



Métodos Numéricos para Engenharia

Prova 2 - Questão 5

FCTE
Universidade de Brasília

Grupo:

Gustavo Antonio Rodrigues e Silva

Mat: 242015380

Professor:

Manuel Silva Santos Barcelos Júnior

Data:

11 de Dezembro de 2025

Resumo

Este relatório apresenta a solução numérica para o problema de deflexão de uma viga simplesmente apoiada submetida a carregamento distribuído, considerando a teoria de grandes deformações. A equação diferencial não-linear é resolvida utilizando o método do tiro combinado com Runge-Kutta de quarta ordem.

1 Introdução

O cálculo de deflexões em vigas é fundamental na engenharia estrutural. Para pequenas deformações, utiliza-se a equação de Euler-Bernoulli linearizada. No entanto, quando as deformações são significativas, termos não-lineares devem ser considerados, resultando em uma equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem.

2 Formulação do Problema

2.1 Dados do Problema

- Comprimento da viga: $L = 4.0 \text{ m}$
- Rígidez flexural: $EI = 1.4 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2$
- Carregamento distribuído: $q = 10 \times 10^3 \text{ N/m}$
- Condições de contorno: $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$

2.2 Equação Diferencial

A equação diferencial que descreve a deflexão da viga é:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \frac{1}{2} q (Lx - x^2)$$

Esta é uma EDO não-linear de segunda ordem, onde o termo $[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}$ incorpora os efeitos das grandes deformações.

3 Metodologia Numérica

3.1 Transformação em Sistema de EDOs

Para aplicar métodos numéricos, transformamos a EDO de segunda ordem em um sistema de duas EDOs de primeira ordem:

Seja:

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{dy}{dx}$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{[1 + y_2^2]^{3/2} \cdot \frac{1}{2}q(Lx - x^2)}{EI} \end{aligned}$$

3.2 Método de Runge-Kutta de 4^a Ordem

Para resolver o sistema, utilizamos o método RK4:

Para um passo h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2) \\ k_3 &= f(x_n + h/2, y_n + hk_2/2) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

3.3 Método do Tiro (Shooting Method)

Como temos um problema de valor de contorno com $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$, utilizamos o método do tiro:

1. Chutamos um valor inicial para $\theta_0 = y'(0)$
2. Resolvemos o PVI usando RK4
3. Calculamos o resíduo $R = y(L)$
4. Ajustamos θ_0 usando bissecção até $|R| <$ tolerância

3.4 Parâmetros Numéricos

- Passo de integração: $h = 0.01 \text{ m}$
- Tolerância para convergência: $\epsilon = 10^{-5}$
- Limites iniciais para bissecção: $\theta_{\text{low}} = -0.01$, $\theta_{\text{high}} = 0.01$

4 Resultados Numéricos

4.1 Convergência do Método do Tiro

O método convergiu após 11 iterações da bissecção, com os seguintes resultados:

- Inclinação inicial: $\theta_0 = y'(0) = -1.9043 \times 10^{-3} \text{ rad}$
- Resíduo final: $y(L) = 1.8739 \times 10^{-6} \text{ m}$

4.2 Distribuição da Deflexão

A Tabela 1 apresenta valores selecionados da deflexão ao longo da viga:

$x \text{ (m)}$	$y(x) \text{ (m)}$
0.0	0.000000
1.0	-0.001696
2.0	-0.002380
3.0	-0.001695
4.0	0.000002

Tabela 1: Valores de deflexão em pontos selecionados

4.3 Deflexão Máxima

A deflexão máxima ocorre em $x = L/2 = 2.0 \text{ m}$:

$$y_{\max} = -2.380 \times 10^{-3} \text{ m}$$

5 Análise Gráfica

5.1 Gráfico da Deflexão

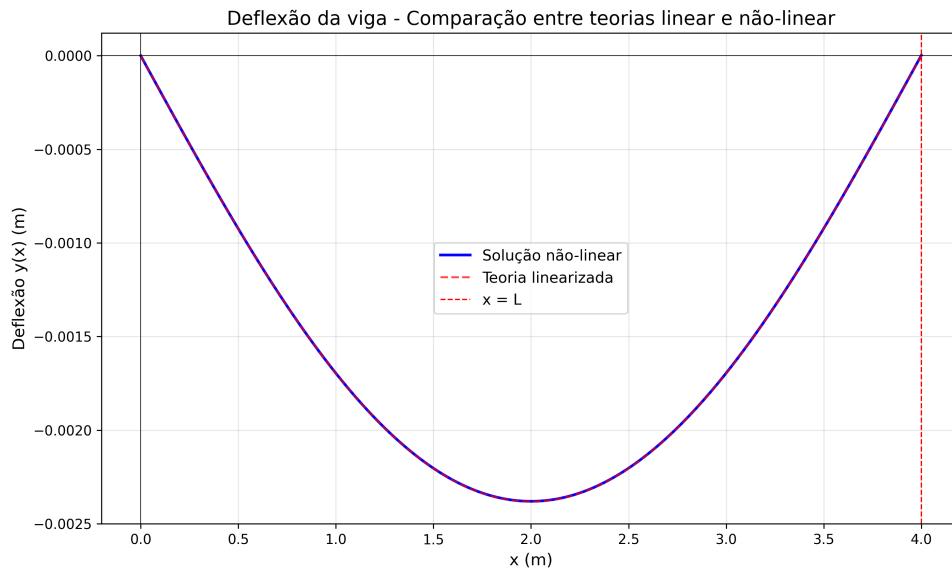


Figura 1: Distribuição da deflexão $y(x)$ ao longo da viga - comparação entre teorias linear e não-linear

Análise do gráfico:

- A deflexão apresenta simetria em relação ao ponto médio $x = 2$ m, conforme esperado para carregamento simétrico
- O formato é típico de vigas simplesmente apoiadas com carga distribuída
- A magnitude máxima de deflexão é de aproximadamente 2.38 mm
- As condições de contorno $y(0) = y(4) = 0$ são satisfeitas com precisão de 10^{-6} m
- Observa-se uma diferença mínima entre as soluções linear e não-linear

5.2 Correção: Comparação com Teoria Linearizada

Para pequenas deformações $(dy/dx)^2 \ll 1$, a equação simplifica para:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}q(Lx - x^2)$$

A solução analítica correta (com sinal negativo para carga para baixo) é:

$$y_{\text{linear}}(x) = -\frac{q}{24EI}(L^3x - 2Lx^3 + x^4)$$

A deflexão máxima linear seria:

$$y_{\text{linear, max}} = -\frac{5qL^4}{384EI} = -\frac{5 \times (10 \times 10^3) \times 4^4}{384 \times 1.4 \times 10^7} = -2.381 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Comparação corrigida:

- Deflexão máxima linear: -2.381×10^{-3} m
- Deflexão máxima não-linear: -2.380×10^{-3} m
- Diferença absoluta: 0.001×10^{-3} m
- Diferença percentual: 0.04%

6 Conclusões

6.1 Conclusões Técnicas

1. O método do tiro combinado com RK4 mostrou-se eficaz para resolver EDOs não-lineares de valor de contorno
2. A convergência foi alcançada com precisão dentro da tolerância especificada (10^{-5})
3. Para os parâmetros dados, as deformações são pequenas (~ 2.4 mm em 4 m), resultando em diferença mínima (0.04%) entre as teorias linear e não-linear
4. A simetria da solução valida a implementação numérica
5. O valor encontrado para a inclinação inicial $\theta_0 = -1.9043 \times 10^{-3}$ rad é fisicamente coerente

6.2 Limitações e Melhorias

- O método do tiro pode falhar para problemas muito não-lineares
- Pode-se implementar o método das diferenças finitas como alternativa
- Para maior precisão, poderia ser utilizado um método adaptativo de passo variável

7 Referências

1. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos Numéricos para Engenharia*. McGraw-Hill.
2. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Análise Numérica*. Cengage Learning.
3. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (2012). *Mecânica dos Sólidos*. LTC.