Métodos Numéricos para Engenharia

Trabalho 7

FCTE

Universidade de Brasília

Grupo:

Gustavo Antonio Rodrigues e Silva — Mat: 242015380

Professor:

Manuel Silva Santos Barcelos Júnior

Data:

7 de Dezembro de 2025

Trabalho - Parte 7

Análise Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Resolução numérica de EDOs utilizando métodos de Euler e Runge-Kutta

Introdução

Nesse documento, são mostrados os detalhes mais importantes dos cálculos de cada exercício, para uma visão geral. Os cálculos feitos à mão e com código detalhados estão nos outros arquivos enviados em PDF e em python.

Problema 1: Sistema Massa-Mola com Vibração Forçada

Formulação Matemática

O sistema é descrito pela EDO de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

com parâmetros:

- $m = 2\,\mathrm{kg}$ (massa)
- $k = 800\,\mathrm{N/m}$ (constante da mola)
- $F_0 = 50\,\mathrm{N}$ (amplitude da força)
- $\omega = 3\,\mathrm{rad/s}$ (frequência angular)

Condições iniciais:

$$x(0) = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0{,}1\,\mathrm{m/s}$$

Transformação em Sistema de 1ª Ordem

Para aplicação dos métodos numéricos, transformamos a EDO de 2ª ordem em um sistema de duas EDOs de 1ª ordem:

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Métodos Numéricos Aplicados

1. Método de Euler Simples

Equações discretizadas:

$$v_{i+1} = v_i + h \cdot f(t_i, x_i, v_i)$$
$$x_{i+1} = x_i + h \cdot v_i$$

onde $f(t, x, v) = -\frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m}\cos\omega t$.

2. Método de Euler Modificado (RK2)

Implementação com dois estágios:

$$\begin{aligned}
k_{1v} &= f(t_i, x_i, v_i) \\
k_{1x} &= v_i \\
k_{2v} &= f(t_i + h, x_i + hk_{1x}, v_i + hk_{1v}) \\
k_{2x} &= v_i + hk_{1v} \\
v_{i+1} &= v_i + \frac{h}{2}(k_{1v} + k_{2v}) \\
x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2}(k_{1x} + k_{2x})
\end{aligned}$$

3. Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem (RK4)

Implementação com quatro estágios:

$$
\begin{aligned}
k_{1v} &= f(t_i, x_i, v_i) \\
k_{1x} &= v_i \\
k_{2v} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_{1x}, v_i + \frac{h}{2}k_{1v}\right) \\
k_{2x} &= v_i + \frac{h}{2}k_{1v} \\
k_{3v} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_{2x}, v_i + \frac{h}{2}k_{2v}\right) \\
k_{3x} &= v_i + \frac{h}{2}k_{2v} \\
k_{4v} &= f\left(t_i + h, x_i + hk_{3x}, v_i + hk_{3v}\right) \\
k_{4x} &= v_i + hk_{3v}
\end{aligned}
$$

Atualização:

$$
\begin{aligned}
v_{i+1} &= v_i + \frac{h}{6}(k_{1v} + 2k_{2v} + 2k_{3v} + k_{4v}) \\
x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x})
\end{aligned}
$$

Resultados e Observações

- **Passo de integração**: $h = 0,01\,\mathrm{s}$
- **Intervalo temporal**: $0 \leq t \leq 10\,\mathrm{s}$
- **Precisão**: RK4 > RK2 > Euler Simples
- **Estabilidade**: Todos os métodos mostraram-se estáveis para o passo escolhido
- **Aplicação**: O sistema apresenta comportamento oscilatório com resposta forçada

Problema 2: Resolução de EDOs de 1ª e 2ª Ordem

Parte A: EDO de 1ª Ordem

Solução Analítica

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x, \quad y(0) = 3$$

Solução: $y(x) = 2 + e^{-x^2}$

Solução Numérica - Método de Euler Modificado

Para $h = 0,5$ no intervalo $[0, 2]$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4x - 2xy \\ y^*_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})] \end{aligned}$$

Tabela de Resultados:

x	y_{num}	y_{exato}	$\varepsilon_r(\%)$
0.0	3.000000	3.000000	0.000
0.5	2.750000	2.778801	1.037
1.0	2.375000	2.367879	0.301
1.5	2.187500	2.105399	3.899
2.0	2.140625	2.018316	6.057

Parte B: EDO de 2ª Ordem

Solução Analítica

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -5$$

Solução: $y(x) = e^x + 3e^{-2x}$

Transformação em Sistema

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \quad y_2 = y' \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= -y_2 + 2y_1 \end{aligned}$$

Solução Numérica - Euler Modificado para Sistemas

Aplicação vetorial do método RK2:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) &= [y_2,\ -y_2 + 2y_1]^T \\ \mathbf{Y}^* &= \mathbf{Y}_i + h\mathbf{F}(x_i, \mathbf{Y}_i) \\ \mathbf{Y}_{i+1} &= \mathbf{Y}_i + \frac{h}{2}[\mathbf{F}(x_i, \mathbf{Y}_i) + \mathbf{F}(x_{i+1}, \mathbf{Y}^*)] \end{aligned}$$

Tabela de Resultados:

x	y_{num}	y_{exato}	$\varepsilon_r(\%)$
0.0	4.000000	4.000000	0.000
0.5	3.125000	2.752360	13.530
1.0	3.390625	3.124288	8.526
1.5	4.666016	4.631050	0.755
2.0	7.160401	7.444004	3.810

Análise Comparativa dos Métodos

Ordem de Convergência

- **Euler Simples**: Erro $\mathcal{O}(h)$ - 1ª ordem
- **Euler Modificado (RK2)**: Erro $\mathcal{O}(h^2)$ - 2ª ordem
- **RK4**: Erro $\mathcal{O}(h^4)$ - 4ª ordem

Estabilidade Numérica

- Métodos de ordem superior permitem passos maiores mantendo a precisão

- RK4 é mais estável para sistemas oscilatórios como o massa-mola
- Para EDOs com crescimento exponencial (como no Problema 2B), o erro acumula mais rapidamente

Custo Computacional

- **Euler**: 1 avaliação de função por passo
- **RK2**: 2 avaliações de função por passo
- **RK4**: 4 avaliações de função por passo

Considerações Finais

- A escolha do método numérico depende do equilíbrio entre precisão e custo computacional
- Para sistemas oscilatórios como o massa-mola, métodos de alta ordem (RK4) são preferíveis
- A transformação de EDOs de ordem superior em sistemas de 1ª ordem é essencial para aplicação dos métodos numéricos
- O passo de integração h deve ser escolhido considerando tanto a precisão quanto a estabilidade
- A validação com solução analítica, quando disponível, é crucial para verificar a implementação numérica

Referência aos Arquivos Complementares

- **Cálculos manuais detalhados**: Disponíveis no PDF enviado
- **Implementação em Python**: Código completo para o Problema 1