Метод конечных элементов

Лабораторная работа 1

Написать программу, реализующую вычисление усилий и моментов в оболочечном конечном элементе (КЭ) по заданной эпюре нормальных и сдвиговых напряжений.

Усилия N_{ij} и моменты M_{ij} определяются по формулам:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(\xi)\, d\xi, \qquad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(\xi)\, \xi d, \quad i,j = 1,2,3 \tag{1}$$

На рис. 1 приведен пример КЭ-сетки, покрывающей меридиональное сечение осесимметричной оболочки (Oz – ось вращения). На рис. 2 приведен один КЭ, обозначены оси местного базиса $Os\xi$. Ось Os направлена вдоль срединной линии меридионального сечения оболочки, ось $O\xi$ ей перпендикулярна. Толщина оболочки – h. На оси $O\xi$ точками отмечены узлы интегрирования. Красной линией приведен пример эпюры напряжений.

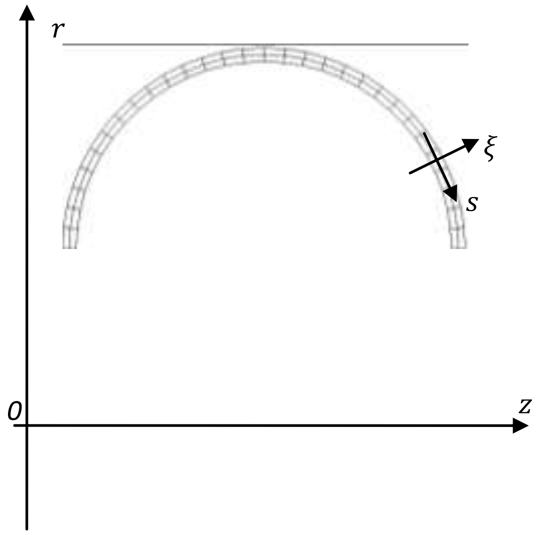


Рис. 1

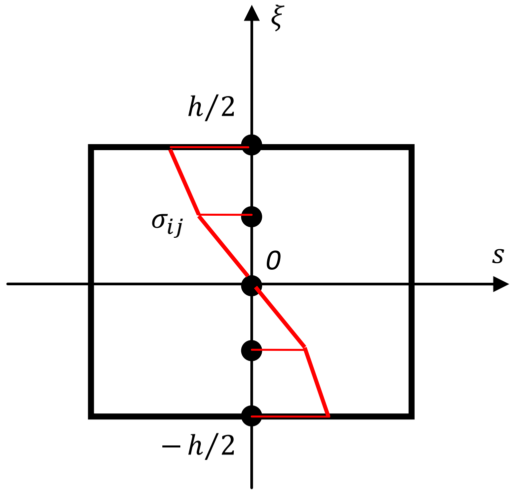


Рис. 2

Задача вычисления усилий и моментов в оболочечном элементе сводится к задаче численного интегрирования эпюры напряжений по толщине оболочки. Оболочка по толщине покрывается расчетной сеткой с n узлами. Количество узлов по толщине оболочки (n=3, 5, 7) задается пользователем. На рис. 2 приведен пример сетки с n=5. Для вычисления интегралов применять методы:

а) составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса на равномерной сетке;

б) квадратурные формулы Гаусса в узлах полиномов Лежандра (n=3,5,7*).

Осуществить тестирование программной реализации:

а) на равномерном распределении напряжений по толщине оболочки;

б) на линейном распределении напряжений по толщине оболочки;

Показать работоспособность программы для заданной эпюры напряжений.

Справочные материалы

Квадратурная формула Ньютона-Котеса

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса применяются на равномерной сетке $\xi_i, i = \overline{0,n}$. Шаг сетки: $\Delta\xi = h/n$, узлы сетки: $\xi_0 = -\frac{h}{2}$, $\xi_i = \xi_0 + i\Delta\xi, i = \overline{1,n}$.

Квадратурная формула Ньютона-Котеса имеет вид [1] (ВНИМАНИЕ!!! начиная отсюда и ниже символ h обозначает не толщину оболочки, а шаг сетки численного интегрирования, т.е. $h \equiv \Delta\xi$, т.к. ниже приводятся буквальные цитаты из [1]):

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i, \tag{8}$$

где

$$h=\frac{b-a}{n} \quad \text{и} \quad y_i = f_i(a+ih) \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Нетрудно убедиться, что справедливы соотношения:

$$1)\ \sum_{i=0}^{n} H_i = 1; \qquad 2)\ H_i = H_{n-i}.$$

Таблица 65

Коэффициенты Котеса

n	$\hat{H}_0$	$\hat{H}_1$	$\hat{H}_2$	$\hat{H}_3$	$\hat{H}_4$	$\hat{H}_5$	$\hat{H}_6$	$\hat{H}_7$	$\hat{H}_8$	Общий знаменатель N
1	1	1								2
2	1	4	1							6
3	1	3	3	1						8
4	7	32	12	32	7					90
5	19	75	50	50	75	19				288
6	41	216	27	272	27	216	41			840
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751		17280
8	989	5888	—928	10496	—4540	10496	—928	5888	989	28350

Приводим для справок таблицу коэффициентов Котеса (таблица 65). Для удобства записи коэффициенты Котеса для каждого n представлены в виде дробей

$$H_i = \frac{\hat{H}_i}{N}$$

с общим знаменателем N. Для контроля заметим, что

$$\sum_{i=0}^{n} \hat{H}_i = N.$$

n=1 – простая формула центральных прямоугольников
n=2 – простая формула трапеций
n=3 – простая формула Симпсона и т.д.

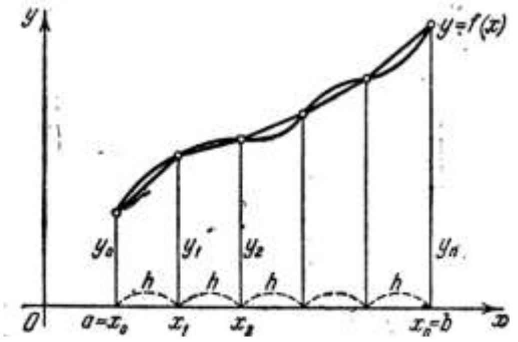
Для вычисления интегралов с заданной точностью используют составные формулы. Ниже приведены составная формула трапеции и составная формула Симпсона и главные члены погрешности для них.

Составная формула трапеций:

$$\int_a^b y\,dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

$$R = -\frac{nh^3}{12}y''(\xi) = -\frac{(b-a)\,h^2}{12}y''(\xi),$$

где $\xi \in [a,\ b]$.

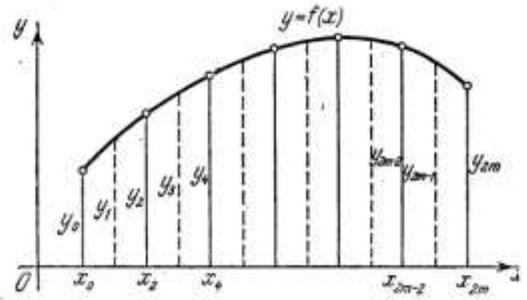


Составная формула Симпсона (четное число интервалов);

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}\left[(y_0+y_{2m}) + 4(y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1}) + 2(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2})\right].$$

$$R = -\frac{mh^5}{90}y^{\mathrm{IV}}(\xi) = -\frac{(b-a)\,h^4}{180}y^{\mathrm{IV}}(\xi),$$

где $\xi \in [a, b]$.



Квадратурные формулы Гаусса в узлах полиномов Лежандра

Полиномы вида

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

называются полиномами Лежандра.

Ниже приводим первые пять полиномов Лежандра и их графики (рис. 73):

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

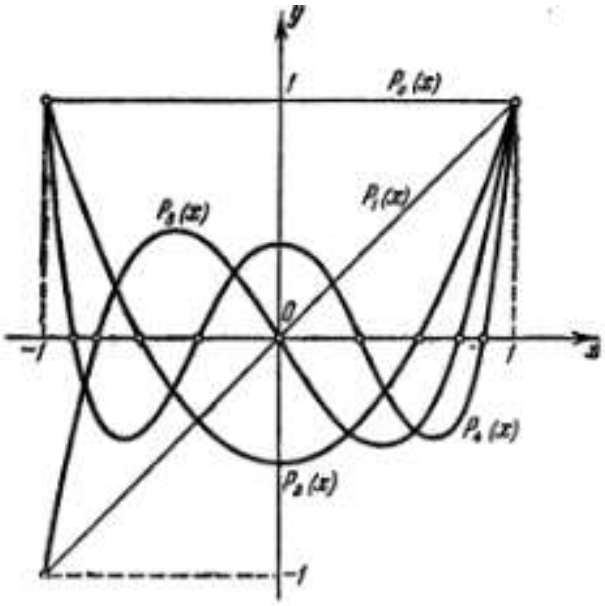


Рис. 73.

Вычисление определенного интеграла от заданной функции

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

осуществляется по формуле Гаусса

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k)$$

Считать, что $\rho(x) \equiv 1$, n=3,5,7. Получить узлы x_k и коэффициенты квадратуры c_k. Получить оценку погрешности.

Сначала строят формулу Гаусса для стандартного отрезка [-1, 1]:

$$\int_{-1}^{1} \rho(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)$$

Узлы t_k для формулы Гаусса определяются как корни многочлена Лежандра соответствующей степени P_n. В общем случае применяется линейное преобразование [a, b] → [-1, 1]. С помощью замены переменных $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$, $x_k \to t_k$ осуществляют переход к формулам интегрирования на произвольном отрезке:

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{n} c_k f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_k\right)$$

План выполнения задания

1. Выписать рекуррентное соотношение для многочлена Лежандра.
2. Выписать многочлены Лежандра в явном виде для $n=\overline{0,5}$.
3. Выписать корни многочленов Лежандра для n=3, 5, 7* в виде иррациональных чисел. Для проверки вычислить их приближения и сравнить полученные величины с табличными значениями из литературы (например, [1]).
4. Выписать формулу для коэффициентов квадратуры c_k с n узлами (в общем виде):

$$c_k = \frac{2(1 - t_k^2)}{n^2 P_{n-1}^2(t_k)}$$

5. Получить формулы коэффициентов квадратур c_k для n=3, 5, 7*, записать их в числовом виде.

6. Выписать остаточный член формулы Гаусса с n узлами (в общем виде).

7. Получить остаточный член формулы Гаусса для n=3, 5, 7*.

8. Выяснить, для многочлена какой степени:

а) квадратурная формула метода Гаусса с n=3, 5, 7* узлами является точной.

б) оценка погрешности является точной.

Остаточный член формулы Гаусса (7) с n узлами выражается следующим образом [1], [6]:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)};$$

отсюда получаем:

$$R_2 = \frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),$$

$$R_3 = \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi),$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875}\left(\frac{b-a}{2}\right)^9 f^{(8)}(\xi),$$

$$R_5 = \frac{1}{1237732650}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{11} f^{(10)}(\xi),$$

$$R_6 = \frac{1}{648984486150}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{13} f^{(12)}(\xi) \text{ и т. д.}$$

Литература:

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. 3-е изд., исп. – М.: Наука, 1966. – 664 с.