МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

1.1. Вычисление интеграла

Задание.

а) Вычислить интеграл с помощью численного метода.

б) Вычислить интеграл методом Монте-Карло двумя способами: через количество случайных точек над графиком и под графиком функции, через суммирование значений подынтегральной функции в случайных точках.

в) Построить график функции.

г) Сравнить точность трех методов.

1) $\int\limits_0^t \sin(x^2)dx;$

2) $\int\limits_{-t}^t \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx;$

3) $\int\limits_0^t x\sin(1/x)dx;$

4) $\int\limits_0^t \dfrac{x^3}{x-\sin(x)}dx;$

5) $\int\limits_0^t \ln(2+1.5\sin(x))dx;$

6) $\int\limits_0^t \dfrac{x^2\sin(x)}{x-\sin(x)}dx.$

1.2. Вычисление площади фигуры

Задание.

а) Построить график кривой.

б) Вычислить точное значение площади области, ограниченной кривой.

в) Вычислить площадь области методом Монте-Карло через количество случайных точек, попавших в область.

г) Оценить точность метода.

7) $r = |\phi|$, $\phi \in [-\pi, \pi]$;

8) $r = 2\cos(t)$, $\phi = \sin(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$;

9) $r = \cos^2(\phi)$, $\phi \in [-\pi, \pi]$;

10) $x = \sin^3(t)$, $y = \cos^3(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$;

11) $r = 1 + \cos^2(\phi)$, $\phi \in [-\pi, \pi]$;

12) $r = 1 + \cos(\phi)$, $\phi \in [-\pi, \pi]$.

2. Случайное блуждание

Для приведенного случайного блуждания исследовать момент τ первого достижения уровня T

$$\tau = \min\{n\colon |X_n| \geq T\}.$$

Построить выборочную функцию распределения для τ и вычислить выборочное среднее и выборочную дисперсию при заданном объеме выборки N.

Во всех вариантах случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены.

1) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1},\ \xi_i \sim R[a, b]$;
2) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = X_n + (-1)^n \xi_{n+1},\ \xi_i \sim \exp(\lambda)$;
3) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1},\ \xi_i \sim N(a, \sigma^2)$;
4) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = X_n + (-1)^n \xi_{n+1},\ \xi_i \sim Poisson(\lambda)$;
5) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = |X_n + \xi_{n+1}|,\ \xi_i \sim R[a, b]$;
6) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = |X_n + (-1)^n \xi_{n+1}|,\ \xi_i \sim \exp(\lambda)$;
7) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = |X_n + \xi_{n+1}|,\ \xi_i \sim N(a, \sigma^2)$;
8) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = |X_n + (-1)^n \xi_{n+1}|,\ \xi_i \sim Poisson(\lambda)$;
9) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = \max(0, X_n + \xi_{n+1}),\ \xi_i \sim R[a, b]$;
10) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = \max(0, X_n + (-1)^n \xi_{n+1}),\ \xi_i \sim \exp(\lambda)$;
11) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = \max(0, X_n + \xi_{n+1}),\ \xi_i \sim N(a, \sigma^2)$;
12) $X_0 = 0,\ X_{n+1} = \max(0, X_n + (-1)^n \xi_{n+1}),\ \xi_i \sim Poisson(\lambda)$.

3. Поиск строки в последовательности

Задание.

а) Получить случайную последовательность заданной длины $N >> 1$.
б) Ввести короткую строку для поиска. Найти число вхождений данной строки в исходную последовательность.
в) Построить ряд распределения для числа вхождений, найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

1) случайная последовательность бросков монеты с вероятностью герба p;
2) случайная последовательность из нулей и единиц с вероятностью единицы p;
3) случайная последовательность из цифр;
4) случайная последовательность из результатов бросков симметричного кубика;
5) последовательность из мастей случайно выбранных карт из полной колоды;
6) случайная последовательность из игры «камень, ножницы, бумага»;
7) случайная последовательность из дней недели;
8) случайная последовательность из времен года;
9) случайная последовательность из месяцев;
10) случайная последовательность из 5 цветов (красный, синий, зеленый, желтый, белый);
11) случайная последовательность из материков;
12) случайная последовательность из побед, ничьих и поражений с вероятностями p, q и s соответственно ($p + q + s = 1$).