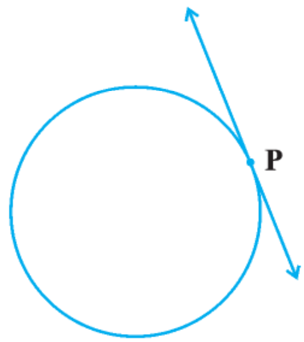
વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી સ્પર્શકની સંખ્યાનો ખ્યાલ મેળવવા, આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 3 : કાગળ પર એક વર્તુળ દોરો. તેની અંદર બિંદુ P લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકો ? તમે જોશો કે આ બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદશે. તેથી વર્તુળની અંદરના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકાય તે શક્ય નથી (જુઓ આકૃતિ 10.6 (i)).



(i)

હવે વર્તુળ પર એક બિંદુ P લો. અને આ બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરો. તમે એ જોયું છે કે, આ બિંદુમાંથી વર્તુળને એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક મળે. (જુઓ આકૃતિ 10.6(ii).)



(ii)

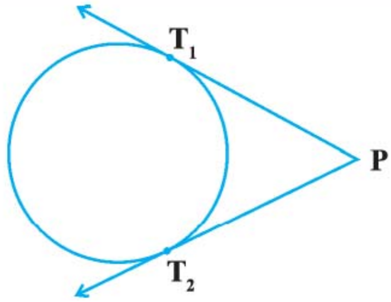
છેલ્લે વર્તુળની બહાર બિંદુ P લો. અને આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. તમે શું જોયું ? તમે જોયું હશે કે, આ બિંદુમાંથી તમે વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરી શકો. (જુઓ આકૃતિ 10.6 (iii).)

આ હકીકતનો સારાંશ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

વિકલ્પ 1 : ***વર્તુળની અંદર આપેલા બિંદુમાંથી વર્તુળને કોઈ સ્પર્શક ન મળે.***

વિકલ્પ 2 : ***વર્તુળ પરના બિંદુએ વર્તુળનો એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક મળે.***

વિકલ્પ 3 : વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો મળે.



(iii)

આકૃતિ 10.6

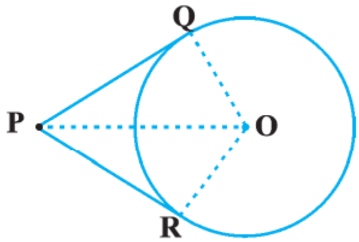
આકૃતિ 10.6 (iii) માં, T_1 અને T_2 એ અનુક્રમે સ્પર્શકો PT_1 અને PT_2 નાં સ્પર્શબિંદુઓ છે.

સ્પર્શકના બહારના બિંદુ P અને વર્તુળ સાથેના સ્પર્શબિંદુને જોડતા રેખાખંડની લંબાઈને P થી વર્તુળ પરના સ્પર્શકની લંબાઈ કહે છે.

જુઓ કે, આકૃતિ 10.6 (iii) માં PT_1 અને PT_2, P થી વર્તુળ સુધીના સ્પર્શકની લંબાઈ છે. લંબાઈ PT_1 અને PT_2 નો એક સામાન્ય ગુણધર્મ છે. તે તમે શોધી શકો ? PT_1 અને PT_2 માપો. શું તે સમાન છે ? હકીકતમાં તે હંમેશાં સમાન હોય છે. હવે આ હકીકતની સાબિતી નીચે દર્શાવેલા પ્રમેયમાં આપીએ :

પ્રમેય 10.2 : *વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.*

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, વર્તુળની બહારનું બિંદુ P અને બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો PQ, PR આપેલાં છે (જુઓ આકૃતિ 10.7.) સાબિત કરવું છે કે PQ = PR.



આકૃતિ 10.7

આ માટે, OP, OQ અને OR જોડો. $\angle OQP$ અને $\angle ORP$ કાટખૂણા છે, કારણ કે, તે સ્પર્શકો અને સંગત ત્રિજ્યા વચ્ચેના ખૂણા છે, અને પ્રમેય 10.1 ના આધારે તેઓ કાટખૂણા છે. હવે કાટકોણ ત્રિકોણો OQP અને ORP માં,

	$OQ = OR$	(એક વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)
	$OP = OP$	(સામાન્ય)
તેથી,	$\Delta\, OQP \cong \Delta\, ORP$	(કાકબા)
આથી,	$PQ = PR$	(એકરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ભાગ)

■

નોંધ :

1. આ પ્રમેયને પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને નીચે પ્રમાણે સાબિત કરી શકાશે :

$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (કેમ કે $OQ = OR$)

તેથી, PQ = PR મળે.

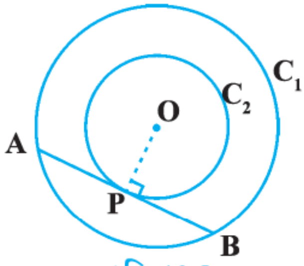
2. એ પણ ધ્યાન આપો કે, $\angle OPQ = \angle OPR$ તેથી, OP એ $\angle QPR$ નો કોણદ્વિભાજક છે.

એટલે કે, કેન્દ્ર બે સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાના દ્વિભાજક પર છે.

હવે, કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે, બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોમાં મોટા વર્તુળની જીવા નાના વર્તુળને સ્પર્શતી હોય, તો સ્પર્શબિંદુ તેને દુભાગે છે.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળાં બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળો C_1 અને C_2 આપ્યાં છે અને મોટા વર્તુળ C_1 ની જીવા AB નાના વર્તુળ C_2 ને બિંદુ P માં સ્પર્શે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.8.)



આકૃતિ 10.8

અહીં, એ સાબિત કરવાનું છે કે, AP = BP.

અહીં, OP જોડો. AB એ P બિંદુએ C_2નો સ્પર્શક છે અને OP તેની ત્રિજ્યા છે.

તેથી, પ્રમેય 10.1 પરથી,

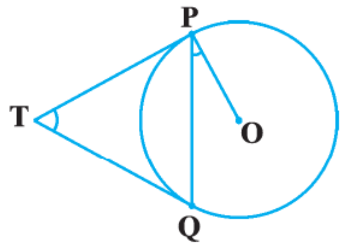
$$OP \perp AB$$

હવે, AB એ વર્તુળ C_1 ની જીવા છે અને $OP \perp AB$. તેથી, OP એ જીવા AB નો દ્વિભાજક છે, કારણ કે, કેન્દ્રમાંથી જીવાને દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગે છે.

એટલે કે, $AP = BP$

ઉદાહરણ 2 : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બહારના બિંદુ T માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો TP અને TQ દોરેલા છે. સાબિત કરો કે, $\angle PTQ = 2\angle OPQ$.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, તેની બહારનું બિંદુ T અને વર્તુળના બે સ્પર્શકો TP અને TQ આપેલા છે. P અને Q સ્પર્શબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.9.) અહીં, એ સાબિત કરવું છે કે,



આકૃતિ 10.9

$\angle PTQ = 2\angle OPQ$

ધારો કે, $\angle PTQ = \theta$

હવે, પ્રમેય 10.2 પરથી TP = TQ

તેથી, ત્રિકોણ TPQ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

તેથી, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180° - \theta) = 90° - \frac{1}{2}\theta$

તેમજ, પ્રમેય 10.1 પરથી $\angle OPT = 90$

તેથી, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90° - \left(90° - \frac{1}{2}\theta\right)$

$$= \frac{1}{2}\theta$$

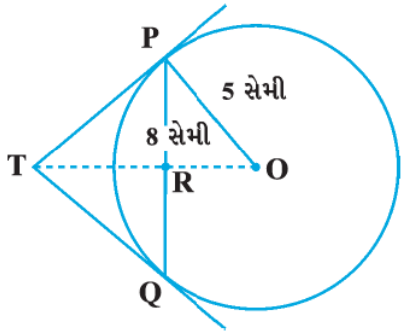
$$= \frac{1}{2}\angle PTQ$$

તેથી $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

ઉદાહરણ 3 : PQ એ 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની 8 સેમી લંબાઈની જીવા છે. P અને Q માંથી પસાર થતા સ્પર્શકો બિંદુ T માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.10.) TP ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : OT જોડો. ધારો કે તે PQ ને R માં છેદે છે.

Δ TPQ સમદ્વિબાજુ છે અને TO એ $\angle$PTQ નો દ્વિભાજક છે. તેથી, OT $\perp$ PQ અને OT એ PQ ને દુભાગે છે. તેથી PR = RQ = 4 સેમી.



આકૃતિ 10.10

તેમજ, $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2}$

$= \sqrt{5^2 - 4^2}$ સેમી

$= 3$ સેમી

હવે, $\angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$ (કેમ ?)

તેથી, $\angle RPO = \angle PTR$

તેથી, ખૂખૂ સમરૂપતા પરથી,

કાટકોણ ત્રિકોણ TRP એ કાટકોણ ત્રિકોણ PRO ને સમરૂપ છે.

જેથી, $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$

એટલે કે, $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$

અથવા $TP = \frac{20}{3}$ સેમી

નોંધ : પાયથાગોરસના પ્રમેયના ઉપયોગથી પણ TP નીચે પ્રમાણે મળી શકે :

ધારો કે, $TP = x$ અને $TR = y$

તેથી, $x^2 = y^2 + 16$ (કાટકોણ ΔPRT લેતાં) (1)

$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$ (કાટકોણ ΔOPT લેતાં) (2)

(2)માંથી (1) બાદ કરતાં

$25 = 6y - 7$

$\therefore y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

તેથી, $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16$

$= \frac{16}{9}(16 + 9)$

$= \frac{16 \times 25}{9}$ ((1) પરથી)

$x = \frac{20}{3}$

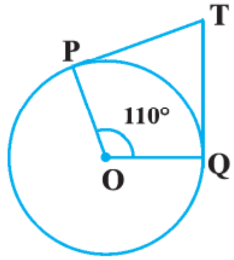
સ્વાધ્યાય 10.2

પ્રશ્ન 1 થી 3 માં સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તે માટે કારણ આપો :

1. બિંદુ Q માંથી દોરેલા વર્તુળના સ્પર્શકની લંબાઈ 24 સેમી અને વર્તુળના કેન્દ્રથી તેનું અંતર 25 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા .... છે.

(A) 7 સેમી (B) 12 સેમી

(C) 15 સેમી (D) 24.5 સેમી



આકૃતિ 10.11

2. આકૃતિ 10.11 માં, જો TP અને TQ એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના $\angle POQ = 110°$ બને એવા સ્પર્શકો છે. $\angle PTQ$ .... છે.

(A) 60° (B) 70°

(C) 80° (D) 90°

3. જો O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને બિંદુ P માંથી દોરેલા સ્પર્શકો PA અને PB વચ્ચે 80° નો ખૂણો રચાતો હોય, તો $\angle POA$ .... છે.

(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

4. સાબિત કરો કે, વર્તુળના વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓએ દોરેલા સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

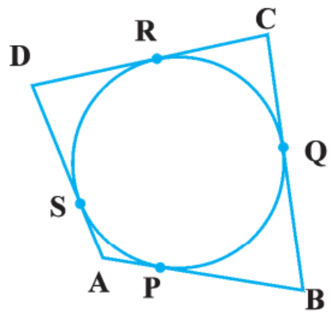
5. સાબિત કરો કે, વર્તુળના સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે.

6. વર્તુળના કેન્દ્રથી 5 સેમી અંતરે આવેલા બિંદુ A થી દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ 4 સેમી છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

7. બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ 5 સેમી અને 3 સેમી છે. મોટા વર્તુળની જીવા નાના વર્તુળને સ્પર્શે છે, તો તેની લંબાઈ શોધો.

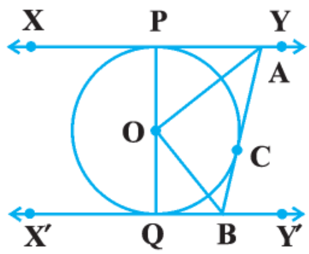
8. ચતુષ્કોણ ABCD એક વર્તુળને પરિગત છે (જુઓ આકૃતિ 10.12) સાબિત કરો કે,

AB + CD = AD + BC



આકૃતિ 10.12

9. આકૃતિ 10.13માં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બે સ્પર્શકો XY અને X′Y′ સમાંતર છે અને વર્તુળ પરના સ્પર્શબિંદુ C આગળ દોરેલો ત્રીજો સ્પર્શક AB, XYને A બિંદુએ અને X′Y′ ને B બિંદુએ છેદે છે. સાબિત કરો કે $\angle AOB = 90$.

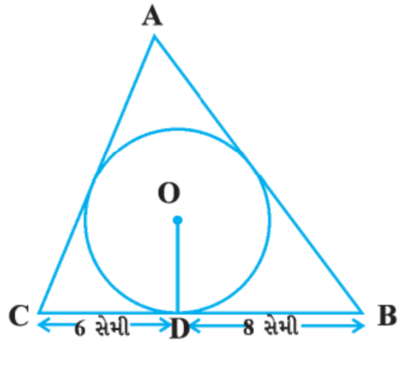


આકૃતિ 10.13

10. સાબિત કરો કે, વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો અને સ્પર્શબિંદુઓને કેન્દ્રને જોડતા રેખાખંડ વચ્ચેનો ખૂણો એકબીજાને પૂરક હોય છે.

11. સાબિત કરો કે, વર્તુળને પરિગત સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

12. ત્રિકોણ ABC એ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને પરિગત છે. સ્પર્શબિંદુ D એ BCનું 8 સેમી અને 6 સેમી લંબાઈના રેખાખંડો અનુક્રમે BD અને DC માં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 10.14

13. સાબિત કરો કે વર્તુળને પરિગત ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓથી વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ રચાતા ખૂણાઓ પૂરક હોય છે.

10.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. વર્તુળના સ્પર્શકનો અર્થ
2. સ્પર્શબિંદુમાંથી વર્તુળની ત્રિજ્યાને દોરેલો સ્પર્શક ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.
3. વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

H6C5N3

U1A2E6

રચના 11

11.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં, સીધી પટ્ટી અને પરિકરની મદદથી તમે કેટલીક રચનાઓ કરી હતી તથા તેમની યથાર્થતાની ચર્ચા પણ કરી હતી. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે ખૂણાનો દ્વિભાજક દોરવો, રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક દોરવો, ત્રિકોણ પરની કેટલીક રચનાઓ કરી હતી. આ પ્રકરણમાં આપણે અગાઉ અભ્યાસ કરેલ રચનાઓના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી કેટલીક વધારે રચનાઓનો અભ્યાસ કરીશું. આવી રચનાઓ શું કાર્ય કરે છે તેની પાછળના ગાણિતિક તર્ક આપવાની અપેક્ષા પણ તમારી પાસે હશે.

11.2 રેખાખંડનું વિભાજન

W3E4S8

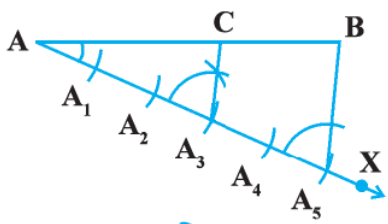
ધારો કે, એક રેખાખંડ આપ્યો છે અને તમારે તેનું આપેલા ગુણોત્તર 3:2 માં વિભાજન કરવાનું છે. તમે તેની લંબાઈ માપી આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તેવા એક બિંદુનું સ્થાન તેના પર નક્કી કરી શકો. પરંતુ, ધારો કે તેનું ચોકસાઈપૂર્વક માપ કાઢવા માટે તમારી પાસે કોઈ રસ્તો નથી, તો તમે આ બિંદુ કેવી રીતે શોધી શકશો ? આપણે આવું બિંદુ શોધવાની બે રીત નીચે પ્રમાણે આપીશું :

રચના 11.1 : *રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન*

એક રેખાખંડ AB આપ્યો છે. ધન પૂર્ણાંકો m, n માટે આપણે તેનું m:n ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવા ઇચ્છીએ છીએ. તમને સમજવામાં સરળતા રહે તે માટે, આપણે $m = 3$ અને $n = 2$ લઈશું.

રચનાના મુદ્દા :

1. AB સાથે લઘુકોણ બનાવે તેવું કોઈ પણ કિરણ AX દોરો.
2. AX પર $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ થાય તેવાં 5 (= $m + n$) બિંદુઓ A_1, A_2, A_3, A_4 અને A_5નાં સ્થાન નક્કી કરો.
3. BA_5 જોડો.



આકૃતિ 11.1

4. બિંદુ A_3 ($m = 3$) માંથી AB ને C માં છેદતી A_5B ને સમાંતર હોય તેવી રેખા ($\angle A A_3C$ એ $\angle A A_5B$ને સમાન ખૂણો બને તે રીતે) દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.1.) તેથી, AC:CB = 3:2 થશે.

આ રીતે માંગેલ વિભાજન કેવી રીતે મળે છે તે આપણે જોઈએ.

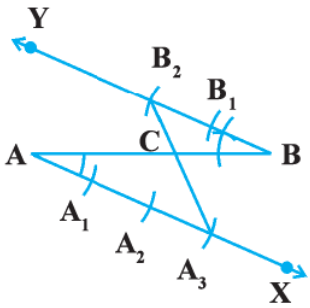
A_3C એ A_5B ને સમાંતર છે માટે,

$$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{CB}$$ (સપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેય દ્વારા)

રચના પરથી, $$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{2}.$$

માટે, $$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}.$$

આ સિદ્ધ કરે છે કે, બિંદુ C એ AB નું 3:2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 11.2

વૈકલ્પિક રીત :

રચનાના મુદ્દા :

1. AB સાથે લઘુકોણ બનાવે તેવું કોઈક કિરણ AX દોરો.
2. $\angle BAX$ ને સમાન $\angle ABY$ બને તે રીતે કિરણ AX ને સમાંતર કિરણ BY દોરો.
3. $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$ થાય તેવાં બિંદુઓ A_1, A_2, A_3 ($m = 3$) એ કિરણ AX ઉપર અને B_1, B_2 ($n = 2$) એ કિરણ BY ઉપર દર્શાવો.
4. A_3B_2 જોડો. ધારો કે તે AB ને બિંદુ C માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 11.2.)
   AC:CB = 3:2 થશે.

આ રીત કેવી રીતે યથાર્થ છે? ચાલો, આપણે જોઈએ :

અહીં, ΔAA_3C એ ΔBB_2C ને સમરૂપ છે. (શા માટે ?)

તેથી, $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{CB}$$ થશે.

રચના પરથી, $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}.$$ આથી, $$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$$

ખરેખર, રેખાખંડનું કોઈ પણ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવાનું કાર્ય ઉપર આપેલી રીતો દ્વારા થાય છે.

હવે, જેની બાજુઓ આપેલા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરમાં હોય એવા આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવામાં આપણે ઉપરની રચનાની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું.

રચના 11.2 : *આપેલ સ્કેલમાપન પ્રમાણેના આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી.*

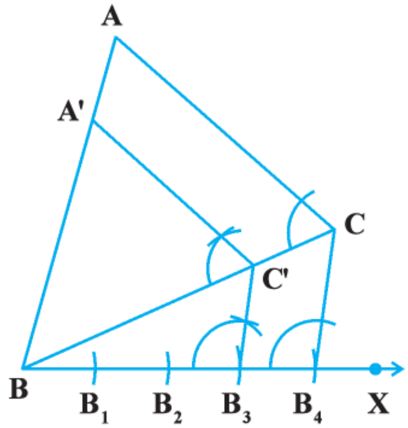
આ રચના બે ભિન્ન પરિસ્થિતિનો સમાવેશ કરે છે. એકમાં, રચેલ ત્રિકોણ આપેલા ત્રિકોણ કરતાં નાનો છે અને બીજામાં આપેલ ત્રિકોણ કરતાં મોટો છે. અહીં, ***સ્કેલમાપન (Scale factor)*** એટલે, રચિત ત્રિકોણની બાજુઓ અને આપેલા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર (પ્રકરણ 6માં પણ જુઓ). ચાલો, આપણે સમાવિષ્ટ રચના સમજવા માટે આગળનું ઉદાહરણ લઈએ. આ પદ્ધતિઓનું વ્યાપક રીતે પણ પ્રયોજન કરી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : જે ત્રિકોણની બાજુઓનો આપેલા ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ સાથેનો ગુણોત્તર $\frac{3}{4}$ હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરો. (એટલે કે, સ્કેલ માપન $\frac{3}{4}$ હોય તેવા)

ઉકેલ : ત્રિકોણ ABC આપેલો છે. આપણે જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{3}{4}$ ગણી હોય એવો બીજો ત્રિકોણ રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. BC ના જે અર્ધતલમાં A છે તેનાથી વિરુદ્ધ અર્ધતલમાં BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કોઈક કિરણ BX દોરો.
2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ થાય તેવા ચાર ($\frac{3}{4}$ માં 3 અને 4 પૈકી જે સંખ્યા મોટી હોય તેટલાં) બિંદુઓ B_1, B_2, B_3 અને B_4 એ BX પર લો.
3. B_4C જોડો અને B_3 માંથી ($\frac{3}{4}$ માં 3 અને 4 પૈકી 3 નાનો છે, આથી ત્રીજું બિંદુ) B_4C ને સમાંતર હોય તેવી BC ને C' માં છેદતી રેખા દોરો.
4. C' માંથી CA ને સમાંતર હોય તેવી BA ને A' માં છેદતી એક રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.3.)



આકૃતિ 11.3

Δ A'BC' એ માંગેલ ત્રિકોણ છે.

ચાલો, હવે આપણે જોઈએ કે આ રચના કેવી રીતે માંગેલ ત્રિકોણ રચે છે.

રચના 11.1 પરથી, $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$

આથી, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ અર્થાત્ $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

વળી, C'A' એ CA ને સમાંતર છે. આથી, $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$. (શા માટે?)

તેથી, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

ઉદાહરણ 2 : જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ સાથે $\frac{5}{3}$ ગુણોત્તર રચે એવો આપેલ ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ ત્રિકોણ રચો. (એટલે કે સ્કેલમાપન $\frac{5}{3}$ લો.)

ઉકેલ : ત્રિકોણ ABC આપ્યો છે. આપણે જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની બાજુઓ કરતાં $\frac{5}{3}$ ગણી હોય એવા ત્રિકોણની રચના કરવી છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. BC ના જે અર્ધતલમાં A હોય તેનાથી વિરુદ્ધ અર્ધતલમાં BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કિરણ BX દોરો.

2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ થાય તેવાં 5 બિંદુઓ ($\frac{5}{3}$ માં 5 અને 3 પૈકી મોટી સંખ્યા) B_1, B_2, B_3, B_4 અને B_5 એ BX પર અંકિત કરો.

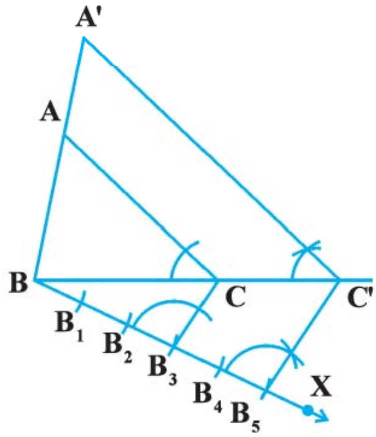
3. B_3 ને ($\frac{5}{3}$ માં 3 અને 5 પૈકી 3 નાની છે, આથી ત્રીજું બિંદુ) C સાથે જોડો. B_5 માંથી B_3C ને સમાંતર BC ને C' માં છેદતી રેખા દોરો.

4. લંબાવેલ રેખાખંડ BA ને A' માં છેદતી CA ને સમાંતર હોય તેવી C' માંથી રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.4.)

A'BC' એ માંગેલ ત્રિકોણ થશે.

રચનાની યથાર્થતા માટે નોંધો કે, Δ ABC ~ Δ A'BC'.

(શા માટે ?)



આકૃતિ 11.4

માટે, $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$

પરંતુ, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$

તેથી, $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$, અને તેથી, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$

નોંધ : ઉદાહરણ 1 અને 2 માં તમે AB અથવા AC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કિરણ લઈને પણ આ જ પ્રમાણે આગળ વધી શકો છો.

સ્વાધ્યાય 11.1

નીચેના પૈકી પ્રત્યેકની રચના કરી તેની યથાર્થતા આપો :

1. 7.6 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ દોરી તેનું 5:8 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરો. બંને ભાગ માપો.

2. 4 સેમી, 5 સેમી અને 6 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરી અને પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ તે બાજુઓથી $\frac{2}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

3. 5 સેમી, 6 સેમી અને 7 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓ, પ્રથમ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{7}{5}$ ગણી હોય.

4. 8 સેમી આધાર અને 4 સેમી વેધવાળા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો એવો ત્રિકોણ રચો કે જેની બાજુઓ, સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $1\frac{1}{2}$ ગણી હોય.

5. BC = 6 સેમી, AB = 5 સેમી અને $\angle ABC = 60°$ હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. પછી ΔABC ની અનુરૂપ બાજુઓને $\frac{3}{4}$ પ્રમાણમાં હોય તેવી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

6. BC = 7 સેમી, $\angle B = 45°$, $\angle A = 105°$ હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. પછી એવા ત્રિકોણની રચના કરો કે, જેની બાજુઓ, Δ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓથી $\frac{4}{3}$ ગણી હોય.

7. 4 સેમી અને 3 સેમી લંબાઈની (કર્ણ સિવાયની) બાજુવાળા કાટકોણ ત્રિકોણની રચના કરો. પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ તે બાજુઓથી $\frac{5}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

11.3 વર્તુળના સ્પર્શકની રચના

K6Y1G1

તમે આગળના પ્રકરણમાં શીખી ગયાં છો કે, જો બિંદુ વર્તુળની અંદરના ભાગમાં આવેલું હોય, તો આ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ નથી. તેમ છતાં, જો બિંદુ વર્તુળ ઉપર આવેલું હોય, તો આ બિંદુએ વર્તુળને માત્ર એક સ્પર્શક હોય છે અને તે આ બિંદુ આગળની ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે. તેથી, જો વર્તુળના આ બિંદુએ તમે સ્પર્શક દોરવા ઇચ્છો, તો આ બિંદુએ માત્ર ત્રિજ્યા દોરો અને આ ત્રિજ્યાને આ બિંદુએ લંબરેખા દોરો, તે આ બિંદુએ માંગેલ સ્પર્શક થશે.

તમે એ પણ જોયું કે, જો બિંદુ વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલું હોય, તો આ બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શક મળશે. આ સ્પર્શક કેવી રીતે દોરવા તે હવે આપણે જોઈશું :

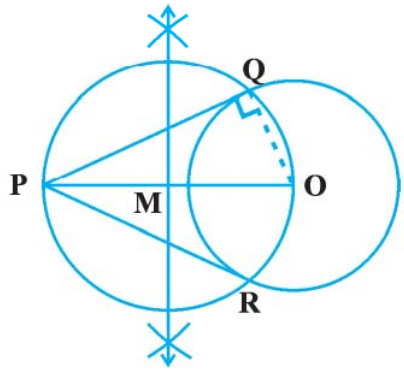
રચના 11.3 : *વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની રચના*

આપણને O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ અને તેની બહાર બિંદુ P આપ્યું છે. આપણે બિંદુ P માંથી વર્તુળના બે સ્પર્શકની રચના કરવી છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. PO જોડો અને તેને દુભાગો. ધારો કે, PO નું મધ્યબિંદુ M છે.
2. M કેન્દ્ર અને MO ને ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો. ધારો કે, તે આપેલા વર્તુળને Q અને R માં છેદે છે.
3. PQ અને PR જોડો.

PQ અને PR એ માંગેલા બે સ્પર્શક છે. (જુઓ આકૃતિ 11.5.)



આકૃતિ 11.5

ચાલો, હવે આ રચના કેવી રીતે યથાર્થ છે તે આપણે જોઈએ.

OQ જોડો. $\angle PQO$ એ અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો છે અને માટે $\angle PQO = 90°$

તમે જોઈ શકો છો કે, $PQ \perp OQ$?

આપેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા OQ હોવાથી, PQ એ વર્તુળનો સ્પર્શક બનશે.

આ જ પ્રમાણે PR એ પણ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

નોંધ : જો વર્તુળનું કેન્દ્ર આપ્યું ન હોય, તો પહેલાં સમાંતર ન હોય તેવી બે જીવાઓ લઈ પછી તેમના લંબદ્વિભાજકોનું છેદબિંદુ શોધીએ. આ છેદબિંદુ કેન્દ્ર થશે. પછી તમે ઉપર પ્રમાણે આગળ વધી શકો.

સ્વાધ્યાય 11.2

નીચેની પ્રત્યેક રચના કરી તેની યથાર્થતા પણ આપો :

1. 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રથી 10 સેમી દૂર આવેલા બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની જોડીની રચના કરો અને તેમની લંબાઈ માપો.

2. 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને સમકેન્દ્રી બીજા 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી પ્રથમ વર્તુળના સ્પર્શકની રચના કરો અને તેની લંબાઈ માપો. વાસ્તવિક ગણતરીથી માપની ચકાસણી પણ કરો.
3. 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રથી લંબાવેલા વ્યાસ પર દરેકનું કેન્દ્રથી અંતર 7 સેમી થાય તે રીતે બિંદુઓ P અને Q લો. બિંદુઓ P અને Q માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
4. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના જેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 60° થાય તેવા સ્પર્શકો રચો.
5. 8 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ AB દોરો. A ને કેન્દ્ર લઈ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ દોરો. B ને કેન્દ્ર લઈ બીજું 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. પ્રત્યેક વર્તુળને બીજા વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી સ્પર્શકો દોરો.
6. AB = 6 સેમી, BC = 8 સેમી અને $\angle B = 90°$ થાય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લો. B માંથી AC પરનો લંબ BD છે. B, C, D માંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરેલું છે. A માંથી આ વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
7. બંગડીની મદદ લઈ એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળની બહાર એક બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકોની જોડ દોરો.

11.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં નીચેની રચનાઓ કેવી રીતે કરવી તે તમે શીખ્યાં :

1. આપેલ ગુણોત્તરમાં રેખાખંડનું વિભાજન કરવું.
2. 1 કરતાં ઓછો અથવા 1 કરતાં વધારે હોય તેવા આપેલ સ્કેલમાપન પ્રમાણે આપેલા ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી.
3. વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શકોની જોડની રચના કરવી.

વાચક નોંધ

રચના 11.2ના ઉદાહરણ 1 અને 2માં જે મુદ્દા આપ્યા છે તેમનો ઉપયોગ કરી આપેલા સ્કેલમાપન પ્રમાણે આપેલા ચતુષ્કોણ (અથવા બહુકોણ)ને સમરૂપ ચતુષ્કોણ (અથવા બહુકોણ)ની રચના કરો.

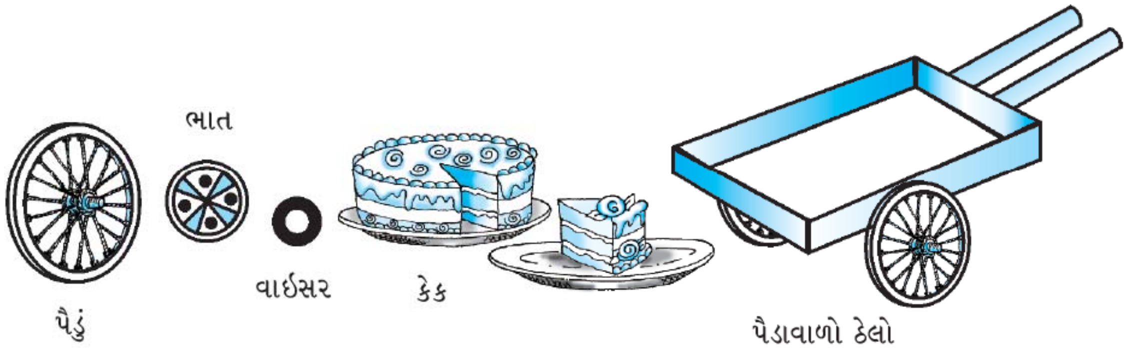
Y7V5L4

વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ 12

M9R4B4

12.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે તમારા અગાઉના વર્ગોમાંથી લંબચોરસ, ચોરસ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, ત્રિકોણ અને વર્તુળના જેવી સરળ સમતલીય આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધવાની કેટલીક રીતો વિશે પહેલેથી જ પરિચિત છો. આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે એક અથવા બીજી રીતે વર્તુળના આકારને સંબંધિત ઘણી વસ્તુઓના પરિચયમાં આવીએ છીએ. સાઇકલનું પૈડું, પૈડાવાળો ઠેલો, તીરંદાજીનું પાટિયું, ગોળાકાર કેક, પાપડ, ગટરનું ઢાંકણું, વિવિધ પ્રકારની ભાત, બંગડી, આંકડીવાળું ઘરેણું, વર્તુળાકાર રસ્તો, વાઇસર, ફૂલોની ક્યારી વગેરે આવી વસ્તુઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે (જુઓ આકૃતિ 12.1.) આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધવાના કૂટપ્રશ્નનું ખૂબ જ પ્રાયોગિક મહત્ત્વ છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આપણી ચર્ચાની શરૂઆત વર્તુળની પરિમિતિ (પરિઘ) અને ક્ષેત્રફળની કલ્પનાની સમાલોચનાથી કરીશું અને વૃત્તીય ક્ષેત્રના (અથવા ટૂંકમાં વર્તુળના) બે વિશિષ્ટ 'ભાગ' વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડના ક્ષેત્રફળ શોધવામાં આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરીશું. વર્તુળ અથવા તેના ભાગનો સમાવેશ થાય તેવી કેટલીક સંયુક્ત સમતલ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવું તે પણ આપણે જોઈશું.



આકૃતિ 12.1

12.2 વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ – એક સમીક્ષા

યાદ કરીએ કે, વર્તુળ ઉપરની એક વખતની મુસાફરીથી કપાતા અંતરને તેની પરિમિતિ અથવા સામાન્ય ભાષામાં ***પરિઘ*** કહે છે. તમે તમારા આગળના વર્ગોમાંથી એ પણ જાણો છો કે, વર્તુળના પરિઘ અને તેના વ્યાસનો ગુણોત્તર અચળ છે. આ અચળ ગુણોત્તરને ગ્રીક અક્ષર π ('પાઈ' વાંચીશું)થી દર્શાવાય છે. બીજા શબ્દોમાં,

D4X4Q9

$$\frac{\text{પરિઘ}}{\text{વ્યાસ}} = \pi$$

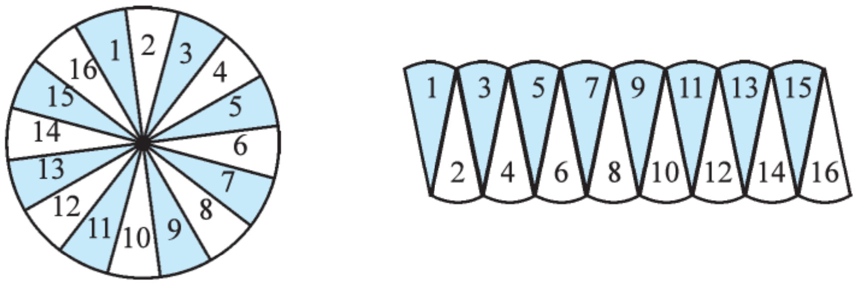
અથવા $\quad$ પરિઘ $= \pi \times$ વ્યાસ

$= \pi \times 2r$ $\qquad$ (r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.)

$= 2\pi r$

ભારતના મહાન ગણિતશાસ્ત્રી **આર્યભટ્ટે (C.E. 476-550)** π નું લગભગ મૂલ્ય આપ્યું હતું. તેમણે $\pi = \frac{62832}{20000}$ નું આસન્ન મૂલ્ય 3.1416 જણાવ્યું છે. એ પણ નોંધવું રસપ્રદ છે કે, ભારતના મહાન પ્રતિભાશાળી ગણિતજ્ઞ **શ્રીનિવાસ રામાનુજને (C.E.1887- C.E.1920)** આપેલા નિત્યસમના ઉપયોગથી ગણિતશાસ્ત્રીઓ π ના આસન્ન મૂલ્યની ગણતરી એક લાખ દશાંશસ્થળ સુધી કરી શક્યા. ધોરણ IX ના પ્રકરણ 1 પરથી તમે જાણો છો કે, π એ અસંમેય સંખ્યા છે અને તેનું દશાંશ વિસ્તરણ અનંત અને અનાવૃત્ત છે. તેમ છતાં સામાન્ય રીતે વ્યાવહારિક હેતુ માટે આપણે તેનું મૂલ્ય $\frac{22}{7}$ અથવા લગભગ 3.14 લઈશું.

તમને એ પણ યાદ હશે કે, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે. યાદ કરો કે, તમે ધોરણ VII માં વર્તુળને અનેક વૃત્તાંશમાં કાપી અને તેમની આકૃતિ 12.2 પ્રમાણેની પુનઃ ગોઠવણી કરીને આ ચકાસ્યું છે.



(i) $\qquad$ (ii)

આકૃતિ 12.2

તમે જોઈ શકશો કે, આકૃતિ 12.2 (ii)નો આકાર લગભગ $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ લંબાઈ અને r પહોળાઈવાળા લંબચોરસના જેટલો છે. આ સૂચવે છે કે, **વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$.** આપણે આગળના વર્ગોમાં કરેલી સંકલ્પનાઓને એક ઉદાહરણ દ્વારા યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : એક વર્તુળ આકારના ખેતરને વાડ કરવાનો ખર્ચ મીટરના ₹ 24 પ્રમાણે ₹ 5280 થાય છે. ખેતરને ખેડવાનો ખર્ચ ચોરસ મીટરના ₹ 0.50 છે. ખેતર ખેડવાનો ખર્ચ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ : વાડની લંબાઈ (મીટરમાં) $= \frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{\text{ભાવ}} = \frac{5280}{24} = 220$ મી

તેથી વર્તુળનો પરિઘ = 220 મી

તેથી, જો ખેતરની ત્રિજ્યા r મીટર હોય, તો

$$2\pi r = 220$$

અથવા, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$

અથવા, $r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$

અર્થાત્, ખેતરની ત્રિજ્યા 35 મીટર છે.

તેથી, ખેતરનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35$ મી^{2} $= 22 \times 5 \times 35$ મી^{2}

હવે, 1મી^{2} ખેતર ખેડવાનો ખર્ચ = ₹ 0.50

આથી, ખેતર ખેડવાનો કુલ ખર્ચ = ₹ $22 \times 5 \times 35 \times 0.50$ = ₹ 1925

સ્વાધ્યાય 12.1

ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. બે વર્તુળની ત્રિજ્યા 19 સેમી અને 9 સેમી છે. જે વર્તુળનો પરિઘ આ બે વર્તુળના પરિઘના સરવાળા જેટલો હોય, તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
2. બે વર્તુળની ત્રિજ્યા 8 સેમી અને 6 સેમી છે. જે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ આ બે વર્તુળનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય, તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
3. આકૃતિ 12.3 માં તીરંદાજીનું લક્ષ્ય, કેન્દ્રથી બહારના ભાગ તરફ સોનેરી, લાલ, ભૂરું, કાળું અને સફેદ એમ પાંચ વિભાગમાં ગુણલક્ષણ દર્શાવે છે. ગુણની ગણતરી માટે સોનેરી રંગ દ્વારા દર્શાવાતા પ્રદેશનો વ્યાસ 21 સેમી છે અને દરેક વિભાગની પહોળાઈ 10.5 સેમી છે. ગણતરી કરવાના પાંચ પ્રદેશ પૈકી પ્રત્યેકનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. એક ગાડીના દરેક પૈડાનો વ્યાસ 80 સેમી છે. જો ગાડી 66 કિમી/કલાકની ઝડપે મુસાફરી કરે, તો દરેક પૈડું 10 મિનિટમાં કેટલાં પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરશે?
5. નીચેનામાંથી સાચા જવાબ પર નિશાન કરો અને તમારી પસંદગીની યથાર્થતા ચકાસો :
   જો વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ સમાન સંખ્યા હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા .... થાય.

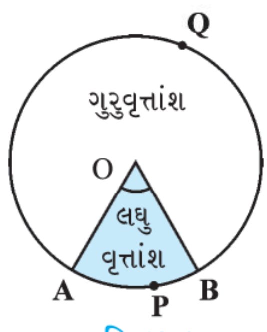
   (A) 2 એકમ (B) π એકમ (C) 4 એકમ (D) 7 એકમ

આકૃતિ 12.3

12.3 વર્તુળના વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ

A3K7H7

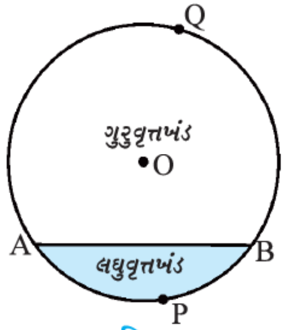
તમારા આગળનાં ધોરણોમાં તમે વર્તુળ વિષયક પદો *વૃત્તાંશ (sector)* અને *વૃત્તખંડ (segment)* થી પહેલેથી પરિચિત થયા છો જ. યાદ કરો કે, **વર્તુળાકાર પ્રદેશની બે ત્રિજ્યાઓ અને તેમને અનુરૂપ ચાપ વચ્ચે ઘેરાયેલા પ્રદેશ (અથવા ભાગ)ને વર્તુળનો *વૃત્તાંશ* કહે છે અને જીવા તથા તેને અનુરૂપ ચાપની વચ્ચે ઘેરાયેલા વર્તુળાકાર પ્રદેશના અંશ (અથવા ભાગ) ને વર્તુળનો *વૃત્તખંડ* કહે છે.**



આકૃતિ 12.4

આમ, આકૃતિ 12.4 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો રંગીન પ્રદેશ OAPB એ ***વૃત્તાંશ*** છે. ∠AOBને ***વૃત્તાંશનો ખૂણો*** કહે છે. આ આકૃતિમાં નોંધીશું કે, રંગીન ન હોય તેવો પ્રદેશ OAQB એ પણ વર્તુળનું વૃત્તાંશ છે. OAPB ને ***લઘુવૃત્તાંશ (minor sector)*** કહે છે અને OAQB ને ***ગુરુવૃત્તાંશ (major sector)*** કહે છે. આ વસ્તુ તરત સમજી શકાય તેમ છે. તમે એ પણ જોઈ શકશો કે, **ગુરુવૃત્તાંશનો ખૂણો 360° – ∠AOB છે.**

હવે, આકૃતિ 12.5 તરફ જુઓ. તેમાં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા AB છે. આથી રંગીન પ્રદેશ APB વર્તુળનો ***વૃત્તખંડ (segment)*** છે. તમે એ પણ નોંધી શકશો કે, જીવા AB થી વર્તુળનો છાયાંકિત ન હોય તેવો બીજો વૃત્તખંડ AQB બને છે. દેખીતી રીતે APB ને ***લઘુવૃત્તખંડ (minor segment)*** કહે છે અને AQB ને ***ગુરુવૃત્તખંડ (major segment)*** કહે છે.

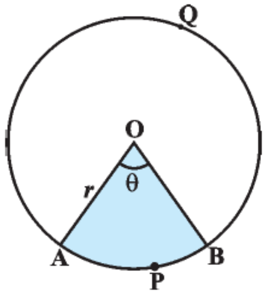


આકૃતિ 12.5

નોંધ : *જો દર્શાવવામાં આવ્યું ન હોય, તો આપણે 'વૃત્તખંડ' અને 'વૃત્તાંશ' લખીએ, ત્યારે આપણે તેનો અર્થ અનુક્રમે 'લઘુવૃત્તખંડ' અને 'લઘુવૃત્તાંશ' કરીશું.*

હવે આ જ્ઞાન સાથે, ચાલો આપણે તેમના ક્ષેત્રફળની ગણતરી માટે કેટલાંક સંબંધ (સૂત્રો) શોધવાનો પ્રયાસ કરીએ.

ધારો કે, OAPB એ O કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું વૃત્તાંશ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.6.) ધારો કે, ∠AOBનું અંશ માપ θ છે. તમે જાણો છો કે વર્તુળ (વર્તુળાકાર પ્રદેશ અથવા તાસક)નું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે.



આકૃતિ 12.6

આપણે આ વર્તુળાકાર પ્રદેશને કેન્દ્ર O આગળ 360° (અર્થાત્ અંશમાપ 360)નો ખૂણો બનાવતા વૃત્તાંશ તરીકે લઈએ. હવે એકમ પદ્ધતિ અપનાવતાં, આપણે નીચે પ્રમાણે વૃત્તાંશ OAPB ના ક્ષેત્રફળ સુધી પહોંચી શકીશું :

જ્યારે કેન્દ્ર આગળ 360 અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

આથી, જ્યારે કેન્દ્ર આગળ 1 અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{\pi r^2}{360}$

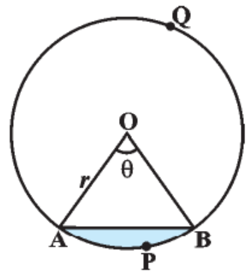
તેથી, જ્યારે કેન્દ્ર આગળ θ અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{\pi r^2}{360} \times \theta = \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$

આમ, આપણે વર્તુળના વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળ માટે નીચેનો સંબંધ (અથવા સૂત્ર) મળે છે :

θ ખૂણાવાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$

જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા અને θ એ અંશમાં વૃત્તાંશનો ખૂણો છે.

હવે, સ્વાભાવિક એક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે : શું આપણે આ વૃત્તાંશને અનુરૂપ ચાપ APB ની લંબાઈ શોધી શકીએ? હા, ફરીથી આપણે એકમની પદ્ધતિ અપનાવતાં અને વર્તુળની પૂરેપૂરી લંબાઈ (360° ના ખૂણાથી) $2\pi r$ લેતાં, આપણે જરૂરી ચાપ APB ની લંબાઈ $\dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$ મેળવી શકીએ.



આકૃતિ 12.7

આથી, θ ખૂણાવાળા વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ચાલો, હવે આપણે O કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તખંડ APB (જુઓ આકૃતિ 12.7) ના ક્ષેત્રફળનો વિકલ્પ લઈએ. તમે જોઈ શકશો કે,

વૃત્તખંડ APB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ – ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB$ નું ક્ષેત્રફળ

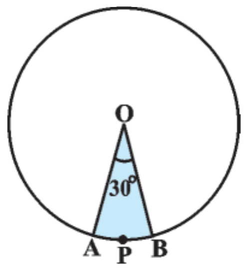
નોંધ : તમે અનુક્રમે આકૃતિ 12.6 અને આકૃતિ 12.7નું નિરીક્ષણ કરી શકશો કે,

ગુરુવૃત્તાંશ OAQB નું ક્ષેત્રફળ = πr^2 – લઘુવૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ

અને ગુરુવૃત્તખંડ AQB નું ક્ષેત્રફળ = πr^2 – લઘુવૃત્તખંડ APB નું ક્ષેત્રફળ

ચાલો, હવે આપણે આ સંકલ્પના સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ :

ઉદાહરણ 2 : 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અને કેન્દ્ર આગળ 30° નો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 12.8

ઉકેલ : આપેલું વૃત્તાંશ OAPB છે. (જુઓ આકૃતિ 12.8.)

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4$ સેમી²

$= \frac{12.56}{3}$ સેમી² = 4.19 સેમી² (આસન્ન મૂલ્ય)

અનુરૂપ ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$ – લઘુવૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ

$= (3.14 \times 16 - 4.19)$ સેમી²

= 46.05 સેમી² = 46.1 સેમી² (આસન્ન મૂલ્ય)

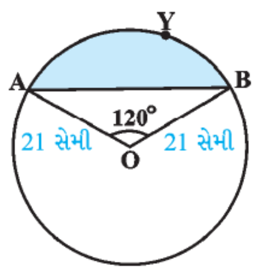
વૈકલ્પિક રીતે, ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$

$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16$ સેમી²

$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16$ સેમી² = 46.05 સેમી²

= 46.1 સેમી² (આસન્ન મૂલ્ય)

ઉદાહરણ 3 : જો વર્તુળની ત્રિજ્યા 21 સેમી અને $\angle AOB = 120°$ હોય, તો આકૃતિ 12.9 માં દર્શાવેલ વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 12.9

ઉકેલ : વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAYB નું ક્ષેત્રફળ – Δ OAB નું ક્ષેત્રફળ (1)

હવે, વૃત્તાંશ OAYB નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી²

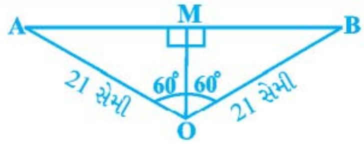
= 462 સેમી² (2)

ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, આકૃતિ 12.10 માં બતાવ્યા પ્રમાણે $OM \perp AB$ દોરો.

આપણે નોંધીએ કે, OA = OB. આથી, કાકબા એકરૂપતાને આધારે $\Delta AMO \cong \Delta BMO$

આથી, M એ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$

OM = x સેમી લેતાં,



આકૃતિ 12.10

ΔOMA પરથી, $\quad \frac{OM}{OA} = cos\ 60°$

અથવા, $\quad \frac{x}{21} = \frac{1}{2} \qquad (cos\ 60° = \frac{1}{2})$

અથવા, $\quad x = \frac{21}{2}$

તેથી, $\quad OM = \frac{21}{2}$ સેમી

વળી, $\quad \frac{AM}{OA} = sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

તેથી, $\quad AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ સેમી

માટે, $\quad AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ સેમી $= 21\sqrt{3}$ સેમી

તેથી, $\quad \Delta$ OAB નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ સેમી^{2}

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ સેમી^{2} $\qquad (3)$

માટે, વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ $= (462 - \frac{441}{4}\sqrt{3})$ સેમી^{2} $\qquad$ [(1), (2) અને (3) પરથી]

$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.2

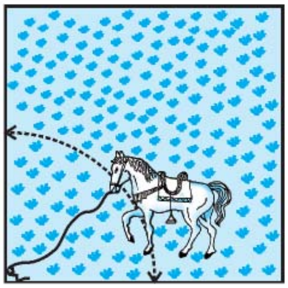
ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. જો 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતો ખૂણો 60° હોય, તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. 22 સેમી પરિઘવાળા વર્તુળના ચતુર્થાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. એક ઘડિયાળના મિનિટકાંટાની લંબાઈ 14 સેમી છે. મિનિટકાંટો 5 મિનિટમાં પરિભ્રમણ કરીને જે ક્ષેત્રફળ રચે તે શોધો.
4. 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ કાટખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ (i) લઘુવૃત્તખંડ (ii) ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)
5. 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું એક ચાપ કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ (i) ચાપની લંબાઈ (ii) ચાપ વડે બનતા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ (iii) અનુરૂપ જીવા વડે બનતા વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ લઘુવૃત્તખંડ અને ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 અને $\sqrt{3}$ = 1.73 લો.)
7. 12 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 120° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 અને $\sqrt{3}$ = 1.73 લો.)

8. 15 મી બાજુવાળા ચોરસ આકારના ઘાસના ખેતરના એક ખૂણે ઘોડાને 5 મી લાંબા દોરડાથી ખીલા સાથે બાંધેલો છે. (જુઓ આકૃતિ 12.11.)

(i) ઘોડો ખેતરના જેટલા ભાગમાં ચરી શકે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(ii) દોરડું 5 મી ને બદલે 10 મી લાંબું રાખ્યું હોત, તો ચરવાના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 12.11

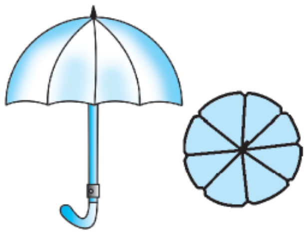
9. ચાંદીના તારથી 35 મિમી વ્યાસવાળું વર્તુળ આકારનું એક બક્કલ જેવું ઘરેણું બનાવ્યું છે. આકૃતિ 12.12 માં બતાવ્યા પ્રમાણે વર્તુળને 10 સમાન વૃત્તાંશમાં વિભાજિત કરે તેવા 5 વ્યાસ બનાવવામાં પણ તારનો ઉપયોગ કર્યો છે.

(i) જરૂરી ચાંદીના તારની કુલ લંબાઈ શોધો.

(ii) ઘરેણાના દરેક વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

આકૃતિ 12.12

10. એક છત્રીમાં સમાન અંતરે 8 સળિયા આવેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ 12.13.) છત્રીને 45 સેમી ત્રિજ્યાવાળું સમતલીય વર્તુળ ધારી, છત્રીના બે ક્રમિક સળિયા વચ્ચેના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

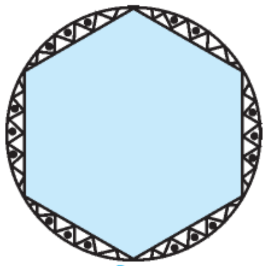


આકૃતિ 12.13

11. એક ગાડીને એકબીજા પર આચ્છાદિત ન થાય તેવાં બે વાઈપર છે. દરેક વાઈપરને 115° ના ખૂણા જેટલી સફાઈ કરતી 25 સેમી લંબાઈની બ્લેડ છે. પ્રત્યેક વખતે વાઈપરથી સાફ થતા વિસ્તારનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

12. પાણીની નીચેના ખડકો વિશે જહાજને ચેતવણી આપવા માટે, એક દીવાદાંડી 16.5 કિમી અંતર સુધી 80° ના ખૂણાના વૃત્તાંશ પર લાલ રંગનો પ્રકાશ પાથરે છે. સમુદ્રના જેટલા ક્ષેત્રફળ પર જહાજને ચેતવણી અપાતી હોય તે શોધો. (π = 3.14 લો.)

13. આકૃતિ 12.14 માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક મેજ પર છ ભાતવાળું એક વર્તુળાકાર આવરણ પાથરેલું છે. જો આવરણની ત્રિજ્યા 28 સેમી હોય, તો ₹ 0.35 પ્રતિ સેમી^{2} ના દરે ડિઝાઈન બનાવવાનો ખર્ચ શોધો. ($\sqrt{3}$ = 1.7 લો.)



આકૃતિ 12.14

14. નીચેનામાં સાચા જવાબ આગળ નિશાની કરો :

R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો વૃત્તાંશ ખૂણો $p°$ હોય, તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ .... થાય.

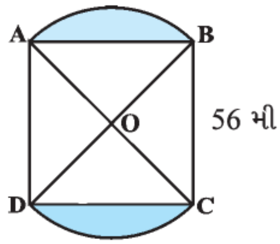
(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

12.4 સંયોજિત સમતલ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ

U6E3P7

અત્યાર સુધી આપણે ભિન્ન-ભિન્ન આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળની પૃથક રીતે ગણતરી કરી. ચાલો, હવે આપણે કેટલીક સંયોજિત સમતલીય આકૃતિના ક્ષેત્રફળની ગણતરીનો પ્રયત્ન કરીએ. આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણે આ પ્રકારની આકૃતિઓ અને વિવિધ રસપ્રદ ભાત સ્વરૂપના સંપર્કમાં પણ આવીએ છીએ. ફૂલોની ક્યારી, ગટરનાં ઢાંકણા, બારીની ભાત, ટેબલ પરના આવરણની ભાત એ કેટલાંક આવાં ઉદાહરણ છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા આ આકૃતિઓના ક્ષેત્રફળની ગણતરીની પ્રક્રિયા સમજીએ.

ઉદાહરણ 4 : 56 મી બાજુવાળી ચોરસ લોન ABCD ની બે સામસામેની બાજુઓ પર ફૂલની બે વર્તુળાકાર ક્યારી આકૃતિ 12.15 માં બતાવી છે તે રીતે બનાવી છે. જો ચોરસ લોનના વિકર્ણનું છેદબિંદુ O એ ફૂલની વર્તુળાકાર ક્યારીનું કેન્દ્ર હોય, તો લોન અને ફૂલની ક્યારીના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો શોધો.



આકૃતિ 12.15

ઉકેલ : ચોરસ લોન ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= 56 \times 56$ મી^{2} (1)

ધારો કે $OA = OB = x$ મીટર

આથી, $x^2 + x^2 = 56^2$

અથવા $2x^2 = 56 \times 56$

અથવા $x^2 = 28 \times 56$

હવે, વૃત્તાંશ OAB નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{90}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \pi r^2$ (2)

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56$ મી^{2} [(2) પરથી] (3)

વળી, Δ AOB નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{4} \times 56 \times 56$ મી^{2} ($\angle AOB = 90°$) (4)

તેથી, ફૂલોની ક્યારી AB નું ક્ષેત્રફળ $= \left(\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right)$ મી^{2}

[(3) અને (4) પરથી]

$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} - 2\right)$ મી^{2}

$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}$ મી^{2} (5)

આ જ પ્રમાણે, બીજી ફૂલની ક્યારીનું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}$ મી^{2} (6)

માટે, કુલ ક્ષેત્રફળ $= \left(56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}\right)$ મી^{2}

[(1), (5) અને (6) પરથી]

$= 28 \times 56 \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right)$ મી^{2}

$= 28 \times 56 \times \frac{18}{7}$ મી^{2} $= 4032$ મી^{2}

વૈકલ્પિક રીતે ઉકેલ :

કુલ ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAB નું ક્ષેત્રફળ + વૃત્તાંશ ODCનું ક્ષેત્રફળ + ΔOADનું ક્ષેત્રફળ + ΔOBCનું ક્ષેત્રફળ

$$= \Big(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56$$

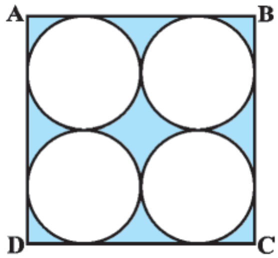
$$+ \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56\Big) \text{ મી}^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \Big(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2\Big) \text{ મી}^2$$

$$= \frac{7 \times 56}{7} (22 + 22 + 14 + 14) \text{ મી}^2$$

$$= 56 \times 72 \text{ મી}^2 = 4032 \text{ મી}^2$$

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 12.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના 14 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD માં આવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.16

ઉકેલ : ચોરસ ABCD નું ક્ષેત્રફળ = 14×14 સેમી^{2} = 196 સેમી^{2}

પ્રત્યેક વર્તુળનો વ્યાસ = $\frac{14}{2}$ સેમી = 7 સેમી

આથી, પ્રત્યેક વર્તુળની ત્રિજ્યા = $\frac{7}{2}$ સેમી

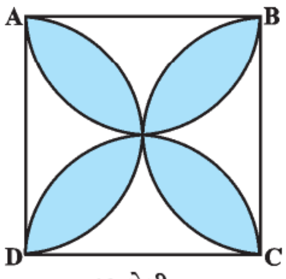
તેથી, એક વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ સેમી^{2}

$= \frac{154}{4}$ સેમી^{2} $= \frac{77}{2}$ સેમી^{2}

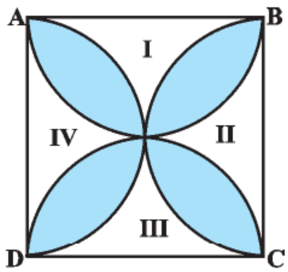
માટે, ચાર વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= 4 \times \frac{77}{2}$ સેમી^{2} = 154 સેમી^{2}

આથી, રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = (196 – 154) સેમી^{2} = 42 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 6 : 10 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD ની પ્રત્યેક બાજુ વ્યાસ હોય તેવાં અર્ધવર્તુળ આકૃતિ 12.17 માં દોરેલાં છે. આકૃતિમાં દર્શાવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 12.17



આકૃતિ 12.18

ઉકેલ : ચાલો, આપણે રંગીન પ્રદેશ ન હોય તેવા ચાર પ્રદેશને I, II, III અને IV થી અંકિત કરીએ. (જુઓ આકૃતિ 12.18.)

I નું ક્ષેત્રફળ + III નું ક્ષેત્રફળ

= ABCD નું ક્ષેત્રફળ − પ્રત્યેક 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે અર્ધવર્તુળનું ક્ષેત્રફળ

$= (10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2)$ સેમી^{2}

$= (100 - 3.14 \times 25)$ સેમી^{2}

$= (100 - 78.5)$ સેમી^{2} $= 21.5$ સેમી^{2}

આ જ પ્રમાણે, II નું ક્ષેત્રફળ + IV નું ક્ષેત્રફળ = 21.5 સેમી^{2}

આથી, રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = ABCD નું ક્ષેત્રફળ − (I + II + III + IV) નું ક્ષેત્રફળ

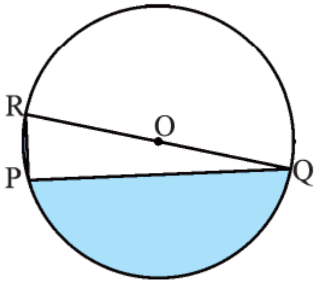
$= (100 - 2 \times 21.5)$ સેમી^{2}

$= (100 - 43)$ સેમી^{2} $= 57$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.3

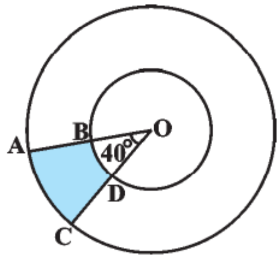
ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. જો PQ = 24 સેમી, PR = 7 સેમી અને વર્તુળનું કેન્દ્ર O હોય, તો આકૃતિ 12.19 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



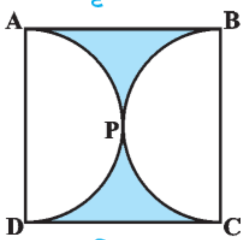
આકૃતિ 12.19

2. જો O કેન્દ્રવાળાં બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 7 સેમી અને 14 સેમી તથા $\angle$ AOC = 40° હોય, તો આકૃતિ 12.20 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



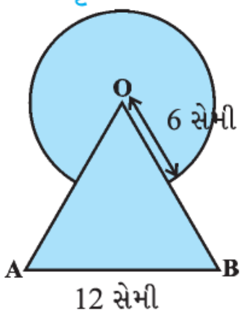
આકૃતિ 12.20

3. 14 સેમી બાજુવાળા ચોરસ ABCD માં જો અર્ધવર્તુળો APD અને BPC આવેલાં હોય, તો આકૃતિ 12.21 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



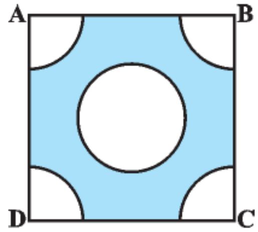
આકૃતિ 12.21

4. 12 સેમી બાજુવાળા સમભુજ ત્રિકોણ OAB ના શિરોબિંદુ O ને કેન્દ્ર તરીકે અને ત્રિજ્યા 6 સેમી લઈ, વર્તુળાકાર ચાપ દોર્યું છે. આકૃતિ 12.22 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.22

5. આકૃતિ 12.23 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 4 સેમી બાજુવાળા ચોરસના પ્રત્યેક ખૂણે 1 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો ચતુર્થાંશ ભાગ કપાયેલો છે તથા 2 સેમી વ્યાસવાળું એક વર્તુળ પણ કાપેલું છે. ચોરસના બાકીના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

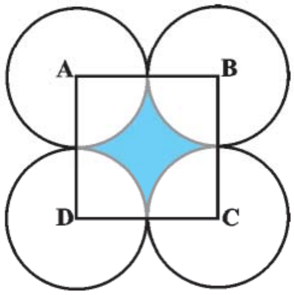


આકૃતિ 12.23

6. આકૃતિ 12.24 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ટેબલના એક 32 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર આવરણના વચ્ચેના ભાગમાં એક સમભુજ ત્રિકોણ ABC છોડી બાકીના ભાગમાં ભાત બનાવી છે. આ ભાતનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

આકૃતિ 12.24

7. આકૃતિ 12.25 માં 14 સેમી બાજુવાળો ચોરસ ABCD છે. પ્રત્યેક વર્તુળ બાકીનાં ત્રણ વર્તુળોમાંથી બે વર્તુળને બહારથી સ્પર્શે તેમ A, B, C અને D કેન્દ્રવાળાં ચાર વર્તુળ દોર્યા છે. દર્શાવેલા રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

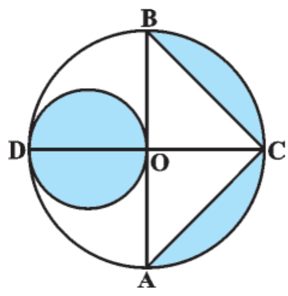


આકૃતિ 12.25

8. આકૃતિ 12.26 માં દોડમાર્ગનું નિરૂપણ કરેલું છે. તેના ડાબા અને જમણા છેડા અર્ધવર્તુળાકાર છે. અંદરના બે સમાંતર રેખાખંડ વચ્ચેનું અંતર 60 મી છે અને તે પ્રત્યેકની લંબાઈ 106 મી છે. જો માર્ગ 10 મી પહોળો હોય, તો (i) માર્ગની અંદરની ધારનું ચારેય તરફનું અંતર શોધો. (ii) માર્ગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.


આકૃતિ 12.26

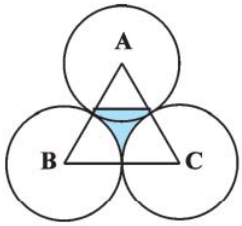
9. આકૃતિ 12.27 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બે વ્યાસ AB અને CD પરસ્પર લંબ છે અને નાના વર્તુળનો વ્યાસ OD છે. જો OA = 7 સેમી હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.27

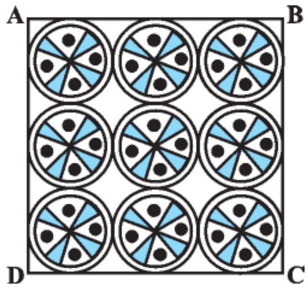
10. એક સમભુજ ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ 17320.5 સેમી^{2} છે. ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈથી અડધી ત્રિજ્યાવાળાં અને પ્રત્યેક શિરોબિંદુ કેન્દ્ર હોય તેવાં વર્તુળ દોર્યાં છે. (જુઓ આકૃતિ 12.28.) દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(π = 3.14 અને $\sqrt{3}$ = 1.73205 લો.)



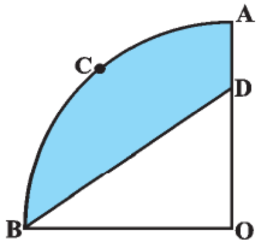
આકૃતિ 12.28

11. એક ચોરસ હાથરૂમાલ પર 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળી નવ વર્તુળાકાર ભાત બનાવી છે. (જુઓ આકૃતિ 12.29.) હાથરૂમાલના બાકીના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



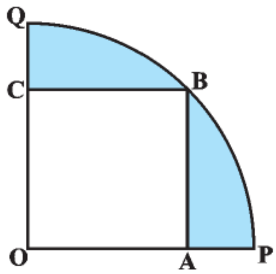
આકૃતિ 12.29

12. આકૃતિ 12.30 માં દર્શાવેલ, ચતુર્થાંશ OACB નું કેન્દ્ર O છે અને ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે. જો OD = 2 સેમી હોય, તો (i) ચતુર્થાંશ OACB નું ક્ષેત્રફળ શોધો. (ii) દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



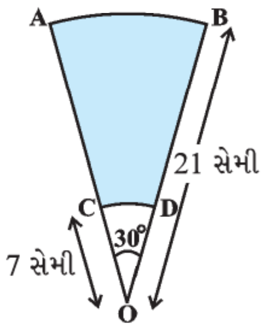
આકૃતિ 12.30

13. આકૃતિ 12.31 માં, એક વર્તુળના ચતુર્થાંશ OPBQ ની અંતર્ગત ચોરસ OABC છે. જો OA = 20 સેમી હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)



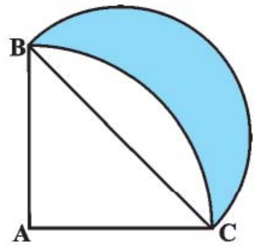
આકૃતિ 12.31

14. O કેન્દ્રવાળા, 21 સેમી અને 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે સમકેન્દ્રી વર્તુળનાં ચાપ અનુક્રમે AB અને CD છે. (જુઓ આકૃતિ 12.32.) જો $\angle AOB = 30°$ હોય, તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



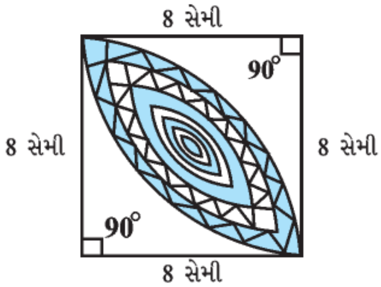
આકૃતિ 12.32

15. આકૃતિ 12.33 માં, ABC એ 14 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો ચતુર્થાંશ છે. BC ને વ્યાસ તરીકે લઈ વર્તુળ દોરવામાં આવ્યું છે. તો દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.33

16. આકૃતિ 12.34 માં, 8 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે વર્તુળના સામાન્ય ચતુર્થાંશની ભાતના પ્રદેશના ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરો.



આકૃતિ 12.34

12.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

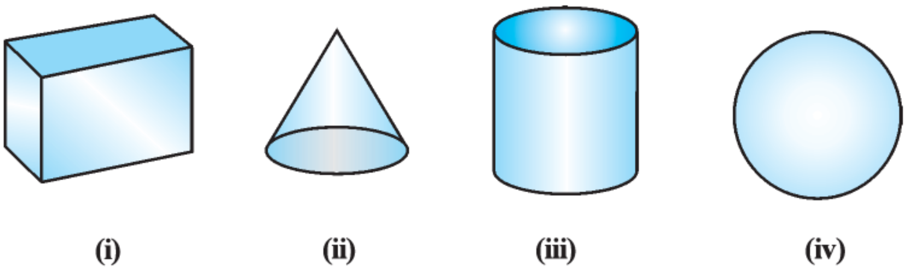
1. વર્તુળનો પરિઘ $= 2\pi r$
2. વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$
3. r ત્રિજ્યાવાળા અને θ માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ છે.
4. r ત્રિજ્યાવાળા અને θ માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ છે.
5. વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ = અનુરૂપ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ – અનુરૂપ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

W1B2E2

પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ 13

13.1 પ્રાસ્તાવિક

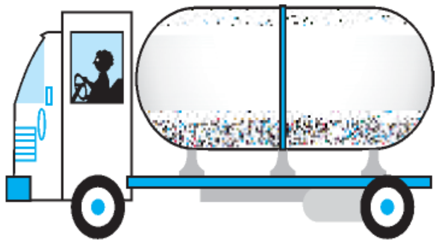
અગાઉ ધોરણ IX માં તમે કેટલાક નિયમિત આકારના ઘન પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર અને ગોલક વિશે પરિચિત થયાં છો. (જુઓ આકૃતિ 13.1.) તમે એ પણ જાણો છો કે, આપણે તેમનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધી શકીએ.



આકૃતિ 13.1

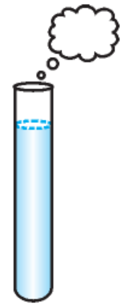
આપણે દૈનિક જીવનમાં ઉપર દર્શાવેલ મૂળભૂત ઘન પદાર્થો પૈકી બે કે તેથી વધુ ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનેલા પદાર્થો જોઈએ છીએ.

તમે કોઈ ખટારાની પાછળ રાખેલું મોટું પાત્ર (container) અવશ્ય જોયું હશે. (જુઓ આકૃતિ 13.2), તેમાં એક જગ્યાએથી બીજી જગ્યાએ તેલ અથવા પાણી લઈ જવાય છે. શું ઉપરના ચાર મૂળભૂત ઘન આકારમાંથી કોઈ આકાર જોવા મળે છે ? તમે કલ્પી શકો કે, તે નળાકાર અને બે અર્ધગોલકમાંથી બનેલો છે.



આકૃતિ 13.2

પુનઃ તમે આકૃતિ 13.3 માં બતાવ્યું છે તેવું કોઈ પાત્ર જોયું હશે. તમે તેનું નામ આપી શકશો ? તે એક કસનળી છે. સાચું છે ! તમે તેનો તમારી વિજ્ઞાનની પ્રયોગશાળામાં ઉપયોગ કર્યો હશે. આ કસનળી પણ એક નળાકાર અને અર્ધગોળાનું સંયોજન છે. તેવી જ રીતે મુસાફરી કરતી વખતે કેટલાંક મોટાં અને સુંદર બિલ્ડિંગ અથવા સ્મારકો તમને ઉપર જણાવેલા જેવાં ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનેલાં જોવા મળે છે.



આકૃતિ 13.3

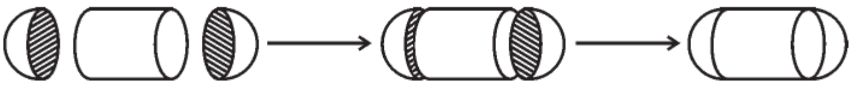
જો તમને આ પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ અથવા ઘનફળ અથવા તેની ક્ષમતા શોધવાની જરૂર પડે, તો તે કેવી રીતે શોધી શકશો ? આપણે આવા ઘનાકાર પદાર્થોનું અગાઉ શીખી ગયાં તેવા ઘનાકારોમાં વર્ગીકરણ કરી શકતા નથી.

આ પ્રકરણમાં તમે કેટલાક પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધી શકાય તે શીખશો.

13.2 સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું કુલ પૃષ્ઠફળ

V5U7W1

આવો આપણે આકૃતિ 13.2માં જોયેલા પાત્ર ઉપર વિચાર કરીએ. આ પ્રકારના ઘન પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ કેવી રીતે શોધીશું ? જ્યારે આપણી સમક્ષ કોઈ નવી સમસ્યા આવે છે, ત્યારે આપણે સૌપ્રથમ તેને અગાઉ ઉકેલેલી નાની સમસ્યાઓમાં વિભાજિત કરીશું. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આ ઘન પદાર્થ નળાકારના બંને છેડા અર્ધગોલકથી બંધ કરીને બનાવવામાં આવ્યો છે. ટુકડાઓ એક સાથે ભેગા કરવાથી આ ઘન પદાર્થ કેવી રીતે બને છે તે આકૃતિ 13.4માં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 13.4

જો આપણે નવી બનેલી વસ્તુની સપાટી જોઈશું, તો આપણને માત્ર બે અર્ધગોલકના વક્રપૃષ્ઠ તથા નળાકારનું વક્રપૃષ્ઠ દેખાશે.

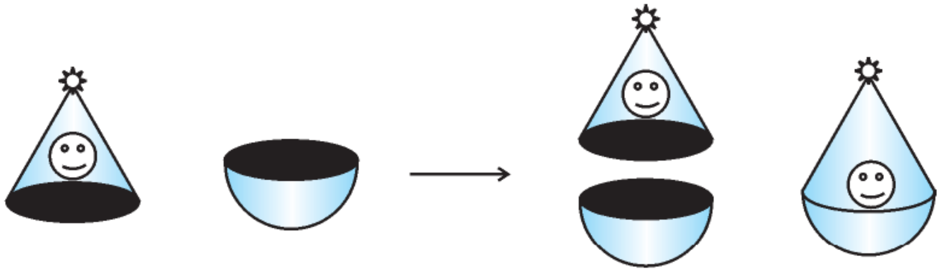
તેથી, નવા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ એ ત્રણ સ્વતંત્ર વક્ર ક્ષેત્રફળોના સરવાળા બરાબર થશે. તેનાથી આપણને નીચેનું સૂત્ર પ્રાપ્ત થશે :

નવા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ (TSA) = એક અર્ધગોલકની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA) + નળાકારની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA) + બીજા અર્ધગોલકની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA)

અહીં ***TSA (Total surface area), CSA (Curved surface area)*** નો અર્થ અનુક્રમે ‘કુલ પૃષ્ઠફળ’ અને ‘વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ’ છે.

ચાલો, આપણે હવે બીજી પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ. ધારો કે, આપણે અર્ધગોલક અને શંકુ સાથે મૂકીને એક રમકડું બનાવીએ, તો તે કેવી રીતે થાય તેનાં સોપાન જોઈએ.

પહેલા આપણે શંકુ અને અર્ધગોલક લઈ તેમની સમતલીય સપાટી એક સાથે રાખીએ. અલબત્ત, આપણે રમકડાની સપાટી સરખી રહે તે માટે શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને અર્ધગોલકની ત્રિજ્યા સમાન લઈએ છીએ. તે બનાવવાનાં પગલાં આકૃતિ 13.5માં બતાવ્યા છે.



આકૃતિ 13.5

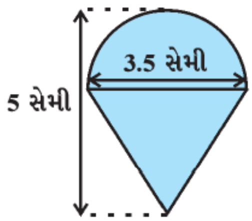
અંતમાં આપણને એક સુંદર અર્ધગોળાકાર આધારવાળું રમકડું મળશે. હવે, જો આપણે આ રમકડાની વક્ર સપાટીને રંગવા માંગતા હોઈએ, તો કેટલા જથ્થામાં રંગની જરૂર પડે તે માટે આપણી પાસે શું માહિતી હોવી જોઈએ ? આપણને રમકડાના કુલ પૃષ્ઠફળની આવશ્યકતા પડશે. તે અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ બંનેનો સરવાળો કરવાથી મળશે.

તેથી, આપણે કહીશું :

રમકડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ = અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈશું.

ઉદાહરણ 1 : રશીદને તેના જન્મદિવસે ભેટ સ્વરૂપે એક ભમરડો મળ્યો તે રંગેલો ન હતો. તે પોતાના ક્રેયોન રંગોથી ભમરડાને રંગ કરવા માગતો હતો. આ ભમરડો એક શંકુ ઉપર અર્ધગોળા જેવા ભાગથી બનેલો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.6) ભમરડાની કુલ ઊંચાઈ 5 સેમી છે અને અર્ધગોળાનો વ્યાસ 3.5 સેમી છે તો ભમરડાને રંગ કરવાના સંપૂર્ણ ભાગનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.6

ઉકેલ : આપણે જેની ચર્ચા કરી છે તે ભમરડો આકૃતિ 13.6 માં દર્શાવ્યો છે. આપણે સરળતા ખાતર ગણતરી નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ.

ભમરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ = અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

હવે, અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ સેમી}^2$$

વળી, શંકુની ઊંચાઈ = ભમરડાની ઊંચાઈ – અર્ધગોલકની ઊંચાઈ (ત્રિજ્યા)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{ સેમી} = 3.25 \text{ સેમી}$$

તેથી, શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}$ સેમી = 3.7 સેમી (આશરે)

$\therefore$ શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$$= \left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right) \text{ સેમી}^2$$

$\therefore$ ભમરડાનું પૃષ્ઠફળ $= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)$ સેમી^{2} + $\left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right)$ સેમી^{2}

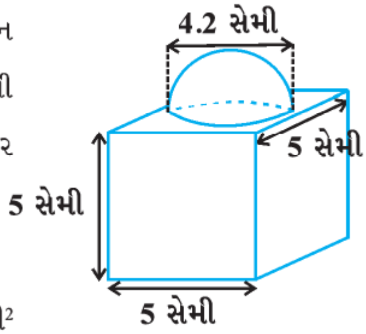
$$= \frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7) \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ સેમી}^2$$

$$= 39.6 \text{ સેમી}^2 \text{ (આશરે)}$$

ચકાસો કે, 'ભમરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ' એ શંકુ અને અર્ધગોલકના કુલ પૃષ્ઠફળોના સરવાળા બરાબર નથી.

ઉદાહરણ 2 : બાજુની આકૃતિ 13.7 માં બતાવેલ એક શો-પીસ એ સમઘન અને અર્ધગોલકનો બનેલો છે. આ શો-પીસનો પાયો સમઘન છે, અને તેની પ્રત્યેક ધાર 5 સેમી છે અને 4.2 સેમી વ્યાસવાળો અર્ધગોલક તેની ઉપર બેસાડેલો છે. આ શો-પીસનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.7

ઉકેલ : સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= 6 \times$ (બાજુનું માપ)^2 $= 6 \times 5 \times 5$ સેમી^{2}

$$= 150 \text{ સેમી}^2$$

અહીં, અર્ધગોલકના પાયાના ક્ષેત્રફળનો સમઘનના કુલ પૃષ્ઠફળમાં સમાવેશ થઈ જાય છે.

તેથી, શો-પીસનું પૃષ્ઠફળ = સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ – અર્ધગોલકના વર્તુળાકાર આધારનું ક્ષેત્રફળ

+ અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

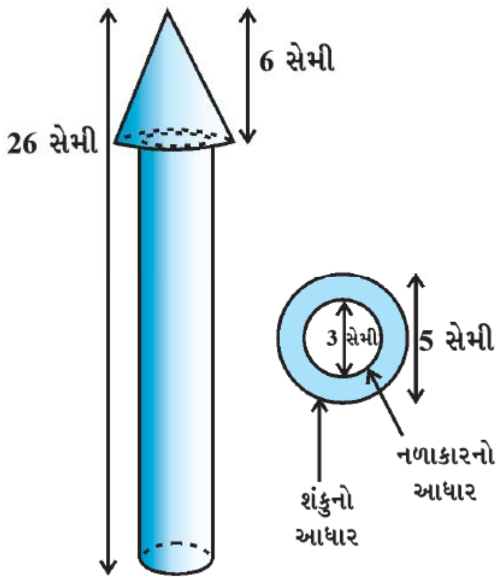
$$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 \text{ સેમી}^2$$

$$= (150 + \pi r^2) \text{ સેમી}^2$$

$$= 150 \text{ સેમી}^2 + \left(\frac{22}{7}\times\frac{4.2}{2}\times\frac{4.2}{2}\right) \text{ સેમી}^2$$

$$= (150 + 13.86) \text{ સેમી}^2 = 163.86 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 3 : બાજુમાં આકૃતિ 13.8 માં બતાવેલ એક લાકડાનું રૉકેટ એક નળાકાર ઉપર શંકુ મૂકી બનાવેલું છે. રૉકેટની કુલ ઊંચાઈ 26 સેમી છે, જ્યારે શંકુની ઊંચાઈ 6 સેમી છે. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 5 સેમી અને નળાકાર ભાગનો વ્યાસ 3 સેમી છે. જો શંકુ આકાર ભાગને નારંગી રંગ કરવો હોય અને નળાકાર ભાગને પીળો રંગ કરવો હોય, તો રંગ પ્રમાણે રોકેટના પ્રત્યેક ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 13.8

ઉકેલ : શંકુની ત્રિજ્યાને r વડે, શંકુની તિર્યક ઊંચાઈને l વડે, શંકુની ઊંચાઈને h વડે, નળાકારની ત્રિજ્યાને r' વડે, નળાકારની ઊંચાઈને h' વડે દર્શાવ્યાં છે. $r = 2.5$ સેમી, $h = 6$ સેમી, $r' = 1.5$ સેમી, $h' = 26 - 6 = 20$ સેમી તથા

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ સેમી} = 6.5 \text{ સેમી}$$

અહીં, શંકુનો પાયાનો ભાગ નળાકારની વર્તુળાકાર સપાટી ઉપર મુકાયેલો છે, પરંતુ શંકુના પાયાનો ભાગ નળાકારના વર્તુળાકાર ભાગ કરતાં વધારે છે. તેથી શંકુના આધારની વધારાની સપાટીને પણ રંગવાની છે.

તેથી નારંગી રંગના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુના આધારનું ક્ષેત્રફળ − નળાકારના આધારનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$

$= \pi\,[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ સેમી^{2}

$= \pi\,[20.25]$ સેમી^{2}

$= 3.14 \times 20.25$ સેમી^{2}

$= 63.585$ સેમી^{2}

હવે, પીળા રંગના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + નળાકારના પાયાનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$

$= \pi r'\,(2h' + r')$

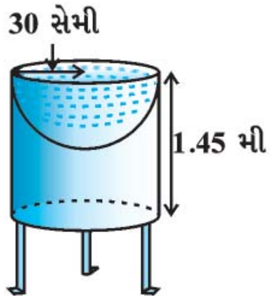
$= (3.14 \times 1.5)\,(2 \times 20 + 1.5)$ સેમી^{2}

$= 4.71 \times 41.5$ સેમી^{2}

$= 195.465$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 4 : મયંકે તેના બગીચામાં પક્ષીઓને પાણી પીવા માટે નળાકારના એક છેડે અર્ધગોળાકાર હોય તેવું પક્ષીકુંડ બનાવ્યું છે. (જુઓ આકૃતિ 13.9.) જો નળાકારની ઊંચાઈ 1.45 મીટર અને તેની ત્રિજ્યા 30 સેમી હોય, તો પક્ષીઓ માટે પાણી પીવાના આ પાત્રનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.9

ઉકેલ : ધારો કે નળાકારની ઊંચાઈ h છે અને નળાકાર અને અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા r સમાન છે.

તેથી, પક્ષીઓને પાણી પીવાના પાત્રનું કુલ પૃષ્ઠફળ = નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + અર્ધગોળાની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30\ (145 + 30)$ સેમી^{2}

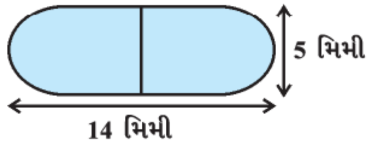
$= 33000$ સેમી^{2}

$= 3.3$ મીટર^2

સ્વાધ્યાય 13.1

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. બે ઘન પૈકી પ્રત્યેકનું ઘનફળ 64 સેમી^{3} હોય તેવા બે ઘનને જોડવાથી બનતા લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ શોધો.
2. એક પોલા અર્ધગોલક ઉપર એક પોલો નળાકાર બેસાડેલો હોય તેવું એક પાત્ર છે. અર્ધગોલકનો વ્યાસ 14 સેમી છે અને વાસણની કુલ ઊંચાઈ 13 સેમી છે વાસણની અંદરની સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.
3. અર્ધગોલકની ઉપર શંકુ લગાવેલો હોય તેવું એક રમકડું છે. તે બંનેની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે. રમકડાની કુલ ઊંચાઈ 15.5 સેમી હોય, તો રમકડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
4. 7 સેમી બાજુના માપવાળા સમઘનની ઉપર અર્ધગોલક મૂકેલો છે. તો અર્ધગોલકનો મહત્તમ વ્યાસ શું હોઈ શકે ? આ રીતે બનેલા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
5. એક સમઘન લાકડાના ટુકડાના એક પૃષ્ઠમાંથી એક અર્ધગોલક કાપવામાં આવે છે. અર્ધગોલકનો વ્યાસ l એ સમઘનની બાજુના માપ બરાબર છે, બાકી પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
6. દવાની એક કેપ્સૂલનો આકાર નળાકારની બંને બાજુએ અર્ધગોલક લગાડેલો હોય તે રીતનો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.10.) કેપ્સૂલની લંબાઈ 14 મિમી છે અને તેનો વ્યાસ 5 મિમી છે. તો કેપ્સૂલનું પૃષ્ઠફળ શોધો.



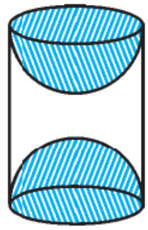
આકૃતિ 13.10

7. એક તંબુનો આકાર નળાકાર ઉપર શંકુ મૂકવામાં આવેલ હોય તેવો છે. જો નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ અને વ્યાસ અનુક્રમે 2.1 મીટર અને 4 મીટર હોય તથા ઉપરના ભાગની તિર્યક ઊંચાઈ 2.8 મીટર હોય, તો આ તંબુ

બનાવવા વપરાતા કેનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો અને જો કેનવાસનો ભાવ ₹ 500 પ્રતિ મીટર^2 હોય, તો તેમાં વપરાતા કેનવાસની કિંમત પણ શોધો. (તંબુના તળિયાને કેનવાસથી ઢાંકવામાં આવતો નથી તે ધ્યાનમાં લેવું.)

8. નળાકાર પદાર્થની ઊંચાઈ 2.4 સેમી અને વ્યાસ 1.4 સેમી છે. તેમાંથી તેટલી જ ઊંચાઈ અને વ્યાસવાળો શંકુ કાપી લેવામાં આવે તો વધેલા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ નજીકના સેમી^{2} માં શોધો.

9. બાજુમાં આકૃતિ 13.11 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લાકડાના નળાકારમાંથી બંને બાજુએથી અર્ધગોલક કાઢી એક લાકડાનો શો-પીસ બનાવ્યો છે. જો નળાકારની ઊંચાઈ 10 સેમી હોય અને પાયાની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી હોય તો શો-પીસનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.



આકૃતિ 13.11

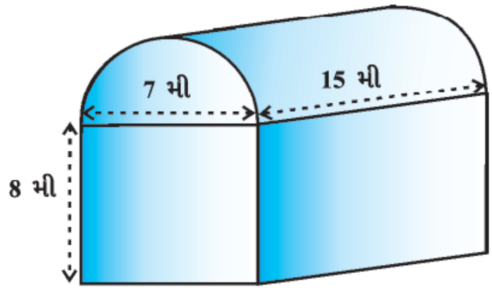
13.3 સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ

પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપણે બે જાણીતા ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનતા ઘન પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ કેવી રીતે મેળવવું તે જોઈ ગયા. અહીં આપણે આવા ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ શોધતાં શીખીશું. આપણે જોઈશું કે પૃષ્ઠફળની ગણતરીમાં આપણે બે ઘટક પદાર્થોના પૃષ્ઠફળને ઉમેરી શકતા નથી, કારણ કે તેમનો કેટલોક ભાગ બે ઘન પદાર્થોને જોડવાથી દૂર થાય છે. પરંતુ ઘનફળ શોધવામાં આવું નહિ થાય. બે મૂળભૂત ઘન પદાર્થોને જોડવાથી મળતા ઘન પદાર્થનું ઘનફળ એ આપેલા બંને ઘન પદાર્થોના ઘનફળના સરવાળા બરાબર થશે. હવે આપણે નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આ સત્ય જોઈશું.

B7X3M8

ઉદાહરણ 5 : શાંતા શેડમાં એક ઉદ્યોગ ચલાવે છે. આ શેડનો આકાર લંબઘન ઉપર અર્ધનળાકારથી બંધ છે. (જુઓ આકૃતિ 13.12.) તે શેડના પાયાનું માપ 7 મી × 15 મી અને લંબઘનાકારની ઊંચાઈ 8 મીટર હોય, તો આ શેડમાં સમાતી હવાનું ઘનફળ શોધો. ઉપરાંત શેડમાં મશીનરીના ભાગનું કુલ ઘનફળ 300 મી^{3} અને 20 કારીગરો પૈકી પ્રત્યેક કારીગરે રોકેલી જગ્યાનું ઘનફળ 0.08 મીટર^3 છે. તો શેડમાં કેટલી હવા હશે ?

$(\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.12

ઉકેલ : શેડની હવાનું ઘનફળ (જ્યારે શેડમાં કારીગરો અને મશીનરી ન હોય) એ લંબઘન અને અર્ધનળાકારની અંદર રહેલી હવાના ઘનફળના સરવાળા જેટલું છે.

હવે, લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 મીટર, 7 મીટર અને 8 મીટર છે.

તથા અર્ધનળાકારનો વ્યાસ 7 મીટર અને તેની ઊંચાઈ 15 મીટર છે.

તેથી માંગેલ ઘનફળ = લંબઘનનું ઘનફળ + $\frac{1}{2}$ નળાકારનું ઘનફળ

$$= \left[15\times7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right] \text{મીટર}^3$$

$$= 1128.75 \text{ મીટર}^3$$

હવે, મશીનરીએ રોકેલી જગ્યાનું ઘનફળ = 300 મીટર^3

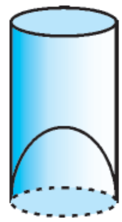
અને કારીગરોએ રોકેલી જગ્યાનું કુલ ઘનફળ = 20×0.08 મીટર^3 = 1.6 મીટર^3

તેથી, મશીનરી અને કારીગરોની સાથે શેડમાં રહેલી હવાનું ઘનફળ

= [1128.75 – (300.00 + 1.60)] મીટર^3

= 827.15 મીટર^3

ઉદાહરણ 6 : એક જ્યૂસ વેચવાવાળો તેના ગ્રાહકોને આકૃતિ 13.13 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના પ્યાલામાં જ્યૂસ આપતો હતો. નળાકાર પ્યાલાનો અંદરનો વ્યાસ 5 સેમી છે, પરંતુ પ્યાલાના પાયામાં અર્ધગોલક ભાગ ઊપસી આવેલો હતો. જેથી, પ્યાલાની ક્ષમતા ઓછી થતી હતી. જો પ્યાલાની ઊંચાઈ 10 સેમી હોય, તો તેની આભાસી ક્ષમતા તથા તેની વાસ્તવિક ક્ષમતા શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 13.13

ઉકેલ : પ્યાલાની અંદરનો વ્યાસ = 5 સેમી અને ઊંચાઈ = 10 સેમી છે,

જેથી પ્યાલાની આભાસી ક્ષમતા = $\pi r^2 h$

= $3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10$ સેમી^{3}

= 196.25 સેમી^{3}

પણ પ્યાલાની વાસ્તવિક ક્ષમતા એ પ્યાલાના ઉપસી આવેલા અર્ધગોલકના કદ જેટલી ઓછી થાય છે.

એટલે કે, $\frac{2}{3}\pi r^3$ જેટલી ઓછી છે તેનું મૂલ્ય = $\frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$ સેમી^{3}

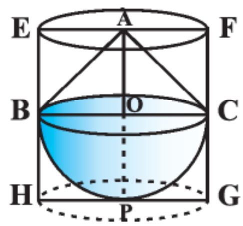
= 32.71 સેમી^{3}

તેથી, પ્યાલાની વાસ્તવિક ક્ષમતા = પ્યાલાની આભાસી ક્ષમતા – પ્યાલામાં સમાવિષ્ટ અર્ધગોલકનું ઘનફળ

= (196.25 – 32.71) સેમી^{3}

= 163.54 સેમી^{3}

ઉદાહરણ 7 : એક નક્કર રમકડું એ અર્ધગોલકની ઉપર શંકુ લગાવ્યો હોય તેવા સ્વરૂપે છે. શંકુની ઊંચાઈ 2 સેમી અને પાયાનો વ્યાસ 4 સેમી છે, તો રમકડાનું ઘનફળ શોધો. જો એક લંબવૃત્તીય નળાકાર રમકડાને પરિગત હોય, તો નળાકારના અને રમકડાના ઘનફળનો તફાવત શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 13.14

ઉકેલ : ધારો કે, BPC અર્ધગોલક અને ABC એ અર્ધગોલકના પાયા ઉપર રાખેલો શંકુ છે. (જુઓ આકૃતિ 13.14) અર્ધગોલકની ત્રિજ્યા OB (= શંકુની ત્રિજ્યા) છે.

તે $\frac{1}{2} \times 4$ સેમી = 2 સેમી છે.

તેથી, રમકડાનું ઘનફળ = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3}\times 3.14\times(2)^3+\frac{1}{3}\times 3.14\times(2)^2\times 2\right] \text{ સેમી}^3 = 25.12 \text{ સેમી}^3$$

હવે, ધારો કે, લંબવૃત્તીય નળાકાર EFGH એ રમકડાને પરિગત છે.

તે લંબવૃત્તીય નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા = HP = BO = 2 સેમી અને

તેની ઊંચાઈ EH = AO + OP = (2 + 2) સેમી = 4 સેમી

તેથી, માંગેલું ઘનફળ = લંબવૃત્તીય નળાકારનું ઘનફળ – રમકડાનું ઘનફળ

$= [3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12]$ સેમી^{3}

$= 25.12$ સેમી^{3}

તેથી, માંગેલા બે ઘનફળોનો તફાવત = 25.12 સેમી^{3}

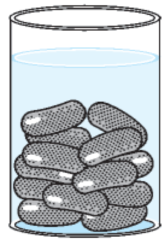
સ્વાધ્યાય 13.2

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. એક ઘન પદાર્થ એ 1 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા અર્ધગોલક ઉપર તેટલી જ ત્રિજ્યાવાળો શંકુ ગોઠવીને બનાવાયો છે. શંકુની ઊંચાઈ એ તેની ત્રિજ્યા જેટલી હોય, તો આ ઘન પદાર્થનું ઘનફળ π ના ગુણિતમાં શોધો.

2. એન્જિનિયરિંગના વિદ્યાર્થી રશેલને નળાકારના બંને છેડે પાતળી ઍલ્યુમિનિયમની શીટમાંથી બનેલો શંકુ બેસાડી એક નમૂનો તૈયાર કરવાનું કહેવામાં આવ્યું. નમૂનાનો વ્યાસ 3 સેમી અને લંબાઈ 12 સેમી છે. જો શંકુની ઊંચાઈ 2 સેમી હોય, તો રશેલે બનાવેલ નમૂનામાં કેટલી હવા સમાશે તે શોધો. (ધારી લો કે નમૂનાના બહારનાં અને અંદરનાં માપો લગભગ સમાન છે.)

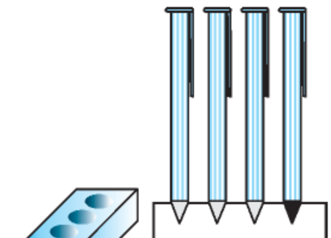
3. ગુલાબજાંબુમાં તેના કદના 30 % જેટલી ખાંડની ચાસણી છે. દરેક ગુલાબજાંબુનો આકાર નળાકારના બંને છેડે અર્ધગોલક લગાવ્યા હોય તેવો છે. તેની કુલ લંબાઈ 5 સેમી અને વ્યાસ 2.8 સેમી છે. તો આવાં 45 ગુલાબજાંબુમાં આશરે કેટલી ખાંડની ચાસણી હશે તે શોધો. (જુઓ આકૃતિ 13.15.)



આકૃતિ 13.15

4. એક લાકડાનું લંબઘન પેન-સ્ટૅન્ડ ચાર શંકુ આકારના છિદ્રવાળું બનાવેલું છે. લંબઘનનાં માપ 15 સેમી × 10 સેમી × 3.5 સેમી છે. છિદ્રવાળા દરેક ભાગની ત્રિજ્યા 0.5 સેમી અને ઊંડાઈ 1.4 સેમી છે, તો લાકડાના આ સ્ટૅન્ડનું ઘનફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 13.16.)

5. એક વાસણનું સ્વરૂપ ઊંધા શંકુ જેવું છે. તેની ઊંચાઈ 8 સેમી અને ઉપરના ખુલ્લા ભાગની ત્રિજ્યા 5 સેમી છે. તે ઉપરની ધાર સુધી પાણીથી ભરેલું છે. જ્યારે વાસણમાં 0.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ધાતુની ગોળીઓ નાખવામાં આવે છે, ત્યારે એક ચતુર્થાંશ જેટલું પાણી બહાર નીકળે છે તો વાસણમાં નાખેલી ધાતુની ગોળીઓની સંખ્યા શોધો.



આકૃતિ 13.16

6. એક લોખંડના નળાકાર સ્વરૂપના નક્કર થાંભલાની ઊંચાઈ 220 સેમી છે અને પાયાનો વ્યાસ 24 સેમી છે. તેની ઉપર 60 સેમી ઊંચાઈ અને 8 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બીજા નળાકારને મૂકવામાં આવે છે, તો થાંભલાનું દળ શોધો. 1 સેમી^{3} લોખંડનું દળ આશરે 8 ગ્રામ છે. ($\pi = 3.14$ લો.)

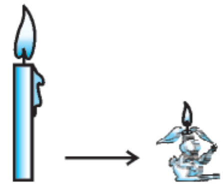
7. 60 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોલક પર સ્થિત લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 120 સેમી અને ત્રિજ્યા 60 સેમી છે. તેને પાણીથી સંપૂર્ણ ભરેલા એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં તેના તળિયાને સ્પર્શે તે રીતે ઊભો મૂક્યો છે. જો નળાકારની ત્રિજ્યા 60 સેમી અને ઊંચાઈ 180 સેમી હોય, તો નળાકારમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

8. એક ગોળાકાર કાચના વાસણની ઉપરનો ભાગ નળાકાર છે. તે નળાકારની ઊંચાઈ 8 સેમી છે અને વ્યાસ 2 સેમી છે. ગોળાકાર ભાગનો વ્યાસ 8.5 સેમી છે. એક બાળક માહિતી પ્રાપ્ત કરે છે કે તેમાં ભરેલા પાણીનું ઘનફળ 345 સેમી^{3} છે. બાળકનો જવાબ સાચો છે કે નહિ તે ચકાસો. ઉપરનાં માપો તેના અંદરના ભાગના છે. $\pi = 3.14$ લો.

13.4 એક ઘનાકારનું બીજા ઘનાકારમાં રૂપાંતર

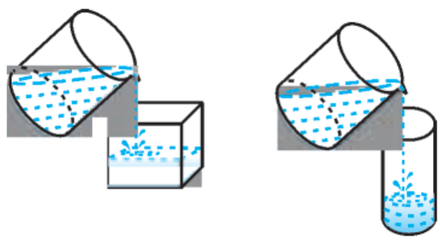
B6K2P6

નિશ્ચિત રીતે તમે મીણબત્તી જોઈ હશે. સામાન્ય રીતે તે નળાકાર સ્વરૂપે હોય છે. તમે કેટલીક મીણબત્તી પ્રાણીઓના આકારની પણ જોઈ હશે. (જુઓ આકૃતિ 13.17.)



આકૃતિ 13.17

એ કેવી રીતે બનાવી હશે ? જો તમે મીણબત્તી બીજા વિશિષ્ટ આકારમાં બનાવવા માંગતા હો તો તમારે ધાતુના વાસણમાં તે સંપૂર્ણપણે પીગળી ન જાય ત્યાં સુધી મીણ ગરમ કરવું પડશે. પછી મીણને તમે જે આકારમાં ઢાળવા માગતા હો તે આકારના વાસણમાં રેડવું પડશે. આથી તમને જોઈતા આકારની મીણબત્તી મળશે. ઉદાહરણ તરીકે, એક નળાકાર આકારની મીણબત્તી લો, તેને પૂર્ણ રીતે પીગાળો તથા પીગાળેલું સંપૂર્ણ મીણ સસલા આકારના પાત્રમાં નાખો. ઠંડું કરવાથી સસલા આકારની મીણબત્તી તૈયાર થઈ જશે. નવી મીણબત્તીનું ઘનફળ પહેલાની મીણબત્તીના ઘનફળ જેટલું જ થશે. કોઈ પદાર્થને એક આકારમાંથી બીજા આકારમાં પરિવર્તિત કરતાં હોઈએ અથવા જ્યારે કોઈ એક આકારના પાત્રમાંથી પ્રવાહીને બીજા આકારના પાત્રમાં ભરતાં હોઈએ છીએ, ત્યારે આ વાત યાદ રાખવી જોઈએ. તે તમે આકૃતિ 13.18 માં આ વસ્તુ જોઈ શકો છો.



આકૃતિ 13.18

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા સમજવા માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 8 : નમૂના બનાવવાની માટીમાંથી 24 સેમી ઊંચાઈ અને 6 સેમી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો એક શંકુ બનાવેલો છે. એક બાળકે તેને ગોળાકાર સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી નાખ્યો છે, તો ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ સેમી^{3}

જો ગોળાની ત્રિજ્યા r હોય, તો તેનું ઘનફળ $\frac{4}{3}\pi r^3$ છે.

શંકુની અને ગોળાની માટીનું ઘનફળ સમાન છે.

એટલે કે $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$

અર્થાત્, $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

તેથી, $r = 3 \times 2 = 6$

એટલે કે, ગોળાની ત્રિજ્યા 6 સેમી છે.

ઉદાહરણ 9 : સેલ્વીના ઘરની છત ઉપર નળાકાર આકારની એક ટાંકી છે. આમાં ભોંયતળિયાની લંબઘન ટાંકીમાંથી પંપ દ્વારા પાણી ભરવામાં આવે છે. આ ભૂગર્ભની ટાંકી ઘનાકાર છે. ટાંકીનાં માપ 1.57 મીટર × 1.44 મીટર × 95 સેમી છે. છત ઉપરની ટાંકીની ત્રિજ્યા 60 સેમી છે અને ઊંચાઈ 95 સેમી છે. જો ભોંયતળિયાની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલી હોય, તો તેમાંથી છત ઉપરની ટાંકીને પૂરેપૂરી ભરી લીધા પછી ભોંયતળિયાની ટાંકીમાં પાણીની ઊંચાઈ કેટલી બાકી રહેશે ? છતની ટાંકીની ક્ષમતાની સાથે ભોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતાની સરખામણી કરો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : છતની ટાંકીનું ઘનફળ = ભૂગર્ભની ટાંકીમાંથી નીકળેલા પાણીનું ઘનફળ

હવે, છતની ટાંકી (નળાકાર)નું ઘનફળ $= \pi r^2 h$

$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95$ મીટર^3

પાણીથી પૂર્ણ ભરેલી ભોંયતળિયાની ટાંકીનું ઘનફળ $= l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95$ મીટર^3

છતની ટાંકી પાણીથી પૂરી ભરાયા બાદ ભોંયતળિયાની ટાંકીમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)]$ મીટર^3 $= (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)$ મીટર^3

એટલે કે, ભૂગર્ભની ટાંકીમાં બાકી રહેલા પાણીની ઊંચાઈ $= \dfrac{\text{બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ}}{l \times b}$

$= \dfrac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57 \times 1.44}$ મીટર

$= 0.475$ મીટર $= 47.5$ સેમી

$$\frac{\text{છતની ટાંકીની ક્ષમતા}}{\text{ભોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતા}} = \frac{3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95}{1.57 \times 1.44 \times 0.95} = \frac{1}{2}$$

તેથી, છતની ટાંકીની ક્ષમતા ભોંયતળિયાની ટાંકીની ક્ષમતા કરતાં અડધી છે.

ઉદાહરણ 10 : 1 સેમી વ્યાસ અને 8 સેમી લંબાઈવાળો એક તાંબાનો સળિયો છે. તેમાંથી 18 મીટર લંબાઈનો એકસરખી જાડાઈવાળો તાર બનાવવો છે, તો તારની જાડાઈ શોધો.

ઉકેલ : સળિયાનું ઘનફળ $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8$ સેમી^{3}

$= 2\pi$ સેમી^{3}

સમાન ઘનફળવાળા નવા તારની લંબાઈ = 18 મીટર = 1800 સેમી

જો તારના આડછેદની ત્રિજ્યા r સેમી હોય, તો તારનું ઘનફળ $= \pi \times r^2 \times 1800$ સેમી^{3}

તેથી, $\pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

$$r^2 = \frac{1}{900}$$

$$r = \frac{1}{30}$$

તેથી, આડછેદનો વ્યાસ એટલે કે તારની જાડાઈ $\frac{1}{15}$ સેમી છે. એટલે કે, 0.67 મિમી (લગભગ)

ઉદાહરણ 11 : પાણીથી પૂર્ણ ભરેલી એક અર્ધગોળાકાર ટાંકી છે. તેને પાઈપ દ્વારા $3\frac{4}{7}$ લિટર/સેકન્ડના દરથી ખાલી કરવામાં આવે છે. જો ટાંકીનો વ્યાસ 3 મીટર હોય, તો તેને અડધી ખાલી કરવા માટે કેટલો સમય જોઈએ ? ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ : અર્ધગોળાકાર ટાંકીની ત્રિજ્યા $= \frac{3}{2}$ મીટર

$$\text{ટાંકીનું ઘનફળ} = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ મીટર}^3$$

$$= \frac{99}{14} \text{ મીટર}^3$$

તેથી, ખાલી કરેલા પાણીનું ઘનફળ $= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14}$ મીટર$^3 = \frac{99}{28} \times 1000$ લિટર

$$= \frac{99000}{28} \text{ લિટર}$$

$\frac{25}{7}$ લિટર પાણી ખાલી કરવા લાગતો સમય 1 સેકન્ડ છે.

તો, $\frac{99000}{28}$ લિટર પાણી ખાલી કરવા માટે $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ સેકન્ડની જરૂર પડે અથવા 16.5 મિનિટમાં પાણી ખાલી થાય.

સ્વાધ્યાય 13.3

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. 4.2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના ગોલકને ઓગાળીને 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા નળાકાર સ્વરૂપમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. નળાકારની ઊંચાઈ શોધો.
2. 6 સેમી, 8 સેમી અને 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના ગોળાઓને ઓગાળીને એક મોટો નક્કર ગોળો બનાવવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો.

3. એક કૂવો 7 મીટર વ્યાસવાળા વર્તુળ પર 20 મીટર સુધી ખોદવામાં આવે છે, અને તે ખોદવાથી નીકળેલી માટીને એક સરખી રીતે પાથરી 22 મીટર × 14 મીટરની એક વ્યાસપીઠ બનાવવામાં આવે છે, તો વ્યાસપીઠની ઊંચાઈ શોધો.

4. 3 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળ પર એક કૂવો 14 મીટર સુધી ખોદવામાં આવે છે. તેમાંથી નીકળેલી માટીને કૂવાની આસપાસ 4 મીટર પહોળા વર્તુળાકાર વલયમાં સમાન રીતે પાથરીને ઓટલો બનાવ્યો છે. તો ઓટલાની ઊંચાઈ શોધો.

5. 12 સેમી વ્યાસ અને 15 સેમી ઊંચાઈવાળા એક પાત્રનો આકાર લંબવૃત્તીય નળાકાર છે. તે આઇસક્રીમથી સંપૂર્ણ ભરેલો છે. તેમાંથી 12 સેમી ઊંચાઈ અને 6 સેમી વ્યાસવાળા શંકુ આકારના કોન પર અર્ધગોળાકાર સ્વરૂપમાં આઇસક્રીમ ભરવામાં આવે છે. તો આ આઈસક્રીમ દ્વારા કેટલા કોન ભરી શકાય તે શોધો.

6. 5.5 સેમી × 10 સેમી × 3.5 સેમી ના માપનો લંબઘન બનાવવા 1.75 સેમી વ્યાસ અને 2 મિમી જાડાઈવાળા ચાંદીના કેટલા સિક્કા ઓગાળવા પડે ?

7. 32 સેમી ઊંચાઈ અને પાયાની ત્રિજ્યા 18 સેમી હોય તેવી એક નળાકાર ડોલ રેતીથી ભરેલી છે, આ ડોલને જમીન પર ખાલી કરી શંકુ આકારનો ઢગલો બનાવ્યો છે. જો શંકુ આકારના ઢગલાની ઊંચાઈ 24 સેમી હોય, તો ઢગલાની ત્રિજ્યા અને તિર્યક ઊંચાઈ શોધો.

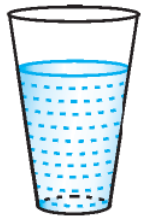
8. 6 મીટર પહોળી અને 1.5 મીટર ઊંડી એક પાણીની નહેરમાં પાણી 10 કિમી/કલાકની ઝડપે વહે છે. 30 મિનિટમાં આ નહેરમાંથી કેટલા ક્ષેત્રફળની સિંચાઈ કરી શકાશે. સિંચાઈ માટે 8 સેમી પાણીની ઊંચાઈ આવશ્યક છે.

9. એક ખેડૂત પોતાના ખેતરમાં 10 મીટર વ્યાસવાળી અને 2 મીટર ઊંડી એક નળાકાર ટાંકીને અંદરથી 20 સેમી વ્યાસવાળી એક પાઈપ દ્વારા એક નહેર સાથે જોડે છે. જો પાઈપમાં પાણીનો પ્રવાહ 3 કિમી/કલાકની ઝડપે વહેતો હોય છે, તો કેટલા સમયમાં ટાંકી પાણીથી પૂર્ણ રીતે ભરાઈ જશે ?

13.5 શંકુનો આડછેદ

E5Q9V5

વિભાગ 13.2 માં આપણે બે જાણીતા ઘન પદાર્થોને એક સાથે જોડતાં મળતા ઘન પદાર્થો જોયા છે. અહીં આપણે કાંઈક વિશેષ કરીશું. આપણે એક ઊભો શંકુ લઈશું અને તેનો થોડોક ભાગ કાઢી નાખીશું. આ કાર્ય આપણે ઘણી બધી રીતે કરી શકીએ છીએ. પરંતુ અહીં આપણે તેમાંનો એક વિશિષ્ટ પ્રકાર લઈશું તેમાં પાયાને સમાંતર સમતલ વડે નાનો શંકુ કાપી નાખવાનો છે. તમે સામાન્ય રીતે પાણી પીવાના પ્યાલા વગેરે જોયા છે. તે આવા આકારના હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.19.)

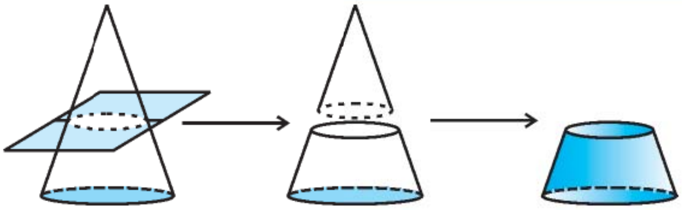


આકૃતિ 13.19

પ્રવૃત્તિ 1 : થોડી ભીની મસળેલી માટી લો અથવા બીજો કોઈ પદાર્થ (પ્લાસ્ટિક જેવો વગેરે) લો અને શંકુ આકાર બનાવો. તેને પાયાને સમાંતર એક છરી વડે કાપો. ઉપરનો નાનો શંકુ દૂર કરો. કયો ભાગ બાકી વધ્યો ? બાકી વધેલા ભાગને શંકુનો આડછેદ કહે છે. તમારી પાસે *શંકુનો આડછેદ* કહેવાતો ઘન પદાર્થ વધશે. તમે જોઈ શકશો કે, તેને ભિન્ન ત્રિજ્યાવાળા બે વર્તુળાકાર છેડા છે.

જો શંકુ આપેલો હોય અને તેને પાયાને સમાંતર સમતલ વડે કાપીએ તથા સમતલની એક બાજુ બનતા શંકુને દૂર કરીએ તો સમતલની બીજી બાજુએ શંકુનો આડછેદ* (Frustum) કહેવાતો ભાગ બચે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.20.)

* 'Frustum' એક લેટિન શબ્દ છે, તેના અર્થ 'કાપેલા ટુકડા' અને તેનું બહુવચન 'Frusta' છે.

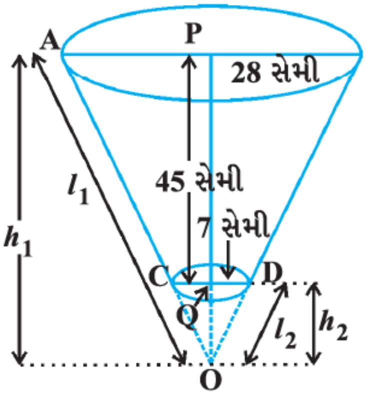


આકૃતિ 13.20

આપણે શંકુના આડછેદની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધી શકીએ તે માટે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 12 : શંકુના આડછેદના બે છેડાની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 28 સેમી અને 7 સેમી છે અને તેની ઊંચાઈ 45 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.21.) તેનું ઘનફળ, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 13.21

ઉકેલ : શંકુનો આડછેદ એ ઊભા બે શંકુઓ OAB અને OCD નો તફાવત છે. (જુઓ આકૃતિ 13.21.)

ધારો કે શંકુ OAB ની ઊંચાઈ (સેમીમાં) h_1 અને તિર્યક ઊંચાઈ l_1 છે. તેથી OP = h_1 અને OA = OB = l_1. ધારો કે શંકુ OCD ની ઊંચાઈ h_2 અને તિર્યક ઊંચાઈ l_2 છે.

અહીં, આપણે $r_1 = 28$ સેમી, $r_2 = 7$ સેમી અને આડછેદની ઊંચાઈ $h = 45$ સેમી છે.

તેથી $h_1 = 45 + h_2$ (1)

સૌથી પહેલાં શંકુઓ OAB અને OCD ની ઊંચાઈઓ અનુક્રમે h_1 અને h_2 નિશ્ચિત કરવી આવશ્યક છે.

બંને ત્રિકોણો OPB અને OQD સમરૂપ છે. (શા માટે ?)

તેથી, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1}$ (2)

(1) અને (2) ઉપરથી, આપણને $h_2 = 15$ અને $h_1 = 60$ મળશે.

હવે, શંકુના આડછેદનું ઘનફળ = શંકુ OABનું ઘનફળ – શંકુ OCD નું ઘનફળ

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(28)^2\cdot(60) - \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(7)^2\cdot(15)\right] \text{ સેમી}^3$$

$$= 48510 \text{ સેમી}^3$$

શંકુઓ OCD અને OAB ની તિર્યક ઊંચાઈઓ અનુક્રમે l_2 અને l_1 છે.

$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55$ સેમી (લગભગ)

$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20$ સેમી

શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$= \frac{22}{7}$ (28) (66.20) – $\frac{22}{7}$ (7) (16.55)

= 5461.5 સેમી^{2}

શંકુના આડછેદનું કુલ ક્ષેત્રફળ = વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $+ \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

= 5461.5 સેમી^{2} + $\frac{22}{7}$ $(28)^2$ સેમી^{2} + $\frac{22}{7}$ $(7)^2$ સેમી^{2}

= 5461.5 સેમી^{2} + 2464 સેમી^{2} + 154 સેમી^{2}

= 8079.5 સેમી^{2}

વ્યાપક રીતે, ધારો કે શંકુના આડછેદની ઊંચાઈ h, તિર્યક ઊંચાઈ l, છેડાની ત્રિજ્યાઓ r_1 અને r_2 છે. $(r_1 > r_2)$ તો આપણે શંકુના આડછેદનું ઘનફળ, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળ નીચે આપેલ સૂત્રો દ્વારા મેળવીશું.

(i) શંકુના આડછેદનું ઘનફળ = $\frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(ii) શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\pi\,(r_1 + r_2)\,l$

જ્યાં $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

(iii) શંકુના આડછેદની કુલસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

જ્યાં $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

આ સૂત્રો ત્રિકોણની સમરૂપતાના ખ્યાલ પરથી મેળવી શકાય પરંતુ આપણે તેને અહીં તારવીશું નહિ.

ચાલો, આપણે ઉદાહરણ 12 ને સૂત્રોના ઉપયોગથી ગણીશું.

(i) શંકુના આડછેદનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 45\,[(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)]$ સેમી^{3}

= 48510 સેમી^{3}

(ii) આપણી પાસે $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$= \sqrt{(45)^2 + (28-7)^2}$ સેમી

$= 3\sqrt{(15)^2+(7)^2}$ સેમી

$= 49.65$ સેમી

તેથી શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi\,(r_1 + r_2)\,l$

$= \frac{22}{7}\,(28 + 7)\,(49.65)$

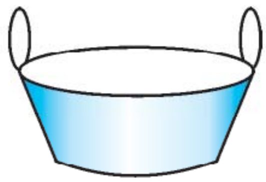
$= 5461.5$ સેમી^{2}

(iii) શંકુના આડછેદની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi\,(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= [5461.5 + \frac{22}{7}\,(28)^2 + \frac{22}{7}\,(7)^2]$ સેમી^{2}

$= 8079.5$ સેમી^{2}

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોમાં આ સૂત્રોનો ઉપયોગ કરીએ.



આકૃતિ 13.22

ઉદાહરણ 13 : હનુમપ્પા અને તેની પત્ની ગંગામ્મા શેરડીના રસમાંથી ગોળ બનાવે છે. તેમણે શેરડીના રસને ગરમ કરી રાબ બનાવેલી છે. તેને શંકુના આડછેદ આકારના નમૂનામાં નાખવામાં આવી છે. તેમાં અનુકૂળ બે વર્તુળાકાર સપાટીના વ્યાસ 30 સેમી અને 35 સેમી અને નમૂનાની શિરોલંબ ઊંચાઈ 14 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.22) જો 1 સેમી^{3} રાબનું દળ 1.2 ગ્રામ હોય, તો પ્રત્યેક નમૂનામાં ભરી શકાય તેટલી રાબનું દ્રવ્યમાન શોધો. $(\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ : આપેલ નમૂનાનો આકાર શંકુના આડછેદ જેવો છે. તેથી તેમાં ભરી શકાય તેટલી

રાબનું ઘનફળ $= \frac{\pi}{3} h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

જ્યાં r_1 મોટા પાયાની ત્રિજ્યા અને r_2 એ નાના પાયાની ત્રિજ્યા છે.

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2}\right)\right]$ સેમી^{3}

$= 11641.7$ સેમી^{3}

અહીં આપેલ છે કે, 1 સેમી^{3} રાબનું દ્રવ્યમાન 1.2 ગ્રામ છે,

તેથી, પ્રત્યેક નમૂનામાં ભરેલી રાબનું દ્રવ્યમાન $= (11641.7 \times 1.2)$ ગ્રામ

$= 13970.04$ ગ્રામ

$= 13.97$ કિલોગ્રામ

$= 14$ કિલોગ્રામ (લગભગ)

ઉદાહરણ 14 : એક ધાતુની ખુલ્લી ડોલ શંકુના આડછેદના આકારની છે, અને તે એક ધાતુના ખુલ્લા નળાકારના આધાર પર છે. (જુઓ આકૃતિ 13.23) આ ડોલના બંને વર્તુળાકાર છેડાના વ્યાસ 45 સેમી અને 25 સેમી છે અને ડોલની કુલ શિરોલંબ ઊંચાઈ 40 સેમી છે. ખુલ્લી ડોલના પાયાના નળાકારની ઊંચાઈ 6 સેમી છે. આ ડોલ બનાવવા માટે કેટલા ક્ષેત્રફળવાળી ધાતુની શીટ જોઈએ તે શોધો. ડોલના હૅન્ડલની ગણતરી કરવામાં આવી નથી તથા તે ડોલમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ કેટલું હશે તે પણ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

આકૃતિ 13.23

ઉકેલ : ડોલની કુલ ઊંચાઈ 40 સેમી છે. તેમાં પાયાની ઊંચાઈનો સમાવેશ થાય છે. તેથી શંકુના આડછેદની ઊંચાઈ (40 –6) સેમી = 34 સેમી છે.

તેથી, શંકુના આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ $l = \sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

જ્યાં $r_1 = 22.5$ સેમી, $r_2 = 12.5$ સેમી અને $h = 34$ સેમી.

તેથી, $l = \sqrt{(34)^2+(22.5-12.5)^2}$ સેમી

$= \sqrt{(34)^2+(10)^2}$ સેમી

$= 35.44$ સેમી

અહીં વપરાયેલ ધાતુની શીટનું ક્ષેત્રફળ = શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + આડછેદના વર્તુળાકાર પાયાનું ક્ષેત્રફળ

+ નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= [\pi \times 35.44\,(22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\pi \times 12.5 \times 6]$ સેમી^{2}

$= \frac{22}{7}\,[1240.4 + 156.25 + 150]$ સેમી^{2}

$= 4860.9$ સેમી^{2}

હવે, ડોલમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ (જેને ડોલની ક્ષમતા પણ કહે છે.)

$= \frac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5]$ સેમી^{3}

$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75$

$= 33615.48$ સેમી^{3}

$= 33.62$ લિટર (લગભગ)

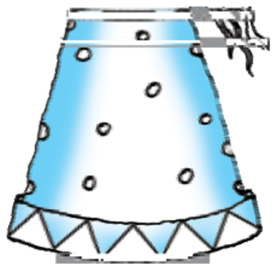
સ્વાધ્યાય 13.4

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

1. 14 સેમી ઊંચાઈવાળા પીવાના પાણીનો પ્યાલો શંકુના આડછેદના આકારનો છે. બંને વર્તુળાકાર છેડાના વ્યાસ 4 સેમી અને 2 સેમી હોય, તો આ પ્યાલાની ક્ષમતા શોધો.

2. એક શંકુના આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ 4 સેમી છે તથા તેના વર્તુળાકાર છેડાની પરિમિતિ (પરિઘ) 18 સેમી અને 6 સેમી છે. તો શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. એક તુર્કી ટોપીનો આકાર શંકુના આડછેદ જેવો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.24.) જો તેની ખુલ્લી બાજુની ત્રિજ્યા 10 સેમી અને ઉપરની બાજુના વર્તુળની ત્રિજ્યા 4 સેમી હોય અને તિર્યક ઊંચાઈ 15 સેમી હોય, તો તેને બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 13.24

4. એક વાસણ એક ધાતુની શીટમાંથી બનાવવામાં આવ્યું છે. તે ઉપરથી ખુલ્લું છે અને શંકુના આડછેદ જેવા આકારનું છે. તેની ઊંચાઈ 16 સેમી તથા બંને અંત્ય વર્તુળોની નીચેની અને ઉપરની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 8 સેમી અને 20 સેમી છે. દૂધથી સંપૂર્ણ ભરેલા વાસણમાં ₹ 20 પ્રતિ લિટર કિંમતવાળા આ વાસણમાં સમાઈ શકતા દૂધની કિંમત શોધો. આ વાસણ બનાવવા માટે વપરાયેલ ધાતુની શીટની કિંમત ₹ 8 પ્રતિ 100 સેમી^{2} ના દરે શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

5. ધાતુના લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 20 સેમી તથા શિરઃકોણ 60° છે. પાયાને સમાંતર સમતલથી તેના ઊંચાઈના બે સમાન ભાગ થાય તે રીતે કાપવામાં આવ્યો છે. જો આડછેદનું $\frac{1}{16}$ સેમી વ્યાસવાળા તાર સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરવામાં આવે તો તારની લંબાઈ શોધો.

સ્વાધ્યાય 13.5 (વૈકલ્પિક)*

1. 3 મિમી વ્યાસવાળા તાંબાના તારને 12 સેમી ઊંચાઈ અને 10 સેમી વ્યાસવાળા નળાકાર પર એવી રીતે વીંટવામાં આવે છે કે નળાકારની વક્રસપાટી સંપૂર્ણપણે ઢંકાઈ જાય છે. તો તારની લંબાઈ અને દળ શોધો. તાંબાની ઘનતા 8.88 ગ્રામ/સેમી^{3} સ્વીકારવામાં આવી છે.

2. એક કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ 3 સેમી અને 4 સેમી (કર્ણ સિવાયની બાજુઓ) છે. તેને તેના કર્ણ આસપાસ પરિભ્રમણ કરાવવામાં આવે છે. તેનાથી પ્રાપ્ત થતા બે શંકુનું ઘનફળ અને તેમની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π ની કિંમત તમને અનુકૂળ પસંદ કરો.)

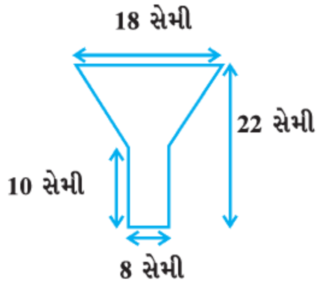
3. એક ટાંકીનાં આંતરિક માપ 150 સેમી × 120 સેમી × 110 સેમી છે. તેમાં 129600 સેમી^{3} પાણી છે. ટાંકી પૂરેપૂરી ભરાય ન જાય ત્યાં સુધી તે પાણીમાં છિદ્રવાળી ઈંટો નાખવામાં આવે છે. પ્રત્યેક ઈંટ તેના $\frac{1}{17}$ ઘનફળ જેટલું પાણી શોષી લે છે. પ્રત્યેક ઈંટનું માપ 22.5 સેમી × 7.5 સેમી × 6.5 સેમી છે, તો પાણી બહાર ન આવે તે રીતે તે ટાંકીમાં કેટલી ઈંટો નાખી શકાય ?

4. આપેલા મહિનાના કોઈ એક પખવાડિયામાં એક નદીની ઘાટીમાં 10 સેમી વરસાદ પડ્યો છે. જો તે ઘાટીનું

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.

ક્ષેત્રફળ 97280 કિમી^{2} હદ્વોય, તો બતાવો કે, કુલ વરસાદ લગભગ ત્રણ નદીઓના સામાન્ય પાણીના સરવાળા બરાબર હતો. પ્રત્યેક નદી 1072 કિમી લાંબી, 75 મીટર પહોળી અને 3 મીટર ઊંડી છે.

5. પતરાની એક ચીમની 10 સેમી લાંબા નળાકારના છેડે શંકુના આડછેદથી બનેલી છે. જો તેની કુલ ઊંચાઈ 22 સેમી હોય તથા નળાકાર ભાગનો વ્યાસ 8 સેમી અને ચીમનીના ઉપરના ભાગનો વ્યાસ 18 સેમી હોય, તો ચીમની બનાવવામાં વપરાતા પતરાનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 13.25.)



આકૃતિ 13.25

6. વિભાગ 13.5 માં આપવામાં આવેલા સંકેતોની મદદથી શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળનું સૂત્ર તારવો.

7. વિભાગ 13.5 માં આપેલા સંકેતોની મદદથી શંકુના આડછેદનું ઘનફળ શોધવાનું સૂત્ર તારવો.

13.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. બે જાણીતા પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોલક અને અર્ધગોલકના સંયોજનથી બનતા પદાર્થનું પૃષ્ઠફળ શોધવું.

2. કોઈપણ બે પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોલક અને અર્ધગોલકના સંયોજનથી બનતા પદાર્થનું ઘનફળ શોધવું.

3. આપેલા શંકુના પાયાને સમાંતર સમતલ દ્વારા કાપીએ તથા સમતલની એક બાજુના શંકુને દૂર કરવાથી મળતા ઘનાકારને શંકુનો આડછેદ કહેવાય છે.

4. શંકુના આડછેદ સંબંધી સૂત્રો નીચે પ્રમાણે છે :

(i) શંકુના આડછેદનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(ii) શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીના પૃષ્ઠફળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi l\,(r_1 + r_2)$

જ્યાં $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

(iii) શંકુના આડછેદનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

ઉપરના સૂત્રોમાં h = આડછેદની ઊંચાઈ, l = આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ તથા શંકુના આડછેદના બંને છેડાની ત્રિજ્યાઓ r_1 અને r_2 છે.

J3A5S1

આંકડાશાસ્ત્ર 14

D7Y3M4

14.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ધોરણ IX ના અભ્યાસમાં આપેલ માહિતીનું અવર્ગીકૃત તેમજ વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણોમાં વર્ગીકરણ કરવાનો અભ્યાસ કર્યો છે. તમે માહિતીને વિવિધ સચિત્ર આલેખો જેવા કે, લંબાલેખો, સ્તંભાલેખો (જેમની પહોળાઈ બદલાતી હોય તેવા સ્તંભાલેખો સહિત) અને આવૃત્તિ બહુકોણોને ચિત્રાત્મક રીતે દર્શાવવાનો અભ્યાસ પણ કર્યો છે. વાસ્તવમાં, તમે અવર્ગીકૃત માહિતીના સંખ્યાત્મક પ્રતિનિધિ સ્વરૂપે **મધ્યક (mean), મધ્યસ્થ (median)** અને **બહુલક (mode)** જેવા મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપોનો અભ્યાસ કરીને એક ડગલું આગળ વધ્યા હતા. આ પ્રકરણમાં આપણે આ માપો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકનો અભ્યાસ અવર્ગીકૃત માહિતી પરથી વર્ગીકૃત માહિતી સુધી વિસ્તૃત કરીશું. આપણે સંચયી આવૃત્તિ અને સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણની સંકલ્પનાની પણ ચર્ચા કરીશું. વળી, **સંચયી આવૃત્તિ વક્રો (Ogives)** કેવી રીતે દોરવા, તે શીખીશું.

14.2 વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક

R2C4K1

આપણે જાણીએ છીએ તેમ અવલોકનોનો મધ્યક એ તમામ અવલોકનોના સરવાળાનું અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગફળ છે. ધોરણ IX ના અભ્યાસમાંથી, યાદ કરો કે, જો અવલોકનો $x_1, x_2, \ldots, x_n$ હોય અને તેમને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ હોય, તો એનો અર્થ, અવલોકન x_1 એ f_1 વખત આવે છે, x_2 એ f_2 વખત આવે છે અને આ જ રીતે આગળ પણ અર્થઘટન કરી શકાય.

હવે, તમામ અવલોકનોનો સરવાળો $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$ અને

અવલોકનોની સંખ્યા $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$

તેથી, માહિતીનો મધ્યક $\overline{x}$, નીચેના સૂત્રથી આપવામાં આવે છે :

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

યાદ કરો કે, જેનો અર્થ સરવાળો છે તેવા ગ્રીક અક્ષર Σ (sigma)નો ઉપયોગ કરીને આપણે આ સૂત્રને સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં લખી શકીએ. એટલે કે,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

જો એ સ્પષ્ટ હોય કે, i એ 1 થી n સુધી કિંમતો લે છે, તો આ સૂત્રને સંક્ષિપ્તમાં, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ તરીકે પણ લખી શકાય.

ચાલો, આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ નીચેના ઉદાહરણમાં મધ્યક શોધવા માટે કરીએ :

ઉદાહરણ 1 : એક શાળામાં ધોરણ X ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતના 100 ગુણના પ્રશ્નપત્રમાં મેળવેલા ગુણ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલા છે. વિદ્યાર્થીએ મેળવેલા ગુણનો મધ્યક શોધો :

મેળવેલ ગુણ (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

ઉકેલ : યાદ કરો કે, ગુણનો મધ્યક શોધવા માટે, આપણને પ્રત્યેક x_i ના તેને અનુરુપ આવૃત્તિ f_i સાથેના ગુણાકારની આવશ્યક્તા છે. તેથી, ચાલો, આપણે કોષ્ટક 14.1માં બતાવ્યા પ્રમાણે તે સંખ્યાઓને સ્તંભમાં મૂકીએ.

કોષ્ટક 14.1

મેળવેલ ગુણ (x_i)	**વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)**	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
કુલ	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

હવે, $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

તેથી, મેળવેલ ગુણનો મધ્યક 59.3 છે.

આપણા જીવનની મોટા ભાગની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિઓમાં, નિયમિત માહિતી એટલી વિશાળ હોય છે કે, તેના અર્થપૂર્ણ અભ્યાસ માટે વર્ગીકૃત માહિતીનું સંક્ષેપન અનિવાર્ય હોય છે. તેથી, આપેલ અવર્ગીકૃત માહિતીને વર્ગીકૃત માહિતીમાં પરિવર્તિત કરવાની આવશ્યકતા રહે છે અને તેનો મધ્યક શોધવા માટે કોઈક રીતની પ્રાપ્તિ આવશ્યક છે.

ચાલો, આપણે ઉદાહરણ 1ની અવર્ગીકૃત માહિતીને વર્ગીકૃત માહિતીમાં પરિવર્તિત કરીએ. તે માટે વર્ગ-અંતરાલોની લંબાઈ, કહો કે 15 ની લઈએ. યાદ રાખો, પ્રત્યેક વર્ગ-અંતરાલને આવૃત્તિની ફાળવણી કરતી વખતે, વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કોઈ પણ ઊર્ધ્વ વર્ગ-સીમા જેટલી હોય, તો તેમને તે પછીના વર્ગમાં ગણવામાં આવશે. ઉદાહરણ તરીકે, જે 4 વિદ્યાર્થીઓએ 40 ગુણ મેળવ્યા છે, તે 4 વિદ્યાર્થીઓને વર્ગ-અંતરાલ 40-55 માં ગણવામાં આવશે અને 25-40 માં નહિ. હવે આપણે આ રૂઢિ ધ્યાનમાં રાખીને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણનું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ. (જુઓ કોષ્ટક 14.2.)

કોષ્ટક 14.2

વર્ગ-અંતરાલ	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	7	6	6	6

હવે, પ્રત્યેક વર્ગ-અંતરાલ માટે, જેને સમગ્ર વર્ગના પ્રતિનિધિ તરીકે ઉપયોગમાં લઈ શકાય એવી એક સંખ્યાની આપણને જરૂર છે. આપણે એવું માની લઈએ છીએ કે, ***દરેક વર્ગ-અંતરાલની આવૃત્તિ તેની મધ્યકિંમતની આસપાસ કેન્દ્રિત થાય છે.*** તેથી, પ્રત્યેક વર્ગની મધ્યકિંમતને વર્ગમાં આવતાં અવલોકનોને દર્શાવવા માટે પસંદ કરી શકાય. યાદ કરો કે, આપણે વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અને અધઃસીમાની સરેરાશ શોધીને તે વર્ગની મધ્યકિંમત શોધીએ છીએ એટલે કે,

$$\text{કોઈપણ વર્ગની મધ્યકિંમત} = \frac{\text{તે જ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા} + \text{તે જ વર્ગની અધઃસીમા}}{2}$$

કોષ્ટક 14.2ના સંદર્ભમાં વર્ગ 10-25 માટે, મધ્યકિંમત $\frac{10+25}{2}$, એટલે કે, 17.5 છે. આ જ પ્રમાણે, બાકીના વર્ગ-અંતરાલો માટે આપણે મધ્યકિંમત શોધી શકીએ. આપણે તેમને કોષ્ટક 14.3 માં મૂકીએ. આ મધ્યકિંમત આપણા માટે x_i જેવું કાર્ય કરે છે. હવે, વ્યાપક રીતે, i માં વર્ગ-અંતરાલ માટે, આપણી પાસે મધ્યકિંમત x_i ને અનુરુપ આવૃત્તિ f_i છે. હવે, આપણે મધ્યકની ગણતરી, ઉદાહરણ 1 ની રીતે જ કરીએ.

કોષ્ટક 14.3

વર્ગ-અંતરાલ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
કુલ	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

છેલ્લા સ્તંભની કિંમતોનો સરવાળો આપણને $\Sigma f_i x_i$ આપે છે. તેથી, આપેલ માહિતીનો મધ્યક $\overline{x}$, નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે મળે છે :

$$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

મધ્યક શોધવાની આ નવી રીત **પ્રત્યક્ષ રીત** તરીકે ઓળખાય છે.

આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે કોષ્ટક 14.1 અને 14.3 માં મધ્યકની ગણતરી માટે એક જ માહિતીનો ઉપયોગ કરી રહ્યા છીએ અને ગણતરી માટે સમાન સૂત્રને લાગુ કરીએ છીએ. પરંતુ મળતાં પરિણામો ભિન્ન છે. આપ કલ્પી શકશો કે, આવું કેમ બને છે અને કયું પરિણામ વધારે ચોક્કસ છે? બે કિંમતોમાં તફાવત, એ કોષ્ટક 14.3 માં મધ્યકિંમતની ધારણાને કારણે છે. 59.3 એ સાચો મધ્યક છે, જ્યારે 62 એ આસન્ન (અંદાજિત) મધ્યક છે.

કેટલીક વાર જ્યારે x_i અને f_i નાં સંખ્યાત્મક મૂલ્યો મોટાં હોય, ત્યારે x_i અને f_i નો ગુણાકાર શોધવાનું કંટાળાજનક થઈ જાય છે અને વધુ સમય માંગી લે છે. તેથી ચાલો, આ પ્રકારની પરિસ્થિતિમાં આપણે ગણતરીની સરળ રીતનો વિચાર કરીએ.

આપણે f_i ને કશું જ કરી શકતાં નથી, પરંતુ આપણી ગણતરી સરળ બને તે રીતે આપણે પ્રત્યેક x_i ને નાની સંખ્યામાં પરિવર્તિત કરી શકીએ, જેથી આપણી ગણતરી સરળ બને. આ આપણે કેવી રીતે કરી શકીશું? આ પ્રત્યેક x_i માંથી નિયત સંખ્યાને બાદ કરવા અંગે વિચારી શકીએ. ચાલો, આપણે આ રીતનો પ્રયત્ન કરીએ.

પ્રથમ પગલું એ છે કે, બધાં x_i માંથી એકને ***ધારી લીધેલ મધ્યક*** તરીકે પસંદ કરો અને તેને 'a' વડે દર્શાવો. વળી, આગળ ઉપર આપણું ગણતરીનું કાર્ય ઓછું કરવા, આપણે 'a' ને જે $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ની મધ્યે રહેલો હોય એવો x_i લઈ શકીએ. તેથી, આપણે $a = 47.5$ અથવા $a = 62.5$ પસંદ કરી શકીએ. ચાલો, આપણે $a = 47.5$ પસંદ કરીએ.

(આ જરૂરી નથી. a કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોઈ શકે. આ માત્ર અનુકૂળતા માટે છે.)

પછીનું પગલું છે, a અને પ્રત્યેક x_i વચ્ચેનો તફાવત d_i શોધવાનું એટલે કે, પ્રત્યેક x_i થી a નું વિચલન શોધવાનું.

અર્થાત્, $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

ત્રીજું પગલું છે, d_i નો અનુરૂપ f_i સાથેનો ગુણાકાર શોધવાનો અને તમામ $f_i d_i$ નો સરવાળો કરવાનો છે. આ ગણતરીઓ કોષ્ટક 14.4 માં દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 14.4

વર્ગ-અંતરાલ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5 = a	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
કુલ	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

તેથી, કોષ્ટક 14.4 પરથી, વિચલનોનો મધ્યક, $\overline{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$.

હવે ચાલો, આપણે $\overline{d}$ અને $\overline{x}$ વચ્ચેનો સંબંધ શોધીએ. d_i મેળવવા માટે, આપણે પ્રત્યેક x_i માંથી 'a' ની બાદબાકી કરી છે. તેથી, $\overline{x}$ મેળવવા માટે, આપણને $\overline{d}$ માં 'a' ઉમેરવાની જરૂર છે. આ હકીકત, ગાણિતિક રીતે નીચે પ્રમાણે વર્ણવી શકાય :

વિચલનનો મધ્યક, $\overline{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

તેથી, $$\overline{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \overline{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \overline{x} - a$$

તેથી, $\overline{x} = a + \overline{d}$

એટલે કે, $$\overline{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

a, $\Sigma f_i d_i$ અને Σf_i ની કિંમતો કોષ્ટક 14.4 માંથી મૂકતાં, આપણને

$\overline{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$ મળે છે. આમ, વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા મેળવેલા ગુણનો મધ્યક 62 છે.

ઉપર્યુક્ત વર્ણવેલ રીતને **ધારી લીધેલ મધ્યકની રીત (*Assumed Mean Method*)** કહે છે.

પ્રવૃત્તિ 1 : કોષ્ટક 14.3 પરથી પ્રત્યેક x_i (એટલે કે, 17.5, 32.5, અને આમ આગળ)ને 'a' તરીકે લઈને મધ્યક શોધો. તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો? તમે જોઈ શકશો કે, પ્રત્યેક કિસ્સામાં પ્રાપ્ત થતો મધ્યક એક જ (સમાન) છે, એટલે કે, 62. (કેમ?)

નોંધ : ખરેખર તો 'a' તરીકે કોઈ પણ અનુકૂળ સંખ્યા લઈ શકાય. તેથી, આપણે કહી શકીએ કે મેળવેલા મધ્યકની કિંમત, 'a' ની પસંદગી પર આધારિત નથી.

કોષ્ટક 14.4 માં નિરીક્ષણ કરો કે, સ્તંભ 4 ની બધી જ કિંમતો 15 ની ગુણક છે. તેથી જો આપણે આખા સ્તંભ 4 ની બધી જ કિંમતોનો 15 વડે ભાગાકાર કરીએ, તો આપણે f_i સાથે ગુણાકાર કરવા માટે નાની સંખ્યાઓ પ્રાપ્ત કરી શકીએ. (અહીં દરેક વર્ગઅંતરાલની વર્ગલંબાઈ 15 છે.)

તેથી, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ લો. અહીં a ધારી લીધેલ મધ્યક અને h એ વર્ગલંબાઈ છે.

હવે, આપણે આ પ્રમાણે u_i ની ગણતરી કરીએ અને ગણતરી આગળ પ્રમાણે ચાલુ રાખીએ (એટલે કે, f_iu_i શોધીએ અને પછી Σf_iu_i). ચાલો આપણે $h = 15$ લઈને કોષ્ટક 14.5 રચીએ.

કોષ્ટક 14.5

વર્ગ-અંતરાલ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	f_iu_i
10 - 25	2	17.5	– 30	–2	– 4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	– 3
40 - 55	7	47.5=a	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_iu_i = 29$

$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_iu_i}{\Sigma f_i} \text{ લો.}$$

અહીં, ચાલો આપણે ફરીથી $\bar{u}$ અને $\bar{x}$ વચ્ચેનો સંબંધ શોધીએ.

આપણી પાસે, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ છે.

તેથી,
$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_ix_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\bar{x} - a\right]$$

તેથી,
$$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

એટલે કે $\bar{x} = a + h\bar{u}$

તેથી, $\bar{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

હવે, a, h, $\Sigma f_i u_i$ અને Σf_i નાં મૂલ્યો કોષ્ટક 14.5 માંથી મૂકતાં, આપણને

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$= 47.5 + 14.5 = 62$ મળે છે.

તેથી, વિદ્યાર્થી દ્વારા મેળવેલ ગુણનો મધ્યક 62 છે.

ઉપર્યુક્ત દર્શાવેલ રીતને ***પદ-વિચલનની રીત (Step-deviation method)*** કહેવાય છે.

આપણે નોંધ કરીએ :

- જો તમામ d_i માં સામાન્ય અવયવ હોય તો પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ અનુકૂળ રહેશે.
- ત્રણે ય રીતો દ્વારા મેળવેલ તમામ મધ્યક સમાન છે.
- ધારી લીધેલ મધ્યકની રીત અને પદ-વિચલનની રીત એ પ્રત્યક્ષ રીતનાં સહેલાઈથી સમજાય એવાં સ્વરૂપો માત્ર છે.
- જો a અને h ઉપર પ્રમાણે આપેલ ન હોય, પરંતુ, તે કોઈ પણ શૂન્યેતર સંખ્યાઓ હોય કે જેથી, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ હોય, તો પણ સૂત્ર $\bar{x} = a + h\bar{u}$ સત્ય રહે છે.

ચાલો, આપણે આ રીતનો અન્ય ઉદાહરણમાં ઉપયોગ કરીએ.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ કોષ્ટક, ભારતનાં કેટલાંક રાજ્યોનાં ગ્રામીણ વિસ્તારો અને કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશો (Union Territories) ની પ્રાથમિક શાળાઓમાં સ્ત્રી શિક્ષકોનું ટકાવાર વિતરણ આપે છે. આ વિભાગમાં વર્ણવેલ ત્રણે ય રીતો દ્વારા સ્ત્રી શિક્ષકોની સંખ્યાનો મધ્યક ટકામાં શોધો.

સ્ત્રી શિક્ષકોની ટકાવારી	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
રાજ્યો/કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા	6	11	7	4	4	2	1

સ્ત્રોત : *NCERT દ્વારા હાથ ધરાયેલ સાતમું ઑલ ઇન્ડિયા શાળાશિક્ષણ સર્વેક્ષણ*

ઉકેલ : ચાલો, આપણે પ્રત્યેક વર્ગ માટે મધ્યકિંમત x_i શોધીએ, અને તેને સ્તંભમાં મૂકીએ. (જુઓ કોષ્ટક 14.6.)

કોષ્ટક 14.6

સ્ત્રી શિક્ષકોની ટકાવારી	રાજ્યો/કેન્દ્રશાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા (f_i)	x_i
15-25	6	20
25-35	11	30
35-45	7	40
45-55	4	50
55-65	4	60
65-75	2	70
75-85	1	80

અહીં આપણે $a = 50$ તથા $h = 10$ લઈએ. આથી $d_i = x_i - 50$ અને $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ થશે. હવે, આપણે d_i અને u_i શોધીએ અને તેમને કોષ્ટક 14.7 માં મૂકીએ.

કોષ્ટક 14.7

સ્ત્રી શિક્ષકોની ટકાવારી	રાજ્યો/કે.શા. પ્રદેશોની સંખ્યા (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	– 30	– 3	120	– 180	– 18
25 - 35	11	30	– 20	– 2	330	– 220	– 22
35 - 45	7	40	– 10	– 1	280	– 70	– 7
45 - 55	4	$50 = a$	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
કુલ	$\Sigma f_i = 35$				**1390**	**– 360**	$\Sigma f_i u_i = -36$

ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણને $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_i x_i = 1390$ મળે. $\Sigma f_i d_i = -360$, $\Sigma f_i u_i = -36$ મળે છે.

પ્રત્યક્ષ રીતનો ઉપયોગ કરતાં, $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ધારી લીધેલ મધ્યકની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\overline{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\overline{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

તેથી, ગ્રામીણ વિસ્તારોની પ્રાથમિક શાળાઓમાં સ્ત્રી શિક્ષકોની ટકાવારીનો મધ્યક 39.71 છે.

નોંધ : ત્રણે રીતો દ્વારા મેળવેલ તમામ પરિણામ સમાન છે. તેથી ઉપયોગમાં લેવાની રીતની પસંદગી સંખ્યાત્મક કિંમતો x_i અને f_i પર આધારિત છે. જો x_i અને f_i ની કિંમતો પર્યાપ્ત રીતે નાની હોય, તો પ્રત્યક્ષ રીત યોગ્ય પસંદગી છે. જો x_i અને f_i સંખ્યાત્મક રીતે મોટી સંખ્યાઓ હોય, તો આપણે ધારી લીધેલ મધ્યકની રીત અથવા પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ. જો વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય અને x_i સંખ્યાત્મક રીતે મોટી સંખ્યાઓ હોય, તો તેવા સંજોગોમાં તમામ h ને d_i ના યોગ્ય ભાજક તરીકે લઈને પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ વિતરણ એક-દિવસીય ક્રિકેટ મૅચોમાં બૉલરો દ્વારા લેવાયેલી વિકેટોની સંખ્યા બતાવે છે. યોગ્ય રીત પસંદ કરીને વિકેટોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો. મધ્યક શું સૂચવે છે ?

વિકેટોની સંખ્યા	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
બૉલરોની સંખ્યા	7	5	16	12	2	3

ઉકેલ : અહીં, વર્ગલંબાઈ અચળ નથી અને x_i મોટા છે. ચાલો આપણે અહીં પણ $a = 200$ અને $h = 20$ લઈને પદ-વિચલનની રીતનો ઉપયોગ કરીએ. આપણને કોષ્ટક 14.8 દર્શાવ્યા પ્રમાણેની માહિતી મળે છે.

કોષ્ટક 14.8

લીધેલ વિકેટોની સંખ્યા	**બૉલરોની સંખ્યા (f_i)**	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$f_i u_i$
20 - 60	7	40	– 160	– 8	– 56
60 - 100	5	80	– 120	– 6	– 30
100 - 150	16	125	– 75	– 3.75	– 60
150 - 250	12	$a = 200$	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
કુલ	$\Sigma f_i = 45$				$\Sigma f_i u_i = -106$

તેથી, $\overline{u} = \frac{-106}{45}$. આને કારણે, $\overline{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

આ માહિતી આપણને કહે છે કે, આ 45 બૉલરો દ્વારા એક દિવસીય ક્રિકેટમાં, સરેરાશ 152.89 વિકેટો લેવામાં આવી છે.

હવે, આપણે જોઈએ કે, આ વિભાગમાં જેની ચર્ચા કરેલ તે સંકલ્પનાનો તમે કેટલી સારી રીતે ઉપયોગ કરી શકો છો !

પ્રવૃત્તિ 2 :

તમારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને ત્રણ સમૂહમાં વિભાજિત કરો અને પ્રત્યેક સમૂહને કહો કે, નીચે આપેલ પ્રવૃત્તિઓમાંથી કોઈ એક પ્રવૃત્તિ કરે.

1. તમારી શાળાએ તાજેતરમાં લીધેલ પરીક્ષામાં તમારા વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતમાં મેળવેલા ગુણ પ્રાપ્ત કરે. મેળવેલ માહિતી પરથી વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરે.
2. તમારા શહેરમાં 30 દિવસોના ગાળા દરમિયાન દરરોજ નોંધાયેલ મહત્તમ તાપમાન મેળવે. આ માહિતીને વર્ગીકૃત આવૃત્તિકોષ્ટકના રૂપમાં પ્રસ્તુત કરે.
3. તમારા વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) માપે અને આ માહિતીનું વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક રચે.

તમામ સમૂહો દ્વારા માહિતી એકઠી થાય અને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકોની રચના થાય તે પછી, સમૂહો માટે યોગ્ય લાગે તે રીતનો ઉપયોગ કરીને પ્રત્યેક કિસ્સામાં મધ્યક શોધો.

સ્વાધ્યાય 14.1

1. વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહ દ્વારા તેમના પર્યાવરણ જાગૃતિ કાર્યક્રમના ભાગરૂપે એક સર્વેક્ષણ હાથ ધરવામાં આવ્યું. તેમાં તેમણે એક વિસ્તારનાં 20 ઘરોમાં વનસ્પતિના છોડની સંખ્યા વિશે નીચેની માહિતી એકઠી કરી. ઘર દીઠ છોડની સંખ્યાઓનો મધ્યક શોધો.

છોડની સંખ્યા	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
ઘરોની સંખ્યા	1	2	1	5	6	2	3

મધ્યક શોધવા માટે કઈ રીતનો ઉપયોગ કરશો ? શા માટે ?

2. એક ફેક્ટરીમાં 50 કારીગરોના દૈનિક વેતનના નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણનો વિચાર કરો :

દૈનિક વેતન (₹ માં)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
કારીગરોની સંખ્યા	12	14	08	06	10

યોગ્ય રીતનો ઉપયોગ કરીને કારખાનાના કારીગરોના દૈનિક વેતનનો મધ્યક શોધો.

3. નીચેનું આવૃત્તિ વિતરણ વસ્તીનાં બાળકોનું દૈનિક ખિસ્સાભથ્થું દર્શાવે છે. ખિસ્સાભથ્થાનો મધ્યક ₹ 18 છે. ખૂટતી આવૃત્તિ f શોધો.

દૈનિક ખિસ્સાભથ્થું (₹ માં)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
બાળકોની સંખ્યા	7	6	9	13	f	5	4

4. એક હૉસ્પિટલમાં દાક્તરે ત્રીસ મહિલાઓની શારીરિક તપાસ કરી અને પ્રતિ મિનિટ હૃદયના ધબકારાની નોંધ કરી તથા નીચે પ્રમાણે સારાંશ તૈયાર કર્યો. યોગ્ય રીત પસંદ કરીને, આ મહિલાઓના પ્રતિ મિનિટ હૃદયના ધબકારાનો મધ્યક શોધો.

પ્રતિ મિનિટ હૃદયના ધબકારાની સંખ્યા	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
મહિલાઓની સંખ્યા	2	4	3	8	7	4	2

5. એક છૂટક વેચાણ બજારમાં, ફળ વેચનારાઓ બંધ ખોખાંઓમાં કેરીઓ વેચી રહ્યા હતા. આ ખોખાંઓમાં કેરીઓ જુદી-જુદી સંખ્યાઓમાં હતી. ખોખાંઓની સંખ્યાના પ્રમાણમાં કેરીઓનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે પ્રમાણે હતું :

કેરીઓની સંખ્યા	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
ખોખાંઓની સંખ્યા	15	110	135	115	25

બંધ ખોખામાં મૂકેલ કેરીઓની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો. મધ્યક શોધવા માટે તમે કઈ રીત પસંદ કરી હતી ?

6. નીચેનું કોષ્ટક એક વિસ્તારમાં 25 પરિવારના ખોરાકનો દૈનિક ઘરગથ્થું ખર્ચ બતાવે છે :

દૈનિક ખર્ચ (₹ માં)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
પરિવારોની સંખ્યા	4	5	12	2	2

પરિવારના ખોરાક પરના દૈનિક ઘરગથ્થું ખર્ચનો મધ્યક યોગ્ય રીતનો ઉપયોગ કરીને શોધો.

7. એક ચોક્કસ શહેરમાં 30 વિસ્તારોમાં હવામાં SO_2 ની સાંદ્રતા (ઘટકો પ્રતિ દસ લાખમાં, એટલે કે, ppm માં) શોધવા માટે નીચે દર્શાવેલ માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવી હતી :

SO_2ની સાંદ્રતા (ppm માં)	આવૃત્તિ
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

હવામાં SO_2 ની સાંદ્રતાનો મધ્યક શોધો.

8. એક વર્ગની સમગ્ર સત્રની 40 વિદ્યાર્થીઓની ગેરહાજરીની યાદી વર્ગશિક્ષક પાસે છે. વિદ્યાર્થીઓની ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.

ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	11	10	7	4	4	3	1

9. નીચેનું કોષ્ટક 35 શહેરોમાં સાક્ષરતા દર (પ્રતિશતમાં) આપે છે. સાક્ષરતા દરનો મધ્યક શોધો.

સાક્ષરતા દર (ટકા માં)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
શહેરોની સંખ્યા	3	10	11	8	3

14.3 વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક

P6R5E5

યાદ કરો, ધોરણ IX માં અભ્યાસ દરમ્યાન આપેલ અવલોકનોમાં સૌથી વધુ વખત આવતું અવલોકન એ બહુલક છે તેમ તમે જોયું હતું. એટલે કે, જે અવલોકનની આવૃત્તિ મહત્તમ હોય તે બહુલક છે. વધુમાં, અવર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક શોધવાની રીતની આપણે ચર્ચા કરી હતી. અહીં, વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક મેળવવાની રીતો વિશે ચર્ચા કરીશું. એવું શક્ય છે કે, એક

કરતાં વધારે મૂલ્યને સમાન મહત્તમ આવૃત્તિ હોય. આવી પરિસ્થિતિઓમાં માહિતીને ***બહુ-બહુલક (multimodal)*** કહે છે. વર્ગીકૃત માહિતી બહુ-બહુલક માહિતી હોઈ શકે છે, છતાં આપણે આપણી જાતને જેમાં માત્ર એક બહુલક હોય તેવા કૂટપ્રશ્નો સુધી સીમિત રાખીશું.

ચાલો, આપણે નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા પહેલાં તો યાદ કરીએ કે આપણે કેવી રીતે અવર્ગીકૃત માહિતી માટે બહુલક શોધ્યો હતો.

ઉદાહરણ 4 : એક બૉલર દ્વારા 10 ક્રિકેટ મૅચોમાં નીચે પ્રમાણે વિકેટો લેવામાં આવી છે :

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ઉકેલ : ચાલો આપણે આપેલ માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે તૈયાર કરીએ :

વિકેટોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5	6
મૅચોની સંખ્યા	1	1	3	2	1	1	1

સ્પષ્ટ છે કે, સૌથી વધુ 3 મેચમાં 2 વિકેટ લીધી છે. તેથી આ માહિતીનો બહુલક 2 છે.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિની માહિતી જોતાં જ બહુલક શોધવો શક્ય નથી. અહીં, આપણે કેવળ મહત્તમ આવૃત્તિવાળા વર્ગને ઓળખી શકીએ. તેને ***બહુલક વર્ગ (modal class)*** કહેવાય છે. બહુલક એ બહુલક વર્ગમાં આવેલું એક મૂલ્ય છે, અને તે,

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

સૂત્ર દ્વારા આપવામાં આવે છે :

જ્યાં, l = બહુલક વર્ગની અધ:સીમા

h = વર્ગ અંતરાલની લંબાઈ (બધા વર્ગની લંબાઈ સમાન છે એમ માનીને)

f_1 = બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ

f_0 = બહુલક વર્ગની આગળના વર્ગની આવૃત્તિ

f_2 = બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ

આ સૂત્રના ઉપયોગની સમજૂતી માટે ચાલો આપણે નીચેનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહે એક વસ્તીમાં 20 પરિવારની સભ્યસંખ્યા પર સર્વેક્ષણ હાથ ધર્યો. તેનાથી પરિવારના સભ્યોની સંખ્યા માટે નીચેનું આવૃત્તિકોષ્ટક બન્યું.

પરિવારની સભ્યસંખ્યા	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
પરિવારોની સંખ્યા	7	8	2	2	1

આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, મહત્તમ વર્ગઆવૃત્તિ 8 છે. આ આવૃત્તિને અનુરૂપ વર્ગ 3 – 5 છે. તેથી બહુલક વર્ગ 3 – 5 છે.

હવે બહુલક વર્ગ 3 - 5 છે. બહુલક વર્ગની અધઃસીમા (l) = 3, વર્ગ લંબાઈ (h) = 2

બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ (f_1) = 8

બહુલક વર્ગની આગળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_0) = 7

બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_2) = 2

હવે, ચાલો આપણે આ કિંમતો બહુલક શોધવાના સૂત્રમાં મૂકીએ :

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

આમ, આપેલ માહિતીનો બહુલક 3.286 છે.

ઉદાહરણ 6 : ગણિતની પરીક્ષામાં 30 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું વિતરણ ઉદાહરણ 1 ના કોષ્ટક 14.3 માં આપેલ છે. આ માહિતીનો બહુલક શોધો. વળી, તેને મધ્યક સાથે સરખાવો તથા બહુલક અને મધ્યકનું અર્થઘટન કરો.

ઉકેલ : ઉદાહરણ 1ના કોષ્ટક 14.3ના સંદર્ભમાં, મહત્તમ સંખ્યામાં વિદ્યાર્થીઓએ (એટલે કે, 7) અંતરાલ 40-55 માં ગુણ મેળવ્યાં હોવાથી, બહુલક વર્ગ 40-55 છે. આને કારણે,

બહુલક વર્ગની અધઃસીમા (l) = 40

વર્ગલંબાઈ (h) = 15

બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ (f_1) = 7

બહુલક વર્ગની આગળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_0) = 3

બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_2) = 6

હવે, સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

આથી, બહુલક $= 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$

તેથી, પ્રાપ્ત ગુણનો બહુલક 52 છે.

હવે, ઉદાહરણ 1 પરથી, આપ જાણો છો કે, ગુણનો મધ્યક 62 છે. તેથી, મહત્તમ સંખ્યામાં વિદ્યાર્થીઓએ 52 ગુણ મેળવ્યા છે. જ્યારે, સરેરાશની દૃષ્ટિએ વિદ્યાર્થીઓ 62 ગુણ મેળવ્યા છે.

નોંધ :

1. ઉદાહરણ 6 માં બહુલક એ મધ્યક કરતાં નાનો છે. પરંતુ કેટલાક અન્ય પ્રશ્નો માટે તે મધ્યક જેટલો અથવા તેના કરતાં મોટો પણ હોઈ શકે.
2. આપણો રસ વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા સરેરાશ ગુણ શોધવામાં છે કે મોટા ભાગના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ શોધવામાં એ પરિસ્થિતિની જરૂરિયાત પર આધાર રાખે છે. પ્રથમ પરિસ્થિતિમાં મધ્યકની જરૂરિયાત છે અને બીજી પરિસ્થિતિમાં બહુલકની જરૂરિયાત છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : પ્રવૃત્તિ 2 માં રચેલા સમૂહો અને સમૂહોને સોંપેલી સ્થિતિઓ સાથે જ આગળ વધો. પ્રત્યેક સમૂહને માહિતીનો બહુલક શોધવાનું કહો. વળી, તેમણે બહુલકની સરખામણી મધ્યક સાથે કરવી જોઈએ અને બંનેનું અર્થઘટન કરવું જોઈએ.

નોંધ : અસમાન વર્ગલંબાઈવાળી વર્ગીકૃત માહિતી માટે પણ બહુલકની ગણતરી કરી શકાય. પરંતુ આપણે તેની ચર્ચા કરીશું નહિ.

સ્વાધ્યાય 14.2

1. નીચેનું કોષ્ટક એક વર્ષ દરમિયાન એક દવાખાનામાં દાખલ થયેલા દર્દીઓની ઉંમર દર્શાવે છે :

ઉંમર (વર્ષમાં)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
દર્દીઓની સંખ્યા	6	11	21	23	14	5

ઉપર આપેલ માહિતી માટે બહુલક અને મધ્યક શોધો. કેન્દ્રિય મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં આ બે માપોની સરખામણી અને અર્થઘટન કરો.

2. નીચેની માહિતી 225 વીજઉપકરણોના આયુષ્યની (કલાકોમાં) પ્રાપ્ત માહિતી દર્શાવે છે.

આયુષ્ય (કલાકોમાં)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
આવૃત્તિ	10	35	52	61	38	29

તો ઉપકરણોના આયુષ્યનો બહુલક નક્કી કરો.

3. નીચેની માહિતી એક ગામનાં 200 કુટુંબો માટે તેમના ઘર ચલાવવા માટે કુલ માસિક ખર્ચનું આવૃત્તિ વિતરણ દર્શાવે છે. કુટુંબોના માસિક ખર્ચનો બહુલક શોધો તથા કુટુંબોના માસિક ખર્ચનો મધ્યક શોધો :

માસિક ખર્ચ (₹ માં)	કુટુંબોની સંખ્યા
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. નીચેનું વિતરણ ભારતની ઉચ્ચતર માધ્યમિક શાળાઓમાં રાજ્યવાર શિક્ષક-વિદ્યાર્થી ગુણોત્તરનું આવૃત્તિ વિતરણ આપે છે. આ માહિતીનો બહુલક અને મધ્યક શોધો. આ બે માપનું અર્થઘટન કરો.

પ્રતિ શિક્ષક વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	રાજ્યો/કેન્દ્ર શાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ વિશ્વના કેટલાક શ્રેષ્ઠ બૅટ્સમેનો દ્વારા એક દિવસીય આંતરરાષ્ટ્રીય મૅચોમાં નોંધાવેલ રનની સંખ્યા આપે છે :

નોંધાવેલ રન	બેટ્સમેનોની સંખ્યા
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

માહિતીનો બહુલક શોધો.

6. એક વિદ્યાર્થીએ, પ્રત્યેક 3 મિનિટનો એક એવા 100 સમયગાળાઓ માટે રસ્તા પરની એક જગ્યાએથી પસાર થતી ગાડીઓની સંખ્યાની નોંધ કરી અને તેને નીચે આપેલ કોષ્ટકમાં સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં દર્શાવી છે. આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ગાડીઓની સંખ્યા	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
આવૃત્તિ	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ

C8Q8S4

ધોરણ IX માં તમે અભ્યાસ કર્યો છે તેમ, મધ્યસ્થ માહિતીમાં મધ્યના અવલોકનનું મૂલ્ય આપતું હોય એવું મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ છે. યાદ કરો, અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે, આપણે પહેલાં માહિતીનાં અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીએ છીએ. ત્યાર બાદ, જો n-અયુગ્મ હોય, તો મધ્યસ્થ એ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અવલોકન છે. અને જો n-યુગ્મ હોય, તો મધ્યસ્થ એ $\frac{n}{2}$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોની સરેરાશ છે.

નીચે 100 વિદ્યાર્થીઓએ 50 ગુણની એક કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ દર્શાવ્યા છે. આ માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવો છે.

મેળવેલા ગુણ	20	29	28	33	42	38	43	25
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	6	28	24	15	2	4	1	20

સૌપ્રથમ, આપણે ગુણને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીએ અને નીચે પ્રમાણે આવૃત્તિ કોષ્ટક તૈયાર કરીએ :

કોષ્ટક 14.9

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
કુલ	**100**

અહીં, $n = 100$ એ યુગ્મ છે. તેથી મધ્યસ્થ એ $\frac{n}{2}$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$માં અવલોકનોની સરેરાશ થશે, એટલે કે, તે 50 માં અને 51 માં અવલોકનોની સરેરાશ થશે. આ અવલોકનો શોધવા માટે, નીચે પ્રમાણે આગળ વધીએ :

કોષ્ટક 14.10

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
20	6
25 સુધી	6 + 20 = 26
28 સુધી	26 + 24 = 50
29 સુધી	50 + 28 = 78
33 સુધી	78 + 15 = 93
38 સુધી	93 + 4 = 97
42 સુધી	97 + 2 = 99
43 સુધી	99 + 1 = 100

આપણે આ માહિતીને ઉપરના આવૃત્તિ કોષ્ટકને દર્શાવતો હોય, તેમાં એક બીજો સ્તંભ ઉમેરીએ અને તેનું નામ ***સંચયી આવૃત્તિ-સ્તંભ*** રાખીશું.

કોષ્ટક 14.11

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	સંચયી આવૃત્તિ
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ઉપરના કોષ્ટક પરથી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

50 મું અવલોકન 28 છે. (શા માટે?)

51 મું અવલોકન 29 છે.

તેથી, મધ્યસ્થ $= \frac{28+29}{2} = 28.5$

નોંધ : કોષ્ટક 14.11 ના સ્તંભ 1 અને સ્તંભ 3 થી બનેલો ભાગ સંચયી આવૃત્તિ કોષ્ટક તરીકે ઓળખાય છે. આશરે 50 % વિદ્યાર્થીઓએ 28.5 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે અને બીજા 50 % વિદ્યાર્થીઓએ 28.5 કરતાં વધુ ગુણ મેળવ્યાં છે એવી માહિતી મધ્યસ્થ 28.5 દ્વારા મળે છે.

હવે, ચાલો આપણે જોઈએ કે વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યસ્થ કેવી રીતે મેળવવો. નીચેની પરિસ્થિતિ દ્વારા તે સમજીએ.

એક ચોક્કસ પરીક્ષામાં 53 વિદ્યાર્થીઓએ 100 માંથી મેળવેલા ગુણનું વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે આપેલ છે તેનો અભ્યાસ કરો :

કોષ્ટક 14.12

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

ઉપરના કોષ્ટક પરથી, નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપવા પ્રયત્ન કરો :

કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ 10 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા?

જવાબ સ્પષ્ટ છે કે, 5.

કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ 20 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા?

નિરીક્ષણ કરો કે, જે વિદ્યાર્થીઓએ 20 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે તે સંખ્યા 0 - 10 સુધી મેળવેલા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા તેમજ 10 - 20 સુધી મેળવેલા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાનો પોતાનામાં સમાવેશ કરે છે. તેથી 20 કરતાં ઓછા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 5 + 3 એટલે કે 8 છે. આપણે કહીએ છીએ કે વર્ગ 10 - 20 ની સંચયી આવૃત્તિ 8 છે.

આ જ પ્રમાણે, બીજા વર્ગો માટે સંચયી આવૃત્તિની ગણતરી કરી શકીએ. એટલે કે, 30 કરતાં ઓછા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, 40 કરતાં ઓછા, ... , 100 કરતાં ઓછા સુધી. આપણે તેમને નીચે આપેલ કોષ્ટક 14.13 માં દર્શાવીએ છીએ :

કોષ્ટક 14.13

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (સંચયી આવૃત્તિ)
10 કરતાં ઓછા	5
20 કરતાં ઓછા	5 + 3 = 8
30 કરતાં ઓછા	8 + 4 = 12
40 કરતાં ઓછા	12 + 3 = 15
50 કરતાં ઓછા	15 + 3 = 18
60 કરતાં ઓછા	18 + 4 = 22
70 કરતાં ઓછા	22 + 7 = 29
80 કરતાં ઓછા	29 + 9 = 38
90 કરતાં ઓછા	38 + 7 = 45
100 કરતાં ઓછા	45 + 8 = 53

ઉપર આપેલ વિતરણને ***'થી ઓછા પ્રકારનું' સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ*** કહે છે. અહીં 10, 20, 30, ..., 100, એ જે-તે વર્ગ અંતરાલોની ઊર્ધ્વસીમાઓ છે.

આપણે આ જ પ્રમાણે, 0 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, 10 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, 20 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, અને આમ આગળ, વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા માટેનું કોષ્ટક બનાવી શકીએ. કોષ્ટક 14.12 પરથી, આપણે નિરીક્ષણ કરીએ છીએ કે, તમામ 53 વિદ્યાર્થીઓએ 0 કે તેનાથી વધારે ગુણ મેળવ્યા છે. 5 વિદ્યાર્થીઓએ અંતરાલ 0 - 10 માં ગુણ મેળવ્યા છે. તેથી, આનો અર્થ એ થાય છે કે 53 – 5 = 48 વિદ્યાર્થીઓ 10 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવે છે. આ જ પ્રમાણે આગળ વધતાં, આપણને 20 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવવાવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 48 – 3 = 45, 30 કે વધુ માટે 45 – 4 = 41, અને આમ આગળ, કોષ્ટક 14.14 માં બતાવ્યા પ્રમાણે.

કોષ્ટક 14.14

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (સંચયી આવૃત્તિ)
0 કે તેથી વધારે	53
10 કે તેથી વધારે	53 – 5 = 48
20 કે તેથી વધારે	48 – 3 = 45
30 કે તેથી વધારે	45 – 4 = 41
40 કે તેથી વધારે	41 – 3 = 38
50 કે તેથી વધારે	38 – 3 = 35
60 કે તેથી વધારે	35 – 4 = 31
70 કે તેથી વધારે	31 – 7 = 24
80 કે તેથી વધારે	24 – 9 = 15
90 કે તેથી વધારે	15 – 7 = 8

ઉપરના કોષ્ટકને, ***'થી વધારે પ્રકારનું' સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.*** અહીં, 0, 10, 20, 30, ..., 90 એ જે તે વર્ગ-અંતરાલની અધઃસીમાઓ છે.

હવે, વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે આપણે આ પૈકી ગમે તે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

ચાલો, આપણે નીચે આપેલ કોષ્ટક 14.15 મેળવવા માટે કોષ્ટકો 14.12 અને 14.13 ને એકત્રિત કરીએ.

કોષ્ટક 14.15

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (*f*)	સંચયી આવૃત્તિ (*cf*)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

હવે, વર્ગીકૃત માહિતીમાં, સંચયી આવૃત્તિઓ તરફ દૃષ્ટિપાત કરીને જ આપણે મધ્યનું અવલોકન શોધવા સમર્થ ન હોઈ શકીએ, કારણ કે મધ્યનું અવલોકન એ કોઈક વર્ગઅંતરાલની અંદરનું મૂલ્ય હશે. તેથી કોઈક વર્ગમાં એક એવું અવલોકન શોધવું આવશ્યક છે, જે સમગ્ર વિતરણના બે સમાન ભાગ કરે. પરંતુ આ કયો વર્ગ હોવો જોઈએ?

આ વર્ગ શોધવા માટે, આપણે બધા વર્ગોની સંચયી આવૃત્તિઓ અને $\frac{n}{2}$ શોધીએ. હવે, આપણે એવો ચોક્કસ વર્ગ નક્કી કરીએ કે, જેની સંચયી આવૃત્તિ $\frac{n}{2}$ કરતાં મોટી (અને $\frac{n}{2}$ ની સૌથી નજીક) છે. આને ***મધ્યસ્થ વર્ગ*** કહેવાય છે. ઉપરના વિતરણમાં, $n = 53$. તેથી, $\frac{n}{2} = 26.5$. હવે, જેની સંચયી આવૃત્તિ 29 હોય તેવો વર્ગ 60 - 70 છે. 29 એ $\frac{n}{2}$ એટલે કે, 26.5 પછી તુરત જ મોટી આવૃત્તિ છે.

તેથી, 60 - 70 એ મધ્યસ્થ વર્ગ છે.

મધ્યસ્થ વર્ગ શોધ્યા પછી, આપણે મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ :

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

જ્યાં, l = મધ્યસ્થ વર્ગની અધઃસીમા

n = અવલોકનોની સંખ્યા

cf = મધ્યસ્થ વર્ગની આગળના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ

f = મધ્યસ્થ વર્ગની આવૃત્તિ

h = વર્ગલંબાઈ (માની લીધું છે કે વર્ગલંબાઈ સમાન છે.)

કિંમતો $\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $cf = 22$, $f = 7$, $h = 10$

ઉપરના સૂત્રમાં આ કિંમતો મૂકતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4 \text{ મળશે.}$$

તેથી, લગભગ અડધા વિદ્યાર્થીઓએ 66.4 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે અને અડધા વિદ્યાર્થીઓએ 66.4 કરતાં વધારે ગુણ મેળવ્યા છે.

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X ની 51 છોકરીઓની ઊંચાઈનો (સેમીમાં) સર્વેક્ષણ હાથ ધરવામાં આવ્યો અને નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવી :

ઊંચાઈ (સેમીમાં)	છોકરીઓની સંખ્યા
140 કરતાં ઓછી	4
145 કરતાં ઓછી	11
150 કરતાં ઓછી	29
155 કરતાં ઓછી	40
160 કરતાં ઓછી	46
165 કરતાં ઓછી	51

ઊંચાઈનો મધ્યસ્થ શોધો.

ઉકેલ : મધ્યસ્થ ઊંચાઈની ગણતરી કરવા માટે આપણને વર્ગઅંતરાલો અને તેમને અનુરૂપ આવૃત્તિની જરૂર છે.

આપેલ વિતરણ 'થી ઓછા પ્રકારનું' છે. 140, 145, 150, ..., 165 અનુરૂપ વર્ગ અંતરાલોની ઊર્ધ્વસીમાઓ છે. તેથી વર્ગો 140 થી ઓછી સંખ્યા. 140 - 145, 145 - 150, ..., 160 - 165 હોવા જોઈએ. નિરીક્ષણ કરો કે, આપેલ વિતરણ પરથી, આપણને જ્ઞાત થાય છે કે 4 છોકરીઓની ઊંચાઈ 140 સેમી કરતાં ઓછી છે, એટલે કે 140 થી નીચેના વર્ગ અંતરાલની આવૃત્તિ 4 છે. હવે, જેમની ઊંચાઈ 145 કરતાં ઓછી છે એવી 11 છોકરીઓ છે અને 4 છોકરીઓની ઊંચાઈ 140 કરતાં ઓછી છે. તેથી, અંતરાલ 140–145 માં જેમની ઊંચાઈ હોય તેવી છોકરીઓની સંખ્યા 11–4 = 7 છે, આ જ પ્રમાણે 145 - 150 ની આવૃત્તિ છે, 29–11 = 18, 150 - 155 માટે 40–29 = 11 અને આમ આગળ. તેથી આપણું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક આપેલ સંચયી આવૃત્તિઓ દર્શાવવાની આ રીતનું થશે :

કોષ્ટક 14.16

વર્ગ-અંતરાલો	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
140 થી ઓછી	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

હવે, $n = 51$. તેથી, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$. આ અવલોકન વર્ગ 145 - 150 માં છે. તેથી,

l (અધઃસીમા) = 145

cf (145 - 150 થી આગળના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ) = 11

f (મધ્યસ્થ વર્ગ 145 - 150 ની આવૃત્તિ) = 18

h (વર્ગલંબાઈ) = 5

સૂત્ર, મધ્યસ્થ $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$ નો ઉપયોગ કરતાં,

આપણી પાસે, મધ્યસ્થ $= 145 + \left(\dfrac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

તેથી, છોકરીઓની મધ્યસ્થ ઊંચાઈ 149.03 સેમી છે.

આનો અર્થ છે કે લગભગ 50 % છોકરીઓની ઊંચાઈ આ ઊંચાઈ કરતાં ઓછી અને 50 % છોકરીઓની ઊંચાઈ આના કરતાં વધારે છે.

ઉદાહરણ 8 : નીચે આપેલ માહિતીનો મધ્યસ્થ 525 છે. જો કુલ આવૃત્તિ 100 હોય, તો x અને y નાં મૂલ્યો શોધો.

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

ઉકેલ :

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

$n = 100$ આપેલ છે.

તેથી, $76 + x + y = 100$, એટલે કે $x + y = 24$ ... (1)

મધ્યસ્થ 525 છે, અને તે વર્ગ 500 - 600 માં આવેલ છે.

તેથી, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

આપણને મળે છે, $$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

એટલે કે, $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

એટલે કે, $25 = 70 - 5x$

એટલે કે, $5x = 70 - 25 = 45$

તેથી, $x = 9$

આને કારણે, (1) પરથી આપણને મળે છે. $9 + y = 24$,

એટલે કે $y = 15$

હવે, તમે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં તમામ ત્રણે ય માપોનો અભ્યાસ કર્યો છે, ચાલો આપણે ચર્ચા કરીએ કે કયું માપ ચોક્કસ જરૂરિયાત માટે ઉત્તમપણે અનુકૂળ રહેશે.

મધ્યક એ સૌથી વધુ વખત ઉપયોગમાં લેવાતું મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ છે, કારણ કે તે તમામ અવલોકનોને ગણતરીમાં લે છે અને સંપૂર્ણ માહિતીના સૌથી મોટા અને સૌથી નાના અવલોકનોની સીમાઓની વચ્ચે રહે છે. તે આપણને બે કે તેથી વધુ વિતરણોની સરખામણી કરવા માટેનું સામર્થ્ય આપે છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક ચોક્કસ પરીક્ષાના જુદી-જુદી શાળાઓના વિદ્યાર્થીઓના પરિણામના મધ્યકની સરખામણી કરવાથી, આપણે તારવી શકીએ કે, કઈ શાળાની કામગીરી વધુ સારી છે.

જોકે, માહિતીમાં આત્યંતિક કિંમતો મધ્યકને અસર કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યાં વર્ગોની આવૃત્તિ લગભગ એકસરખી હોય ત્યારે વર્ગોનો મધ્યક, માહિતીનું સારું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે. પરંતુ, જો એક વર્ગની આવૃત્તિ 2 હોય અને બીજા પાંચની આવૃત્તિઓ 20, 25, 20, 21, 18 હોય, તો માહિતી જે રીતે વર્તે છે તેને મધ્યક સારી રીતે પ્રતિબિંબિત નહિ કરે. તેથી, આવી પરિસ્થિતિમાં મધ્યક, માહિતીનું સારી રીતે પ્રતિનિધિત્વ કરતો નથી.

જેમાં વ્યક્તિગત અવલોકનો મહત્ત્વનાં નથી તેવા પ્રશ્નો અંગે આપણે ઇચ્છીએ કે 'નમૂનારૂપ' અવલોકન શોધી કાઢીએ, ત્યારે મધ્યસ્થ વધારે યોગ્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, કામદારોનો નમૂનારૂપ ઉત્પાદન દર શોધવો, દેશમાં સરેરાશ

વેતન વગેરે. આ પ્રકારની પરિસ્થિતિઓમાં આત્યંતિક મૂલ્યો હોઈ પણ શકે. તેથી મધ્યકને લેવા કરતાં આપણે મધ્યસ્થને વધુ સારા મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપ તરીકે લઈએ છીએ.

જે પરિસ્થિતિઓમાં સૌથી વધુ વખત આવતું મૂલ્ય અથવા સૌથી લોકપ્રિય વસ્તુને સ્થાપિત કરવાની જરૂર છે તે સ્થિતિમાં બહુલક શ્રેષ્ઠ વિકલ્પ છે. ઉદાહરણ તરીકે સૌથી વધુ જોવાતો લોકપ્રિય ટી.વી. કાર્યક્રમ, સૌથી વધુ માંગવાળી ઉપભોક્તા વસ્તુ, સૌથી વધુ લોકો દ્વારા ઉપયોગમાં લેવાતો વાહનનો રંગ વગેરે.

નોંધ :

1. મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં ત્રણ માપો વચ્ચે પ્રયોગમૂલક સંબંધ છે.

   $3 \times$ મધ્યસ્થ $=$ બહુલક $+ 2 \times$ મધ્યક

2. વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય તેવી વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થની પણ ગણતરી કરી શકાય છે. પરંતુ, આપણે અહીં તે ચર્ચા કરીશું નહિ.

સ્વાધ્યાય 14.3

1. નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ એક વિસ્તારમાં 68 ગ્રાહકોનો માસિક વીજવપરાશ આપે છે. આ માહિતીનો મધ્યસ્થ, મધ્યક અને બહુલક શોધો અને તેમને સરખાવો.

માસિક વપરાશ (એકમમાં)	ગ્રાહકોની સંખ્યા
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. જો નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યસ્થ 28.5 હોય, તો x અને y નાં મૂલ્યો શોધો.

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
કુલ	**60**

3. એક જીવનવીમા એજન્ટે, 100 પૉલિસીધારકોની ઉંમર માટે નીચેનું વિતરણ પ્રાપ્ત કર્યું. જેમની ઉંમર 18 વર્ષથી વધુ, પરંતુ 60 વર્ષથી ઓછી હોય તેવી જ વ્યક્તિઓને પૉલિસીઓ આપવામાં આવી હોય, તો તેમની મધ્યસ્થ ઉંમર શોધો.

ઉંમર (વર્ષમાં)	પૉલિસીધારકોની સંખ્યા
20 થી ઓછી	2
25 થી ઓછી	6
30 થી ઓછી	24
35 થી ઓછી	45
40 થી ઓછી	78
45 થી ઓછી	89
50 થી ઓછી	92
55 થી ઓછી	98
60 થી ઓછી	100

4. એક છોડનાં 40 પાંદડાંઓની લંબાઈ ખૂબ જ નજીકના મિલીમીટર સુધી માપવામાં આવી અને મેળવેલ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

લંબાઈ (મિમીમાં)	પાંદડાંઓની સંખ્યા
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

પાંદડાંઓની મધ્યસ્થ લંબાઈ શોધો.

(**સૂચન :** મધ્યસ્થ શોધવા માટે માહિતીને સતત વર્ગોમાં ફેરવવાની જરૂર છે, કારણ કે સૂત્ર સતત વર્ગો માટે છે. વર્ગો 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5, ... , 171.5 – 180.5 માં પરિવર્તિત થાય છે.)

5. નીચેનું કોષ્ટક 400 નીઓન ગોળાના આયુષ્યનું આવૃત્તિ વિતરણ આપે છે :

આયુષ્ય (કલાકોમાં)	ગોળાની સંખ્યા
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

ગોળાના આયુષ્યનો મધ્યસ્થ શોધો.

6. સ્થાનિક ટેલિફોન યાદીમાંથી 100 અટક યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવી હતી અને અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોમાં અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે મેળવ્યું હતું :

અક્ષરોની સંખ્યા	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
અટકોની સંખ્યા	6	30	40	16	4	4

અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો. અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનો મધ્યક પણ શોધો. અટકોમાં અક્ષરોની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

7. નીચેનું વિતરણ એક ધોરણના 30 વિદ્યાર્થીઓનાં વજન આપે છે. વિદ્યાર્થીઓનાં વજનનો મધ્યસ્થ શોધો.

વજન (કિગ્રામાં)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	8	6	6	3	2

14.5 સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણની આલેખીય પ્રસ્તુતિ

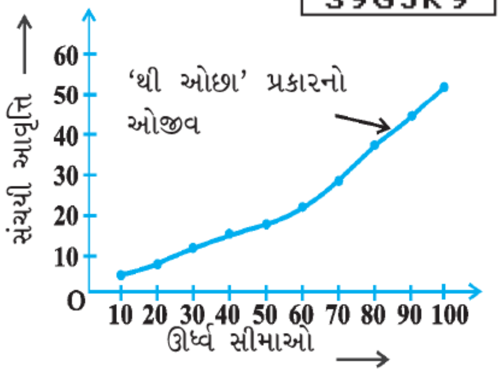
S9G3K9

આપણે જાણીએ છીએ તેમ, ચિત્રો શબ્દો કરતાં વધુ સ્પષ્ટ કહી જાય છે. આલેખીય નિરૂપણ પર દૃષ્ટિપાત કરતાં જ આપણને તે આપેલ માહિતીને સમજવામાં મદદ કરે છે. ધોરણ IX માં આપણે માહિતીને લંબાલેખ, સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણ દ્વારા દર્શાવી છે.

ચાલો, હવે આપણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણને આલેખ દ્વારા દર્શાવીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો આપણે કોષ્ટક 14.13 માં આપેલ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો વિચાર કરીએ.

યાદ કરો કે, કિંમતો 10, 20 ,30, ... , 100 અનુરૂપ વર્ગઅંતરાલોની ઊર્ધ્વસીમાઓ છે. કોષ્ટકની માહિતીને આલેખ દ્વારા દર્શાવવા માટે, આપણે વર્ગઅંતરાલોની ઊર્ધ્વસીમાઓને સમક્ષિતિજ અક્ષ (x-અક્ષ) અને



આકૃતિ 14.1

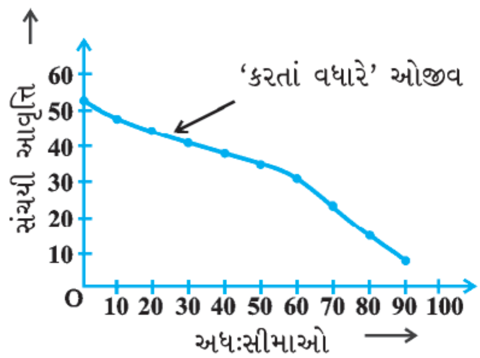
તેમની અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિઓ શિરોલંબ અક્ષ (y-અક્ષ) પર અનુકૂળ માપ પસંદ કરીને દર્શાવીશું. બંને અક્ષો પર માપ સમાન ન પણ હોઈ શકે. ચાલો હવે આપણે ક્રમયુક્ત જોડોને અનુરૂપ બિંદુઓ

(ઊર્ધ્વસીમા, અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિ) એટલે કે, (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) આલેખપત્ર પર મૂકીએ અને તેમને મુક્તહસ્ત સળંગ વક્ર દ્વારા જોડીએ. આપણે જે વક્ર મેળવીએ છીએ તેને ***સંચયી આવૃત્તિ વક્ર*** અથવા ***થી ઓછા પ્રકારનો ઓજીવ (ogive)*** (જુઓ આકૃતિ 14.1) કહે છે.

શબ્દ 'ogive' નો ઉચ્ચાર ઓજીવ થાય છે અને તે શબ્દ **ogee** પરથી ઊતરી આવ્યો છે. ogee અંતર્ગોળ ચાપનું બહિર્ગોળ ચાપ સાથે મિલન થતું હોય તેવા આકારથી બને છે. આથી શિરોલંબ અંતવાળો S આ આકારનો વક્ર બને છે. સ્થાપત્ય કલામાં 14 મી તથા 15 મી સદીની ગોથીક પદ્ધતિનાં લક્ષણો પૈકીનું એક ogee આકાર છે.

તે પછી, ફરીથી આપણે કોષ્ટક 14.14 માં આપેલ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો વિચાર કરીએ અને તેનો 'થી વધુ પ્રકારનો ઓજીવ' દોરીએ.

યાદ કરો, અહીં, 0, 10, 20, ..., 90 એ અનુક્રમે વર્ગ અંતરાલો 0 - 10, 10 - 20, ..., 90 - 100 ની અધઃસીમાઓ છે. 'કરતાં વધારે પ્રકારનું' આલેખીય નિરૂપણ કરવા માટે આપણે x-અક્ષ પર અધઃસીમાઓ અને અનુરૂપ y-અક્ષ પર સંચયી આવૃત્તિઓ દર્શાવીશું. પછી આપણે બિંદુઓ (અધઃસીમા, અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિ), એટલે કે, (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) આલેખ પેપર પર દર્શાવીશું અને તેમને મુક્તહસ્ત સળંગ વક્ર દ્વારા જોડીશું. આપણને જે વક્ર મળે છે તે સંચયી આવૃત્તિ વક્ર છે અથવા ***'થી વધુ પ્રકાર'***નો ઓજીવ છે. (જુઓ આકૃતિ 14.2.)



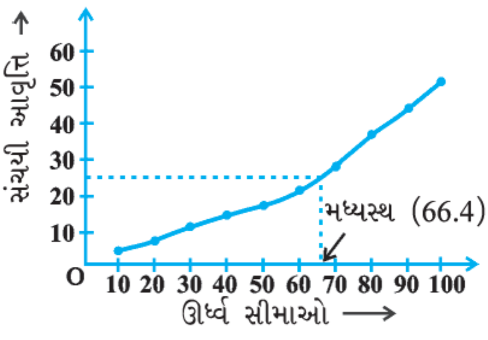
આકૃતિ 14.2

નોંધ : નોંધ કરો કે, બંને ઓજીવ જે કોષ્ટક 14.12 માં આપેલ છે. (આકૃતિ 14.1 અને આકૃતિ 14.2) તે એક જ માહિતીને અનુરૂપ છે.

હવે, ઓજીવ મધ્યસ્થ સાથે કોઈ પણ રીતે સંબંધિત છે?

કોષ્ટક 14.12 ની માહિતીને અનુરૂપ, આ બંને સંચયી આવૃત્તિ વક્રો પરથી શું મધ્યસ્થ મેળવવો શક્ય છે? ચાલો આપણે જોઈએ.

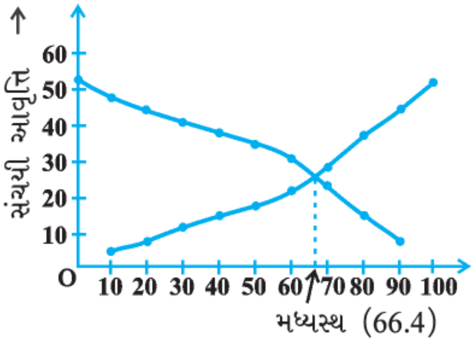
y-અક્ષ પર $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ નું સ્થાન દર્શાવવું તે એક સ્પષ્ટ રસ્તો છે. (જુઓ આકૃતિ 14.3.) આ બિંદુથી વક્રના બિંદુમાં છેદતી હોય તેવી x-અક્ષને સમાંતર રેખા દોરો. આ બિંદુથી x-અક્ષને લંબ દોરો. આ લંબના x-અક્ષ સાથેના છેદબિંદુનો x-યામ માહિતીનો મધ્યસ્થ આપે છે (જુઓ આકૃતિ 14.3.)



આકૃતિ 14.3

મધ્યસ્થ શોધવાની અન્ય રીતો નીચે આપેલ છે :

એક જ અક્ષ પર બંને ઓજીવ દોરો. (એટલે કે, 'થી ઓછા પ્રકારનો અને થી વધારે પ્રકારનો') બે ઓજીવ એકબીજાને એક બિંદુમાં છેદશે. આ બિંદુથી, જો આપણે x-અક્ષ પર લંબ દોરીએ, તો બિંદુ x-અક્ષને જ્યાં તે છેદશે, તેનો x-યામ મધ્યસ્થ આપશે. (જુઓ આકૃતિ 14.4.)



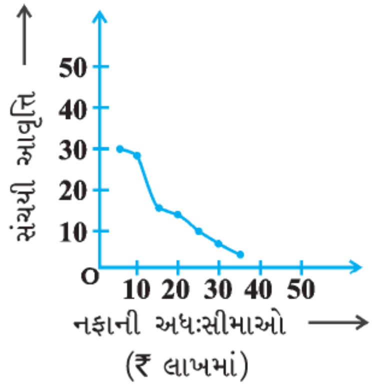
આકૃતિ 14.4

ઉદાહરણ 9 : નીચેનું વિતરણ એક વસતીનાં શોપિંગ કૉમ્પ્લેક્ષની 30 દુકાનો દ્વારા પ્રાપ્ત નફો આપે છે :

નફો (₹ લાખમાં)	દુકાનોની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
5 કે તેનાથી વધારે	30
10 કે તેનાથી વધારે	28
15 કે તેનાથી વધારે	16
20 કે તેનાથી વધારે	14
25 કે તેનાથી વધારે	10
30 કે તેનાથી વધારે	7
35 કે તેનાથી વધારે	3

ઉપર આપેલ માહિતી માટે બંને ઓજીવ દોરો. તે પરથી મધ્યસ્થ નફો મેળવો.

ઉકેલ : પહેલાં આપણે યામાક્ષો દોરીએ, નફાની અધ:સીમાઓ સમક્ષિતિજ અક્ષ પર અને સંચયી આવૃત્તિ y-અક્ષ પર લઈએ. પછી બિંદુઓ (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) અને (35, 3) દર્શાવો. આપણે આ બિંદુઓને સળંગ મુક્ત હસ્ત વક્ર દ્વારા 'થી વધારે' પ્રકારનો ઓજીવ મેળવવા માટે જોડીએ. (આકૃતિ 14.5 માં બતાવ્યા પ્રમાણે)



આકૃતિ 14.5

હવે, ચાલો આપણે નીચે આપેલ કોષ્ટક પરથી વર્ગો, તેમની આવૃત્તિઓ અને સંચયી આવૃત્તિ મેળવીએ :

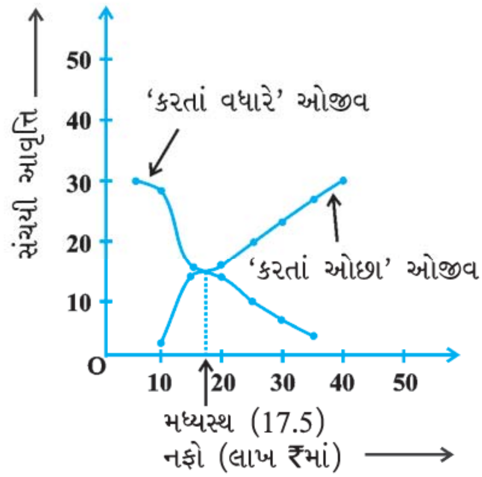
કોષ્ટક 14.17

વર્ગો	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
દુકાનોની સંખ્યા	2	12	2	4	3	4	3
સંચયી આવૃત્તિ	2	14	16	20	23	27	30

આ કિંમતોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે બિંદુઓ (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) દર્શાવીને એ અક્ષો પર આકૃતિ 14.5 માં છે તેમ 'થી ઓછાં' પ્રકારનો ઓજીવ મેળવીએ. આકૃતિ 14.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે મુક્ત હસ્ત વક્ર દોરીએ.

તેમનાં છેદ બિંદુઓનો x-યામ 17.5 ની નજીક છે અને તે મધ્યસ્થ છે. આ હકીકતને સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને પણ ચકાસી શકાય. તેથી, મધ્યસ્થ નફો ₹ 17.5 લાખ છે.

નોંધ : ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં, અત્રે નોંધનીય છે કે, વર્ગઅંતરાલો સતત હતા. ઓજીવ દોરવા માટે, વર્ગઅંતરાલો સતત હોય, તે સુનિશ્ચિત કરવું જોઈએ. (વળી, ધોરણ IX માં સ્તંભાલેખની રચનાઓ જુઓ.)



આકૃતિ 14.6

સ્વાધ્યાય 14.4

1. નીચેનું આવૃત્તિ વિતરણ એક કારખાનાના 50 કર્મીઓનું દૈનિક વેતન દર્શાવે છે :

દૈનિક વેતન (₹ માં)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
કામદારોની સંખ્યા	12	14	8	6	10

ઉપરના આવૃત્તિ વિતરણને, 'થી ઓછા પ્રકાર' નાં સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવો અને તેનો 'ઓજીવ' દોરો.

2. એક વર્ગના 35 વિદ્યાર્થીઓની દાક્તરી તપાસ દરમિયાન, તેમનાં વજન નીચે પ્રમાણે નોંધાયા :

વજન (કિલોગ્રામમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
38 કરતાં ઓછું	0
40 કરતાં ઓછું	3
42 કરતાં ઓછું	5
44 કરતાં ઓછું	9
46 કરતાં ઓછું	14
48 કરતાં ઓછું	28
50 કરતાં ઓછું	32
52 કરતાં ઓછું	35

આપેલ માહિતી માટે 'થી ઓછા પ્રકાર'નો ઓજીવ દોરો. તેથી વજનનો મધ્યસ્થ મેળવો. આલેખ પરથી આ મેળવેલા પરિણામને સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ચકાસો.

3. નીચેનું કોષ્ટક એક ગામનાં 100 ખેતરોમાં પ્રતિ હેક્ટર ઘઉંનું ઉત્પાદન દર્શાવે છે :

ઉત્પાદન ક્ષમતા (કિગ્રા/હેક્ટર)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
ખેતરોની સંખ્યા	2	8	12	24	38	16

આ આવૃત્તિ વિતરણને ‘થી વધારે પ્રકાર’ના વિતરણમાં પરિવર્તિત કરો અને તેનો ઓજીવ દોરો.

14.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો :

1. વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક નીચેનાં સૂત્રો દ્વારા મેળવી શકાય :

(i) પ્રત્યક્ષ રીત : $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) ધારેલ મધ્યકની રીત : $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) પદ વિચલનની રીત : $\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

અત્રે વર્ગની આવૃત્તિ તેના મધ્યબિંદુએ કેન્દ્રિત છે એવી ધારણા લીધી છે. આ મધ્યબિંદુને વર્ગની મધ્યકિંમત કહે છે.

2. વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક,

બહુલક $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને શોધી શકાય છે. સંકેતોના પ્રચલિત અર્થો છે.

3. જેને આપેલ વર્ગથી અગાઉના બધા વર્ગોની આવૃત્તિઓનો સરવાળો કરીને મેળવાય છે એવી આવૃત્તિ સંચયી આવૃત્તિ છે.

4. વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ,

મધ્યસ્થ $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.
સંકેતોને તેમના પ્રચલિત અર્થો છે.

5. સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણને આલેખીય સ્વરૂપે સંચયી આવૃત્તિ વક્ર અથવા ‘થી ઓછા પ્રકાર’નો અને ‘થી વધારે પ્રકાર’ના ઓજીવ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે.

6. વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થને આલેખ દ્વારા, આ માહિતીઓના બે ઓજીવના છેદબિંદુના x-યામ તરીકે મેળવી શકાય છે.

વાચકને નોંધ

વર્ગીકૃત માહિતીના બહુલક અને મધ્યસ્થની ગણતરી કરવા માટે સૂત્રોના ઉપયોગ કરતાં પહેલાં તે સુનિશ્ચિત કરી લેવું જોઈએ કે, વર્ગ અંતરાલો સતત છે. આ જ શરત ઓજીવની રચના માટે પણ લાગુ પડે છે. વધુમાં, ઓજીવના કિસ્સામાં, બંને અક્ષો પર માપ અસમાન પણ હોઈ શકે.

D2U2C3

U9H3K5

સંભાવના 15

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

– R.S. Woodward

15.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ઘટનાઓની પ્રાયોગિક સંભાવનાઓનો અભ્યાસ ધોરણ IX માં કર્યો છે. તે પ્રયોગોનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત હતી.

આપણે એક પ્રયોગની ચર્ચા કરી હતી. તેમાં એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાથી મળતાં પરિણામોની આવૃત્તિ નીચે પ્રમાણે હતી :

છાપ (H) : 455 કાંટો (T) : 545

આ પ્રયોગના આધારે, છાપ મળવાની પ્રાયોગિક સંભાવના $\frac{455}{1000}$, એટલે કે 0.455 હતી અને કાંટો મળવાની સંભાવના 0.545 હતી. (આ સાથે જ ધોરણ IX ગણિતશાસ્ત્રના પાઠ્યપુસ્તકના પ્રકરણ 15 નું ઉદાહરણ 1 જુઓ.) નોંધ કરો કે, આ સંભાવનાઓ એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત છે. આ કારણે, તે પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ કહેવાય છે. વાસ્તવમાં, પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ, ઘટનાઓ ઉદ્‌ભવે તે માટેના પ્રત્યક્ષ પ્રયોગો અને જરૂર પૂરતા સાનુકૂળ સંજોગોનાં પરિણામો પર આધારિત છે. તદ્‌ઉપરાંત, આ સંભાવનાઓ કેવળ 'અંદાજિત' છે. જો આપણે આ જ પ્રયોગને અન્ય 1000 વખત કરીએ, તો આપણને જુદી માહિતી મળી શકે અને તે અન્ય અંદાજિત સંભાવના આપતી હોય.

તમે એક સિક્કાને અનેક વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ ધોરણ IX માં કર્યો છે અને નોંધ્યું છે કે, ઘણી વાર સિક્કા પર છાપ (અથવા કાંટો) મળ્યો છે. (પ્રકરણ 15 ની પ્રવૃત્તિઓ 1 અને 2 નો સંદર્ભ જુઓ.) તમે એ પણ નોંધ્યું હશે કે,

જેમ જેમ સિક્કાને ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના, સંખ્યા $\frac{1}{2}$ ની નજીક અને નજીક પહોંચે છે. કેવળ તમે જ નહિ, પરંતુ દુનિયાના જુદા-જુદા ભાગોમાંથી અન્ય ઘણી બધી વ્યક્તિઓએ આ પ્રકારના પ્રયોગ કર્યા છે અને સિક્કા પર મળતી છાપની સંખ્યા નોંધી છે.

ઉદાહરણ તરીકે, અઢારમી સદીના ફ્રેન્ચ પ્રકૃતિશાસ્ત્રજ્ઞ ***કોમ્ટ દ બફ્ફને (Comte de Buffon)*** એક સિક્કાને 4040 વખત ઉછાળ્યો અને 2048 વખત છાપ મેળવી. આ કિસ્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{2048}{4040}$ હતી, એટલે કે 0.507. બ્રિટનના ***જે. ઈ. કેરીચે (J. E. Kerrich)*** સિક્કાને 10000 વખત ઉછાળતાં 5067 વખત છાપ મેળવી. આ કિસ્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ હતી. આંકડાશાસ્ત્રી ***કાર્લ પીઅરસને (Karl Pearson)*** કેટલોક વધારે સમય ફાળવ્યો અને 24,000 વખત સિક્કાને ઉછાળ્યો. તેણે 12,012 વખત છાપ મેળવી અને આમ, તેણે છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના 0.5005 મેળવી હતી.

હવે, ધારો કે આપણે પૂછીએ, જો પ્રયોગને દસ લાખ વખત અથવા એક કરોડ વખત અને આમ વધુ ને વધુ વખત (પુનરાવર્તિત) કરવામાં આવે તો છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના શું થશે ? આપને સહજ જ્ઞાનથી અંતઃસ્ફુરણા થશે કે જેમ સિક્કાને ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના સંખ્યા 0.5 એટલે કે $\frac{1}{2}$ ની આસપાસ સ્થાયી થાય છે. તેને જ આપણે છાપ મેળવવાની (અથવા કાંટો મેળવવાની) ***સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (theoretical probability)*** કહીએ છીએ. તે તમે પછીના વિભાગમાં જોશો. આ પ્રકરણમાં, આપણે ઘટનાની **પ્રશિષ્ટ (સૈદ્ધાંતિક પણ કહેવાય છે)** સંભાવનાનો પરિચય અને આ ખ્યાલ પર આધારિત સરળ કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું.

15.2 સંભાવના – પ્રશિષ્ટ અભિગમ

R3P5I3

ચાલો, આપણે નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

ધારો કે, એક સિક્કાને યાદચ્છિક રીતે ઉછાળ્યો છે.

> જ્યારે આપણે એક સિક્કો બોલીએ છીએ, ત્યારે આપણે માની લઈએ છીએ કે, તે 'સમતોલ' છે, એટલે કે, તેના માટે એવું કોઈ જ કારણ નથી કે તે બીજી બાજુ કરતાં એક બાજુ પર વધુ વખત નીચે પડે છે. એવા સિક્કાના આ સમપ્રમાણતાના ગુણધર્મને આપણે સમતોલ હોવાનો ગુણધર્મ કહીશું. શબ્દપ્રયોગ 'યાદચ્છિક ઉછાળ'નો આપણે એ અર્થ કરીશું કે, સિક્કો મુક્તપણે, કોઈપણ પ્રકારના પૂર્વગ્રહ કે વિઘ્ન વિના નીચે પડવા માટે મુક્ત છે.

આપણે અગાઉથી જ જાણીએ છીએ કે બે શક્ય રીતો પૈકી કોઈ એક રીતે જ સિક્કો નીચે પડશે - સિક્કા ઉપર છાપ (H) આવશે અથવા કાંટો (T) આવશે (સિક્કો તેની ધાર પર નીચે પડશે, તે શક્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, સિક્કો રેતીમાં પડે છે. આપણે આ શક્યતાને નકારી કાઢીએ છીએ.). આપણે વ્યાજબીપણે ધારી શકીએ છીએ કે, પ્રત્યેક પરિણામ, છાપ અથવા કાંટો, ઉદ્ભવવાની એટલી જ શક્યતા છે, જેટલી બીજાની. પરિણામો છાપ અથવા કાંટો, સમસંભાવી છે, એમ કહીને આપણે તેનો ઉલ્લેખ કરીશું.

સમસંભાવી પરિણામોના અન્ય ઉદાહરણ માટે, ધારો કે, આપણે એક પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. આપણા માટે, પાસાનો અર્થ હંમેશાં સમતોલ પાસો એવો કરીશું. શક્ય પરિણામો શું છે ? તે પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે.

પ્રત્યેક સંખ્યા પાસા ઉપર તે દેખાય તેની શક્યતા સમાન છે. તેથી પાસાને ફેંકવાનાં સમસંભાવી પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે.

શું પ્રત્યેક પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી હોય છે ? ચાલો આપણે જોઈએ.

ધારો કે, એક થેલામાં 4 લાલ દડા અને 1 ભૂરો દડો છે અને તમે થેલામાં જોયા વગર એક દડો યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરો છો. કયાં પરિણામો મળશે ? શું પરિણામો - 'એક લાલ દડો' અને 'એક ભૂરો દડો' સમસંભાવી છે ? 4 લાલ દડા અને માત્ર એક ભૂરો દડો હોવાથી, તમે સંમત થશો કે, તમને ભૂરો દડો મળે તે કરતાં લાલ દડો મળવાની શક્યતા વધુ છે. તેથી, પરિણામ (લાલ દડો અથવા ભૂરો દડો) સમસંભાવી નથી. આમ છતાં, થેલામાંથી કોઈ પણ રંગનો એક દડો યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવાના પ્રયોગનાં પરિણામ સમસંભાવી છે. તેથી, બધા જ પ્રયોગો માટે જરૂરી નથી કે, પરિણામો સમસંભાવી હોય.

પરંતુ, આ પ્રકરણમાં, હવે પછીથી, ***આપણે ધારી લઈશું કે, બધા જ પ્રયોગોનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.***

ધોરણ IX માં ઘટના E ની પ્રયોગાત્મક સંભાવના P(E) આપણે નીચે આપેલ સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરી છે :

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\text{ઘટના E ઉદ્‌ભવે તેવા પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

સંભાવનાનું પ્રયોગમૂલક અર્થઘટન પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ઘણી વખત મોટી સંખ્યાના પ્રયત્નો પુનરાવર્તિત કરી શકાય એવી પ્રત્યેક ઘટના પર લાગુ પાડી શકાય. પ્રયોગને પુનરાવર્તિત કરવાની ક્રિયાને કેટલીક મર્યાદાઓ છે, જેમ કે, તે ખૂબ જ ખર્ચાળ હોઈ શકે અથવા ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં અવ્યવહારુ પણ હોય. અલબત્ત, સિક્કાને ઉછાળવાના અથવા પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગોમાં તે સારી રીતે કાર્ય કરે છે. પરંતુ, ઉપગ્રહનું પ્રક્ષેપણ કરવાના પ્રયોગના પુનરાવર્તન વિશે શું કહેવાય ? ખાસ કરીને પ્રક્ષેપણ દરમિયાન ઉપગ્રહના નિષ્ફળ જવાની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે અથવા બહુમાળી ઈમારત ભૂકંપમાં નાશ પામે તેની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે ઘટનાનું પુનરાવર્તન કરાય ?

જે પ્રયોગોમાં આપણે ચોક્કસ પ્રકારની ધારણાઓ કરવા માટે તૈયાર હોઈએ છીએ, તે પ્રયોગના પુનરાવર્તનને ટાળી શકાય, કારણ કે ધારણાઓ સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની ગણતરીમાં પ્રત્યક્ષ રીતે મદદ કરે છે. સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા આપણને સંભાવનાની નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે. (આ ધારણા ઉપરનાં બે ઉદાહરણો સિક્કા તથા પાસા ઉછાળવા જેવા ઘણા પ્રયોગોમાં સત્ય છે.)

ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (પ્રશિષ્ટ સંભાવના પણ કહેવાય છે), P(E) તરીકે દર્શાવાય છે અને તેને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\text{ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા}}$$

અત્રે આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાને આપણે ટૂંકમાં સંભાવના તરીકે લઈશું.

સંભાવનાની આ વ્યાખ્યા *પિઅર સિમોન લાપ્લાસે (Pierre Simon Laplace)* C.E. 1795 માં આપી હતી.

Probability theory had its origin in the 16th century when an Italian physicist and mathematician ***J.Cardan*** wrote the first book on the subject, ***The Book on Games of Chance***. Since its inception, the study of probability has attracted the attention of great mathematicians. ***James Bernoulli*** (C.E.1654 – C.E.1705), ***A. de Moivre*** (C.E.1667 – C.E.1754), and ***Pierre Simon Laplace*** are among those who made significant contributions to this field. Laplace's ***Theorie Analytique des Probabilités***, C.E. 1812, is considered to be the greatest contribution by a single person to the theory of probability. In recent years, probability has been used extensively in many areas such as biology, economics, genetics, physics, sociology etc.

Pierre Simon Laplace
(C.E.1749-C.E.1827)

ચાલો, આપણે જેમના માટે કેટલીક સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા સત્ય છે તેવી ઘટનાઓની સંભાવના શોધીએ.

ઉદાહરણ 1 : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે ત્યારે છાપ (H) મળવાની સંભાવના શોધો તથા કાંટો (T) મળવાની સંભાવના પણ શોધો.

ઉકેલ : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા બે છે - છાપ (H) અને કાંટો (T). છાપ મળે તેને ઘટના E લો. ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા (એટલે કે છાપ મળવાની) 1 છે. તેથી

$$P(E) = P(\text{છાપ}) = \frac{\text{E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}} = \frac{1}{2}$$

આ જ પ્રમાણે, જો 'કાંટો મળે' તે ઘટના F હોય તો

$$P(F) = P(\text{કાંટો}) = \frac{1}{2}$$ (શા માટે ?)

ઉદાહરણ 2 : એક થેલામાં લાલ, ભૂરો અને પીળો એમ ત્રણ સમાન કદના દડા છે. ક્રિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે. તેણે પસંદ કરેલ દડો (i) પીળો હોય (ii) લાલ હોય (iii) ભૂરો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ક્રિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે. તેથી, તે આપેલ દડામાંથી ગમે તે એક દડો પસંદ કરે એ સમસંભાવી છે.

'પસંદ કરેલ દડો પીળો હોય' તેને ઘટના Y લો,

'પસંદ કરેલ દડો ભૂરો હોય' તેને ઘટના B લો, અને 'પસંદ કરેલ દડો લાલ હોય' તેને ઘટના R લો.

હવે, શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા = 3 છે.

(i) ઘટના Y માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 1. તેથી, $P(Y) = \frac{1}{3}$

આ જ પ્રમાણે (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ અને (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$

નોંધ :

1. જે ઘટના પ્રયોગનું માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી હોય તેને ***પ્રાથમિક ઘટના*** કહે છે. ઉદાહરણ 1 માં બંને ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે. આ જ પ્રમાણે ઉદાહરણ 2 માં ત્રણેય ઘટનાઓ Y, B અને R પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે.

2. ઉદાહરણ 1માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(E) + P(F) = 1$

ઉદાહરણ 2 માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

અવલોકન કરો કે, ***પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 છે.*** વ્યાપક રીતે પણ આ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : ધારો કે, આપણે પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. (i) પાસાના ઉપરના પૃષ્ઠ ઉપર 4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ? (ii) 4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ?

ઉકેલ : (i) અહીં, ધારો કે, '4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવી' તે ઘટના E છે. પાસો ફેંકવાના કુલ શક્ય પરિણામો છ છે : 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 અને E માટે સાનુકૂળ પરિણામો 5 અને 6 છે. માટે E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 2 છે. તેથી,

$$P(E) = P\,(4 \text{ કરતાં મોટી સંખ્યા}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) ધારો કે '4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવવી' તે ઘટના F છે. શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 6

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામો 1, 2, 3, 4 છે.

તેથી, F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે.

માટે, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ઉપરના ઉદાહરણમાં ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે ? ના, તેઓ પ્રાથમિક ઘટનાઓ નથી કારણ કે, ઘટના E માં 2 પરિણામો અને ઘટના F માં 4 પરિણામો છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 1 પરથી, આપણે નોંધ કરીએ,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

જ્યાં, E એ 'છાપ મેળવવાની' ઘટના છે અને F એ 'કાંટો મેળવવાની' ઘટના છે. ઉદાહરણ 3 નાં (i) અને (ii) પરથી, આપણને મળે છે ;

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

જ્યાં, E એ ઘટના '4 કરતાં મોટી સંખ્યા' અને F એ ઘટના 4 કરતાં નાની અથવા તેને સમાન સંખ્યા છે.

આપણે નોંધીએ કે, 4 કરતાં મોટી નહી તેવી સંખ્યા મેળવવી એ 4 કે 4 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવા બરાબર જ છે અને એથી ઉલટું પણ.

ઉપર દર્શાવેલ (1) અને (2) માં, શું F એ 'not E' (એટલે કે, 'E નહિ') ને સમાન નથી ? હા, તે છે. આપણે ઘટના 'E નહી' ને $\overline{E}$ દ્વારા દર્શાવીશું.

તેથી $P(E) + P(E \text{ નહિ}) = 1$

એટલે કે $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

આ પરિણામ આપણને આપે છે, $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ***ઘટના* E *માટે સત્ય છે કે* $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$**

ઘટના $\overline{E}$, ઘટના 'E નહિ' રજૂ કરે છે. તેને ઘટના E ની પૂરક ઘટના કહે છે. આપણે E અને $\overline{E}$ એકબીજાની પૂરક ઘટનાઓ છે તેમ પણ કહીએ છીએ.

આગળનો અભ્યાસ કરતાં પહેલાં, ચાલો આપણે નીચે આપેલા પ્રશ્નોના ઉત્તર શોધવાના પ્રયત્ન કરીએ.

(i) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં સંખ્યા 8 મળે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં 7 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના શું છે ?

ચાલો આપણે (i) નો ઉત્તર જોઈએ :

આપણે જાણીએ છીએ કે પાસાને એકવાર ઉછાળતાં માત્ર છ શક્ય પરિણામો મળે છે. આ પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે. પાસાના કોઈ પણ પૃષ્ઠ પર 8 અંકિત નથી, તેથી 8 માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી. એટલે કે, આવાં પરિણામોની સંખ્યા શૂન્ય છે. બીજા શબ્દોમાં, પાસાને એક વાર ઉછાળતાં 8 મેળવવો, અશક્ય છે.

તેથી, $P(8 \text{ મેળવવું}) = \frac{0}{6} = 0$

એટલે કે, **જે ઘટના ઉદ્ભવવી અશક્ય છે તેની સંભાવના 0 છે. આવી ઘટનાને *અશક્ય ઘટના* કહે છે.**

ચાલો આપણે (ii) નો ઉત્તર જોઈએ :

પાસાની દરેક સપાટી પર 7 કરતાં નાની સંખ્યા અંકિત કરેલ હોવાથી, એ વાત ચોક્કસ છે કે, પાસાને એકવાર ઉછાળવાથી હંમેશા 7 કરતાં નાની સંખ્યા જ મળશે. તેથી, સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા પણ બધા જ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા જેટલી જ એટલે કે 6 છે.

એના પરિણામ સ્વરૂપે $P(E) = P(7 \text{ કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવી}) = \frac{6}{6} = 1$

તેથી, જે ઘટના ચોક્કસપણે અથવા નિશ્ચિતપણે ઉદ્ભવે તેમ હોય તેની સંભાવના 1 છે. આવી ઘટનાને ચોક્કસ ઘટના અથવા નિશ્ચિત ઘટના કહે છે.

નોંધ : સંભાવના P(E) ની વ્યાખ્યા પરથી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, અંશ (ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા) એ હંમેશાં છેદ જેટલી અથવા તેનાં કરતા નાની (શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા) સંખ્યા છે. તેથી,

$$0 \le P(E) \le 1$$

હવે, ચાલો આપણે પત્તાંની રમત સાથે સંકળાયેલ ઉદાહરણ લઈએ. તમે પત્તાં રમવાની થોકડી જોઈ છે ? તે 52 પત્તાં ધરાવે છે તેમને એક ભાતનાં 13 પત્તાં હોય તેવા 4 સમૂહમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. પ્રત્યેક પત્તું કાળી (♠), લાલ (♥), ચોકટ (♦) અથવા ફુલ્લી ♣) નું હોય છે. કાળી અને ફુલ્લીનાં પત્તાં કાળા રંગના, જ્યારે લાલ અને ચોકટનાં પત્તાં લાલ રંગના હોય છે. પ્રત્યેક સમૂહમાં એક્કો, રાજા, રાણી, ગુલામ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 નાં પત્તાં હોય છે. રાજા, રાણી અને ગુલામના પત્તાંઓને ***મુખમુદ્રા પત્તાં (face cards)*** કહે છે.

ઉદાહરણ 4 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલું પત્તું (i) એક્કો હોય (ii) એક્કો ન હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : સરખી રીતે ચીપેલાં પત્તાં સમસંભાવી પરિણામોની ખાતરી આપે છે.

(i) થોકડીમાં 4 એક્કા હોય છે. 'પત્તું એક્કો છે' તેને ઘટના E લો.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે અને શક્ય પરિણામોની સંખ્યા 52 છે. (શા માટે ?)

તેથી, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) 'ખેંચેલું પત્તું એક્કો નથી' તે ઘટનાને F લો.

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $= 52 - 4 = 48$ છે. (શા માટે ?)

શક્ય પરિણામોની સંખ્યા $= 52$

તેથી, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

નોંધ : નોંધ કરો કે, F બીજું કશું નહીં પરંતુ $\overline{E}$ છે. તેથી, આપણે P(F) ની ગણતરી નીચે પ્રમાણે પણ કરી શકીએ : $P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

ઉદાહરણ 5 : બે ખેલાડીઓ, સંગીતા અને રેશ્મા ટેનિસ મૅચ રમે છે. સંગીતા મૅચ જીતે તેની સંભાવના 0.62 આપેલ છે. રેશ્મા મૅચ જીતે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, S અને R અનુક્રમે સંગીતા મૅચ જીતે અને રેશ્મા મૅચ જીતે તે ઘટનાઓ દર્શાવે છે.

સંગીતાની મૅચ જીતવાની સંભાવના $= P(S) = 0.62$ (આપેલ છે.)

રેશ્માની મૅચ જીતવાની સંભાવના $= P(R) = 1 - P(S)$ [કારણ કે, R અને S પૂરક ઘટનાઓ છે.]

$= 1 - 0.62 = 0.38$

ઉદાહરણ 6 : સવિતા અને હમિદા મિત્રો છે. બંનેના (i) જન્મદિવસ જુદા-જુદા હોય (ii) જન્મદિવસ એક જ હોય તેની સંભાવના કેટલી થશે ? (લીપ વર્ષને અવગણવું.)

ઉકેલ : બે મિત્રોમાંથી, એક છોકરી, કહો સવિતાનો જન્મદિવસ વર્ષનો કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે છે. હવે, હમિદાનો જન્મદિવસ પણ વર્ષનાં 365 દિવસ પૈકી કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે.

આપણે માની લઈશું કે, આ 365 પરિણામો સમસંભાવી છે.

(i) જો હમિદાનો જન્મદિવસ, સવિતાના જન્મદિવસ કરતાં જુદો હોય, તો તેના જન્મદિવસ માટે સાનુકૂળ પરિણામો $365 - 1 = 364$ છે.

તેથી, P (હમિદાનો જન્મદિવસ એ સવિતાના જન્મદિવસથી જુદો છે.) $= \frac{364}{365}$

(ii) P (સવિતા અને હમિદાનો જન્મદિવસ એક જ છે.)

$= 1 - P$ (બંનેના જન્મદિવસ જુદા છે.)

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [P(\overline{E}) = 1 - P(E) \text{ નો ઉપયોગ કરતાં}]$$

$$= \frac{1}{365}$$

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X માં 40 વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમાંથી 25 છોકરીઓ અને 15 છોકરાઓ છે. વર્ગ શિક્ષકે એક વિદ્યાર્થીને વર્ગ પ્રતિનિધિ તરીકે પસંદ કરવાનો છે. તે દરેક વિદ્યાર્થીના નામ ભિન્ન ભિન્ન ચિઠ્ઠી પર લખે છે, ચિઠ્ઠી એકસમાન છે. પછી તે ચિઠ્ઠીઓને થેલામાં મૂકે છે અને તેમને સંપૂર્ણરીતે મિશ્ર કરે છે. પછી તે થેલામાંથી એક ચિઠ્ઠી કાઢે છે. ચિઠ્ઠી પર લખેલ નામ (i) છોકરીનું હોય (ii) છોકરાનું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : કુલ 40 વિદ્યાર્થીઓ છે અને એક નામની ચિઠ્ઠી પસંદ કરવાની છે.

(i) શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા 40 છે.

છોકરીનું નામ લખેલ ચિઠ્ઠી પસંદ કરી હોય તેના માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 25 છે. (શા માટે ?)

તેથી, P (છોકરીના નામવાળી ચિઠ્ઠી) = P (છોકરી) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) છોકરાનું નામ લખેલ ચિઠ્ઠી પસંદ કરી હોય તેના માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 15 છે. (શા માટે ?)

તેથી, P (છોકરાના નામવાળી ચિઠ્ઠી) = P (છોકરો) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

નોંધ : P (છોકરો) આપણે અન્ય રીતે પણ શોધી શકીએ.

P (છોકરો) = 1 – P (છોકરો નથી) = 1 – P (છોકરી) = $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

ઉદાહરણ 8 : એક ડબામાં 3 ભૂરી, 2 સફેદ અને 4 લાલ લખોટીઓ છે. જો ડબ્બામાંથી યાદચ્છિક રીતે એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો તે (i) સફેદ (ii) ભૂરી (iii) લાલ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : એમ કહેવું કે, યાદચ્છિક રીતે એક લખોટી પસંદ કરવી, એ એવું કહેવાનો ટૂંકો રસ્તો છે કે, બધી જ લખોટીઓ સમસંભાવીપણે પસંદ થઈ શકે છે. તેથી, શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 3 + 2 + 4 = 9 (શા માટે ?)

ધારો કે, W એ પસંદ થયેલ ‘લખોટી સફેદ છે’ તે ઘટના, B એ ‘લખોટી ભૂરી છે’ તે ઘટના અને R એ ‘લખોટી લાલ છે’ તે ઘટના દર્શાવે છે.

(i) ઘટના W માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 2 છે.

તેથી, $P(W) = \frac{2}{9}$

આ જ પ્રમાણે, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ અને (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

નોંધ કરો કે, $P(W) + P(B) + P(R) = 1$

ઉદાહરણ 9 : હરપ્રીત બે જુદા-જુદા સિક્કાઓને એક સાથે ઉછાળે છે (કહો, 1 ₹ નો એક અને 2 ₹ નો બીજો) તે ઓછામાં ઓછી એક છાપ (H) મેળવે તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : આપણે ‘છાપ’ માટે H અને ‘કાંટો’ માટે T લખીશું. જ્યારે બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, ત્યારે શક્ય પરિણામો (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) મળે છે, તે તમામ સમસંભાવી છે. અહીં, (H, H) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા (કહો, ₹ 1) પર છાપ અને બીજા સિક્કા (₹ 2) પર પણ છાપ મળે છે. આ જ પ્રમાણે (H, T) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા પર છાપ અને બીજા સિક્કા પર કાંટો છે અને આમ આગળ.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામો, ‘ઓછામાં ઓછી એક છાપ’; (H, H), (H, T) અને (T, H) છે. (શા માટે ?)

તેથી, E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 3 છે.

માટે, $P(E) = \frac{3}{4}$

એટલે કે, હરપ્રીત ઓછામાં ઓછી એક છાપ મેળવે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે.

નોંધ : તમે P(E) નીચે પ્રમાણે પણ શોધી શકો છો :

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad (\text{કારણ કે, } P(\overline{E}) = P\ (\text{છાપ નહિ}) = \frac{1}{4})$$

અત્યાર સુધી જેમની ચર્ચા કરી તે બધાં જ ઉદાહરણોમાં તમે એ નિરીક્ષણ કર્યું કે પ્રત્યેક પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા સાન્ત (finite) હતી ? જો ના હોય, તો શું થાય તે ચકાસીએ.

એવા ઘણા પ્રયોગો છે કે જેનાં પરિણામો આપેલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની ગમે તે સંખ્યા હોય, અથવા જેનાં પરિણામો વર્તુળ અથવા લંબચોરસની અંદરનું પ્રત્યેક બિંદુ હોય, વગેરે. શું હવે તમે તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા ગણી શકો છો ? તમે જાણો છો કે, આ શક્ય નથી 'કારણ કે બે સંખ્યાઓ વચ્ચે અસંખ્ય (અનંત) સંખ્યાઓ હોય છે, અથવા વર્તુળની અંદર અનંત બિંદુઓ હોય છે. તેથી, સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની જે વ્યાખ્યા તમે શીખ્યાં તે વર્તમાન સ્વરૂપમાં લાગુ કરી શકાશે નહિ. આમાંથી બહાર નીકળવાનો શું માર્ગ છે ? આના ઉત્તર માટે, ચાલો આપણે નીચે આપેલ ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 10* : સંગીત ખુરશીની રમતમાં, સંગીત પૂરું પાડતી વ્યક્તિને સૂચના આપવામાં આવી છે કે, તે વગાડવાનું શરૂ કરે તેની 2 મિનિટમાં ગમે તે સમયે સંગીત વગાડવાનું રોકી દે. સંગીત શરૂ થયા પછીની પહેલી અડધી મિનિટમાં સંગીત બંધ થઈ જશે તેની સંભાવના શું છે ?

ઉકેલ : અહીં શક્ય પરિણામો 0 અને 2 વચ્ચેની તમામ સંખ્યાઓ છે. આ 0 થી 2 વચ્ચેનો સંખ્યા રેખા પરનો ભાગ છે. (આકૃતિ 15.1 જુઓ.)

આકૃતિ 15.1

ધારો કે, E એ ઘટના છે કે 'પ્રથમ અડધી મિનિટ દરમિયાન સંગીત રોકાયું છે.' ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામો સંખ્યા રેખા પર 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનાં બિંદુઓ છે.

0 થી 2 સુધીનું અંતર 2 છે અને 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનું અંતર $\frac{1}{2}$ છે. બધાં પરિણામો સમસંભાવી હોવાથી આપણે કહી શકીએ કે, કુલ અંતર 2 માંથી, ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર $\frac{1}{2}$ છે.

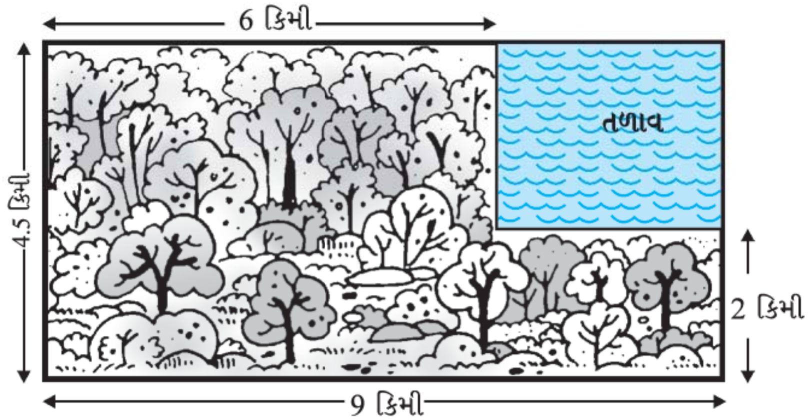
તેથી, $$P(E) = \frac{\text{ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર}}{\text{કુલ અંતર કે, જેમાં પરિણામો સમાઈ શકે છે}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

શું આપણે ઉદાહરણ 10 નો ખ્યાલ, સાનુકૂળ ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તરની સંભાવના શોધવા માટે વિસ્તૃત કરી શકીએ ?

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

ઉદાહરણ 11* : ખોવાઈ ગયેલ હેલિકૉપ્ટર વિશે ખબર મળી છે કે તે આકૃતિ 15.2 માં દર્શાવેલ લંબચોરસ વિસ્તારમાં ક્યાંક તૂટી પડ્યું છે. શું સંભાવના છે કે, તે આકૃતિમાં બતાવેલ તળાવમાં તૂટી પડ્યું છે ?



આકૃતિ 15.2

ઉકેલ : હેલિકૉપ્ટર આપેલ વિસ્તારમાં ગમે ત્યાં તૂટી પડે તે સમસંભાવી છે.

હેલિકૉપ્ટર જ્યાં તૂટીને પડી શકે છે તે વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ = (4.5 × 9) કિમી^{2} = 40.5 કિમી^{2}

તળાવનું ક્ષેત્રફળ = (2.5 × 3) કિમી^{2} = 7.5 કિમી^{2}

તેથી, P (હેલિકૉપ્ટર તળાવમાં તૂટી પડે) = $\frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

ઉદાહરણ 12 : પૂંઠાની પેટીમાં રાખેલાં 100 ખમીસ પૈકી 88 ક્ષતિરહિત છે. તે પૈકી 8 માં નાની ખામીઓ છે અને 4 માં મોટી ખામીઓ છે. વેપારી જિમી ક્ષતિરહિત ખમીસ જ સ્વીકારશે, પરંતુ અન્ય વેપારી સુજાતા માત્ર મોટી ખામીવાળા ખમીસ જ નકારશે. પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે.

(i) તે જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : 100 ખમીસ ધરાવતી પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. માટે, 100 સમસંભાવી પરિણામો છે.

(i) જિમીને સાનુકૂળ (એટલે કે, સ્વીકાર્ય) પરિણામોની સંખ્યા = 88 (શા માટે ?)

આથી, જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ પસંદ થયું હોય તેની સંભાવના = $\frac{88}{100}$ = 0.88

(ii) સુજાતાને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 88 + 8 = 96 (શા માટે ?)

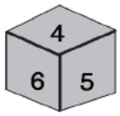
તેથી, P (સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ) = $\frac{96}{100}$ = 0.96

ઉદાહરણ 13 : એક ભૂરો અને એક રાખોડી એમ બે પાસાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. તમામ શક્ય પરિણામો લખો. પાસાની ઉપરની સપાટી પર દેખાતી સંખ્યાઓનો સરવાળો (i) 8 હોય (ii) 13 હોય (iii) 12 કે, તેનાથી નાનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : જ્યારે ભૂરો પાસો '1' બતાવે, ત્યારે રાખોડી પાસો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી કોઈ પણ એક સંખ્યા બતાવે. આ

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

જ રીતે જ્યારે ભૂરો પાસો '2', '3', '4', '5' અથવા '6' બતાવે ત્યારે શક્ય પરિણામોની સૂચિ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે ; પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડનો પ્રથમ ઘટક એ ભૂરા પાસા પર દેખાતી સંખ્યા અને દ્વિતીય ઘટક એ રાખોડી પાસા પર દેખાતી સંખ્યા છે.



	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

આકૃતિ 15.3

આપણે નોંધીએ કે, (1, 4) એ (4, 1) કરતાં જુદી છે. (શા માટે ?)

તેથી શક્ય પરિણામોની સંખ્યા $= 6 \times 6 = 36$

(i) ઘટના 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 8 છે' ને E વડે દર્શાવો તેનાં સાનુકૂળ પરિણામો (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) અને (6, 2) છે. (જુઓ આકૃતિ 15.3.)

એટલે કે, ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 5 છે.

તેથી, $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના F, 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 13' માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી.

તેથી, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના G, 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો હોય તે માટે તમામ પરિણામો સાનુકૂળ છે. તેથી, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$.

સ્વાધ્યાય 15.1

1. નીચેનાં વિધાનો પૂર્ણ કરો :

(i) ઘટના E ની સંભાવના + ઘટના 'E નહિ' ની સંભાવના = ...

(ii) ઉદ્ભવી ન શકે તેવી ઘટનાની સંભાવના .... છે. આવી ઘટનાને .... કહે છે.

(iii) ચોક્કસપણે ઉદ્ભવતી ઘટનાની સંભાવના .... છે. આવી ઘટનાને .... કહે છે.

(iv) પ્રયોગની તમામ મૂળભૂત (પ્રાથમિક) ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો .... છે.

(v) ઘટનાની સંભાવના .... થી મોટી અથવા તેના જેટલી અને .... થી નાની અથવા તેના જેટલી હોય છે.

2. નીચે આપેલ પૈકી કયા પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે ? સમજાવો.

(i) **પ્રયોગ :** ડ્રાઈવર કાર ચાલુ કરવાનો પ્રયત્ન કરે છે. **પરિણામ :** કાર ચાલુ થાય છે અથવા ચાલુ નથી થતી.

(ii) **પ્રયોગ :** ખેલાડી બાસ્કેટબૉલને તાકીને બાસ્કેટમાં નાખવાનો પ્રયત્ન કરે છે. **પરિણામ :** તે તાકીને બાસ્કેટમાં નાખે છે અથવા ચૂકી જાય છે.

(iii) **પ્રયોગ :** ખરા-ખોટા પ્રશ્નનો જવાબ આપવાની કસોટી આપવામાં આવી છે. **પરિણામ :** જવાબ સત્ય છે કે અસત્ય.

(iv) **પ્રયોગ :** બાળક જન્મ્યું છે. **પરિણામ :** તે બાબો છે કે બેબી.

3. શા માટે ફુટબૉલની રમતની શરૂઆતમાં કઈ ટુકડીને બૉલ મળવો જોઈએ તે નક્કી કરવા, સિક્કાને ઉછાળવો નિષ્પક્ષ ક્રિયા છે એવું વિચારાય છે ?

4. નીચેનામાંથી કયા વિકલ્પ ઘટનાની સંભાવના ન હોઈ શકે.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) – 1.5 (C) 15 % (D) 0.7

5. જો P(E) = 0.05 હોય તો 'E-નહિ' ની સંભાવના શું છે ?

6. એક થેલામાં લીંબુના સ્વાદની જ ગુલ્ફીઓ છે. માલિની થેલામાં જોયા વગર એક ગુલ્ફી બહાર કાઢે છે. તે (i) નારંગીના સ્વાદની ગુલ્ફી હોય (ii) લીંબુના સ્વાદની ગુલ્ફી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

7. આપેલ છે કે 3 વિદ્યાર્થીઓના સમૂહમાં બે વિદ્યાર્થીઓનો જન્મદિવસ સમાન ન હોય તેની સંભાવના 0.992 છે. બે વિદ્યાર્થીઓનો જન્મદિવસ સમાન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

8. એક થેલામાં 3 લાલ અને 5 કાળા દડા છે. થેલામાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. બહાર કાઢેલ દડો (i) લાલ હોય (ii) લાલ ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

9. એક પેટીમાં 5 લાલ લખોટીઓ, 8 સફેદ લખોટીઓ અને 4 લીલી લખોટીઓ છે. પેટીમાંથી એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે બહાર કાઢવામાં આવે છે. બહાર કાઢેલ લખોટી (i) લાલ હોય (ii) સફેદ હોય (iii) લીલી ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

10. એક ગલ્લામાં 50 p ના સો સિક્કા, ₹ 1ના પચાસ સિક્કા, ₹ 2 ના વીસ સિક્કા અને ₹ 5 ના દસ સિક્કા છે. જ્યારે આ ગલ્લાને ઊંધો કરવામાં આવે ત્યારે પાત્રમાંથી કોઈ એક સિક્કો બહાર પડે તે સમસંભાવી હોય, તો સિક્કો (i) 50 p નો સિક્કો હશે (ii) ₹ 5 નો સિક્કો નહિ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

11. ગોપી પોતાના માછલીઘર માટે દુકાનમાંથી માછલી ખરીદે છે. દુકાનદાર મોટી ટાંકીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક માછલી બહાર કાઢે છે. આ ટાંકીમાં 5 નર માછલી અને 8 માદા માછલી (જુઓ આકૃતિ 15.4.) છે. બહાર કાઢેલ નર માછલી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

આકૃતિ 15.4

12. તકની એક રમતમાં ગોળ ફરતું એક તીર (arrow) હોય છે. તે 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 માંથી કોઈ એક સંખ્યા પાસે નિર્દેશ કરતું અટકે છે (આકૃતિ 15.5 જુઓ.) અને આ સમસંભાવી પરિણામો છે.

(i) તે 8 તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) અયુગ્મ સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(iii) 2 કરતાં મોટી સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(iv) 9 કરતાં નાની સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

આકૃતિ 15.5

13. પાસાને એકવાર ફેંકવામાં આવે છે તો (i) અવિભાજ્ય સંખ્યા (ii) 2 અને 6 વચ્ચેની સંખ્યા (iii) અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના શોધો.

14. સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું કાઢવામાં આવે, તો

(i) લાલ રંગનો રાજા (ii) મુખમુદ્રાવાળું પત્તું (iii) લાલ રંગનું મુખમુદ્રાવાળું પત્તું

(iv) લાલનો ગુલામ (v) કાળીનું પત્તું (vi) ચોકટની રાણી

મળવાની સંભાવના શોધો.

15. પાંચ ચોકટનાં પત્તાં – દસ્સો, ગુલામ, રાણી, રાજા અને એક્કો એ તમામના મુખ નીચે તરફ રાખીને સરખી રીતે ચીપેલાં છે પછી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે.

(i) પત્તું રાણીનું હશે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) જો રાણીને કાઢીને એક બાજુએ મૂકવામાં આવે અને બીજું પત્તું ખેંચવામાં આવે તે (a) એક્કો હોય (b) રાણી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

16. ખામીવાળી 12 પેન આકસ્મિક રીતે 132 સારી પેનની સાથે ભળી ગઈ છે. એવું શક્ય નથી કે, કેવળ પેનને જોઈને જ કહી શકાય કે, પેન ખામીયુક્ત છે કે નહિ. આ જથ્થામાંથી એક પેન યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. કાઢવામાં આવેલી પેન ખામીરહિત છે તેની સંભાવના શોધો.

17. (i) 20 વીજળીના ગોળાઓનો જથ્થો 4 ખામીયુક્ત ગોળા ધરાવે છે. આ જથ્થામાંથી એક ગોળો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ ગોળો ખામીયુક્ત હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) ધારો કે, (i) માં કાઢવામાં આવેલ ગોળો ખામીયુક્ત નથી અને તેને પાછો મૂકવામાં પણ નથી આવ્યો. હવે, બાકીનાં ગોળામાંથી એક ગોળો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ ગોળો ખામીયુક્ત ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

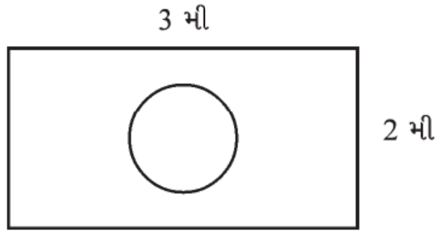
18. એક ખોખામાં 1 થી 90 સુધીના અંક લખેલી 90 ગોળ તકતીઓ છે. જો ખોખામાંથી એક ગોળ તકતી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તેના પર (i) બે અંકની સંખ્યા (ii) પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા (iii) 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

19. એક બાળક પાસે એક એવો પાસો છે જેની છ સપાટીઓ નીચે આપેલા અક્ષરો બતાવે છે :

A	B	C	D	E	A

આ પાસાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે છે પાસા પર (i) A મળે (ii) D મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

20*. ધારો કે, એક પાસાને તમે યાદચ્છિક રીતે આકૃતિ 15.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે લંબચોરસ ક્ષેત્ર પર ફેંકો છો. તે 1 મી વ્યાસના વર્તુળની અંદર પડશે તેની સંભાવના કેટલી ?



આકૃતિ 15.6

21. એક જથ્થો 144 બૉલપેન ધરાવે છે. તેમાંથી 20 ખામીયુક્ત અને બાકીની સારી છે. જો પેન સારી હશે તો, નુરી પેન ખરીદશે, પરંતુ જો તે ખામીયુક્ત હશે તો ખરીદશે નહિ. દુકાનદાર યાદચ્છિક રીતે એક પેન કાઢે છે અને તેને આપે છે.

(i) તે પેન ખરીદશે તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે પેન નહિ ખરીદે તેની સંભાવના કેટલી ?

22. ઉદાહરણ 13 નાં સંદર્ભમાં (i) નીચે આપેલ કોષ્ટક પૂરું કરો :

ઘટના : 'પાસા પરનો સરવાળો'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) એક વિદ્યાર્થી દલીલ કરે છે કે 11 શક્ય પરિણામો 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 છે. તેમાંનાં પ્રત્યેકની સંભાવના $\frac{1}{11}$ છે. શું આપ આ દલીલ સાથે સહમત છો ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

23. એક રમતમાં એક રૂપિયાના સિક્કાને 3 વાર ઉછાળવાનો છે અને તેના પરિણામ દરેક વખતે નોંધવાના છે. જો તમામ વખત ઉછાળતાં સરખું પરિણામ મળે, એટલે કે ત્રણ છાપ અથવા ત્રણ કાંટા તો હનિફ રમત જીતી જાય છે, અન્યથા હારે છે. તો હનિફ રમત હારે તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

24. પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે :

(i) એક પણ વખત ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે નહિ.

(ii) ઓછામાં ઓછી એકવાર ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

[**સૂચન :** એક પાસાને બે વાર ઉછાળવો અને બે પાસાને એક સાથે ઉછાળવા, એ બંનેને એક જ પ્રયોગ ગણવામાં આવે છે.]

25. નીચેનામાંથી કઈ દલીલો સાચી છે અને કઈ સાચી નથી ? તમારા જવાબ માટે કારણો આપો.

(i) જો બે સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો ત્રણ શક્યતાઓ મળે છે - બે છાપ અથવા બે કાંટા અથવા પ્રત્યેકનો એક તેથી, આ પ્રત્યેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે.

(ii) જો પાસાને ઉછાળવામાં આવે તો બે શક્ય પરિણામો મળે છે - અયુગ્મ સંખ્યા અથવા યુગ્મ સંખ્યા, તેથી અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય 15.2 (વૈકલ્પિક)*

1. બે ગ્રાહકો શ્યામ અને એકતા એક જ અઠવાડિયામાં (મંગળવાર થી શનિવાર) કોઈ ચોક્કસ દુકાનની મુલાકાત લે છે. દરેક વ્યક્તિ કોઈ પણ દિવસે દુકાનની મુલાકાત, અન્ય દિવસની જેમ જ લે છે. બંને વ્યક્તિ દુકાનની મુલાકાત (i) એક જ દિવસે (ii) ક્રમિક (એક પછી એક) દિવસોએ (iii) જુદા-જુદા દિવસોએ લેશે તેની સંભાવના કેટલી ?

2. પાસા પર સંખ્યાઓ એ રીતે લખવામાં આવી છે કે તેનાં પૃષ્ઠ, સંખ્યાઓ 1, 2, 2, 3, 3, 6 દર્શાવે છે. તે પાસાને બે વાર ઉછાળવામાં આવે છે અને બંને પાસા પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો પાછળના કોષ્ટકમાં નોંધી તે પૂર્ણ કરો :

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

પ્રથમવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ

બીજીવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ

+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

કુલ સરવાળો

(i) યુગ્મ મળે. (ii) 6 મળે. (iii) ઓછામાં ઓછો 6 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

3. એક થેલામાં 5 લાલ દડા અને કેટલાંક વાદળી (ભૂરા) દડા છે. જો ભૂરો દડો નીકળવાની સંભાવના લાલ દડો નીકળે તેની સંભાવના કરતાં બમણી હોય, તો થેલામાં રહેલા ભૂરા દડાઓની સંખ્યા શોધો.

4. એક પેટીમાં 12 દડા છે. તેમાંના x દડા કાળા છે. જો પેટીમાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે કાળો દડો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

જો બીજા 6 કાળા દડા ખોખામાં મૂકવામાં આવે તો કાળો દડો નીકળવાની સંભાવના હવે પહેલાં હતી તેનાં કરતાં બમણી થાય છે, તો x શોધો.

5. એક બરણીમાં 24 લખોટીઓ છે, કેટલીક લીલી અને બાકીની ભૂરી છે. બરણીમાંથી જો એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે લીલી હોય તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. બરણીમાંની ભૂરી લખોટીઓની સંખ્યા શોધો.

15.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે :

1. પ્રાયોગિક સંભાવના અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવના વચ્ચેનો તફાવત
2. ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, સંકેત P(E) વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$P(E) = \frac{\text{E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}}$$

આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

3. ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના 1 છે.
4. અશક્ય ઘટનાની સંભાવના 0 છે.
5. ઘટના E ની સંભાવના એ સંખ્યા P(E) છે

તથા, $0 \le P(E) \le 1$

6. માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી ઘટનાને પ્રાથમિક (મૂળભૂત) ઘટના કહે છે. પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે.

7. કોઈ પણ ઘટના E માટે $P(E) + P(\overline{E}) = 1$. $\overline{E}$ એ ઘટના 'E નહિ' દર્શાવે છે. E અને $\overline{E}$ પૂરક ઘટનાઓ કહેવાય છે.

વાચકને નોંધ

ઘટનાની એક પ્રાયોગિક અથવા પ્રયોગમૂલક સંભાવના એ હકીકતમાં જે બન્યું છે તેના પર આધારિત છે અને ઘટનાની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, ચોક્કસ ધારણાઓના આધાર પર શું ઘટિત થશે તેની આગાહી કરવાના પ્રયત્નો કરે છે. જેમ પ્રયોગ કરવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ આપણે અપેક્ષા રાખી શકીએ કે, પ્રાયોગિક અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાઓ લગભગ સમાન થાય છે.

G1Z9I2

ગણિતમાં સાબિતીઓ A1

A1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણા રોજિંદા જીવનમાં તર્ક કરવાની અને વિચારવાની ક્ષમતા ખૂબ જ ઉપયોગી છે. ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, જો કોઈ રાજકારણી તમને એમ કહે કે, 'જો તમને સ્વચ્છ સરકારમાં રસ હોય, તો તમારે મને મત આપવો જોઈએ' તો તે વાસ્તવમાં તમને એમ ગળે ઉતારવા ઇચ્છે છે કે, જો તમે તેને મત ન આપ્યો, તો તમને સ્વચ્છ સરકારમાં રસ નથી. એ જ રીતે, જો કોઈ જાહેરાત એવું દર્શાવતી હોય કે, 'બુદ્ધિશાળી લોકો *XYZ* બુટ પહેરે છે,' તો શું કંપની તમને એવું તારણ કાઢવા પ્રેરે છે કે, જો તમે *XYZ* બુટ નહિ પહેરો, તો તમે પૂરતા બુદ્ધિશાળી નથી. તમે એ જોઈ શકો છો કે, ઉપરનાં વિધાનો સામાન્ય લોકોને ગેરમાર્ગે દોરી શકે છે. તેથી, જો આપણે તર્કની પદ્ધતિ યોગ્ય રીતે સમજીએ, તો આપણે અજાણતાં પણ આવા છળમાં પડીએ નહિ.

તર્કનો સાચો ઉપયોગ ગણિતનું હાર્દ છે. વિશિષ્ટ રીતે સાબિતીની રચનામાં તેનો ઉપયોગ થાય છે. ખાસ કરીને ભૂમિતિમાં ધોરણ IXમાં તમે સાબિતીની સંકલ્પનાનો પરિચય મેળવ્યો છે અને તમે ખરેખર ઘણાં વિધાનો સાબિત કર્યાં છે. યાદ કરો કે, જેમાંનું પ્રત્યેક ગાણિતિક વિધાન સાબિતીમાંના અગાઉના વિધાન પરથી અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ કોઈ પ્રમેય પરથી અથવા પૂર્વધારણા કે પ્રતીપ પરથી તાર્કિક રીતે તારવેલું હોય છે એવાં કેટલાંક વિધાનોથી સાબિતી રચાય છે. સાબિતીની રચનામાં મુખ્ય સાધન, આનુમાનિક તર્કની પ્રક્રિયા છે.

આ પ્રકરણની શરૂઆત આપણે ગાણિતિક વિધાન શું છે, તેના પુનરાવર્તનથી કરીશું. આપણે આનુમાનિક તર્કમાં આપણાં કૌશલ્યો ધારદાર બનાવવા કેટલાંક ઉદાહરણોનો ઉપયોગ કરીને આગળ વધીશું. આપણે નિષેધનો ખ્યાલ પણ મેળવીશું અને આપેલા વિધાનનું નિષેધ મેળવીશું. પછી આપણે ચર્ચા કરીશું કે, આપેલ વિધાનનું પ્રતીપ કેવી રીતે શોધી શકાય. અંતે, આપણે ધોરણ IX માં શીખેલા કેટલાક પ્રમેયોની સાબિતીના પૃથક્કરણથી સાબિતીના ઘટકોનું પુનરાવર્તન કરીશું. તેનો તમે ધોરણ IX માં પરિચય મેળવ્યો છે તેમ જ તે આ પુસ્તકના ઘણાં પ્રકરણમાં છે.

A1.2 ગાણિતિક વિધાનોનો પુનઃપરિચય

યાદ કરો કે, વિધાન એ આજ્ઞા, ઉદ્‌ગાર કે પ્રશ્ન ન હોય તેવું અર્થપૂર્ણ વાક્ય છે, ઉદાહરણ તરીકે, ''ક્રિકેટના

વિશ્વકપની અંતિમ મૅચમાં કઈ બે ટીમ રમી રહી છે ?'' તે પ્રશ્ન છે, વિધાન નથી. ''જાઓ અને તમારું ગૃહકાર્ય પૂરું કરો.'' તે આજ્ઞા છે, વિધાન નથી. ''કેવો અદ્ભૂત ગોલ !'' તે ઉદ્ગાર છે, વિધાન નથી.

યાદ રાખો, સામાન્ય રીતે વિધાન નીચેનામાંથી કોઈ એક હોઈ શકે :

- *હંમેશાં સત્ય*
- *હંમેશાં અસત્ય*
- *અસ્પષ્ટ (સંદિગ્ધ)*

ધોરણ IX માં તમે **ગણિતમાં** એ પણ અભ્યાસ કર્યો છે કે, **વાક્ય કાં તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય હોય તો જ તે વાક્ય સ્વીકાર્ય વિધાન બને.** તેથી સંદિગ્ધ વિધાનોને ગાણિતિક વિધાનો તરીકે ગણતરીમાં લેવામાં આવતાં નથી.

હવે, ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણોથી આપણી સમજની સમીક્ષા કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિધાનો હંમેશાં સત્ય, હંમેશાં અસત્ય કે સંદિગ્ધ છે તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :

(i) સૂર્ય પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે.

(ii) વાહનોને ચાર પૈડાં હોય છે.

(iii) પ્રકાશની અંદાજિત ઝડપ 3×10^5 કિમી/સે છે.

(iv) કોલકત્તાનો રસ્તો નવેમ્બરથી માર્ચ બંધ રહે છે.

(v) દરેક મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન છે.

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન હંમેશાં અસત્ય છે. કારણ કે, ખગોળશાસ્ત્રીઓએ પ્રસ્થાપિત કર્યું છે કે, પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે.

(ii) આ વિધાન સંદિગ્ધ છે, કારણ કે, આપણે નક્કી ન કરી શકીએ કે, તે હંમેશાં સત્ય છે કે હંમેશાં અસત્ય. તે વાહન કયું છે તેના પર આધારિત છે. વાહનને *2, 3, 4, 6, 10* વગેરે પૈડાં હોઈ શકે.

(iii) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, કારણ કે, ભૌતિકશાસ્ત્રીઓએ તે સિદ્ધ કર્યું છે.

(iv) આ વિધાન સંદિગ્ધ છે, કારણ કે, કયા રસ્તાનો નિર્દેશ કરેલો છે, તે સ્પષ્ટ નથી.

(v) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે કારણ કે, દરેક મનુષ્યે ક્યારેક તો મરવાનું છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો અને તમારા જવાબનાં કારણો જણાવો :

(i) બધા સમબાજુ ત્રિકોણો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

(ii) કેટલાક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(iii) બધા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

(v) કેટલીક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.

(vi) બધા પૂર્ણાંકો સંમેય હોય છે તેવું નથી.

(vii) કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે કોઈ સંમેય સંખ્યા નથી.

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે સમબાજુ ત્રિકોણોમાં બધી બાજુઓ સમાન હોય છે, અને તેથી તે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ પણ છે.

(ii) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, જેના આધાર ખૂણાઓ $60°$ ના હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ હોઈ શકે છે.

(iii) આ વિધાન અસત્ય છે. તેનું કોઈ પ્રતિ ઉદાહરણ આપો.

(iv) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, જ્યાં p કોઈ પૂર્ણાંક અને $q = 1$ હોય તેવી $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંકો છે. (ઉદાહરણ તરીકે $3 = \frac{3}{1}$)

(v) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં છે, p અને q પૂર્ણાંક છે અને p એ q વડે નિઃશેષ વિભાજ્ય ન હોય, તો તે પૂર્ણાંક નથી. (ઉદાહરણ તરીકે $\frac{3}{2}$)

(vi) 'સંમેય સંખ્યા ન હોય તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યા છે' એવું આ વિધાન કહે છે. આ અસત્ય છે, કારણ કે, બધા પૂર્ણાંકો સંમેય સંખ્યા છે.

(vii) આ વિધાન અસત્ય છે. તમે જાણો છે કે બે સંમેય સંખ્યાઓ r અને s વચ્ચે સંમેય સંખ્યા $\frac{r+s}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $x < 4$ હોય, તો નીચેનાં વિધાનોમાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3$ લેતાં $x < 4$ છે અને $2x > 8$ નું સમાધાન ન થાય.

(ii) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3.5$ લેતાં $x < 4$ છે અને $2x < 6$ નું સમાધાન ન થાય.

(iii) આ વિધાન સત્ય છે. તે $x < 4$ અને $2x < 8$ સમાન વિધાનો છે.

ઉદાહરણ 4 : નીચેનાં વિધાનોને યોગ્ય શરત સાથે એવી રીતે પુનઃ લખો કે જેથી સત્ય વિધાન મળે.

(i) જો કોઈ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

(ii) કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુઓ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતી રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

(iii) બધા પૂર્ણાંક p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય છે.

(iv) બધાં દ્વિઘાત સમીકરણોને બે વાસ્તવિક ઉકેલ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

(ii) કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતી રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

(iii) બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય છે.

(iv) બધાં દ્વિઘાત સમીકરણોને વધુમાં વધુ બે વાસ્તવિક ઉકેલ હોય છે.

નોંધ : ઉપરનાં વિધાનોને ફરીથી દર્શાવવાની અન્ય રીત પણ હોઈ શકે. સરળતા ખાતર (iii) ને ફરીથી $\sqrt{p}$ એ બધા પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવા પૂર્ણાંકો માટે અસંમેય છે એમ પણ દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય A 1.1

1. નીચેનાં વિધાનો હંમેશાં સત્ય, હંમેશાં અસત્ય કે સંદિગ્ધ પૈકી કયાં પ્રકારનાં છે તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણ આપો :
   (i) ગણિતનાં બધાં પાઠ્યપુસ્તકો રસપ્રદ હોય છે.
   (ii) પૃથ્વીથી સૂર્યનું અંતર આશરે 1.5×10^8 કિમી છે.
   (iii) બધા મનુષ્યો વૃદ્ધ થશે.
   (iv) ઉત્તરકાશીથી હર્શિલની મુસાફરી કંટાળાજનક છે.
   (v) એક સ્ત્રીએ દૂરબીનમાંથી એક હાથી જોયો.
2. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :
   (i) બધા ષટ્કોણો બહુકોણો છે.
   (ii) કેટલાક બહુકોણો પંચકોણો છે.
   (iii) બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓ *2* વડે વિભાજ્ય હોય તે સત્ય નથી.
   (iv) કેટલીક વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અસંમેય છે.
   (v) બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંમેય હોય તે સત્ય નથી.
3. ધારો કે, a તથા b એવી વાસ્તવિક સંખ્યા છે જેની માટે $ab \neq 0$ છે. નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો :
   (i) a અને b બંને શૂન્ય હોવા જોઈએ.
   (ii) a અને b બંને શૂન્યેતર હોવા જોઈએ.
   (iii) a અને b પૈકી કોઈ એક શૂન્યેતર હોવો જોઈએ.
4. નીચેનાં વિધાનોને યોગ્ય શરતોની સાથે તે સત્ય બને તે રીતે પુનઃ લખો :
   (i) જો $a^2 > b^2$, હોય, તો $a > b$
   (ii) જો $x^2 = y^2$, હોય, તો $x = y$
   (iii) જો $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ હોય, તો $x = 0$
   (iv) ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.

A1.3 આનુમાનિક તર્ક

ધોરણ IX માં તમે આનુમાનિક તર્કની સંકલ્પનાનો પરિચય મેળવ્યો છે. અહીં આપણે બીજાં વધુ ઉદાહરણો લઈને આપેલાં અને સત્ય ધારેલાં વિધાનો પરથી તારણ કાઢવામાં આનુમાનિક તર્ક કેવી રીતે ઉપયોગી છે તે દર્શાવીશું. આપેલાં વિધાનોને 'પ્રતિજ્ઞાઓ' અથવા 'પૂર્વધારણાઓ' કહે છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોથી શરૂ કરીશું.

ઉદાહરણ 5 : 'બિજાપુર કર્ણાટક રાજ્યમાં છે' એમ આપેલ છે અને ધારો કે, શબાના બિજાપુરમાં રહે છે. શબાના કયા રાજ્યમાં રહે છે ?

ઉકેલ : અહીં બે પ્રતિજ્ઞાઓ છે :

(i) બિજાપુર કર્ણાટક રાજ્યમાં છે. (ii) શબાના બિજાપુરમાં રહે છે.

આ પ્રતિજ્ઞાઓ પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, શબાના કર્ણાટક રાજ્યમાં રહે છે.

ઉદાહરણ 6 : 'ગણિતનાં બધાં પાઠ્યપુસ્તકો રસપ્રદ હોય છે' એવું આપેલ છે અને ધારો કે, તમે ગણિતનું પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો. તમે જે પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો તેના વિશે શું કહી શકાય ?

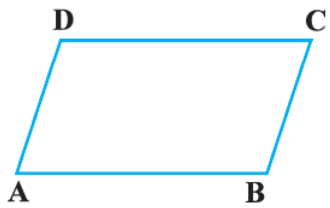
ઉકેલ : આપેલ પ્રતિજ્ઞાના વિધાન (અથવા પૂર્વધારણાઓ)નો ઉપયોગ કરીને તારવી શકાય કે તમે રસપ્રદ પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો.

ઉદાહરણ 7 : આપેલું છે કે, $y = -6x + 5$ અને જો $x = 3$ તો y નું મૂલ્ય કેટલું ?

ઉકેલ : આપેલ બે પૂર્વધારણાઓ પરથી,

$y = -6(3) + 5 = -13$ મળે.

ઉદાહરણ 8 : ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એવું આપેલું છે. ધારો કે, AD = 5 સેમી અને AB = 7 સેમી (જુઓ આકૃતિ A1.1.) DC અને BC ની લંબાઈઓ વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?



આકૃતિ A 1.1

ઉકેલ : અહીં આપેલ છે કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેથી આપણે તારવી શકીએ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા ગુણધર્મો ચતુષ્કોણ ABCD ને લાગુ પડે છે. વિશેષ કરીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુ એકબીજીને સમાન છે તે ગુણધર્મ સત્ય છે. તેથી હવે AD = 5 સેમી છે તે પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, BC = 5 સેમી. એ જ રીતે તારવી શકાય કે DC = 7 સેમી.

નોંધ : આ ઉદાહરણમાં પ્રતિજ્ઞા (પક્ષ)માં સમાયેલા ગુણધર્મોને શોધીને તેનો કેવી રીતે ઉપયોગ કરવો તે આપણે જોયું.

ઉદાહરણ 9 : બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે અને ધારો કે, 19423 અવિભાજ્ય છે. $\sqrt{19423}$ માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

ઉકેલ : આપણે તારવી શકીએ કે, $\sqrt{19423}$ અસંમેય છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે નોંધ્યું હશે કે, આપણે જાણતા નથી કે, પ્રતિજ્ઞા સત્ય છે કે નહિ. આપણે માની લઈએ છીએ કે પક્ષ સત્ય છે અને પછી આનુમાનિક તર્ક લગાડીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, ઉદાહરણ 9 માં આપણે પરીક્ષણ નથી કર્યું કે 19423 એ અવિભાજ્ય છે કે નહીં. દલીલની સરળતા ખાતર આપણે એવું ધાર્યું છે કે, તે અવિભાજ્ય છે. આ વિભાગમાં આપણે એ વાત પર ભાર મૂકવા માંગીએ છીએ કે, એક ચોક્કસ વિધાન આપ્યું હોય તો તારણ પર આવવા માટે આનુમાનિક તર્કનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો. અહીં વાસ્તવિક બાબત એ છે કે, આપણે તર્કની સાચી પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી રહ્યા છીએ અને તર્કની આ પદ્ધતિ પૂર્વધારણાઓની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા હોવા પર આધારિત નથી. એ નોંધવું જોઈએ કે, જો આપણે અસત્ય આધાર વિધાનોથી (કે પૂર્વધારણાઓથી) શરૂ કરીએ તો આપણે અસત્ય તારણ પર આવીએ.

સ્વાધ્યાય A 1.2

1. એવું આપેલ છે કે, 'સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે' અને ધારો કે A સ્ત્રી છે. આપણે A ના વિશે શું તારણ કાઢી શકીએ ?
2. 'બે સંમેય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સંમેય છે' તેમ આપેલ છે. a અને b સંમેય સંખ્યાઓ છે. ab માટે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?
3. 'અસંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત છે અને $\sqrt{17}$ અસંમેય છે' એમ આપેલ છે. $\sqrt{17}$ ના દશાંશ નિરૂપણ માટે આપણે શું તારણ કાઢી શકીએ ?
4. '$y = x^2 + 6$ અને $x = -1$' આપેલ હોય તો y ની કિંમત માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

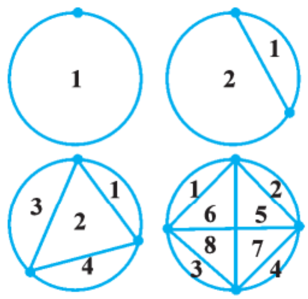
5. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલ છે અને $\angle B = 80°$. સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના બીજા ખૂણાઓ માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

6. 'PQRS ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે' એવું આપેલ છે અને તેના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે. ચતુષ્કોણ PQRS વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?

7. બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે એમ આપેલું છે અને ધારો કે, 3721 અવિભાજ્ય છે. તમે તારવી શકો કે, $\sqrt{3721}$ અસંમેય સંખ્યા છે ? તમારું તારણ સાચું છે ? સત્ય હોય તો શા માટે અને અસત્ય હોય તો શા માટે ?

A1.4 ધારણાઓ, પ્રમેયો, સાબિતીઓ અને ગાણિતિક તર્ક

આકૃતિ A 1.2 ધ્યાનમાં લો. પ્રથમ વર્તુળમાં એક બિંદુ, બીજા વર્તુળમાં બે બિંદુઓ, ત્રીજા વર્તુળમાં ત્રણ બિંદુઓ અને એ પ્રમાણે આગળ આપેલું છે. દરેક વિકલ્પમાં બિંદુઓને જોડતી શક્ય બધી રેખાઓ દોરેલી છે.



આકૃતિ A 1.2

રેખાઓ વર્તુળને પરસ્પર અનાચ્છાદી પ્રદેશોમાં (સામાન્ય ભાગ ન હોય તેવા) વિભાજિત કરે છે. આ પ્રદેશોને આપણે ગણી શકીએ અને પરિણામોને નીચે દર્શાવેલા કોષ્ટકમાં નોંધીએ :

બિંદુઓની સંખ્યા	પ્રદેશોની સંખ્યા
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

તમારામાંથી કેટલાકે આપેલાં બિંદુઓથી બનતા પ્રદેશોની સંખ્યા વિશેના સૂત્રનું અનુમાન કર્યું હશે. ધોરણ IXના અભ્યાસ પરથી તમને યાદ હશે કે, આ બુદ્ધિગમ્ય અનુમાનને ગાણિતિક અટકળ કહે છે.

ધારો કે, તમારી ધારણા છે કે, વર્તુળ પર આપેલાં n બિંદુઓમાંથી પ્રત્યેક બે બિંદુઓને જોડતી બધી શક્ય રેખાઓ દોરીએ તો મળતા પરસ્પર અનાચ્છાદી પ્રદેશોની સંખ્યા 2^{n-1} છે. આ એક ખૂબ જ બુદ્ધિગમ્ય અનુમાન છે. અને કોઈ પરીક્ષણ કરી શકે કે, જો $n = 5$ હોય, તો આપણને 16 પ્રદેશો મળે. તેથી, 5 બિંદુઓ માટે આ સૂત્ર સત્ય

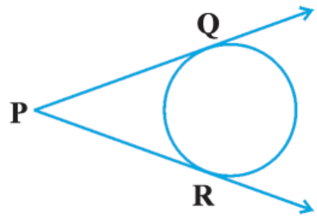
છે. તમે ગમે તે n બિંદુઓ માટે 2^{n-1} અનાચ્છાદિત પ્રદેશો મળે તે સત્ય છે એમ તમે કેવી રીતે જવાબ આપશો. જો કોઈ તમને પૂછે કે, આ $n = 25$ માટે તમે સંતુષ્ટ થશો ? તો આવા પ્રશ્નો સાથે કામ કરવા માટે તમારે જે શંકાથી પર રહીને આ પરિણામ સત્ય છે તેવું દર્શાવતી હોય એવી સાબિતીની જરૂર પડે અથવા કોઈ n માટે આ પરિણામ ખોટું છે તેવું દર્શાવતા ઉદાહરણની જરૂર પડે. ખરેખર, જો તમે આના માટે ગંભીર હો અને $n = 6$ માટે પ્રયત્ન કર્યો હોય, તો તમે જોશો કે, 31 પ્રદેશો મળે છે. અને $n = 7$ માટે 57 પ્રદેશો છે. તેથી, $n = 6$ એ ઉપરની ધારણા માટેનું પ્રતિઉદાહરણ છે. આ પ્રતિઉદાહરણની અગત્યતા દર્શાવે છે. તમને કદાચ યાદ હશે કે, ધોરણ IX માં આપણે ચર્ચા કરી છે કે **કોઈ વિધાનને અસત્ય છે તેમ સાબિત કરવા કોઈ એક પ્રતિઉદાહરણ આપવું પર્યાપ્ત છે.**

તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું હશે કે, $n = 1, 2, 3, 4$ અને 5 માટે પરિણામ ચકાસવાને બદલે પ્રદેશોની સંખ્યા સંબંધી સાબિતી પર આપણે ભાર મૂકવો જોઈએ. હવે બીજાં વધારે ઉદાહરણો જોઈએ. તમે નીચેના પરિણામથી પરિચિત છો. (પ્રકરણ 5માં આપેલું છે.)

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

તેની યથાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે પરિણામને $n = 1, 2, 3...$ વગેરે માટે ચકાસવું પૂરતું નથી, કારણ કે, કોઈ n માટે આ પરિણામ સત્ય ન પણ હોય. ઉપરના ઉદાહરણમાં $n = 6$ માટે પરિણામ અસત્ય ઠરે છે. જે શંકાથી પર રહીને સત્ય પ્રસ્થાપિત કરે છે એવી સાબિતીની આપણી જરૂરિયાત છે. પછીના વર્ગોમાં તમે સાબિતી શીખશો.

હવે, આકૃતિ A 1.3 ધ્યાનમાં લો. તેમાં P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો PQ અને PR દોરેલા છે.



આકૃતિ A 1.3

તમે સાબિત કર્યું છે કે, PQ = PR (પ્રમેય 10.2). તમે ફક્ત આવી કેટલીક આકૃતિઓ દોરી, સંબંધિત સ્પર્શકોની લંબાઈ માપીને અને દરેક કિસ્સામાં પરિણામ સત્ય છે તેવું તમારી જાતે ચકાસીને સંતુષ્ટ થતા નથી.

તમને યાદ છે કે, સાબિતી શાની બનેલી છે ? તે સાબિતીમાં આવેલાં અગાઉનાં વિધાન પરથી અથવા સાબિત કરવાના પરિણામ પર આધારિત ન હોય તેવાં અગાઉ સાબિત કરેલાં (અને જાણીતાં) પરિણામો પરથી અથવા પૂર્વધારણાઓથી અથવા વ્યાખ્યા પરથી અથવા તમે કરેલી ધારણાઓ પરથી મળેલાં વિધાનોની શ્રૃંખલાથી (યથાર્થ દલીલો) તે બની હતી. તમે જે વિધાન સાબિત કરવા માંગો છો તે વિધાન PQ = PR પરથી તમારી સાબિતી પૂરી કરો. કોઈ સાબિતી રચવાનો આ રસ્તો છે.

સાબિતીની રચના કેમ થાય તેની વધુ સારી સમજ મેળવવામાં ઉપયોગી થાય તે માટે હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો અને પ્રમેયો અને સાબિતીનાં પૃથક્કરણ જોઈશું.

આપણે સાબિતીની કહેવાતી પ્રત્યક્ષ રીત કે આનુમાનિક રીતનો ઉપયોગ કરીને શરૂ કરીશું. આ રીતમાં, આપણે કેટલાંક વિધાનો રચીશું. દરેક વિધાન આગળનાં વિધાનો પર આધારિત છે. જો દરેક વિધાન તાર્કિક રીતે સત્ય હોય (એટલે કે માન્ય દલીલ હોય), તો તાર્કિક સત્ય તારણ મળે.

ઉદાહરણ 10 : બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો સંમેય સંખ્યા છે.

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે, x અને y સંમેય સંખ્યા છે.	આપણે x અને y સંમેય છે ત્યાંથી શરૂ કરીશું, કારણ કે, પરિણામ સંમેય સંખ્યા વિશે છે.
2	ધારો કે, પૂર્ણાંકો m, n, p અને q માટે $x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ અને $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$	સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતાં
3	તેથી, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$	પરિણામ સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળાનો નિર્દેશ કરે છે. તેથી, આપણે $x + y$ મેળવીએ.
4	પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે જોઈ શકીએ કે, $mq + np$ અને nq પૂર્ણાંકો છે.	પૂર્ણાંકોના જાણીતા ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કર્યો.
5	$n \neq 0$ અને $q \neq 0$ હોવાથી $nq \neq 0$ મળે.	પૂર્ણાંકોના જાણીતા ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કર્યો.
6	તેથી, $x + y = \frac{mq+np}{nq}$ સંમેય સંખ્યા છે.	સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કર્યો.

નોંધ : ધ્યાન આપો કે, ઉપરની સાબિતીનું દરેક વિધાન આગળ પ્રસ્થાપિત થયેલ તથ્ય કે વ્યાખ્યા પર આધારિત છે.

ઉદાહરણ 11 : 3 કરતાં મોટી દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા કોઈક પૂર્ણાંક k માટે $6k + 1$ કે $6k + 5$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

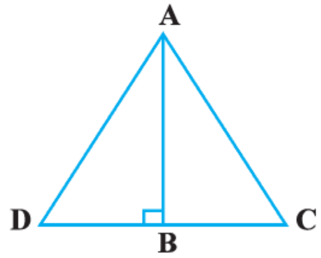
ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે, p એ 3 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.	3 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા વિષે પરિણામ છે. આથી, આપણે એવી સંખ્યાથી શરૂ કરીશું.
2	p ને 6 વડે ભાગતાં, p એ ધન પૂર્ણાંક k માટે $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, અનૃણ k માટે $6k + 5$ સ્વરૂપનો હોઈ શકે.	યુક્લિડની ભાગવિધિ પરથી
3	પરંતુ $6k = 2\ (3k)$, $6k + 2 = 2\ (3k + 1)$, અને $6k + 3 = 3(2k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k+2)$ તેથી, તે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ નથી.	p અવિભાજ્ય છે એમ આપેલું હોવાથી p ના સ્વરૂપનું પૃથક્કરણ કરીએ.
4	તેથી કોઈ ધનપૂર્ણાંક k માટે, p એ $6k + 1$ કે અનૃણ પૂર્ણાંક k માટે $6k + 5$ સ્વરૂપમાં જ હોવો જોઈએ.	બીજા વિકલ્પો દૂર કરીને આપણે આ તારણ પર આવીએ.

નોંધ : (1) $3k$, $3k + 1$, $2k + 1$ અને $3k + 2$ એ 1 કરતાં મોટા છે. કારણ કે, $k \neq 0$

(2) ઉપરના ઉદાહરણમાં, આપણે અલગ-અલગ વિકલ્પો દૂર કરીને તારણ પર આવ્યા. આ રીતને કેટલીક વાર **વિકલ્પ નિવારણની રીત** તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

પ્રમેય A1.1 : (*પાયથાગોરસના પ્રમેયનું પ્રતીપ*) : જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો છે.



આકૃતિ A 1.4

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે ΔABC એ વિધાન $AC^2 = AB^2 + BC^2$ નું સમાધાન કરે છે.	આપણે આવા ત્રિકોણ વિશેનું એક વિધાન સાબિત કરીએ છીએ. આથી આ પરિણામ લઈને આપણે શરૂઆત કરીએ.
2	AB ને લંબરેખા BD રચો જેથી $BD = BC$ અને A તથા D જોડો.	જેના વિશે વાત કરી છે તેવું આ એક સાહજિક સોપાન છે. આપણે વારંવાર સાબિત થયેલા પ્રમેયોની જરૂર પડશે.
3	રચના પરથી, ΔABD કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી $AD^2 = AB^2 + BD^2$	આપણે પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું. તેને સાબિત કર્યો છે.
4	રચના પરથી, $BD = BC$ હોવાથી $AD^2 = AB^2 + BC^2$	તાર્કિક તારણ
5	તેથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ધારણાનો ઉપયોગ અને આગળનું વિધાન
6	AC અને AD ધન હોવાથી $AC = AD$	સંખ્યાના જાણીતા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં
7	આપણે દર્શાવ્યું છે કે $AC = AD$. ઉપરાંત રચના કરી છે કે $BC = BD$ અને AB સામાન્ય છે. તેથી બાબાબા પરથી, $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	જાણીતા પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યો.
8	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ હોવાથી, $\angle ABC \cong \angle ABD$ મળે અને $\angle ABD$ કાટકોણ છે. $\therefore \angle ABC = 90°$	અગાઉ પ્રસ્થાપિત હકીકતને આધારે તાર્કિક તારણ

નોંધ : ઉપરના પૈકી દરેક પરિણામ બધાં એક સાથે જોડાયેલાં પરિણામો છે. તેમને સોપાનોની ક્રમિકતાથી સાબિત કર્યાં છે તેમનો ક્રમ અગત્યનો છે. સાબિતીમાંનું દરેક સોપાન આગળના સોપાનને અને અગાઉના જાણીતાં પરિણામોને અનુસરે છે. (જુઓ પ્રમેય 6.9.)

સ્વાધ્યાય A 1.3

નીચેનાં દરેક પ્રશ્નમાં એક વિધાન સાબિત કરવાનું છે. દરેક સાબિતીમાં બધાં સોપાનોની યાદી બનાવો અને દરેક સોપાન માટે કારણ આપો :

1. બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 4 વડે વિભાજ્ય છે.

2. બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓ લો. તેમના વર્ગોનો સરવાળો લો. અને મળતા પરિણામમાં 6 ઉમેરો. સાબિત કરો કે આ રીતે પ્રાપ્ત નવી સંખ્યા હંમેશાં 8 વડે વિભાજ્ય છે.

3. જો $p \geq 5$ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય, તો સાબિત કરો કે, $p^2 + 2$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

(***સૂચન :*** ઉદાહરણ 11નો ઉપયોગ કરો.)

4. જો x અને y સંમેય સંખ્યાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે, xy સંમેય સંખ્યા છે.

5. જો a અને b ધન પૂર્ણાંક હોય, તો તમે જાણો છો કે, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, જ્યાં q એ પૂર્ણ સંખ્યા છે. સાબિત કરો કે ગુ.સા.અ. (a, b) = ગુ.સા.અ. (b, r)

[**સૂચન :** ધારો કે, ગુ.સા.અ. $(b, r) = h$. તેથી, $b = k_1h$ અને $r = k_2h$ જ્યાં k_1 અને k_2 પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.]

6. ત્રિકોણ ABCની બાજુ BC ને સમાંતર રેખા AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5 વિધાનનું નિષેધ

આ વિભાગમાં, આપણે વિધાનના નિષેધનો અર્થ શું છે તેની ચર્ચા કરીશું. આપણે શરૂ કરીએ તે પહેલાં આપણે સંકલ્પના સમજવી સરળ બને તે માટે કેટલાક સંકેત દાખલ કરીએ. શરૂઆતમાં આપણે વિધાનને એક એકમ તરીકે લઈએ અને તેને એક સંકેત આપીએ. ઉદાહરણ તરીકે, વિધાન : 'દિલ્લીમાં પહેલી સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.' ને આપણે p વડે દર્શાવીએ. આને આમ પણ લખી શકાય.

p : દિલ્લીમાં પહેલી સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.

એ જ રીતે, ચાલો આપણે લખીએ.

q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.

r : માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.

$s : 2 + 2 = 4$

t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

આ સંકેત આપણને વિધાનોના ગુણધર્મોની ચર્ચા કરવા તેમજ કેવી રીતે તેમને જોડી શકાય તે માટે મદદ કરે છે. શરૂઆતમાં આપણે જેને 'સાદું' વિધાન કહીએ છીએ તેના વિશે જોઈશું અને પછી 'સંયુક્ત' વિધાન વિશે જોઈશું.

હવે નીચેનું કોષ્ટક ધ્યાનમાં લો. તેમાં આપેલા દરેક વિધાન પરથી નવું વિધાન બનાવ્યું છે.

મૂળ વિધાન	નવું વિધાન
p : દિલ્લીમાં 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.	$\sim p$: તે અસત્ય છે કે, 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ દિલ્લીમાં વરસાદ હતો.
q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.	$\sim q$: તે અસત્ય છે કે, બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.
r : માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.	$\sim r$: તે અસત્ય છે કે, માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.
$s : 2 + 2 = 4$	$\sim s$: તે અસત્ય છે કે, $2 + 2 = 4$
t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.	$\sim t$: તે અસત્ય છે કે, ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

કોષ્ટકમાંનું નવું વિધાન જૂના વિધાનને અનુરૂપ નિષેધ છે. એટલે કે, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ અને $\sim t$ અનુક્રમે વિધાનો p, q, r, s અને t નાં નિષેધ છે. અહીં, $\sim p$ એ 'p નથી' એમ વંચાય. વિધાન $\sim p$ એ હકાર વિધાન p નું નકાર બનાવે છે. ધ્યાન આપો કે, આપણી સામાન્ય વાતચીતમાં આપણે $\sim p$ નો સરળ અર્થ 'દિલ્લીમાં *1* સપ્ટેમ્બર *2005*ના રોજ વરસાદ ન હતો એમ લઈએ છીએ.' તેમ છતાં જ્યારે આપણે આમ કરીએ ત્યારે તેની કાળજી લેવી જરૂરી છે. તમે કદાચ એવું ધારતા હો કે, વિધાનનું નિષેધ સરળ રીતે મેળવવા આપેલા વિધાનમાં યોગ્ય જગ્યાએ 'નહી' દાખલ કરીને મેળવી શકાય.

જ્યારે વિધાન ''બધા''થી શરૂ થતું હોય, ત્યારે p ના આ કિસ્સામાં મુશ્કેલી આવશે. ઉદાહરણ તરીકે વિધાન q નો વિચાર કરો. q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે. આ વિધાનનું નિષેધ આપણે $\sim q$ તરીકે લઈએ. તે અસત્ય છે કે, બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે તે ''કેટલાક શિક્ષકો પુરુષ છે''ના જેવું વિધાન છે.

ચાલો આપણે જોઈએ કે, જો માત્ર ''નહિ'' એ q માં ઉમેરીએ તો શું થાય. આપણને એવું વિધાન મળે : ''બધા શિક્ષકો સ્ત્રી નથી'' અથવા આપણે એ વિધાન મેળવી શકીએ : ''બધા જ શિક્ષકો સ્ત્રી નથી.'' પહેલું વિધાન લોકોને ગૂંચવણમાં મૂકી શકે. તેનો સૂચિતાર્થ (જો આપણે શબ્દ 'બધા' પર ભાર મૂકીએ) એ છે કે, બધા શિક્ષકો પુરુષ છે. આ ચોક્કસ રીતે q નું નિષેધ નથી. તેમ છતાં, બીજું વિધાન $\sim q$ નો અર્થ આપે છે. એટલે કે, ઓછામાં ઓછો એક શિક્ષક હોય જે સ્ત્રી ન હોય. તેથી, જ્યારે વિધાનનું નિષેધ લખો ત્યારે કાળજી લો !

તેથી, આપણે સાચા નિષેધનો નિર્ણય કેવી રીતે કરીશું? આપણે નીચેના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીએ.

ધારો કે, p એક વિધાન છે અને $\sim p$ તેનું નિષેધ છે. જ્યારે p સત્ય હોય ત્યારે $\sim p$ અસત્ય હોય અને જ્યારે p અસત્ય હોય ત્યારે $\sim p$ સત્ય હોય.

ઉદાહરણ તરીકે, જો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે, તે સત્ય હોય, તો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે અસત્ય છે. ''જો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે'' એ અસત્ય હોય તો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે સત્ય હોય.

આ જ રીતે વિધાનો s અને t ના નિષેધ માટે, $s = 2 + 2 = 4$ નું નિષેધ, $\sim s = 2 + 2 \neq 4$

t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

નિષેધ, $\sim t$: ત્રિકોણ ABC સમબાજુ નથી.

તો હવે, $\sim(\sim s)$ શું થશે ? તે $2 + 2 = 4$ થશે. તે s છે અને $\sim(\sim t)$ શું છે ?

''ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે'' તેમ થશે. એટલે કે t છે.

હકીકતમાં કોઈ પણ વિધાન p માટે $\sim(\sim p)$ એ p છે.

ઉદાહરણ 12 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ જણાવો :

(i) માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી નથી.

(ii) બધી અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

(iii) $\sqrt{2}$ અસંમેય સંખ્યા છે.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

(v) બધા શિક્ષકો પુરુષ નથી.

(vi) કેટલાક ઘોડાઓ બદામી રંગના નથી.

(vii) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી નથી કે, જેથી $x^2 = -1$ થાય.

ઉકેલ :

(i) માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે અસત્ય છે. એટલે કે, માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે.

(ii) બધી અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તે અસત્ય છે, એટલે કે, કેટલીક (ઓછામાં ઓછી એક) અસંમેય સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. કોઈ આને એવું પણ લખી શકે ''બધી જ અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તેવું સત્ય નથી.''

(iii) $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તે અસત્ય છે, એટલે કે, $\sqrt{2}$ અસંમેય નથી.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે તે અસત્ય છે, એટલે કે કોઈક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.

(v) બધા શિક્ષકો પુરુષો નથી તે અસત્ય છે, એટલે કે, કેટલાક શિક્ષકો સ્ત્રીઓ છે.

(vi) કેટલાક ઘોડાઓ બદામી રંગના નથી તે અસત્ય છે, એટલે કે, બધા ઘોડાઓ બદામી રંગના છે.

(vii) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા એવી નથી કે જેથી, $x^2 = -1$ થાય તે અસત્ય છે, એટલે કે, ઓછામાં ઓછી એક વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી છે જેથી, $x^2 = -1$ થાય.

નોંધ : ઉપરની ચર્ચા પરથી, કોઈ વિધાનનું નિષેધ મેળવવા માટે આપણે નીચેના કાર્યનિયમો સુધી પહોંચ્યા છીએ.

(i) પહેલાં નહિ લખીને વિધાન લખો.

(ii) જો તેમાં કોઈ ગૂંચવણ હોય, તો વિશિષ્ટ રીતે, વિધાનોમાં 'બધા' કે 'કેટલાક' સમાયેલા હોય ત્યારે યોગ્ય સુધારા કરો.

સ્વાધ્યાય A 1.4

1. નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ જણાવો :

(i) મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન છે.

(ii) રેખા l એ રેખા m ને સમાંતર છે.

(iii) આ પ્રકરણમાં ઘણા સ્વાધ્યાય છે.

(iv) બધી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

(v) કેટલીક અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે.

(vi) કોઈ વિદ્યાર્થી આળસુ નથી.

(vii) કેટલીક બિલાડીઓ કાળી નથી.

(viii) $\sqrt{x} = -1$ થાય તેવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x નથી.

(ix) પૂર્ણાંક સંખ્યા a, 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(x) a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો છે.

2. નીચેના દરેક પ્રશ્નોમાં, બે વિધાનો છે. બીજું વિધાન એ પહેલા વિધાનનું નિષેધ છે કે નહીં તે જણાવો.

(i) મુમતાઝ ભૂખી છે.
મુમતાઝ ભૂખી નથી.

(ii) કેટલીક બિલાડીઓ કાળી છે.
કેટલીક બિલાડીઓ કથ્થાઈ છે.

(iii) બધા હાથી મોટા છે.
એક હાથી મોટો નથી.

(iv) બધાં અગ્નિશામક યંત્રો લાલ હોય છે.
બધાં અગ્નિશામક યંત્રો લાલ નથી.

(v) કોઈ મનુષ્ય ગાય નથી.
કેટલાક મનુષ્યો ગાય છે.

A1.6 વિધાનનું પ્રતીપ

હવે, આપણે વિધાનના પ્રતીપની સંકલ્પનાનું પરીક્ષણ કરીએ. આના માટે, આપણને સંયુક્ત વિધાનની સંકલ્પનાની જરૂર પડશે તે એક અથવા વધારે સાદાં વિધાનોનું સંયોજન છે. સંયુક્ત વિધાનો બનાવવા માટેની ઘણી રીતો છે. પરંતુ, આપણે બે સાદાં વિધાનોને 'જો અને તો' નો ઉપયોગ કરી જોડવા ઉપર ધ્યાન આપીશું. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ વિધાન 'જો વરસાદ પડે, તો સાયકલ પર જવું મુશ્કેલ પડે' એ બે વિધાનોનું બનેલું છે.

p : વરસાદ પડે છે.

q : સાઈકલ પર જવું મુશ્કેલ પડે.

આગળ દર્શાવેલ સંકેતનો ઉપયોગ કરીને આપણે કહી શકીએ : ***જો p તો q.***

આપણે એવું પણ કહી શકીએ કે, ***p પરથી q સૂચિત થાય છે અને તેને $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય છે.***

હવે, ધારો કે, કોઈ એવું વિધાન છે, 'જો પાણીની ટાંકી કાળી હોય, તો તેમાં પીવાલાયક પાણી છે.' આ વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપમાં છે.

અહીં p પક્ષ છે. (પાણીની ટાંકી કાળી છે) અને q તારણ છે. (ટાંકીમાં પીવાલાયક પાણી છે) ધારો કે, આપણે પક્ષ અને તારણને બદલીએ, તો શું મળે ? અહીં $q \Rightarrow p$ મળે. એટલે કે, જો ટાંકીમાંનું પાણી પીવાલાયક હોય, તો તે ટાંકી કાળી હોય. આ વિધાનને વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન કહે છે.

સામાન્ય રીતે, જો p અને q વિધાનો હોય, તો વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન $q \Rightarrow p$ છે, યાદ રાખો કે, $p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow p$ બંને એકબીજાનાં પ્રતીપ વિધાનો છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

(i) જો જમિલા સાયકલ ચલાવતી હોય, તો 17 ઑગસ્ટે રવિવાર હોય.

(ii) જો 17 ઓગસ્ટે રવિવાર હોય, તો જમિલા સાઈકલ ચલાવતી હોય.

(iii) જો પૌલિન ગુસ્સે થાય, તો તેનો ચહેરો લાલ થાય.

(iv) જો કોઈ વ્યક્તિ પાસે શિક્ષણની ડિગ્રી હોય, તો તે ભણાવી શકે.

(v) જો કોઈ વ્યક્તિને વાયરસનો ચેપ લાગે, તો તેનું તાપમાન ઊંચું રહે.

(vi) જો અહમદ મુંબઈમાં હોય, તો તે ભારતમાં છે.

(vii) જો ત્રિકોણ ABC સમબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેના અંતઃકોણો સમાન છે.

(viii) જો x એ અસંમેય સંખ્યા હોય, તો x નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત્ત છે.

(ix) જો $x - a$ બહુપદી $p(x)$ નો અવયવ હોય, તો $p(a) = 0$

ઉકેલ :

ઉપરનું દરેક વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપમાં છે. તેથી તેનું પ્રતીપ શોધવા માટે પહેલા p અને q ઓળખીશું અને પછી $q \Rightarrow p$ લખીશું.

(i) p : જમિલા સાઈકલ ચલાવે છે અને

q : 17 ઑગસ્ટ રવિવારે આવશે.

તેથી તેનું પ્રતીપ થશે : જો 17 ઑગસ્ટ રવિવાર આવે, તો જમિલા સાઈકલ ચલાવે.

(ii) આ વિધાન (i) નું પ્રતીપ વિધાન છે. તેથી, તેનું પ્રતીપ એ ઉપર આપેલું વિધાન (i) છે.

(iii) જો પૌલિનનો ચહેરો લાલ થાય, તો તે ગુસ્સે હોય.

(iv) જો કોઈ વ્યક્તિ ભણાવી શકે, તો તેની પાસે શિક્ષણની ડિગ્રી હોય.

(v) જો કોઈ વ્યક્તિનું તાપમાન ઊંચુ રહે, તો તેને વાઈરસનો ચેપ લાગ્યો હોય.

(vi) જો અહમદ ભારતમાં હોય, તો તે મુંબઈમાં હોય.

(vii) જો ત્રિકોણ ABC ના બધા અંતઃકોણો સમાન હોય, તો તે સમબાજુ છે.

(viii) જો x નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત્ત હોય, તો x એ અસંમેય સંખ્યા છે.

(ix) જો $p(a) = 0$ હોય, તો $x - a$ એ બહુપદી $p(x)$નો અવયવ છે.

જુઓ કે, આપણે ઉપર આપેલા દરેક વિધાનના પ્રતીપ તે સત્ય છે કે, અસત્ય તેની ચિંતા કર્યા સિવાય એમ જ લખ્યાં છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું વિધાન વિચારો. જો અહમદ મુંબઈમાં હોય, તો તે ભારતમાં છે. આ વિધાન સત્ય છે. હવે, તેનું પ્રતીપ વિધાન ધ્યાનમાં લો : જો અહમદ ભારતમાં હોય, તો તે મુંબઈમાં છે. આ હંમેશાં સત્ય ન પણ હોઈ શકે. તે ભારતનાં ગમે તે ભાગમાં હોઈ શકે.

ગણિતમાં, ચોક્કસ રીતે ભૂમિતિમાં, તમે એવી ઘણી સ્થિતિમાં આવ્યા હશો કે, જ્યાં $p \Rightarrow q$ સત્ય હોય અને તેનું પ્રતીપ વિધાન, અર્થાત્, $q \Rightarrow p$ પણ સત્ય છે કે નહીં તે નક્કી કરવું પડે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ વિધાનો જણાવો. દરેક કિસ્સામાં તે સત્ય છે કે અસત્ય એ પણ નક્કી કરો.

(i) જો n યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો $2n + 1$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(ii) જો વાસ્તવિક સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય, તો તે સંખ્યા સંમેય છે.

(iii) જો બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદતી હોય, તો અનુકોણોની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.

(iv) જો કોઈ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(v) જો બે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય, તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

ઉકેલ :

(i) પ્રતીપ વિધાન 'જો $2n + 1$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો n યુગ્મ પૂર્ણાંક છે' થાય. આ વિધાન અસત્ય છે. (ઉદાહરણ તરીકે, $15 = 2\,(7) + 1$ અને 7 તે અયુગ્મ છે.)

(ii) પ્રતીપ વિધાન 'જો કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા સંમેય હોય, તો તેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય' થાય. આ અસત્ય વિધાન છે, કારણ કે, સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત આવૃત પણ હોઈ શકે છે.

(iii) પ્રતીપ વિધાન થશે 'જો કોઈ છેદિકા બે રેખાને એવી રીતે છેદે કે તેથી બનતા અનુકોણ સમાન થાય, તો તે બે રેખાઓ સમાંતર છે.' આપણે ધોરણ IX પાઠ્યપુસ્તકની પૂર્વધારણા 6.4માં એવું ધાર્યું છે. તેથી આ વિધાન સત્ય છે.

(iv) જો કોઈ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો તેની સામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુ સમાન છે. આ સત્ય છે. (પ્રમેય 8.1, ધોરણ IX)

(v) 'જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો એકરૂપ છે' એ પ્રતીપ છે. આ વિધાન અસત્ય છે. આનું કોઈ યોગ્ય પ્રતિઉદાહરણ શોધવાનું તમારા પર છોડી દઈશું.

સ્વાધ્યાય A 1.5

1. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

(i) જો ટોક્યોમાં ગરમી હોય, તો શરણને ખૂબ પરસેવો વળે.

(ii) જો શાલિની ભૂખી હોય, તો તેના પેટમાં બિલાડાં બોલતાં હોય.

(iii) જો જસવંતને શિષ્યવૃત્તિ મળે, તો તે ડિગ્રી મેળવી શકે.

(iv) જો વનસ્પતિને ફૂલો હોય, તો તે જીવંત છે.

(v) જો કોઈ પ્રાણી બિલાડી હોય, તો તેને પૂંછડી હોય.

2. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો. ઉપરાંત દરેક કિસ્સામાં, તેનું પ્રતીપ સત્ય છે કે અસત્ય છે તે નક્કી કરો.

(i) જો ત્રિકોણ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેના આધાર પરના ખૂણા સમાન હોય.

(ii) જો કોઈ પૂર્ણાંક અયુગ્મ હોય, તો તેનો વર્ગ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(iii) જો $x^2 = 1$ હોય, તો $x = 1$

(iv) જો ABCD સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે છે.

(v) જો a, b અને c પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય, તો $a + (b + c) = (a + b) + c$

(vi) જો x અને y બે અયુગ્મ સંખ્યાઓ હોય, તો $x + y$ યુગ્મ સંખ્યા છે.

(vii) જો કોઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

A1.7 વિરોધાભાસથી સાબિતી

અત્યાર સુધીનાં આપણાં બધાં ઉદાહરણોમાં આપણે પરિણામોની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે પ્રત્યક્ષ દલીલોનો ઉપયોગ કર્યો હતો. હવે આપણે પરોક્ષ દલીલો કરીશું, વિશિષ્ટ રીતે ગણિતમાં 'વિરોધાભાસથી સાબિતી' તરીકે ઓળખાતું ખૂબ જ શક્તિશાળી એવું સાધન છે. આપણે આ રીતનો પ્રકરણ 1માં કેટલીક સંખ્યાઓને સંમેય પ્રસ્થાપિત કરવા અને બીજા પ્રકરણોમાં કેટલાક પ્રમેયોમાં પણ ઉપયોગ કર્યો છે. અહીં, આપણે બીજાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો આ સંકલ્પના દર્શાવવા લઈશું.

શરૂઆત કરતાં પહેલાં, આપણે વિરોધાભાસ શું છે તે સમજીએ. ગણિતમાં, જ્યારે વિધાન p એવું મળે કે p સત્ય હોય અને તેનું નિષેધ $\sim p$ પણ સત્ય હોય, ત્યારે વિરોધાભાસ ઉદ્ભવે.

ઉદાહરણ તરીકે,

$p : x = \frac{a}{b}$, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.

q : a અને b બંને 2 વડે નિઃશેષ વિભાજ્ય છે.

જો આપણે એવું ધારીએ કે, p સત્ય છે અને q સત્ય છે તેવું સાબિત કરી શકીએ, તો આપણે વિરોધાભાસ પર આવીએ છીએ. કારણ કે, q સૂચિત કરે છે કે, p નું નિષેધ સત્ય છે. તમને યાદ હશે કે, જ્યારે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ, ત્યારે આ જ બન્યું હતું. (જુઓ પ્રકરણ 1)

વિરોધાભાસથી સાબિતી કેવી રીતે મળે છે ?

આપણે આ એક ચોક્કસ ઉદાહરણથી સમજીએ.

ધારો કે, આપણને નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે.

A સ્ત્રી છે. સાબિત કરો કે, A મૃત્યુને અધીન છે.

આ એક અત્યંત સરળ ઉદાહરણ છે. ચાલો આપણે જોઈએ કે, તેને વિરોધાભાસથી કેમ સાબિત કરી શકાય.

- ચાલો, આપણે ધારીએ કે, વિધાન p ની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માગીએ છીએ. (અહીં, આપણે સાબિત કરવા માંગીએ છીએ કે, A મૃત્યુને અધીન છે તે સત્ય છે.)

- તેથી, આપણે વિધાન સત્ય નથી એવું ધારીને શરૂઆત કરીશું. એટલે કે, આપણે ધારીશું કે p નું નિષેધ સત્ય છે. (એટલે કે, A મૃત્યુને અધીન નથી.)
- પછી આપણે p ના નિષેધની સત્યાર્થતા પર આધારિત તાર્કિક તારણોની હારમાળા આગળ લઈ જવાની પ્રક્રિયા કરીશું. (કારણ કે, A મૃત્યુને અધીન નથી એ આપેલા વિધાન 'બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે.' નું પ્રતિ ઉદાહરણ છે. તેથી, તે અસત્ય છે કે, બધી સ્ત્રીઓ, મૃત્યુને અધીન છે.)
- જો આ વિરોધાભાસ તરફ દોરતું હોય, તો આપણી અસત્ય ધારણા કે, p સત્ય નથી ના કારણે વિરોધાભાસ ઉદ્ભવે છે. (આપણને વિરોધાભાસ મળે છે, કારણ કે, આપણે બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે' અને તેનું નિષેધ એ જ સાથે 'બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન નથી' એ સત્ય હોવાથી વિરોધાભાસ મળે છે; કારણ કે આપણે ધાર્યું છે કે, A મૃત્યુને અધીન નથી.)
- તેથી આપણી ધારણા અસત્ય છે. એટલે કે, p સત્ય થવું જોઈએ. (તેથી, A મૃત્યુને અધીન છે.)

ચાલો આપણે ગણિતનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 15 : શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને કોઈ પણ અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ :

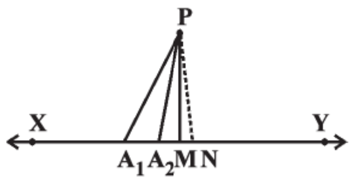
વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
આપણે વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીશું. ધારો કે, r શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા છે અને x અસંમેય સંખ્યા છે. ધારો કે, $r = \frac{m}{n}$ જ્યાં m અને n પૂર્ણાંકો છે અને $m \neq 0$, $n \neq 0$. આપણે એ સાબિત કરવું છે કે rx અસંમેય છે.	
ધારો કે, rx સંમેય છે.	અહીં, આપણે સાબિત કરવા જરૂરી વિધાનનું નિષેધ ધાર્યું છે.
તેથી, પૂર્ણાંક p, શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $rx = \frac{p}{q}$	આગળના વિધાન અને સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા અનુસાર
$rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ની પુનઃરચના કરીએ અને $r = \frac{m}{n}$ નો ઉપયોગ કરીએ, $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ મળે. np અને mq પૂર્ણાંકો છે અને $mq \neq 0$. તેથી x સંમેય સંખ્યા છે.	પૂર્ણાંકોના ગુણધર્મો અને સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા પરથી.
આ એક વિરોધાભાસ છે, કારણ કે, આપણે સિદ્ધ કર્યું કે x સંમેય છે. પરંતુ પક્ષ પ્રમાણે x અસંમેય છે.	આપણે આ જ વિરોધાભાસ તો શોધતા હતા.
rx સંમેય છે એવી અસત્ય ધારણાના કારણે આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો. આથી rx અસંમેય છે.	તાર્કિક તારણ

હવે, આપણે ઉદાહરણ 11 સાબિત કરીશું. પરંતુ આ વખતે વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીશું. સાબિતી આગળ આપેલી છે.

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
આપણે એવું ધારીએ કે, વિધાન સત્ય નથી.	આગળ જોયું તેમ, વિરોધાભાસથી સાબિતીનો આ શરૂઆતનો મુદ્દો છે.
તેથી, આપણે ધારીએ કે, પૂર્ણાંક સંખ્યા n માટે $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય એવી અવિભાજ્ય સંખ્યા $p > 3$ મળે.	પરિણામમાંના વિધાનનું આ નિષેધ છે.
6 વડે ભાગાકાર માટે યુક્લિડ ભાગ પ્રવિધિ અને p એ $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં નથી એ હકીકતનો ઉપયોગ કરીને $p = 6n$ કે $6n + 2$ કે $6n + 3$ કે $6n + 4$ મળે. ($p > 3$ અવિભાજ્ય હોવાથી $n > 1$)	અગાઉ સાબિત કરેલા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં
તેથી, p એ કાં તો 2 અથવા 3 વડે વિભાજ્ય બને.	તાર્કિક તારણ
તેથી, p અવિભાજ્ય નથી. (નોંધ : $p > 3$ હોવાથી $p = 2$ અથવા 3 નથી.)	તાર્કિક તારણ
આપણી પૂર્વધારણા p અવિભાજ્ય છે. તેનો આ વિરોધાભાસ છે.	આપણને આની જ જરૂર છે.
અહીં, વિરોધાભાસ મળે છે, કારણ કે, આપણે ધાર્યું છે કે એવો અવિભાજ્ય $p > 3$ અસ્તિત્વ ધરાવે જે $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય.	
તેથી, 3 કરતાં મોટી પ્રત્યેક અવિભાજ્ય સંખ્યા $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં હોય.	આપણે તારણ મેળવ્યું.

નોંધ : ઉપર તમે સાબિતીનું ઉદાહરણ દર્શાવ્યું, હજુય ફરીથી પરિણામ સાબિત કરવા માટે બીજી કેટલીક રીતો છે.

પ્રમેય A 1.2 : એક બિંદુમાંથી તે બિંદુમાંથી પસાર ન થતી હોય તેવી રેખા પરનાં બિંદુઓ અને આપેલ બિંદુને જોડતા તમામ રેખાખંડોમાં તે બિંદુમાંથી રેખા પરનો લંબરેખાખંડ સૌથી નાનો હોય છે.



આકૃતિ A 1.5

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
ધારો કે XY આપેલી રેખા છે. P એ રેખા XY પર ન હોય તેવું બિંદુ છે અને PM, PA_1, PA_2, ... વગેરે P માંથી રેખા XY પરનાં બિંદુઓ સુધી દોરેલા રેખાખંડો છે. તેમાં PM સૌથી નાનો છે. (જુઓ આકૃતિ A 1.5.)	આપણે એવું સાબિત કરવું છે કે, PM, PA_1, PA_2, ... વગેરે માંથી XY ને લંબ સૌથી નાનો છે. આપણે આ રેખાખંડો લઈને શરૂ કરીશું.
ધારો કે PM એ XY ને લંબ નથી.	વિરોધાભાસથી સાબિત કરવા માટે વિધાનનું આ નિષેધ છે.
XY પર લંબ PN દોરો. તે આકૃતિ A 1.5માં તૂટક રેખાથી દર્શાવેલ છે.	આપણે આપણું પરિણામ સાબિત કરવા રચનાની અવારનવાર જરૂર પડશે.

PN એ આપેલા બધા રેખાખંડો PM, PA_1, PA_2, ... વગેરેમાં સૌથી નાનો છે. એટલે કે, PN < PM	કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુ કર્ણથી નાની હોય છે અને સંખ્યાઓનો જાણીતો ગુણધર્મ
આપણી પૂર્વધારણા કે PM એ બધા રેખાખંડોમાં સૌથી નાનો છે તેનો વિરોધાભાસ મળે છે.	ચોક્કસપણે આપણે આની જ તો જરૂર છે.
તેથી, રેખાખંડ PM એ XY ને લંબ છે.	આપણે તારણ મેળવ્યું.

સ્વાધ્યાય A 1.6

1. ધારો કે, $a + b = c + d$, અને $a < c$, વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, $b > d$
2. જો r સંમેય સંખ્યા હોય અને x અસંમેય સંખ્યા હોય, તો વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, $r + x$ અસંમેય સંખ્યા છે.
3. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, a^2 યુગ્મ હોય, તો a પણ યુગ્મ છે.

   [**સૂચન :** a યુગ્મ નથી એમ ધારો. તેથી, તે કોઈ પૂર્ણાંક n માટે a^2 એ $2n + 1$ સ્વરૂપમાં છે અને આગળ વધો]
4. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, a^2, 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તો a એ, 3 વડે વિભાજ્ય હોય.
5. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને બતાવો કે, n ની કોઈ પણ કિંમત માટે 6^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય ન હોય.
6. વિરોધાભાસથી સાબિત કરો કે, સમતલની કોઈપણ બે ભિન્ન રેખાઓ એક કરતાં વધારે બિંદુમાં છેદે નહીં.

A1.8 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સાબિતીના અલગ અલગ ઘટકો અને ધોરણ IX માં શીખેલી સંબંધિત સંકલ્પનાઓ.
2. વિધાનનું નિષેધ
3. વિધાનનું પ્રતીપ
4. વિરોધાભાસથી સાબિતી

ગાણિતિક મોડેલિંગ A2

A2.1 પ્રાસ્તાવિક

- એક પુખ્ત માનવશરીરમાં લોહીનું વહન કરતી ધમનીઓ અને શિરાઓની લંબાઈ લગભગ 1,50,000 કિમી હોય છે.
- માનવહૃદય શરીરમાં પ્રત્યેક 60 સેકન્ડે 5 થી 6 લિટર લોહીને વહેતું કરે છે.
- સૂર્યની સપાટીનું તાપમાન અંદાજે 6000° સે છે.

તમને ક્યારેય આશ્ચર્ય થયું છે કે, આપણા વૈજ્ઞાનિકો અને ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ઉપર્યુક્ત પરિણામોનું અનુમાન કેવી રીતે કર્યું હશે ? તેમણે મૃત પુખ્ત માનવશરીરની બધી જ ધમનીઓ અને શિરાઓ બહાર કાઢીને તેમની લંબાઈ માપી હશે ? તે માનવશરીરનું બધું જ લોહી બહાર કાઢી અને આ પરિણામ પર પહોંચ્યા હશે ? સૂર્યની સપાટીનું તાપમાન જાણવા માટે તેમણે થરમોમિટર સાથે સૂર્યની સફર ખેડી હશે ? ચોક્કસપણે ના. તો આ પરિણામોના આંકડા તેમને કેવી રીતે મળ્યા ?

સંભવતઃ આનો જવાબ ગાણિતિક મોડેલિંગમાં રહેલો છે. તમે તેનો પરિચય ધોરણ IX માં કર્યો છે. તમને યાદ હશે કે ગાણિતિક મોડેલિંગ એ જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે. અને તમે એ પણ જાણો છો કે, ગાણિતિક મોડેલિંગ ગાણિતિક મોડેલ બનાવવાની પદ્ધતિ છે અને આ આપણે મોડેલનો ઉપયોગ સમસ્યાનું વિશ્લેષણ કરવામાં અને તેને ઉકેલવામાં કરીએ છીએ.

આમ, ગાણિતિક મોડેલિંગમાં આપણે વાસ્તવિક દુનિયાને લગતી સમસ્યાઓ લઈશું અને તેનું રૂપાંતરણ તે સમસ્યાને સમકક્ષ ગાણિતિક સમસ્યામાં પરિવર્તિત કરીશું. ત્યાર બાદ આપણે ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી અને આ ઉકેલનું વાસ્તવિક દુનિયાને લગતી સમસ્યા માટે અર્થઘટન કરીશું. અહીં એ પણ જોવું અગત્યનું છે કે, આપણે મેળવેલ ઉકેલ મોડેલની યથાર્થતાની ચકાસણીના તબક્કે અર્થપૂર્ણ હોય. આગળ જેમાં ગાણિતિક મોડેલિંગની ખૂબ જ અગત્યતા હોય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપેલ છે :

(i) દુર્ગમ સ્થાન પર આવેલ નદીની પહોળાઈ તથા ઊંડાઈ શોધવી.

(ii) પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહોના દ્રવ્યમાનનું અનુમાન કરવું.

(iii) પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહો વચ્ચેના અંતરનું અનુમાન કરવું.

(iv) કોઈ એક દેશમાં ચોમાસાના આગમનની આગાહી કરવી.

(v) શૅરબજારના વલણની આગાહી કરવી.

(vi) વ્યક્તિના શરીરમાં રહેલા લોહીના જથ્થાનો અંદાજ લગાવવો.

(vii) કોઈ એક શહેરની 10 વર્ષ પછીની જનસંખ્યાનું અનુમાન કરવું.

(viii) ઝાડ પર રહેલાં પાંદડાંની સંખ્યાનો અંદાજ કાઢવો.

(ix) કોઈ એક શહેરના વાતાવરણમાં રહેલા અલગ-અલગ પ્રદૂષકોનો ppm એકમમાં અંદાજ લગાવવો.

(x) પ્રદૂષકોની પર્યાવરણ પર થતી અસરોના અંદાજ કાઢવા.

(xi) સૂર્યની સપાટીના તાપમાનનો અંદાજ મૂકવો.

આ પ્રકરણમાં આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાનું પુનરાવલોકન કરીશું અને આસપાસનાં કેટલાંક દુન્યવી ઉદાહરણો દ્વારા તેની સંકલ્પના સ્પષ્ટ કરીશું. વિભાગ A 2.2 માં મોડલ બનાવવાના વિવિધ તબક્કા દર્શાવીશું. વિભાગ A 2.3 માં આપણે વિવિધ ઉદાહરણોની ચર્ચા કરીશું. વિભાગ A 2.4 માં આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગની ઉપયોગિતા સંબંધિત કારણો પર વિચાર કરીશું.

યાદ રાખો કે, અમારું ધ્યેય તમને ગણિત દુન્યવી સમસ્યાઓ ઉકેલવામાં કેવી રીતે સહાય કરે છે તે વિશે જાગૃત કરવાનું છે. તેમ છતાં પણ ગાણિતિક મોડેલિંગના મહત્ત્વને સચોટ રીતે સમજવા માટે તમને ગણિતનું થોડું વધારે જ્ઞાન હોય તે આવશ્યક છે. ઉચ્ચ વર્ગમાં તમને આને સંબંધિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોવા મળશે.

A2.2 ગાણિતિક મોડેલિંગનાં સોપાનો

ધોરણ IX માં આપણે મોડેલિંગ વિશેનાં ઉદાહરણો વિશે વિચાર કર્યો હતો. આ ઉદાહરણોમાં તમને પ્રક્રિયા અને તેમાં સમાવિષ્ટ સોપાનો વિશે જાણકારી મળી હતી. ચાલો, હવે આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગ સંબંધિત મુખ્ય સોપાનો પર ફરીથી વિચાર કરીએ.

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજણ) : વાસ્તવિક સમસ્યાને વ્યાખ્યાયિત કરો અને જો તમે સમૂહમાં કામ કરતા હો તો જેને તમે સમજવા માંગતા હો એવી સમસ્યા પર વિચાર કરો. કેટલીક ધારણાઓ કરીને તથા કેટલાંક પરિબળોને અવગણીને સફળતા મેળવી શકાય તે માટે સમસ્યાનું સરળીકરણ કરો.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, આપણી સમસ્યા એક તળાવમાં રહેલી માછલીઓની સંખ્યાઓનો અંદાજ મેળવવાની છે. અહીં પ્રત્યેક માછલીને પકડી અને ત્યાર બાદ તેની ગણતરી કરવી શક્ય નથી. આવી સ્થિતિમાં, સંભવતઃ આપણે તળાવમાંથી માછલીઓનો નિયત નમૂનો લઈશું, તેની ગણતરી કરી અને તેના આધારે તેમની કુલ સંખ્યાનું અનુમાન કરીશું.

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન અને સૂત્રીકરણ) : સમસ્યાના વિભિન્ન પાસાંઓનું વર્ણન ગાણિતિક શબ્દોમાં કરો. સમસ્યાનાં વિભિન્ન લક્ષણોને ગાણિતિક સ્વરૂપે દર્શાવવાની કેટલીક પદ્ધતિઓ નીચે પ્રમાણે છે :

- ચલને વ્યાખ્યાયિત કરો.
- સમીકરણ અથવા અસમતા લખો.
- માહિતી એકત્રિત કરો અને તેને કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવો.
- આલેખ દોરો.
- સંભાવનાઓની ગણતરી કરો.

ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લીધેલા થોડાક નમૂનાના આધારે માછલીઓની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ કેવી રીતે કરી શકાય ? આ માટે નિશ્ચિત નમૂના તરીકે લીધેલ દરેક માછલીને નિશાની કરી અને તળાવમાં રહેલી બીજી માછલીઓ સાથે તેમને છોડી દઈશું. થોડાક સમય બાદ આપણે ફરીથી માછલીઓનો એક નિશ્ચિત નમૂનો લઈશું અને આ નવા નમૂનામાં અગાઉ નિશાની કરેલી માછલીઓની સંખ્યા કેટલી છે તે જોઈશું. ત્યારબાદ ગુણોત્તર અને પ્રમાણનો ઉપયોગ કરીને આપણે તેમની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ મેળવી શકીશું. ધારો કે, તળાવમાંથી આપણે 20 માછલીઓનો એક નમૂનો લઈએ છીએ અને દરેકને નિશાની કરી અને તળાવમાં બાકી રહેલ માછલીઓ સાથે ભળી જાય તે રીતે તે જ તળાવમાં છોડી દઈએ છીએ. ત્યારબાદ તળાવમાં રહેલા માછલીઓના મિશ્ર સમૂહમાંથી આપણે માછલીઓનો બીજો એક નમૂનો (ધારો કે, 50 માછલીઓ) લઈએ અને જોઈશું કે, આ નવા નમૂનામાં અગાઉથી નિશાની કરેલ કેટલી માછલીઓ આવેલ છે. આ પ્રમાણે આપણે માહિતી એકત્રિત કરીશું અને ત્યારબાદ તેનું વિશ્લેષણ કરીશું.

અહીં આપણે એવું માની લઈશું કે, નિશાની કરેલ દરેક માછલી એક સમાન રૂપે તળાવમાં બાકી રહેલ માછલીઓ સાથે ભળે છે અને આપણે જે નિશ્ચિત નમૂનો લઈએ છીએ તે માછલીઓના કુલ સમૂહનું સારું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

સોપાન 3 (ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : અહીં સોપાન 2 માં સરળ બનાવેલ ગાણિતિક સમસ્યાનો વિભિન્ન ગાણિતિક પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, સોપાન 2 માં લીધેલા બીજા જથ્થામાં 5 માછલીઓ નિશાનીવાળી મળે છે. આમ, માછલીઓની કુલ સંખ્યામાંથી $\frac{5}{50}$ એટલે કે, $\frac{1}{10}$ માછલીઓ નિશાનીવાળી હશે. હવે જો આ મળેલ સંખ્યાને કુલ સંખ્યા સ્વરૂપે દર્શાવીએ, તો કુલ સંખ્યાનો $\frac{1}{10}$ ભાગ $= 20$

આમ, કુલ સંખ્યા $= 20 \times 10 = 200$ થાય.

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : અગાઉના સોપાનમાં પ્રાપ્ત થયેલ ઉકેલને આપણે સોપાન 1 માં લીધેલ વાસ્તવિક જીવનસંબંધી સ્થિતિના સંદર્ભમાં લઈશું.

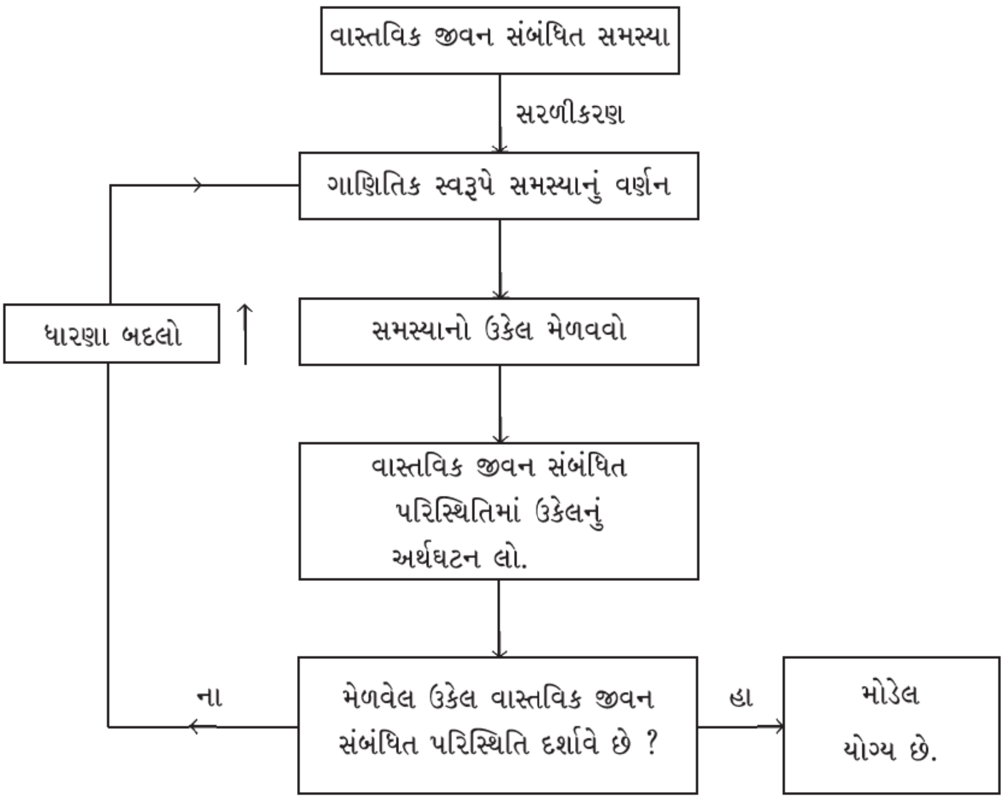
ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 3 ની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવતાં આપણને માછલીઓની કુલ સંખ્યા 200 મળી હતી.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : હવે આપણે મૂળ પરિસ્થિતિ પર પાછા ફરીએ અને જોઈએ કે, ગાણિતિક પ્રવિધિ દ્વારા મેળવેલ પરિણામ સાર્થક છે કે નહીં. જો સાર્થક હોય, તો આપણે જ્યાં સુધી કોઈ નવી માહિતી પ્રાપ્ત ન થાય અથવા તો યથાર્થતામાં કોઈ બદલાવ ન આવે ત્યાં સુધી આ મોડેલનો ઉપયોગ કરતા રહીશું.

કેટલીક વાર સમસ્યાનું ગાણિતિક વર્ણન કરતી વખતે સરળીકરણ માટે કરવામાં આવતી ધારણાઓના લીધે વાસ્તવિક સમસ્યાના આવશ્યક પાસાંઓથી આપણે વંચિત રહીએ છીએ. આ પરિસ્થિતિમાં મેળવેલ ઉકેલ વાસ્તવિકતાથી બહુ જ દૂર હોય છે અને વાસ્તવિક પરિસ્થિતિના સંદર્ભમાં તે અર્થપૂર્ણ હોતા નથી. જો આવું થાય, તો આપણે સોપાન 1 માં કરેલી ધારણાઓ પર ફરી વિચાર કરીશું. અને કદાચ જે પરિબળોને અગાઉ અવગણ્યા હતા તેમનો સમાવેશ કરીને વધુ વાસ્તવિક બનાવીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 3 માં આપણને મળેલ માછલીઓની કુલ સંખ્યાનું અનુમાન એ તળાવમાં રહેલી માછલીઓની વાસ્તવિક સંખ્યા જેટલું ના પણ હોય. હવે આપણે સોપાન 2 અને 3 ની પ્રક્રિયાને એકથી વધારે વાર કરી અને મેળવેલ પરિણામોનો મધ્યક મેળવીશું અને જોઈશું કે તે દ્વારા ઉચિત પરિણામ મળે છે કે નહિ. આ રીતે તમને કુલ સંખ્યાની વધુ નજીકનો અંદાજ મળશે.

ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાને દર્શાવતી બીજી એક પદ્ધતિ આકૃતિ A 2.1માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ A 2.1

ઉકેલની સરળતા માટે મોડેલ બનાવનાર સરળીકરણ (ઉકેલ પ્રાપ્તિની સરળતા માટે) અને ચોકસાઈ બંનેની વચ્ચે સંતુલન જાળવી રાખે છે કે, જેથી કંઈ પ્રગતિ થઈ શકે તેટલા વાસ્તવિકતાથી પર્યાપ્ત રીતે નજીક હોય તેવી તે આશા રાખે છે. સર્વોત્તમ પરિણામ એ હશે, કે જેનાથી આગળ શું થવાનું છે તેની આગાહી કરી શકાય અથવા તો થોડીક

ચોકસાઈ સાથે પરિણામની આગાહી કરી શકાય. ધ્યાન રાખો કે, સમસ્યાના સરળીકરણ માટે ઉપયોગમાં લેવાયેલ વિભિન્ન ધારણાઓથી આપણને અલગ-અલગ મોડેલ મળી શકે છે. આમ કોઈ પણ મોડેલ પરિપૂર્ણ હોતું નથી. આમાંથી કેટલાક સારાં પણ હોય અને કેટલાંક ઉત્તમ પણ હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય A 2.1

1. નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિ પર વિચાર કરો.

તેરમી સદીના પ્રારંભમાં લિઓનાર્ડો ફિબોનાકીએ એક કૂટપ્રશ્ન રજુ કર્યો કે, જો તમારી પાસે સસલાની એક જોડ (એક નર અને એક માદા) હોય અને તે પ્રજનન કરે તો અમુક સમય પછી તમારી પાસે કેટલાં સસલાં હશે. ધારો કે, એક જોડ દર મહિને એક એક જોડ (એક નર અને એક માદા) ને જન્મ આપે છે અને તાજી જન્મેલી સસલાની જોડ જન્મના 2 મહિના બાદ પ્રથમ જોડને જન્મ આપી શકે છે. શરૂઆત અને પ્રથમ માસ ને બાદ કરતાં માસવાર સસલાંઓની જોડની સંખ્યા તે માસના અગાઉના બે માસમાં રહેલી જોડની સંખ્યાના સરવાળા બરાબર થાય છે.

માસ	સસલાંની જોડ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

16 મહિના પછી તમારી પાસે લગભગ 1600 જોડ સસલાં હશે !

આ પરિસ્થિતિનું સ્પષ્ટ વિધાન કરો તથા ગાણિતિક મોડેલિંગનાં અલગ-અલગ સોપાનો વિશે સ્પષ્ટતા કરો.

A2.3 કેટલાંક ઉદાહરણો

હવે ગાણિતિક મોડેલિંગના કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : (પાસાની એક જોડને ફેંકવી) : ધારો કે, તમારી શિક્ષિકા તમને અનુમાન કરવાની એક રમત માટે આહ્વાન આપે છે. આ રમતમાં તે પાસાની એક જોડ ફેંકશે. પાસાઓને ફેંકતાં પહેલાં તમારે તે બંને પાસા પર આવનાર સંખ્યાઓનો સરવાળો કેટલો હશે તેનું અનુમાન લગાવવાનું છે. દરેક સત્ય જવાબ માટે તમને બે ગુણ મળશે અને દરેક અસત્ય જવાબ માટે તમે બે ગુણ ગુમાવશો. તો આ રમત માટે કઈ સંખ્યાઓ ઉત્તમ અનુમાન હશે ?

ઉકેલ :

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજ) : અહીં તમારે કેટલીક એવી સંખ્યાઓ જાણવી પડશે કે જેની પાસાઓ પર આવવાની સંભાવના સૌથી વધારે હોય.

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન) : ગાણિતિક સ્વરૂપમાં આ સમસ્યા પાસાઓ પર આવનાર સંખ્યાના અલગ-અલગ શક્ય સરવાળાઓની સંભાવના જાણવામાં પરિવર્તિત થાય છે.

નીચે દર્શાવેલ 36 સંખ્યા યુગ્મમાંથી કોઈ એક યાદચ્છિક વિકલ્પના રૂપમાં પસંદ કરી આપણે બહુ જ સરળ રીતે આ સ્થિતિને પ્રદર્શિત કરી શકીએ છીએ :

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ઉપર્યુક્ત સંખ્યા-યુગ્મમાં દર્શાવેલ પ્રથમ સંખ્યા પ્રથમ પાસા પર આવેલ સંખ્યા છે અને બીજી સંખ્યા બીજા પાસા પર આવેલ સંખ્યા દર્શાવે છે.

સોપાન 3 (ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : ઉપર્યુક્ત સંખ્યા-યુગ્મમાં આવેલા સંખ્યાઓના સરવાળા કરતાં આપણને સંભવિત સરવાળા તરીકે 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 જેવી સંખ્યાઓ મળે છે. ઉપર્યુક્ત દરેક ઘટનાને સમસંભાવી માનીને આપણે દરેકની સંભાવના શોધવી પડશે.

તે આપણે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું :

સરવાળો	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

તમે જોઈ શકો છો કે, સંખ્યાઓનો સરવાળો 7 આવવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ છે. તે સરવાળા તરીકે આવતી અન્ય સંખ્યાઓ કરતા સૌથી વધારે છે.

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : સરવાળો 7 આવવાની સંભાવના સૌથી વધારે હોવાથી તમે સંખ્યા 7 નું અનુમાન વારંવાર કરી શકો છો.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : પાસાની એક જોડને ઘણી બધી વાર ઉછાળો અને તેનાં પરિણામો માટે એક સાપેક્ષ

આવૃત્તિ કોષ્ટક બનાવો. હવે સાપેક્ષ આવૃત્તિની સરખામણી તેને અનુરૂપ સંભાવનાઓ જોડે કરો. હવે જો આ પરિણામો એકબીજાની નજીક ના હોય તો શક્ય છે કે, પાસાઓની જોડ અસમતોલ છે. જે સંખ્યા પૂર્વગ્રહયુક્ત હોય તેવી માહિતી લઈએ.

હવે પછીના ઉદાહરણ માટે તમને થોડીક પૂર્વ ભૂમિકાની જરૂર પડશે.

જ્યારે રૂપિયાની જરૂર હોય, ત્યારે રૂપિયા ના હોવા એ ઘણા બધા લોકોનો સામાન્ય અનુભવ છે. આપણને હંમેશાં રૂપિયાની જરૂર પડે છે; પછી એ જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુઓ ખરીદવા માટે હોય કે, સુખાકારી માટે. સ્કૂટર, રેફ્રિજરેટર, ટેલિવિઝન, કાર જેવી વસ્તુઓ ઓછી મૂડી સાથે પણ ગ્રાહક ખરીદી શકે તે માટે વેપારીઓ દ્વારા હપતા પદ્ધતિ જેવી યોજનાઓ અમલમાં મૂકવામાં આવે છે.

ઘણી વાર વસ્તુઓનું વેચાણ વધારવાના ભાગરૂપે ગ્રાહકોને આકર્ષવા માટે પણ વેપારી હપતાપદ્ધતિ જેવી યોજના મૂકે છે. હપતાપદ્ધતિમાં ગ્રાહકે વસ્તુ ખરીદતી વખતે વસ્તુની પૂરેપૂરી ખરીદકિંમત આપવી પડતી નથી. વસ્તુની ખરીદી વખતે ગ્રાહક વસ્તુની કુલ ખરીદ કિંમતનો અમુક ભાગ ચૂકવે છે અને બાકી રહેલ રકમ તે માસિક, ત્રિમાસિક, છ માસિક કે વાર્ષિક હપતારૂપે ચૂકવી શકે. હકીકતમાં હપતાપદ્ધતિમાં વેપારી પાછળથી ચૂકવવામાં આવનારી રકમ પર થોડુંક વ્યાજ પણ ગ્રાહક પાસેથી વસૂલ કરે છે. (તેને ***સ્થગિત ચૂકવણી (Defered payment)*** કહે છે.)

હપતા પદ્ધતિને વધુ સારી રીતે સમજવા માટે તેને સંબંધિત ઉદાહરણ લેતાં પહેલાં આપણે તેની સંકલ્પના સંબંધિત વારંવાર ઉપયોગમાં લેવાતા શબ્દો સમજીએ.

વસ્તુની ખરીદી વખતે ગ્રાહક દ્વારા ચૂકવાતી વસ્તુની પૂરેપૂરી કિંમતને ***રોકડ કિંમત (Cash price)*** કહે છે. હપતાપદ્ધતિમાં ગ્રાહક દ્વારા મૂળ કિંમતના કોઈ એક અંશ જેટલી ચૂકવવામાં આવતી રકમને ***તત્કાળ ચૂકવણી (Down payment)*** કહે છે.

નોંધ : હપતાપદ્ધતિમાં ખરીદેલ વસ્તુની ખરીદીની બાકી રહેલ રકમની ચૂકવણી એક વર્ષની અંદર જ કરવાની હોય તો સ્થગિત ચૂકવણી પર સાદુ વ્યાજ વસૂલવામાં આવે છે.

જૂના જમાનામાં ઉધાર લીધેલ ધન રાશિ પર વ્યાજ લેવું એક કુપ્રથા હતી અને આવું કરવું તે પ્રતિબંધિત પણ હતું. વ્યાજ વસૂલી સંબંધિત કાયદાથી બચવા માટે લોકો ઉધાર લેવા માટે કોઈ એક ચલણનો ઉપયોગ કરતાં અને તેની ચૂકવણી કોઈ બીજા ચલણમાં કરતાં અને વ્યાજ વિનિમયનો દર છુપાવતા હતા.

હવે, આ સંબંધિત ગાણિતિક મોડેલિંગની સમસ્યા પર વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 2 : જૂહી એક સાઈકલ ખરીદવા ઈચ્છે છે. તે બજારમાં જાય છે, અને જુએ છે કે, જે સાઈકલ તેને પસંદ છે તેની કિંમત ₹ 1800 છે. જૂહી પાસે ફક્ત ₹ 600 જ છે. તેથી તે દુકાનદારને કહે છે કે, તે અત્યારે સાઈકલ ખરીદી શકે તેવી સ્થિતિમાં નથી. થોડીક ગણતરી બાદ દુકાનદાર નીચે પ્રમાણેની તૈયારી બતાવે છે : તે જૂહીને કહે છે કે, જો તે અત્યારે ₹ 600 રોકડા તત્કાળ ચૂકવણી પેટે અને બાકીની રકમ ₹ 610નો એક એવા બે માસિક હપતામાં ચૂકવે તો તે અત્યારે સાઈકલ ખરીદી શકે છે. જૂહી પાસે હવે બે વિકલ્પ છે, કાં તો એ હપતા પદ્ધતિ દ્વારા સાઈકલ ખરીદે અથવા તો તે રોકડેથી ખરીદવા માટે બેંકમાંથી વાર્ષિક 10 ટકાના સાદા વ્યાજે ઉપલબ્ધ ઋણ લે. કયો વિકલ્પ આર્થિક રીતે વધુ યોગ્ય હશે ?

ઉકેલ :

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજ) : અહીં જૂહી એ નક્કી કરવા માંગે છે કે, તેને દુકાનદાર દ્વારા આપવામાં આવેલ વિકલ્પ સ્વીકારવો કે નહિ. આ માટે બંને વિકલ્પ માટેના વ્યાજના દર જાણવા જરૂરી છે; એક કે જે હપતાપદ્ધતિમાં લાગુ પડશે અને બીજો કે જે બૅન્ક દ્વારા લગાવવામાં આવશે (તે 10 % છે.)

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન) : હપતાપદ્ધતિની યોજનાના સ્વીકાર કે અસ્વીકાર માટે, તેને દુકાનદાર દ્વારા લેવામાં આવનાર વ્યાજની સરખામણી બૅન્કના વ્યાજ સાથે કરવી પડશે. ધ્યાન આપો. અહીં વ્યાજની ચૂકવણી એક વર્ષની અંદર કરવાની હોવાથી સાદું વ્યાજ લાગુ પડશે.

આપણે જાણીએ છીએ કે સાઇકલની રોકડ કિંમત = ₹ 1800

અને હપતાપદ્ધતિમાં તત્કાળ ચૂકવણીની રકમ = ₹ 600

માટે, હપતાપદ્ધતિ દ્વારા જેની ચૂકવણી કરવાની છે તે શેષ-રકમ = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200

ધારો કે દુકાનદાર દ્વારા લેવાનાર વ્યાજનો વાર્ષિક દર r % છે.

પ્રત્યેક હપતાની રકમ = ₹ 610

હપતા દ્વારા ચૂકવાતી કુલ રકમ = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

હપતાપદ્ધતિમાં ચૂકવવામાં આવનાર કુલ વ્યાજ = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

હવે, જૂહી ₹ 1200 પોતાની પાસે એક મહિના સુધી રાખે છે. માટે

પ્રથમ માસનું મુદ્દલ = ₹ 1200

દ્વિતીય માસનું મુદ્દલ = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

દ્વિતીય માસનું શેષમુદ્દલ ₹ 590 + વ્યાજ (₹ 20) = માસિક હપતો (₹ 610) = બીજો હપતો

આમ, એક માસ માટેનું કુલ મુદ્દલ = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

તેથી, વ્યાજ $= \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ (2)

સોપાન 3 (સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

માટે $r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14$ (આશરે)

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : હપતાપદ્ધતિમાં વ્યાજનો દર 13.14 % છે. બૅન્ક દ્વારા લાગવવામાં આવેલ વ્યાજનો દર 10 % છે.

આમ, સાઇકલ ખરીદવા માટે બૅન્કમાંથી ધન રાશિ લેવી જૂહી માટે આર્થિક રીતે વધુ યોગ્ય છે.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : આ સ્થિતિમાં હવે આ સોપાનનું હવે કોઈ મહત્ત્વ નથી કારણ કે, અહીં સંખ્યાઓ નિશ્ચિત છે. તેમ છતાં પણ બૅન્કમાંથી લોન લેવા માટે કરવી પડતી ઔપચારિકતાઓ તથા તે માટે કરવા પડતા ખર્ચ જેવા કે, સ્ટેમ્પપેપર (દસ્તાવેજ માટેના કાગળ)ની કિંમત વગેરેના કારણે અસરકારક વ્યાજનો દર હપતાપદ્ધતિમાં લાગુ પડનાર વ્યાજના દર કરતાં વધી જાય છે. તેથી, તે પોતાનો વિચાર બદલી પણ શકે છે.

નોંધ : વ્યાજના દર અંગેનું મોડેલિંગ હજુ પણ તેની પ્રારંભિક અવસ્થામાં જ છે અને તેની માન્યતા નાણાકીય બજાર માટે હજુ પણ એક સમસ્યા જ છે અને જો હપતાની રકમ નક્કી કરવા માટે અલગ અલગ વ્યાજના દર લગાવવામાં આવેલ હોય તો તેની માન્યતા એક મહત્ત્વની સમસ્યા બની રહે છે.

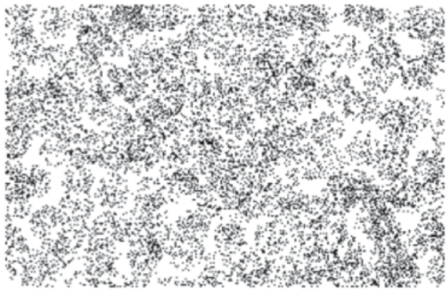
સ્વાધ્યાય A 2.2

નીચે આપેલ સમસ્યાઓ માટે સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવા માટેના ગાણિતિક મોડેલિંગનાં વિભિન્ન સોપાનો દર્શાવો :

1. એક પક્ષીવિદ્ એક વિશાળ ક્ષેત્રમાં રહેલા પોપટની સંખ્યાનો અંદાજ મેળવવા માંગે છે. આ માટે તે કેટલાક પોપટ પકડવા માટે જાળ પાથરે છે અને 32 પોપટ પકડે છે. તેને તે કડી પહેરાવી છોડી મૂકે છે. તે પછીના અઠવાડિયે તે જાળ પાથરીને 40 પોપટ પકડે છે. તેમાંથી 8 પોપટ કડી પહેરેલા છે.

(i) બીજી વાર પકડેલા પોપટમાંથી કેટલા ભાગના પોપટ કડી પહેરેલા હશે ?

(ii) આ ક્ષેત્રમાં રહેલા પોપટની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ મેળવો.



2. ધારો કે બાજુમાં આપેલ આકૃતિ એક જંગલની લીધેલી હવાઈ તસ્વીર દર્શાવે છે અને તેમાં રહેલું પ્રત્યેક ટપકું એક વૃક્ષનો નિર્દેશ કરે છે. અહીં તમારો ઉદ્દેશ, પર્યાવરણ સર્વેક્ષણના ભાગ રૂપે અહીં દર્શાવેલ ક્ષેત્રની જમીન પરનાં વૃક્ષની સંખ્યા શોધવાનો છે.

3. એક ટીવી ₹ 24,000 રોકડા આપીને ખરીદી શકાય છે અથવા તો ₹ 8000ની તત્કાળ ચૂકવણી કરી અને બાકીની રકમ ₹ 2800 નો એક એવા કુલ છ માસિક હપતા દ્વારા ચૂકવીને ખરીદી શકાય છે. અલી બજારમાં ટીવી ખરીદવા જાય છે. તેની પાસે ₹ 8000 છે. હવે તેની પાસે બે વિકલ્પ છે કાં તો એ હપતાપદ્ધતિ દ્વારા ટીવી ખરીદે અથવા તો નાણાકીય મંડળી પાસેથી લોન લઈ અને રોકડેથી ટીવી ખરીદે. મંડળી વાર્ષિક 18 ટકાના સાદા વ્યાજે લોન આપે છે, તો અલી માટે કયો વિકલ્પ યોગ્ય છે ?

A2.4 ગાણિતિક મોડેલિંગ કેમ મહત્ત્વનું છે ?

અહીં લીધેલાં ઉદાહરણોમાં આપણે જોયું કે, ગાણિતિક મોડેલિંગ એ વિવિધ વિદ્યાશાખાઓને લગતો વિષય છે. ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને અન્ય ક્ષેત્રના તજ્જ્ઞો, પ્રવર્તમાન પેદાશની સુધારણા માટે, ઉત્તમ પ્રદેશ બનાવવા તથા પેદાશોના પ્રવાહનો અંદાજ મેળવવા માટે પોતાના જ્ઞાન અને અનુભવનો ઉપયોગ કરે છે.

આમ તો મોડેલિંગના મહત્ત્વ માટેના ઘણાં બધાં વિશેષ કારણો છે પરંતુ તેમાંના મોટા ભાગનાં કારણો નિમ્નલિખિત સાથે કોઈ ને કોઈ રીતે સંકળાયેલા છે.

- ***સમજદારી વધારવા માટે : જો કોઈ એવું ગાણિતિક મોડેલ હોય કે જે વાસ્તવિક દુનિયાને સંબંધિત તંત્રના આવશ્યક વ્યવહારોને પ્રદર્શિત કરે તો આપણે મોડેલના વિશ્લેષણ દ્વારા વધુ સારી રીતે તે તંત્રને સમજી શકીએ છીએ. અને એ મોડેલના નિર્માણ વખતે આપણે જોઈશું કે, કયાં-કયાં પરિબળો તંત્ર માટે અતિમહત્ત્વના છે અને તંત્રનાં વિભિન્ન પાસાઓ કેવી રીતે એકબીજા સાથે સંકળાયેલા છે.***
- ***આગાહી અથવા અનુમાન અથવા નકલ કરવી :*** **ઘણી વાર આપણે એ જાણવા માંગીએ છીએ કે, વાસ્તવિક દુનિયા સંબંધિત તંત્રનું ભવિષ્યમાં શું મહત્ત્વ હશે. પરંતુ, તંત્ર સાથે તેનો સીધો પ્રયોગ કરવો મોંઘો, અવ્યવહારુ અથવા અશક્ય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે હવામાનની આગાહીમાં,**

માનવશરીરમાં ઔષધીય કાર્યક્ષમતાના અભ્યાસમાં, અણુમથક (ન્યુક્લિયર રીએક્ટર)ની સારામાં સારી રૂપરેખા તૈયાર કરવામાં, વગેરેમાં.

અનેક પ્રકારનાં સંગઠનોમાં પૂર્વાનુમાન ઘણું જ મહત્ત્વનું હોય છે કેમ કે નિર્ણાયક પ્રક્રિયાઓમાં ભવિષ્યમાં થનાર ઘટનાઓની આગાહીઓને સમાવિષ્ટ કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, વેચાણવિભાગમાં માંગ સંબંધિત વિશ્વસનીય પૂર્વાનુમાન વેચાણ અંગેની વ્યૂહરચનાના આયોજનમાં ઉપયોગી થાય છે.

સ્કૂલ બોર્ડને અલગ-અલગ જિલ્લાઓમાં શાળાએ જતાં બાળકોની સંખ્યાનું પૂર્વાનુમાન લગાવવું આવશ્યક છે, કારણ કે, તેનાથી એ નિર્ણય લઈ શકાય કે, ક્યાં અને ક્યારે નવી શાળા શરૂ કરવી પડશે ?

હંમેશાં, પૂર્વાનુમાન કરનારાઓ પૂર્વાનુમાન માટે ભૂતકાળની માહિતીઓનો ઉપયોગ કરે છે. સૌપ્રથમ તેઓ પૂર્વાનુમાનને વર્ણવતી ભાતની ઓળખ માટે માહિતીનું વિશ્લેષણ કરે છે. ત્યાર બાદ આ માહિતી અને પદ્ધતિનો ઉપયોગ ભવિષ્યમાં થનારા પૂર્વાનુમાનમાં કરી શકાય છે. આ આધારભૂત વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ મોટાભાગના પૂર્વાનુમાનોમાં કરવામાં આવે છે. જે લાક્ષણિકતા અહીં ઓળખવામાં આવેલ છે તે ભવિષ્યમાં પણ ચાલુ રહેશે તે એ ધારણા પર આધારિત છે.

- **અંદાજ :** ઘણી વાર, આપણને મોટા મૂલ્યનો અંદાજ લગાવવો પડે છે. તમે જંગલમાં રહેલાં વૃક્ષો, તળાવમાં રહેલી માછલીઓ વગેરેનાં ઉદાહરણ જોઈ ચૂક્યા છો. એક અન્ય ઉદાહરણ તરીકે, ચૂંટણી પહેલાં, ચૂંટણીમાં ભાગ લેનારા પક્ષો પોતાના પક્ષની ચૂંટણીમાં જીતવાની સંભાવનાનું પૂર્વાનુમાન કરવા માંગતા હોય છે. વિશેષરૂપે તે એ બાબતનું અનુમાન લગાવવા ઈચ્છે છે કે તેમના મત વિસ્તારમાંથી કેટલા લોકો તેમના પક્ષને મત આપશે. તેમના આ અનુમાનના આધારે તેઓ તેમના પ્રચારની વ્યૂહરચના નક્કી કરવા માંગતા હોય છે. ચૂંટણીમાં કયા પક્ષને કેટલી બેઠક મળશે તેના અનુમાન માટે ચૂંટણી સર્વેક્ષણ (Exit polls)નો વ્યાપક ઉપયોગ થતો હોય છે.

સ્વાધ્યાય A 2.3

1. છેલ્લાં પાંચ વર્ષની માહિતીના આધારે, આ વર્ષના અંતે ધોરણ 10 ની બોર્ડની પરીક્ષામાં તમારી શાળાના ગણિત વિષયના સરાસરી ગુણની ટકાવારીનું પૂર્વાનુમાન કરો.

A2.5 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નિમ્નલિખિત મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ગાણિતિક મોડેલ એ વાસ્તવિક જીવનની પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે. ગાણિતિક મોડેલિંગ એ ગાણિતિક મોડેલ રચવાની, તેને ઉકેલવાની અને વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓ સમજવામાં તેનો ઉપયોગ કરવાની પ્રક્રિયા છે.
2. મોડેલિંગમાં ઉપયોગી અલગ-અલગ સોપાનો આ પ્રમાણે છે : સમસ્યાની સમજ, ગાણિતિક મોડેલનું સૂત્રીકરણ, તેનો ઉકેલ, વાસ્તવિક જીવન સંદર્ભે તેનું અર્થઘટન અને છેલ્લે અત્યંત આવશ્યક મોડેલની યથાર્થતા.
3. કેટલાંક ગાણિતિક મોડેલનું નિર્માણ કર્યું.
4. ગાણિતિક મોડેલિંગની મહત્તા

જવાબો/સૂચનો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51
2. કોઈ પણ પૂર્ણાંકનું સ્વરૂપ $6q$, $6q + 1$, $6q + 2$, $6q + 3$, $6q + 4$ અથવા $6q + 5$ હોય.
3. 8 સભ્ય
4. કોઈ પણ પૂર્ણાંકનું સ્વરૂપ $3q$, $3q + 1$ અથવા $3q + 2$ હોય. આ બધા પૂર્ણાંકોનો વર્ગ કરો.
5. કોઈ પણ પૂર્ણાંકનું સ્વરૂપ $9q$, $9q + 1$, $9q + 2$, $9q + 3$, ... અથવા $9q + 8$ હોય.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) લ.સા.અ. = 182; ગુ.સા.અ. = 13 (ii) લ.સા.અ. = 23460; ગુ.સા.અ. = 2
   (iii) લ.સા.અ. = 3024; ગુ.સા.અ. = 6
3. (i) લ.સા.અ. = 420; ગુ.સા.અ. = 3 (ii) લ.સા.અ. = 11339; ગુ.સા.અ. = 1
   (iii) લ.સા.અ. = 1800; ગુ.સા.અ. = 1
4. 22338

7. 36 મિનિટ

સ્વાધ્યાય 1.4

1. (i) સાન્ત (ii) સાન્ત (iii) અનંત આવૃત્ત (iv) સાન્ત
   (v) અનંત આવૃત્ત (vi) સાન્ત (vii) અનંત આવૃત્ત (viii) સાન્ત
   (ix) સાન્ત (x) અનંત આવૃત્ત
2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375
   (vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3. (i) સંમેય, q ના અવિભાજ્ય અવયવો 2 અથવા 5 અથવા ફક્ત બંને હશે.

(ii) સંમેય નથી

(iii) સંમેય, q ના અવિભાજ્ય અવયવોમાં 2 અથવા 5 ઉપરાંત અન્ય કોઈ અવિભાજ્ય પણ સમાવિષ્ટ છે.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (i) શૂન્યો નથી (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. (i) ભાગફળ $= x - 3$ અને શેષ $= 7x - 9$

(ii) ભાગફળ $= x^2 + x - 3$ અને શેષ $= 8$

(iii) ભાગફળ $= -x^2 - 2$ અને શેષ $= -5x + 10$

2. (i) હા (ii) હા (iii) ના **3.** $-1, -1$ **4.** $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$

(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$

(i), (ii) અને (iii) એ દરેક માટે બીજાં ઘણાં ઉદાહરણો પણ હોઈ શકે. આ નમૂના માત્ર છે.

સ્વાધ્યાય 2.4 (વૈકલ્પિક)*

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ **3.** $a = 1, b = \pm\sqrt{2}$

4. $-5, 7$ **5.** $k = 5$ અને $a = -5$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. બૈજિક રીતે બંને પરિસ્થિતિ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

જો x અને y અનુક્રમે આફતાબ અને તેની પુત્રીની હાલની ઉંમર હોય, તો $x - 7y + 42 = 0$; $x - 3y - 6 = 0$, આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોનો આલેખ દોરી શકાય.

2. બૈજિક રીતે બે પરિસ્થિતિ આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

જો x અને y અનુક્રમે બેટ અને બોલની કિંમત (₹ માં) હોય, તો $x + 2y = 1300$; $x + 3y = 1300$. આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોના આલેખ દોરી શકાય.

3. બૈજિક રીતે પરિસ્થિતિ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

જો x અને y અનુક્રમે સફરજન અને દ્રાક્ષના ભાવ (₹ પ્રતિ કિગ્રામાં) હોય, તો $2x + y = 160$; $4x + 2y = 300$, આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોના આલેખ દોરી શકાય.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (i) આવશ્યક સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $x + y = 10$; $x - y = 4$ છે. x છોકરીઓની સંખ્યા અને y છોકરાઓની સંખ્યા છે. આલેખની રીતે ઉકેલ મેળવવા આ સમીકરણોના આલેખ, આલેખપત્ર પર સમાન અક્ષો લઈને દોરો. છોકરીઓની સંખ્યા = 7, છોકરાઓની સંખ્યા = 3

(ii) આવશ્યક સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$ છે. x અને y અનુક્રમે પેન્સિલ અને પેનની કિંમત (₹ માં) દર્શાવે છે.
આલેખની રીતે ઉકેલ મેળવવા આ સમીકરણોના આલેખ આલેખપત્ર પર સમાન અક્ષો લઈને દોરો.
એક પેન્સિલની કિંમત = ₹ 3; એક પેનની કિંમત = ₹ 5

2. (i) એક બિંદુમાં છેદે (ii) સંપાતિ (iii) સમાંતર

3. (i) સુસંગત (ii) સુસંગત નથી (iii) સુસંગત
(iv) સુસંગત (v) સુસંગત

4. (i) સુસંગત (ii) સુસંગત નથી (iii) સુસંગત
(iv) સુસંગત નથી
ઉપર (i) નો ઉકેલ x ની કોઈ પણ કિંમત માટે $y = 5 - x$ થી મળે, એટલે કે, તેના અસંખ્ય ઉકેલ મળે છે.
ઉપર (iii) નો ઉકેલ $x = 2, y = 2$ છે. એટલે કે, અનન્ય ઉકેલ છે.

5. લંબાઈ = 20 મી અને પહોળાઈ = 16 મી

6. ત્રણેય વિભાગો માટે નમૂનારૂપ જવાબ
(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $(-1, 0)$, $(4, 0)$ અને $(2, 3)$ છે.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (i) $x = 9, y = 5$ (ii) $s = 9, t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$
અત્રે x ની કિંમત કોઈ પણ હોઈ શકે એટલે કે અસંખ્ય ઉકેલો છે.
(iv) $x = 2, y = 3$ (v) $x = 0, y = 0$ (vi) $x = 2, y = 3$

2. $x = -2, y = 5, m = -1$

3. (i) $x > y$ હોય તેવી બે સંખ્યાઓ હોય, તો $x - y = 26$, $x = 3y$; $x = 39$, $y = 13$

(ii) જો x અને y ખૂણાઓના અંશ માપ હોય, તો $x - y = 18$, $x + y = 180$; $x = 99$, $y = 81$

(iii) x અને y અનુક્રમે એક બૅટ અને એક બૉલની કિંમત (₹ માં) હોય, તો $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$; $x = 500$, $y = 50$

(iv) x નિશ્ચિત કિંમત (₹ માં) અને y પ્રતિ કિમીમાં દર હોય, તો $x + 10y = 105$, $x + 15y = 155$; $x = 5$, $y = 10$; ₹ 255

(v) x અને y અનુક્રમે અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ હોય, તો $11x - 9y + 4 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$;

$\frac{7}{9}$ $(x = 7, y = 9)$

(vi) x અને y અનુક્રમે જેકોબ અને તેના પુત્રની ઉંમર (વર્ષમાં) હોય, તો $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$;

$x = 40$, $y = 10$

સ્વાધ્યાય 3.4

1. (i) $x = \frac{19}{5}, y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2, y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$

(iv) $x = 2, y = -3$

2. (i) x અને y અનુક્રમે અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ હોય, તો $x - y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$; $\frac{3}{5}$

(ii) x અને y અનુક્રમે નૂરી અને સોનુની ઉંમર (વર્ષમાં) હોય, તો $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, નૂરીની ઉંમર $x = 50$, સોનુની ઉંમર $y = 20$

(iii) x અને y અનુક્રમે સંખ્યાના દશક અને એકમના અંકો હોય, તો $x + y = 9$, $8x - y = 0$; 18

(iv) x અને y અનુક્રમે ₹ 50 અને ₹ 100 ની ચલણી નોટની સંખ્યા હોય, તો $x + 2y = 40$, $x + y = 25$, $x = 10$, $y = 15$

(v) x એ નિયત દર (₹ માં) અને y એ પ્રતિદિન વધારાનો દર (₹ માં) હોય, તો $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$; $x = 15$, $y = 3$

સ્વાધ્યાય 3.5

1. (i) ઉકેલ નથી (ii) અનન્ય ઉકેલ, $x = 2$, $y = 1$ (iii) અસંખ્ય ઉકેલો

(iv) અનન્ય ઉકેલ, $x = 4$, $y = -1$

2. (i) $a = 5$, $b = 1$ (ii) $k = 2$

3. (i) $x = -2$, $y = 5$

4. (i) x એ નિયત ભાવ (₹ માં) અને y ભોજનનો પ્રતિદિન ભાવ (₹ માં) હોય, તો $x + 20y = 1000$, $x + 26y = 1180$, ; $x = 400$, $y = 30$

(ii) જો x અને y અનુક્રમે અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ હોય, તો $3x - y - 3 = 0$, $4x - y - 8 = 0$; $\frac{5}{12}$

(iii) જો x અને y અનુક્રમે સાચા જવાબો અને ખોટા જવાબોની સંખ્યા હોય, તો $3x - y = 40$, $2x - y = 25$, ; 20

(iv) જો u અને v અનુક્રમે બે ગાડીની ઝડપ કિમી/કલાકમાં હોય, તો $u - v = 20$, $u + v = 100$; $u = 60$, $v = 40$

(v) જો x અને y અનુક્રમે લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ (એકમમાં) હોય, તો $3x - 5y - 6 = 0$, $2x + 3y - 61 = 0$. લંબાઈ $(x) = 17$, પહોળાઈ $(y) = 9$

સ્વાધ્યાય 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ (ii) $x = 4, y = 9$ (iii) $x = \frac{1}{5}, y = -2$

(iv) $x = 4, y = 5$ (v) $x = 1, y = 1$ (vi) $x = 1, y = 2$

(vii) $x = 3, y = 2$ (viii) $x = 1, y = 1$

2. (i) u અને v અનુક્રમે હોડીની અને પ્રવાહની ઝડપ કિમી/કલાકમાં હોય, તો $u + v = 10$, $u - v = 2$; $u = 6$, $v = 4$

(ii) n અને m અનુક્રમે 1 સ્ત્રી અને 1 પુરુષ દ્વારા ભરતકામ પૂરુ કરવામાં લાગતા દિવસોની સંખ્યા હોય, તો $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, $n = 18$, $m = 36$

(iii) u અને v અનુક્રમે ટ્રેન અને બસની ઝડપ કિમી/કલાકમાં હોય, તો $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4$, $\frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, $u = 60$, $v = 80$

સ્વાધ્યાય 3.7 (વૈકલ્પિક)*

1. અનિની ઉંમર 19 વર્ષ અને બિજુની ઉંમર 16 વર્ષ છે. અથવા અનિની ઉંમર 21 વર્ષ અને બિજુની ઉંમર 24 વર્ષ છે.

2. ₹ 40, ₹ 170; ધારો કે, પહેલી વ્યક્તિ પાસે રૂપિયા x અને બીજી વ્યક્તિ પાસે રૂપિયા y છે.
$x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$

3. 600 કિમી

4. 36

5. $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 120°$

6. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુના યામ (1, 0), (0, –3), (0, –5)

7. (i) $x = 1, y = -1$ (ii) $x = \frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2}$, $y = \frac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$

(iii) $x = a, y = b$ (iv) $x = a + b,\ y = -\frac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2, y = 1$

8. $\angle A = 120°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 110°$

સ્વાધ્યાય 4.1

1. (i) હા (ii) હા (iii) ના (iv) હા
(v) હા (vi) ના (vii) ના (viii) હા

2. (i) x મી એ પ્લોટની પહોળાઈ હોય, તો $2x^2 + x - 528 = 0$.

(ii) x સૌથી નાનો પૂર્ણાંક હોય, તો $x^2 + x - 306 = 0$.

(iii) x એ રોહનની હાલની ઉંમર (વર્ષમાં) હોય, તો $x^2 + 32x - 273 = 0$.

(iv) u એ ટ્રેનની કિમી/કલાકમાં ઝડપ હોય, તો $u^2 - 8u - 1280 = 0$.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (i) –2, 5 (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

3. સંખ્યાઓ 13 અને 14 છે.

4. ધન પૂર્ણાંકો 13 અને 14 છે.

5. 5 સેમી અને 12 સેમી

6. નમૂનાની સંખ્યા = 6, દરેક નમૂનાનો ખર્ચ = ₹ 15

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}$, 3 (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) અસ્તિત્વ ધરાવતા નથી.

2. 1 ની જેમ જ

3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2

4. 7 વર્ષ

5. ગણિતમાં ગુણ = 12, અંગ્રેજીમાં ગુણ = 18

અથવા ગણિતમાં ગુણ = 13, અંગ્રેજીમાં ગુણ = 17

6. 120 મી, 90 મી

7. 18, 12 અથવા 18, –12

8. 40 કિમી/કલાક

9. 15 કલાક, 25 કલાક

10. પેસેન્જર ટ્રેનની ઝડપ = 33 કિમી/કલાક

એક્સપ્રેસ ટ્રેનની ઝડપ = 44 કિમી/કલાક

11. 18 મી, 12 મી

સ્વાધ્યાય 4.4

1. (i) વાસ્તવિક ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવતા નથી. (ii) સમાન ઉકેલ ; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) ભિન્ન ઉકેલ ; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. હા. 40 મી, 20 મી 4. ના 5. હા, 20 મી, 20 મી

સ્વાધ્યાય 5.1

1. (i) હા. 15, 23, 31, ... સમાંતર શ્રેણી રચે છે. દરેક અનુગામી પદ પૂરોગામી પદમાં 8 ઉમેરતાં મળે છે.

(ii) ના. કદ V, $\frac{3V}{4}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$V, ...

(iii) હા. 150, 200, 250,... સમાંતર શ્રેણી રચે છે.

(iv) ના. મુદ્દલ $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)$, $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$, $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$, ...

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) –2, –2, –2, –2,

(iii) 4, 1, –2, –5 (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) –1.25, –1.50, –1.75, –2.0

3. (i) $a = 3, d = -2$ (ii) $a = -5, d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6, d = 1.1$

4. (i) ના (ii) હા, $d = \frac{1}{2}$; $4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) હા, $d = -2$; –9.2, –11.2, –13.2 (iv) હા, $d = 4$; 6, 10, 14

(v) હા, $d = \sqrt{2}$; $3 + 4\sqrt{2}$, $3 + 5\sqrt{2}$, $3 + 6\sqrt{2}$ (vi) ના

(vii) હા, $d = -4$; – 16, – 20, – 24 (viii) હા, $d = 0$; $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) ના (x) હા, $d = a$; $5a, 6a, 7a$

(xi) ના (xii) હા, $d = \sqrt{2}$; $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) ના (xiv) ના (xv) હા, $d = 24$; 97, 121, 145

સ્વાધ્યાય 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16 મું પદ **5.** (i) 34 (ii) 27

6. ના **7.** 178 **8.** 64

9. 5 મું પદ **10.** 1 **11.** 65 મું પદ

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, ... **17.** છેલ્લેથી 20 મું પદ 158 છે.

18. –13, –8, –3 **19.** 11 મું વર્ષ **20.** 10

સ્વાધ્યાય 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) –8930

3. (i) $n = 16$, $S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$ (iii) $a = 4$, $S_{12} = 246$

(iv) $d = -1$, $a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}$, $a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5$, $a_n = 34$

(vii) $n = 6$, $d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7$, $a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12; $a = 9$, $d = 8$, $S = 636$ ને સૂત્ર $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ માં મૂકતાં, દ્વિઘાત સમીકરણ $4n^2 + 5n - 636 = 0$ મળે. તેને ઉકેલતાં, $n = -\frac{53}{4}$, 12 મળે. આ બે ઉકેલ પૈકી ફક્ત ઉકેલ 12 સ્વીકાર્ય છે.

5. $n = 16$, $d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38$, $S = 6973$ **7.** સરવાળો = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3$, $S_2 = 4$; $a_2 = S_2 - S_1 = 1$; $S_3 = 3$, $a_3 = S_3 - S_2 = -1$, $a_{10} = S_{10} - S_9 = -15$; $a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. ઈનામનું મૂલ્ય (₹ માં) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 છે.

17. 234 **18.** 143 સેમી

19. 16 હાર, લાકડાના 5 પાટડા ઉપરની હારમાં મૂકવા પડે. $S = 200$, $a = 20$, $d = -1$ ને સૂત્ર $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ માં મૂકતાં, $41n - n^2 = 400$ મળે. તેને ઉકેલતાં, $n = 16, 25$ મળે. તેથી હારની સંખ્યા કાં તો 16 હોય કે, 25 હોય. $a_{25} = a + 24d = -4$ એટલે કે, 25મી હારમાં લાકડાના પાટડાની સંખ્યા -4 છે. તે સ્વીકાર્ય નથી. તેથી, $n = 25$ શક્ય નથી. $n = 16$ માટે, $a_{16} = 5$. તેથી, 16 હાર થશે અને 5 લાકડાના પાટડા ઉપરની હારમાં મૂકવા પડે.

20. 370 મી

સ્વાધ્યાય 5.4 (વૈકલ્પિક)*

1. 32 મું પદ **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 સેમી

4. 35 **5.** 750 મી^{3}

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (i) સમરૂપ (ii) સમરૂપ (iii) સમબાજુ

(iv) સમાન, સમપ્રમાણમાં **3.** ના

સ્વાધ્યાય 6.2

1. (i) 2 સેમી (ii) 2.4 સેમી

2. (i) ના (ii) હા (iii) હા

9. O માંથી AD અને BCને અનુક્રમે E અને F માં છેદતી DC ને સમાંતર રેખા દોરો.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. (i) હા, ખૂખૂખૂ, Δ ABC ~ Δ PQR (ii) હા, બાબાબા, Δ ABC ~ Δ QRP
(iii) ના (iv) હા, બાખૂબા, Δ MNL ~ Δ QPR
(v) ના (vi) હા, ખૂખૂ, Δ DEF ~ Δ PQR

2. 55°, 55°, 55°

14. AD = DE થાય તે રીતે AD ને બિંદુ E સુધી લંબાવો અને PM = MN થાય તે રીતે PM ને N સુધી લંબાવો. EC અને NR જોડો.

15. 42 મી

સ્વાધ્યાય 6.4

1. 11.2 સેમી **2.** 4 : 1 **5.** 1 : 4 **8.** C **9.** D

સ્વાધ્યાય 6.5

1. (i) હા, 25 સેમી (ii) ના (iii) ના (iv) હા, 13 સેમી

6. $a\sqrt{3}$ **9.** 6 મી **10.** $6\sqrt{7}$ મી **11.** $300\sqrt{61}$ કિમી

12. 13 મી **17.** C

સ્વાધ્યાય 6.6 (વૈકલ્પિક)*

1. R માંથી SP ને સમાંતર રેખા લંબાવેલ QP ને T માં છેદે છે. PT = PR સાબિત કરો.

6. આ સ્વાધ્યાયના પ્રશ્ન 5ના પરિણામ (iii) નો ઉપયોગ કરો.

10 . 3 મી, 2.79 મી

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 કિમી **3.** ના **4.** હા

5. ચંપા સાચી છે.

6. (i) ચોરસ (ii) ચતુષ્કોણ નથી (iii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

7. (–7, 0) **8.** –9, 3 **9.** ± 4, QR = $\sqrt{41}$, PR = $\sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. (1, 3) **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$; $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ મી, 5 માં ક્રમાંકની રેખા 22.5 મી અંતરે **4.** 2 : 7

5. 1: 1; $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x = 6, y = 3$ **7.** (3, –10)

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$, (0, 5), $\left(1, \frac{13}{2}\right)$ **9.** 24 ચો એકમ

સ્વાધ્યાય 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ ચો એકમ (ii) 32 ચો એકમ
2. (i) $k = 4$ (ii) $k = 3$
3. 1 ચો એકમ, 1 : 4
4. 28 ચો એકમ

સ્વાધ્યાય 7.4 (વૈકલ્પિક)*

1. 2 : 9
2. $x + 3y - 7 = 0$
3. (3, – 2)
4. (1, 0), (1, 4)
5. (i) AD અને AB ને યામાક્ષો લેતાં, (4, 6), (3, 2), (6, 5)

   (ii) CB અને CD ને યામાક્ષો લેતાં, (12, 2), (13, 6), (10, 3); $\frac{9}{2}$ ચો. એકમ, $\frac{9}{2}$ ચો. એકમ; બંને વિકલ્પમાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે.
6. $\frac{15}{32}$ ચો એકમ; 1 : 16
7. (i) D $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (ii) P $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

   (iii) Q $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$, R $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R સંપાતી બિંદુઓ છે.

   (v) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
8. સમબાજુ ચતુષ્કોણ

સ્વાધ્યાય 8.1

1. (i) $\sin \text{A} = \frac{7}{25}$, $\cos\text{A} = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin \text{C} = \frac{24}{25}$, $\cos \text{C} = \frac{7}{25}$
2. 0
3. $\cos\text{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan\text{A} = \frac{3}{\sqrt{7}}$
4. $\sin \text{A} = \frac{15}{17}$, $\sec \text{A} = \frac{17}{8}$
5. $\sin \theta = \frac{5}{13}$, $\cos \theta = \frac{12}{13}$, $\tan \theta = \frac{5}{12}$, $\cot \theta = \frac{12}{5}$, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{13}{5}$
7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$
8. હા
9. (i) 1 (ii) 0
10. $\sin \text{P} = \frac{12}{13}$, $\cos \text{P} = \frac{5}{13}$, $\tan \text{P} = \frac{12}{5}$
11. (i) અસત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) અસત્ય (v) અસત્ય

સ્વાધ્યાય 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C **3.** $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$

4. (i) અસત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) અસત્ય (v) સત્ય

સ્વાધ્યાય 8.3

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0

3. $\angle A = 36°$ **5.** $\angle A = 22°$ **7.** $\cos 23° + \sin 15°$

સ્વાધ્યાય 8.4

1. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$, $\cos A = \frac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A-1}$

   $\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$

3. (i) 1 (ii) 1 **4.** (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

સ્વાધ્યાય 9.1

1. 10 મી **2.** $8\sqrt{3}$ મી **3.** 3 મી, $2\sqrt{3}$ મી **4.** $10\sqrt{3}$ મી

5. $40\sqrt{3}$ મી **6.** $19\sqrt{3}$ મી **7.** $20(\sqrt{3}-1)$ મી **8.** $0.8(\sqrt{3}+1)$ મી

9. $16\frac{2}{3}$ મી **10.** $20\sqrt{3}$ મી, 20 મી, 60 મી **11.** $10\sqrt{3}$ મી, 10 મી

12. $7(\sqrt{3}+1)$ મી **13.** $75(\sqrt{3}-1)$ મી **14.** $58\sqrt{3}$ મી

15. 3 સેકન્ડ

સ્વાધ્યાય 10.1

1. અસંખ્ય

2. (i) એક (ii) છેદિકા (iii) બે (iv) સ્પર્શબિંદુ **3.** D

સ્વાધ્યાય 10.2

1. A **2.** B **3.** A **6.** 3 સેમી

7. 8 સેમી **12.** AB = 15 સેમી, AC = 13 સેમી

સ્વાધ્યાય 12.1

1. 28 સેમી **2.** 10 સેમી

3. સોનેરી : 346.5 સેમી^{2}; લાલ : 1039.5 સેમી^{2}; વાદળી : 1732.5 સેમી^{2}; કાળો : 2425.5 સેમી^{2}; સફેદ : 3118.5 સેમી^{2}

4. 4375 **5.** A

સ્વાધ્યાય 12.2

1. $\frac{132}{7}$ સેમી^{2} **2.** $\frac{77}{8}$ સેમી^{2} **3.** $\frac{154}{3}$ સેમી^{2}

4. (i) 28.5 સેમી^{2} (ii) 235.5 સેમી^{2}

5. (i) 22 સેમી (ii) 231 સેમી^{2} (iii) $\left(231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ સેમી^{2}

6. 20.4375 સેમી^{2} ; 686.0625 સેમી^{2} **7.** 88.44 સેમી^{2}

8. (i) 19.625 મી^{2} (ii) 58.875 મી^{2} **9.** (i) 285 મિમી (ii) $\frac{385}{4}$ મિમી^{2}

10. $\frac{22275}{28}$ સેમી^{2} **11.** $\frac{158125}{126}$ સેમી^{2}

12. 189.97 કિમી^{2} **13.** ₹ 162.68 **14.** D

સ્વાધ્યાય 12.3

1. $\frac{4523}{28}$ સેમી^{2} **2.** $\frac{154}{3}$ સેમી^{2} **3.** 42 સેમી^{2}

4. $\left(\frac{660}{7}+36\sqrt{3}\right)$ સેમી^{2} **5.** $\frac{68}{7}$ સેમી^{2} **6.** $\left(\frac{22528}{7}-768\sqrt{3}\right)$ સેમી^{2}

7. 42 સેમી^{2} **8.** (i) $\frac{2804}{7}$ મી (ii) 4320 મી^{2}

9. 66.5 સેમી^{2} **10.** 1620.5 સેમી^{2} **11.** 378 સેમી^{2}

12. (i) $\frac{77}{8}$ સેમી^{2} (ii) $\frac{49}{8}$ સેમી^{2} **13.** 228 સેમી^{2}

14. $\frac{308}{3}$ સેમી^{2} **15.** 98 સેમી^{2} **16.** $\frac{256}{7}$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.1

1. 160 સેમી^{2} **2.** 572 સેમી^{2} **3.** 214.5 સેમી^{2}

4. મોટામાં મોટો વ્યાસ = 7 સેમી, પૃષ્ઠફળ = 332.5 સેમી^{2}

5. $\frac{1}{4}\, l^2\,(\pi + 24)$ **6.** 220 મિમી^{2} **7.** 44 મી^{2}, ₹ 22000

8. 18 સેમી^{2} **9.** 374 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.2

1. π સેમી^{3}
2. 66 સેમી^{3} નમૂનાની અંદરની હવાનું કદ = (શંકુ + નળાકાર + શંકુ)ની અંદરની હવાનું કદ

   $= \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$ અહીં, r શંકુ અને નળાકારની ત્રિજ્યા છે. h_1 શંકુની ઊંચાઈ (લંબાઈ) અને h_2 નળાકારની ઊંચાઈ (લંબાઈ) છે.

   માંગેલ કદ $= \frac{1}{3}\pi r^2 \; (h_1 + 3h_2 + h_1)$
3. 338 સેમી^{3} **4.** 523.53 સેમી^{3} **5.** 100 **6.** 892.26 કિગ્રા
7. 1.131 મી^{3} (આશરે) **8.** સત્ય નથી. સાચો જવાબ 346.51 સેમી^{3} છે.

સ્વાધ્યાય 13.3

1. 2.74 સેમી **2.** 12 સેમી **3.** 2.5 મી
4. 1.125 મી **5.** 10 **6.** 400
7. 36 સેમી ; $12\sqrt{13}$ સેમી **8.** 562500 મી^{2} ; અથવા 56.25 હેક્ટર **9.** 100 મિનિટ

સ્વાધ્યાય 13.4

1. $102\frac{2}{3}$ સેમી^{3} **2.** 48 સેમી^{2} **3.** $710\frac{2}{7}$ સેમી^{2}
4. દૂધનો ખર્ચ ₹ 209 અને ધાતુની શીટનો ખર્ચ ₹ 156.75 **5.** 7964.4 મી

સ્વાધ્યાય 13.5 (વૈકલ્પિક)*

1. 1257.14 સેમી; 789 ગ્રા (લગભગ) **2.** 30.14 સેમી^{3}; 52.75 સેમી^{2}
3. 1792 **4.** $782\frac{4}{7}$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 14.1

1. 8.1 છોડ. આપણે પ્રત્યક્ષ રીતનો ઉપયોગ કર્યો છે. કારણ કે x_i અને f_i નું સંખ્યાત્મક મૂલ્ય નાનું છે.
2. ₹ 545.20 **3.** $f = 20$ **4.** 75.9
5. 57.19 **6.** ₹ 211 **7.** 0.099 ppm
8. 12.38 દિવસો **9.** 69.43 %

સ્વાધ્યાય 14.2

1. બહુલક = 36.8 વર્ષ, મધ્યક = 35.37 વર્ષ, હૉસ્પિટલમાં દાખલ થયેલા મહત્તમ દર્દીઓની ઉંમર 36.8 વર્ષ હતી. જ્યારે, હૉસ્પિટલમાં દાખલ થયેલા દર્દીઓની સરેરાશ ઉંમર 35.37 વર્ષ હતી
2. 65.625 કલાક
3. બહુલકીય માસિક ખર્ચ = ₹ 1847.83

   માસિક સરેરાશ ખર્ચ = ₹ 2662.5
4. બહુલક = 30.6, મધ્યક = 29.2, મોટા ભાગનાં રાજ્યો / કેન્દ્ર શાસિત પ્રદેશમાં વિદ્યાર્થી શિક્ષક ગુણોત્તર 30.6 છે અને આ ગુણોત્તરની સરેરાશ 29.2 છે.

5. બહુલક = 4608.7 રન

6. બહુલક = 44.7 ગાડી

સ્વાધ્યાય 14.3

1. મધ્યસ્થ = 137 એકમ, મધ્યક = 137.05 એકમ; બહુલક = 135.76 એકમ

આમ, ત્રણેય વિકલ્પમાં લગભગ સમાન છે.

2. $x = 8, y = 7$

3. મધ્યસ્થ ઉંમર = 35.76 વર્ષ

4. મધ્યસ્થ લંબાઈ = 146.75 મીમી

5. મધ્યસ્થ આયુષ્ય = 3406.98 કલાક

6. મધ્યસ્થ = 8.05, મધ્યક = 8.32, બહુલકીય કદ = 7.88

7. મધ્યસ્થ વજન = 56.67 કિગ્રા.

સ્વાધ્યાય 14.4

1.

દૈનિક આવક (₹ માં)	સંચયી આવૃત્તિ
120 થી ઓછી	12
140 થી ઓછી	26
160 થી ઓછી	34
180 થી ઓછી	40
200 થી ઓછી	50

બિંદુઓ (120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) અને (200, 50) નું આલેખન કરી ઓજીવ દોરો.

2. બિંદુઓ (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) અને (52, 35) નું આલેખન કરી ઓજીવ દોરો. અહીં, $\frac{n}{2} = 17.5$. જેનો y યામ 17.5 હોય તે બિંદુ ઓજીવ પર દર્શાવો. આ બિંદુનો x યામ મધ્યસ્થ થશે. જે 46.5 છે.

3.

ઉત્પાદન (કિગ્રા/હે)	સંચયી આવૃત્તિ
50 કે તેથી વધારે	100
55 કે તેથી વધારે	98
60 કે તેથી વધારે	90
65 કે તેથી વધારે	78
70 કે તેથી વધારે	54
75 કે તેથી વધારે	16

હવે, બિંદુઓ (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) અને (75, 16) નું આલેખન કરી ઓજીવ દોરો.

સ્વાધ્યાય 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, અશક્ય ઘટના (iii) 1, ચોક્કસ ઘટના

(iv) 1 (v) 0, 1

2. પ્રયોગ (iii) અને (iv) નાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

3. આપણે જ્યારે સિક્કો ઉછાળીએ છીએ, ત્યારે છાપ અને કાંટો એ એકસમાન રીતે મળે છે. તેથી સિક્કો ઉછાળવાનાં વ્યક્તિગત પરિણામો વિશે આગાહી થઈ ન શકે.

4. B **5.** 0.95 **6.** (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 **8.** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ **10.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. (i) $\frac{5}{13}$ **12.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 **16.** $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ **18.** (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

બે પાસા પરનો સરવાળો	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) ના, અગિયાર સરવાળા સમસંભાવી નથી.

23. $\frac{3}{4}$: સંભવિત પરિણામો : HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH

અહીં, THH નો અર્થ પહેલી વખત ઉછાળતાં કાંટો, બીજી વખત ઉછાળતાં છાપ અને ત્રીજી વખત ઉછાળતાં છાપ આ પ્રમાણે.

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) ખોટું, આપણે પરિણામોને આ પ્રમાણે વર્ગીકૃત કરી શકીએ, પરંતુ, તે સમસંભાવી નથી. તેનું કારણ એ છે કે, દરેક પૈકી એક પરિણામ બે રીતે મળે છે. જેમ કે, પહેલા સિક્કા પર છાપ અને બીજા સિક્કા પર કાંટો અથવા પહેલા સિક્કા પર કાંટો અને બીજા સિક્કા પર છાપ મળે છે. તેથી, બે છાપ (અથવા બે કાંટા) મળે તેના કરતાં આની સંભાવના બમણી થાય.

(ii) સત્ય, પ્રશ્નમાં વિચારેલ પરિણામો સમસંભાવી છે.

સ્વાધ્યાય 15.2 (વૈકલ્પિક)

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 **4.** $\frac{x}{12}$, $x = 3$ **5.** 8

સ્વાધ્યાય A 1.1

1. (i) સંદિગ્ધ (ii) સત્ય (iii) સત્ય (iv) સંદિગ્ધ (v) સંદિગ્ધ

2. (i) સત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) સત્ય (v) સત્ય

3. ફક્ત (ii) સત્ય છે.

4. (i) જો $a > 0$ અને $a^2 > b^2$, તો $a > b$

(ii) જો $xy \geq 0$ અને $x^2 = y^2$, તો $x = y$

(iii) જો $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ અને $y \neq 0$, તો $x = 0$

(iv) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.

સ્વાધ્યાય A 1.2

1. A મૃત્યુને અધીન છે. **2.** ab સંમેય છે.

3. $\sqrt{17}$ નું દશાંશ નિરુપણ અનંત અનાવૃત્ત છે.

4. $y = 7$ **5.** $\angle A = 100°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 80°$

6. PQRS એક લંબચોરસ છે.

7. હા, પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞાને કારણે. ના, કારણ કે $\sqrt{3721} = 61$ અસંમેય નથી.
પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા અસત્ય હોવાને કારણે તારણ અસત્ય છે.

સ્વાધ્યાય A 1.3

1. કોઈક પૂર્ણાંક n માટે બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓ $2n + 1$ અને $2n + 3$ લો.

સ્વાધ્યાય A 1.4

1. (i) મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન નથી.

(ii) રેખા l રેખા m ને સમાંતર નથી.

(iii) આ પ્રકરણમાં બહુ સ્વાધ્યાય નથી.

(iv) બધા જ પૂર્ણાંકો સંમેય છે એવું નથી.

(v) બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે તેમ નથી.

(vi) કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ આળસુ છે.

(vii) બધી બિલાડીઓ કાળી છે.

(viii) $\sqrt{x} = -1$ થાય તેવી, ઓછામાં ઓછી એક એવી વાસ્તવિક સંખ્યા x મળે.

(ix) પૂર્ણાંક સંખ્યા a એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી.

(x) પૂર્ણાંકો a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય નથી.

2. (i) હા (ii) ના (iii) ના (iv) ના (v) હા

સ્વાધ્યાય A 1.5

1. (i) જો શરણને ખૂબ પરસેવો વળે, તો ટોકિયોમાં ગરમી હોય.

(ii) જો શાલિનીના પેટમાં બિલાડાં બોલતા હોય, તો તે ભૂખી હોય.

(iii) જો જશવંત ડિગ્રી મેળવી શકે, તો તેને શિષ્યવૃત્તિ મળે.

(iv) જો છોડ જીવંત હોય, તો તેને ફૂલો આવે.

(v) જો કોઈ પ્રાણીને પૂંછડી હોય, તો તે બિલાડી છે.

2. (i) જો ત્રિકોણ ABC ના આધાર ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તે સમદ્વિબાજુ છે. સત્ય

(ii) જો કોઈ પૂર્ણાંકનો વર્ગ અયુગ્મ હોય, તો તે પૂર્ણાંક અયુગ્મ છે. સત્ય

(iii) જો $x = 1$, તો $x^2 = 1$. સત્ય

(iv) જો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે, તો ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. સત્ય

(v) જો $a + (b + c) = (a + b) + c$, તો a, b અને c પૂર્ણ સંખ્યા છે. અસત્ય.

(vi) જો $x + y$ યુગ્મ હોય, તો x અને y અયુગ્મ છે. અસત્ય.

(vii) જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લંબચોરસ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર છે. સત્ય

સ્વાધ્યાય A 1.6

1. ધારણા $b \le d$ ધારી વિરોધાભાસ મેળવો.

3. જુઓ, પ્રકરણ 1નું ઉદાહરણ 10

6. જુઓ, ધોરણ IX ગણિત પાઠ્યપુસ્તકનું પ્રમેય 5.1

સ્વાધ્યાય A 2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. 1 સેમી^{2} વિસ્તાર લો. તેમાં રહેલા ટપકાંની સંખ્યા ગણો. વૃક્ષોની કુલ સંખ્યા એ ટપકાંની સંખ્યા અને ક્ષેત્રફળ (સેમી^{2}) નો ગુણાકાર થશે.

3. હપતા પદ્ધતિમાં વ્યાજનો દર 17.74 % છે અને તે 18 ટકાથી ઓછો છે.

સ્વાધ્યાય A 2.3

1. વિદ્યાર્થીઓ પોતાના જવાબ શોધશે.