Discretización de Sistemas Físicos.

1.1.4 Discretización aproximada de una función de transferencia

En el presente trabajo se usa un método práctico que permite encontrar la función de transferencia aproximada de la planta en el dominio ***z*** $G_{p(Z)}$ a partir de una que se encuentre en dominio de ***s*** $G_{p(s)}$, El método consiste en estudiar la razón de cambio de la señal para intervalos de tiempos de muestreo muy pequeños, de tal forma que se intente reconstruir la señal de tiempo continuo por una aproximada en tiempo discreto.

La idea fundamental de este método es equiparar la respuesta haciendo equivalentes las respuestas analógicas y digitales en dominio de tiempo para una entrada escalón dada, primero se encuentra la respuesta analógica de $y_{(t)}$ como la transformada inversa de $G_{p(s)}\, X_{(s)}$, luego esta se muestrea a intervalos de $t_{(s)} = T$ para obtener su versión muestreada y finalmente $Y_{(Z)}$, [32].

Los algoritmos discretos a menudo se utilizan para convertir sistemas analógicos en digitales; en el dominio discreto, las operaciones de integración y diferenciación se remplazan por la integración numérica y las diferencias numéricas, esta técnica de proyectar se utiliza aproximando la pendiente (derivada) en el punto de trabajo.

- ✓ **Operador discreto de la Diferencia hacia atrás**

Se estudia la razón de cambio de la curva de respuesta, como se muestra en la siguiente figura se toma el punto muestreado actual k y una muestra anterior en $k-1$. Donde se aproxima según la ecuación a un operador discreto D.

$$\dot{Y}_{(t)} = S \cdot Y_{(s)} \approx D \cdot Y_{(k)} \approx D \cdot Y_{(Z)} \quad (26)$$

$$\dot{Y}_{(k)} = \frac{\Delta Y_{(k)}}{\Delta k_{(t)}} = \frac{Y_{(k)} - Y_{(k-1)}}{T} \Longleftrightarrow D \cdot Y_{(k)} = \frac{Y_{(k)} - Y_{(k-1)}}{T} \Longleftrightarrow D \cdot Y_{(Z)} = \frac{Y_{(Z)} - Z^{-1} Y_{(Z)}}{T} \quad (27)$$

$$D = \frac{1 - Z^{-1}}{T} \quad (28)$$

✓ Operador discreto de la Diferencia hacia adelante

Se estudia la razón de cambio de la curva de respuesta, como se muestra en la siguiente figura se toma el punto muestreado actual k y una muestra posterior en $k+1$. Donde se aproxima según la ecuación a un operador discreto D.

$$\dot{Y}_{(k)} = \frac{\Delta Y_{(k)}}{\Delta k_{(t)}} = \frac{Y_{(k+1)} - Y_{(k)}}{T} \Longleftrightarrow D \cdot Y_{(k)} = \frac{Y_{(k+1)} - Y_{(k)}}{T} \Longleftrightarrow D \cdot Y_{(Z)} = \frac{Z\,Y_{(Z)} - Y_{(Z)}}{T} \quad (29)$$

$$D = \frac{Z-1}{T} \quad (30)$$

✓ Operador discreto de la Diferencia Centrada

Se estudia la razón de cambio de la curva de respuesta, como se muestra en la siguiente figura se toma el punto muestreado actual k , una muestra anterior en $k-1$ y una muestra posterior en $k+1$ Donde se aproxima según la ecuación a un operador discreto D .

$$\frac{\Delta Y_{(k)}}{\Delta k_{(t)}} = \frac{Y_{(k+1)} - Y_{(k-1)}}{2T} \Longleftrightarrow D \cdot Y_{(k)} = \frac{Y_{(k+1)} - Y_{(k-1)}}{2T} \Longleftrightarrow D \cdot Y_{(Z)} = \frac{Z\,Y_{(Z)} - Z^{-1}Y_{(Z)}}{T} \quad (31)$$

$$D = \frac{Z - Z^{-1}}{T} \quad (32)$$

✓ Operador discreto Trapezoidal

Se estudia el área bajo la curva de respuesta, aplicando una integración numérica como se muestra en la siguiente figura se toma el punto muestreado actual k , una muestra anterior en $k-1$.

$$I_{(k)} \approx \frac{1}{D} Y_{(k)} \quad (33) \qquad I_{(k)} \approx I_{(k-1)} + \Delta I_{(k)} \quad (34) \qquad \Delta I_{(k)} = \mathrm{T}\left(\frac{Y_{(k)}+Y_{(k-1)}}{2}\right) \quad (35)$$

$$I_{(k)} \approx I_{(k-1)} + \frac{\mathrm{T}}{2}\left(Y_{(k)} + Y_{(k-1)}\right) \Longleftrightarrow I_{(Z)} \approx \mathrm{Z}^{-1} I_{(Z)} + \frac{\mathrm{T}}{2}\left(Y_{(Z)} + \mathrm{Z}^{-1} Y_{(Z)}\right) \quad (36)$$

$$\frac{1}{D} Y_{(Z)} \approx \mathrm{Z}^{-1} \frac{1}{D} Y_{(Z)} + \frac{\mathrm{T}}{2}\left(Y_{(Z)} + \mathrm{Z}^{-1} Y_{(Z)}\right) \quad (37)$$

$$\frac{1}{D} = \frac{T}{2}\left(\frac{Z^{-1}+1}{1-Z^{-1}}\right) \quad (38)$$

Tabla 1. Resumen de Ecuaciones de Algoritmos numéricos para proyección Discreta

Proyección	*Algoritmo Numérico*	*Operador Discreto*
Hacia Atrás	$\dot{Y}_{(k)} = \frac{Y_{(k)} - Y_{(k-1)}}{T}$	$D = \frac{1 - Z^{-1}}{T}$
Hacia Adelante	$\dot{Y}_{(k)} = \frac{Y_{(k+1)} - Y_{(k)}}{T}$	$D = \frac{Z - 1}{T}$
Centrada	$\dot{Y}_{(k)} = \frac{Y_{(k+1)} - Y_{(k-1)}}{2T}$	$D = \frac{Z - Z^{-1}}{T}$
Trapezoidal	$I_{(k)} \approx I_{(k-1)} + \frac{T}{2}\left(Y_{(k)} + Y_{(k-1)}\right)$	$\frac{1}{D} = \frac{T}{2}\left(\frac{Z^{-1}+1}{1-Z^{-1}}\right)$

Fuente: El Autor.

✓ Caso de aplicación

1. ***Discretizar $G_{(s)}$ por Forward (Diferencia hacia adelante).***

$$G_{(s)} = \frac{k}{(t_1 s + 1)(t_2 s + 1)} \Rightarrow G_{(s)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}}$$

Solucion:

$$G_{(s)} = \frac{k}{t_1 t_2 s^2 + (t_1 + t_2)s + 1}$$

$$G_{(s)} = \frac{k}{\tau_A s^2 + \tau_B s + 1} \xrightarrow{Donde} \tau_A = t_1 t_2 \ldots\ldots \tau_B = t_1 + t_2$$

$$(\tau_A s^2 + \tau_B s + 1)Y_{(S)} = k.X_{(S)}$$

Sustituyendo $\dot{Y}_{(k)} \approx \frac{Y_{(k+1)} - Y_{(k)}}{T} \xrightarrow{y} \ddot{Y}_{(k)} \approx \frac{Y_{(k+2)} - 2Y_{(k+1)} + Y_{(k)}}{T^2}$

$$\tau_A \left[\frac{Y_{(k+2)} - 2Y_{(k+1)} + Y_{(k)}}{T^2}\right] + \tau_B \left[\frac{Y_{(k+1)} - Y_{(k)}}{T}\right] + Y_{(k)} \approx kX_{(k)}$$

$$\left(\frac{\tau_A}{T^2}\right)Y_{(k+2)} - \left(\frac{2.\tau_A}{T^2}\right)Y_{(k+1)} + \left(\frac{\tau_A}{T^2}\right)Y_{(k)} + \left(\frac{\tau_B}{T}\right)Y_{(k+1)} - \left(\frac{\tau_B}{T}\right)Y_{(k)} + Y_{(k)} \approx k.X_{(k)}$$

$$\left(\frac{\tau_A}{T^2}\right)Y_{(k+2)}+\left(\frac{\tau_B T-2.\tau_A}{T^2}\right)Y_{(k+1)}+\left(\frac{\tau_A-\tau_B T+T^2}{T^2}\right)Y_{(k)}\approx k.X_{(k)}$$

$$(\tau_A)Y_{(k+2)}+(\tau_B T-2.\tau_A)Y_{(k+1)}+\left(\tau_A-\tau_B T+T^2\right)Y_{(k)}\approx kT^2.X_{(k)}$$

$$A_0Y_{(k+2)}+A_1Y_{(k+1)}+A_2Y_{(k)}\approx B_2X_{(k)}$$

Donde

$$A_0=\tau_A \qquad A_1=(\tau_B T-2.\tau_A) \qquad A_2=\left(\tau_A-\tau_B T+T^2\right) \qquad B_2=kT^2$$

Aplicando un corrimiento Temporal nos queda:

$$A_0Y_{(k)}+A_1Y_{(k-1)}+A_2Y_{(k-2)}\approx B_2X_{(k-2)}$$

$$Y_{(k)}\approx\left(\frac{B_2}{A_0}\right)X_{(k-2)}-\left(\frac{A_1}{A_0}\right)Y_{(k-1)}-\left(\frac{A_2}{A_0}\right)Y_{(k-2)}$$

$$\boxed{Y_{(k)}\approx b_2X_{(k-2)}-a_1Y_{(k-1)}-a_2Y_{(k-2)}\rightarrow \quad Ecuacion \quad en \quad Diferencia}$$

Donde

$$a_1=\left(\frac{A_1}{A_0}\right)=\frac{(\tau_B T-2.\tau_A)}{\tau_A}\Rightarrow a_1=\frac{(t_1+t_2)T-2.(t_1t_2)}{t_1t_2}$$

$$a_2=\left(\frac{A_2}{A_0}\right)=\frac{\left(\tau_A-\tau_B T+T^2\right)}{\tau_A}\Rightarrow a_2=\frac{t_1t_2-(t_1+t_2)T+T^2}{t_1t_2}$$

$$b_2=\left(\frac{B_2}{A_0}\right)=\frac{k.T^2}{\tau_A}\Rightarrow b_2=\frac{k.T^2}{t_1t_2}$$

Determinar la función de transferencia:

$$Y_{(k)}\approx b_2X_{(k-2)}-a_1Y_{(k-1)}-a_2Y_{(k-2)}\rightarrow \quad Ecuacion \quad en \quad Diferencia$$

$$Y_{(k)}+a_1Y_{(k-1)}+a_2Y_{(k-2)}\approx b_2X_{(k-2)}$$

$$Y_{(z)}+a_1.Z^{-1}Y_{(z)}+a_2.Z^{-2}Y_{(z)}\approx b_2.Z^{-2}X_{(z)}$$

$$\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)Y_{(z)}\approx b_2.Z^{-2}X_{(z)}$$

$$\frac{Y_{(z)}}{X_{(z)}} = \frac{b_2.Z^{-2}}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)} \Rightarrow G_{(Z)} = \frac{b_2.Z^{-2}}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)} \quad \textit{Función} \quad \textit{Filtro}$$

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{b_2.Z^{-2}}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)}}$$

2. Discretizar G(s) por Forward (Diferencia hacia adelante) Remplazando el operador D.

$$G_{(s)} = \frac{k}{(t_1 s+1)(t_2 s+1)} \Rightarrow G_{(s)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}}$$

Solucion:
$$G_{(s)} = \frac{k}{t_1 t_2 s^2 + (t_1+t_2)s+1}$$

$$G_{(s)} = \frac{k}{\tau_A s^2 + \tau_B s + 1} \xrightarrow{Donde} \tau_A = t_1 t_2 \ldots\ldots \tau_B = t_1 + t_2$$

$$\left(\tau_A s^2 + \tau_B s + 1\right) Y_{(S)} = k.X_{(S)}$$

Sustituyendo $D \approx \frac{1-Z^{-1}}{T.Z^{-1}} \xrightarrow{Además} D \approx \frac{Z-1}{T}$

$$\left[\tau_A \left(\frac{1-Z^{-1}}{T.Z^{-1}}\right)^2 + \tau_B \left(\frac{1-Z^{-1}}{T.Z^{-1}}\right) + 1\right] Y_{(Z)} = kX_{(Z)}$$

$$\left[\tau_A \left(\frac{1-2Z^{-1}+Z^{-2}}{T^2.Z^{-2}}\right) + \tau_B \left(\frac{1-Z^{-1}}{T.Z^{-1}}\right) + 1\right] Y_{(Z)} = kX_{(Z)}$$

$$\left[\tau_A\left(1-2Z^{-1}+Z^{-2}\right) + \tau_B\left(1-Z^{-1}\right)\left(T.Z^{-1}\right) + T^2.Z^{-2}\right] Y_{(Z)} = k.T^2.Z^{-2} X_{(Z)}$$

$$\left(\tau_A - 2.\tau_A Z^{-1} + \tau_A.Z^{-2} + \tau_B T.Z^{-1} - \tau_B.T.Z^{-2} + T^2.Z^{-2}\right) Y_{(Z)} = k.T^2.Z^{-2} X_{(Z)}$$

$$\left[\tau_A + (\tau_B T - 2.\tau_A).Z^{-1} + \left(\tau_A - \tau_B.T + T^2\right).Z^{-2}\right]Y_{(Z)} = k.T^2.Z^{-2}X_{(Z)}$$

Al normalizar la expresión:

$$\left[1 + \left(\frac{\tau_B T - 2.\tau_A}{\tau_A}\right).Z^{-1} + \left(\frac{\tau_A - \tau_B.T + T^2}{\tau_A}\right).Z^{-2}\right].Y_{(Z)} = \left(\frac{k.T^2}{\tau_A}\right)Z^{-2}X_{(Z)}$$

$$\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)Y_{(z)} \approx b_2.Z^{-2}X_{(z)}$$

Donde

$$a_1 = \frac{(\tau_B T - 2.\tau_A)}{\tau_A} \Rightarrow a_1 = \frac{(t_1 + t_2)T - 2.(t_1 t_2)}{t_1 t_2}$$

$$a_2 = \frac{\left(\tau_A - \tau_B T + T^2\right)}{\tau_A} \Rightarrow a_2 = \frac{t_1 t_2 - (t_1 + t_2)T + T^2}{t_1 t_2}$$

$$b_2 = \frac{k.T^2}{\tau_A} \Rightarrow b_2 = \frac{k.T^2}{t_1 t_2}$$

$$\frac{Y_{(z)}}{X_{(z)}} = \frac{b_2.Z^{-2}}{\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)} \Rightarrow G_{(Z)} = \frac{b_2.Z^{-2}}{\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)} \qquad \textit{Función Filtro}$$

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{b_2.Z^{-2}}{\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)}}$$

3. Discretizar $G_{(s)}$ por Backward (Diferencia hacia atras).

$$G_{(s)} = \frac{k}{(t_1 s + 1)(t_2 s + 1)} \Rightarrow G_{(s)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}}$$

Solucion:

$$G_{(s)} = \frac{k}{t_1 t_2 s^2 + (t_1 + t_2)s + 1}$$

$$G_{(s)} = \frac{k}{\tau_A s^2 + \tau_B s + 1} \xrightarrow{Donde} \tau_A = t_1 t_2 \ldots\ldots \tau_B = t_1 + t_2$$

$$\left(\tau_A s^2 + \tau_B s + 1\right) Y_{(S)} = k.X_{(S)}$$

Sustituyendo $\dot{Y}_{(k)} \approx \dfrac{Y_{(k)} - Y_{(k-1)}}{T} \xrightarrow{y} \ddot{Y}_{(k)} \approx \dfrac{Y_{(k)} - 2Y_{(k-1)} + Y_{(k-2)}}{T^2}$

$$\tau_A \left[\frac{Y_{(k)} - 2Y_{(k-1)} + Y_{(k-2)}}{T^2} \right] + \tau_B \left[\frac{Y_{(k)} - Y_{(k-1)}}{T} \right] + Y_{(k)} \approx kX_{(k)}$$

$$\left(\frac{\tau_A}{T^2}\right) Y_{(k)} - \left(\frac{2.\tau_A}{T^2}\right) Y_{(k-1)} + \left(\frac{\tau_A}{T^2}\right) Y_{(k-2)} + \left(\frac{\tau_B}{T}\right) Y_{(k)} - \left(\frac{\tau_B}{T}\right) Y_{(k-1)} + Y_{(k)} \approx k.X_{(k)}$$

$$\left(\frac{\tau_A + \tau_B.T + T^2}{T^2}\right) Y_{(k)} + \left(\frac{-2.\tau_A - \tau_B.T}{T^2}\right) Y_{(k-1)} + \left(\frac{\tau_A}{T^2}\right) Y_{(k-2)} \approx k.X_{(k)}$$

$$\left(\tau_A + \tau_B.T + T^2\right).Y_{(k)} + \left(-2.\tau_A - \tau_B.T\right).Y_{(k-1)} + \left(\tau_A\right).Y_{(k-2)} \approx k.T^2.X_{(k)}$$

$$A_0 Y_{(k)} + A_1 Y_{(k-1)} + A_2 Y_{(k-2)} \approx B_0 X_{(k)}$$

Donde

$$A_0 = \left(\tau_A + \tau_B.T + T^2\right) \qquad A_1 = \left(-2.\tau_A - \tau_B.T\right) \qquad A_2 = \left(\tau_A\right) \qquad B_0 = k.T^2$$

$$A_0 Y_{(k)} + A_1 Y_{(k-1)} + A_2 Y_{(k-2)} \approx B_0 X_{(k)}$$

$$Y_{(k)} \approx \left(\frac{B_0}{A_0}\right) X_{(k)} - \left(\frac{A_1}{A_0}\right) Y_{(k-1)} - \left(\frac{A_2}{A_0}\right) Y_{(k-2)}$$

$$\boxed{Y_{(k)} \approx b_0 X_{(k)} - a_1 Y_{(k-1)} - a_2 Y_{(k-2)} \rightarrow \quad Ecuacion \quad en \quad Diferencia}$$

Donde

$$a_1 = \left(\frac{A_1}{A_0}\right) = \frac{\left(-2.\tau_A - \tau_B.T\right)}{A_0} \Rightarrow a_1 = \frac{\left(-2.\tau_A - \tau_B.T\right)}{\tau_A + \tau_B.T + T^2}$$

$$a_2 = \left(\frac{A_2}{A_0}\right) = \frac{(\tau_A)}{A_0} \Rightarrow a_2 = \frac{\tau_A}{\tau_A + \tau_B.T + T^2}$$

$$b_0 = \left(\frac{B_0}{A_0}\right) = \frac{k.T^2}{A_0} \Rightarrow b_0 = \frac{k.T^2}{\tau_A + \tau_B.T + T^2}$$

Determinar la función de transferencia:

$$Y_{(k)} \approx b_0 X_{(k)} - a_1 Y_{(k-1)} - a_2 Y_{(k-2)} \rightarrow \quad Ecuacion \quad en \quad Diferencia$$

$$Y_{(k)} + a_1 Y_{(k-1)} + a_2 Y_{(k-2)} \approx b_0 X_{(k)}$$

$$Y_{(z)} + a_1.Z^{-1} Y_{(z)} + a_2.Z^{-2} Y_{(z)} = b_0.X_{(z)}$$

$$\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right) Y_{(z)} \approx b_0.X_{(z)}$$

$$\frac{Y_{(z)}}{X_{(z)}} = \frac{b_0}{\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)} \Rightarrow G_{(Z)} = \frac{b_0}{\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)} \qquad Función \quad Filtro$$

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{b_0}{\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)}}$$

4. <u>Discretizar $G_{(s)}$ por Backward (Diferencia hacia atras) Remplazando el operador D.</u>

$$G_{(s)} = \frac{k}{(t_1 s + 1)(t_2 s + 1)} \Rightarrow G_{(s)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}}$$

Solucion:

$$G_{(s)} = \frac{k}{t_1 t_2 s^2 + (t_1 + t_2)s + 1}$$

$$G_{(s)} = \frac{k}{\tau_A s^2 + \tau_B s + 1} \xrightarrow{Donde} \tau_A = t_1 t_2 \ldots\ldots \tau_B = t_1 + t_2$$

$$\left(\tau_A s^2 + \tau_B s + 1\right) Y_{(S)} = k.X_{(S)}$$

Sustituyendo $D \approx \dfrac{1 - Z^{-1}}{T} \xrightarrow{Además} D \approx \dfrac{Z - 1}{T.Z}$

$$\left[\tau_A\left(\frac{1-Z^{-1}}{T}\right)^2+\tau_B\left(\frac{1-Z^{-1}}{T}\right)+1\right]Y_{(Z)}=kX_{(Z)}$$

$$\left[\tau_A\left(\frac{1-2Z^{-1}+Z^{-2}}{T^2}\right)+\tau_B\left(\frac{1-Z^{-1}}{T}\right)+1\right]Y_{(Z)}=kX_{(Z)}$$

$$\left[\tau_A\left(1-2Z^{-1}+Z^{-2}\right)+\tau_B.T\left(1-Z^{-1}\right)+T^2\right]Y_{(Z)}=k.T^2.X_{(Z)}$$

$$\left(\tau_A-2.\tau_A Z^{-1}+\tau_A.Z^{-2}+\tau_B.T-\tau_B.TZ^{-1}+T^2\right)Y_{(Z)}=k.T^2.X_{(Z)}$$

$$\left[\left(\tau_A+\tau_B.T+T^2\right)+\left(-2.\tau_A-\tau_B.T\right)Z^{-1}+\left(\tau_A\right)Z^{-2}\right]Y_{(Z)}=k.T^2.X_{(Z)}$$

Al normalizar la expresión:

$$\left[1+\left(\frac{-2.\tau_A-\tau_B.T}{\tau_A+\tau_B.T+T^2}\right)Z^{-1}+\left(\frac{\tau_A}{\tau_A+\tau_B.T+T^2}\right)Z^{-2}\right].Y_{(Z)}=\left(\frac{k.T^2}{\tau_A+\tau_B.T+T^2}\right).X_{(Z)}$$

$$\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)Y_{(z)}=b_0.X_{(z)}$$

Donde $a_1=\dfrac{\left(-2.\tau_A-\tau_B.T\right)}{\tau_A+\tau_B.T+T^2}$ $\quad a_2=\dfrac{\tau_A}{\tau_A+\tau_B.T+T^2}$ $\quad b_0=\dfrac{k.T^2}{\tau_A+\tau_B.T+T^2}$

$$\frac{Y_{(z)}}{X_{(z)}}=\frac{b_0}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)}\Rightarrow G_{(Z)}=\frac{b_0}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)} \quad \textit{Función Filtro}$$

$$\boxed{G_{(Z)}=\frac{b_0}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)}}$$

5. Discretizar $G_{(s)}$ por Diferencia Centrada Remplazando el operador D.

$$G_{(s)} = \frac{k}{(t_1 s+1)(t_2 s+1)} \Rightarrow G_{(s)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}}$$

Solucion:
$$G_{(s)} = \frac{k}{t_1 t_2 s^2 + (t_1+t_2)s+1}$$

$$G_{(s)} = \frac{k}{\tau_A s^2 + \tau_B s + 1} \xrightarrow{Donde} \tau_A = t_1 t_2 \ldots\ldots \tau_B = t_1 + t_2$$

$$(\tau_A s^2 + \tau_B s + 1)Y_{(S)} = k.X_{(S)}$$

Sustituyendo $D \approx \dfrac{1-Z^{-2}}{2.T.Z^{-1}} \xrightarrow{Además} D^2 \approx \dfrac{1-2.Z^{-1}+Z^{-2}}{T^2 Z^{-1}}$

$$\left[\tau_A\left(\frac{1-2.Z^{-1}+Z^{-2}}{T^2 Z^{-1}}\right) + \tau_B\left(\frac{1-Z^{-2}}{2.T.Z^{-1}}\right)+1\right]Y_{(Z)} = k.X_{(Z)}$$

$$\left(\frac{\tau_A - 2.\tau_A.Z^{-1} + \tau_A Z^{-2}}{T^2 Z^{-1}} + \frac{\tau_B - \tau_B Z^{-2}}{2.T.Z^{-1}} + 1\right)Y_{(Z)} = k.X_{(Z)}$$

$$\left(2.\tau_A - 4.\tau_A.Z^{-1} + 2.\tau_A Z^{-2} + \tau_B T - \tau_B T.Z^{-2} + 2.T^2 Z^{-1}\right)Y_{(Z)} = 2.k.T^2 Z^{-1}.X_{(Z)}$$

$$\left[(2.\tau_A + \tau_B T) + (2.T^2 - 4.\tau_A.)Z^{-1} + (2.\tau_A - \tau_B T.).Z^{-2}\right]Y_{(Z)} = (2.k.T^2)Z^{-1}.X_{(Z)}$$

Al normalizar la expresión:

$$\left[1 + \left(\frac{2.T^2 - 4.\tau_A}{2.\tau_A + \tau_B T}\right).Z^{-1} + \left(\frac{2.\tau_A - \tau_B T}{2.\tau_A + \tau_B T}\right).Z^{-2}\right]Y_{(Z)} = \left(\frac{2.k.T^2}{2.\tau_A + \tau_B T}\right)Z^{-1}.X_{(Z)}$$

$$(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2})Y_{(z)} = b_1 Z^{-1}.X_{(Z)}$$

Donde

$$b_1 = \left(\frac{2.k.T^2}{2.\tau_A + \tau_B T}\right) \qquad a_1 = \left(\frac{2.T^2 - 4.\tau_A}{2.\tau_A + \tau_B T}\right) \qquad a_2 = \left(\frac{2.\tau_A - \tau_B T}{2.\tau_A + \tau_B T}\right)$$

$$\frac{Y_{(z)}}{X_{(z)}} = \frac{b_1 Z^{-1}}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)} \Rightarrow G_{(Z)} = \frac{b_1 Z^{-1}}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)} \quad \text{Función} \quad \text{Filtro}$$

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{b_1 Z^{-1}}{\left(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2}\right)}}$$

6. _Discretizar $G_{(s)}$ por la regla del trapecio, Transformacion Bilinial (Transformacion de Tustin Remplazando el operador D.)_

$$G_{(s)} = \frac{k}{(t_1 s+1)(t_2 s+1)} \Rightarrow G_{(s)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}}$$

Solucion: $$G_{(s)} = \frac{k}{t_1 t_2 s^2 + (t_1+t_2)s+1}$$

$$G_{(s)} = \frac{k}{\tau_A s^2 + \tau_B s + 1} \xrightarrow{Donde} \tau_A = t_1 t_2 \ldots\ldots \tau_B = t_1 + t_2$$

$$\left(\tau_A s^2 + \tau_B s + 1\right) Y_{(S)} = k.X_{(S)}$$

Sustituyendo $\frac{1}{D} \approx \left(\frac{T}{2}\right)\left(\frac{1+Z^{-1}}{1-Z^{-1}}\right) \xrightarrow{Además} D \approx \left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}\right)$

$$\left[\tau_A\left[\left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}\right)\right]^2 + \tau_B\left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}\right) + 1\right] Y_{(Z)} = kX_{(Z)}$$

$$\left[\left(\frac{4.\tau_A}{T^2}\right)\left(\frac{1-2Z^{-1}+Z^{-2}}{1+2Z^{-1}+Z^{-2}}\right) + \left(\frac{2\tau_B}{T}\right)\left(\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}\right) + 1\right] Y_{(Z)} = kX_{(Z)}$$

$$\left[\left(\frac{4.\tau_A}{T^2}\right)\left(\frac{1-2Z^{-1}+Z^{-2}}{1+2Z^{-1}+Z^{-2}}\right) + \left(\frac{2\tau_B.T}{T^2}\right)\left(\frac{(1-Z^{-1})(1+Z^{-1})}{1+2Z^{-1}+Z^{-2}}\right) + \frac{T^2(1+2Z^{-1}+Z^{-2})}{T^2(1+2Z^{-1}+Z^{-2})}\right] Y_{(Z)} = kX_{(Z)}$$

$$\left[4.\tau_A(1-2Z^{-1}+Z^{-2}) + 2\tau_B.T(1-Z^{-2}) + T^2(1+2Z^{-1}+Z^{-2})\right] Y_{(Z)} = (1+2Z^{-1}+Z^{-2})kT^2 X_{(Z)}$$

$$\left[\left(4\tau_A + 2\tau_B T + T^2\right) + \left(2T^2 - 8\tau_A\right)Z^{-1} + \left(4\tau_A - 2\tau_B T + T^2\right)Z^{-2}\right]Y_{(Z)} = (kT^2 + 2kT^2Z^{-1} + kT^2Z^{-2})X_{(Z)}$$

$$\left(A_0 + A_1Z^{-1} + A_2Z^{-2}\right)Y_{(Z)} = (B_0 + B_1Z^{-1} + B_2Z^{-2})X_{(Z)}$$

Donde:

$$A_0 = \left(4\tau_A + 2\tau_B T + T^2\right) \qquad A_1 = \left(2T^2 - 8\tau_A\right) \qquad A_2 = \left(4\tau_A - 2\tau_B T + T^2\right)$$

$$B_0 = kT^2 \qquad B_1 = 2kT^2 \qquad B_2 = kT^2$$

Al normalizar la expresión:

$$\left[1 + \left(\frac{A_1}{A_0}\right)Z^{-1} + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)Z^{-2}\right]Y_{(Z)} = \left[\left(\frac{B_0}{A_0}\right) + \left(\frac{B_1}{A_0}\right)Z^{-1} + \left(\frac{B_2}{A_0}\right)Z^{-2}\right]X_{(Z)}$$

$$\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)Y_{(z)} = \left(b_0 + b_1Z^{-1} + b_2Z^{-2}\right).X_{(Z)}$$

Donde

$$\boxed{A_0 = \left(4\tau_A + 2\tau_B T + T^2\right)} \qquad a_1 = \left(\frac{2T^2 - 8\tau_A}{A_0}\right) \qquad a_2 = \left(\frac{4\tau_A - 2\tau_B T + T^2}{A_0}\right)$$

$$b_0 = \frac{kT^2}{A_0} \qquad b_1 = 2\frac{kT^2}{A_0} \qquad b_2 = \frac{kT^2}{A_0}$$

Determinar la función de transferencia:

$$\left(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}\right)Y_{(z)} = \left(b_0 + b_1Z^{-1} + b_2Z^{-2}\right).X_{(Z)}$$

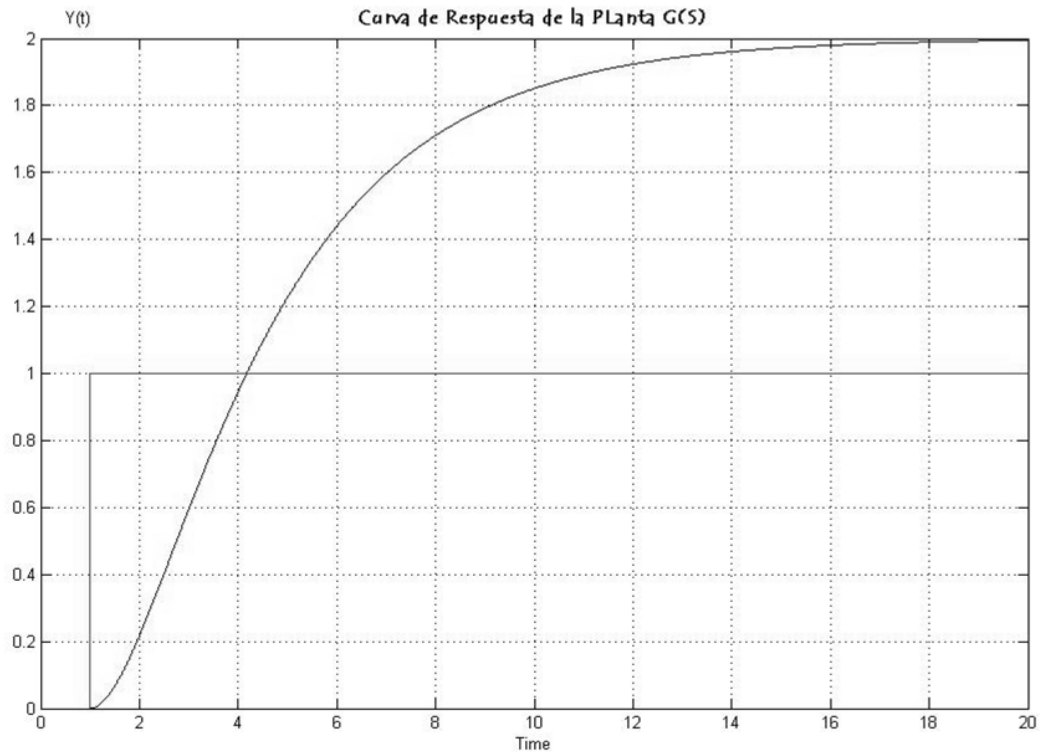
$$\frac{Y_{(z)}}{X_{(z)}} = \frac{b_0 + b_1Z^{-1} + b_2Z^{-2}}{1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}} \Rightarrow G_{(Z)} = \frac{b_0 + b_1Z^{-1} + b_2Z^{-2}}{1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}} \qquad \textit{Función} \quad \textit{Filtro}$$

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{b_0 + b_1Z^{-1} + b_2Z^{-2}}{1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}}}$$

Ejemplo

Dado $G_{(s)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}} \Rightarrow G_{(s)} = \frac{2}{(S+1)(3S+1)}$

Donde: $G_{(s)} = \frac{2}{3S^2+4S+1} \xrightarrow{Donde} \tau_A = 3 \ldots\ldots \tau_B = 4 \ldots\ldots k = 2$



a) Discretizar $G_{(s)}$ por Forward si el tiempo de Muestreo es de 0,01seg. (T=0,01 seg)

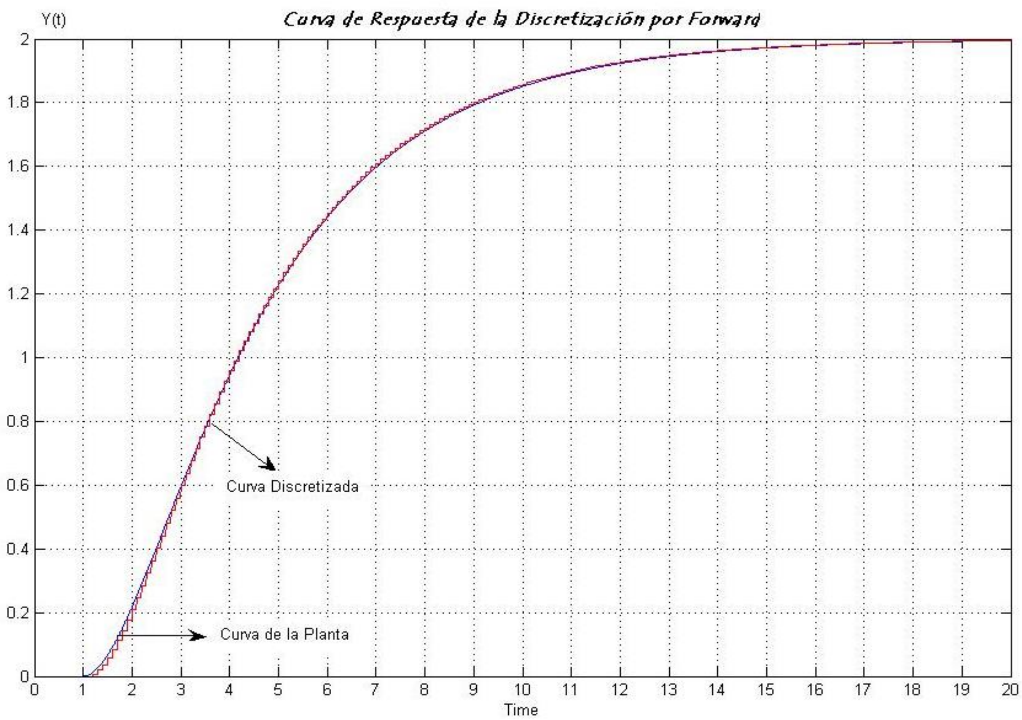
$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{b_2.Z^{-2}}{(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2})}}$$

Donde: $a_1 = \left(\frac{A_1}{A_0}\right) = \frac{(\tau_B T - 2.\tau_A)}{\tau_A} \Rightarrow a_1 = \frac{4*0{,}01-2*3}{3} = -1{,}986666667$

$$a_2 = \left(\frac{A_2}{A_0}\right) = \frac{(\tau_A - \tau_B T + T^2)}{\tau_A} \Rightarrow a_2 = \frac{3-4*0{,}01+(0{,}01)^2}{3} = 0{,}9867$$

$$b_2 = \left(\frac{B_2}{A_0}\right) = \frac{k.T^2}{\tau_A} \Rightarrow b_2 = \frac{2*(0{,}01)^2}{3} = 66{,}66666667\ _x10^{-6}$$

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{66{,}66666667\ _x10^{-6} * Z^{-2}}{(1 - 1{,}986666667 * Z^{-1} + 0{,}9867 * Z^{-2})}}$$



b) Discretizar $G_{(s)}$ por Backward (Diferencia hacia atras) si el tiempo de Muestreo es de 0,01seg. (T=0,01 seg)

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{b_0}{(1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2})}}$$

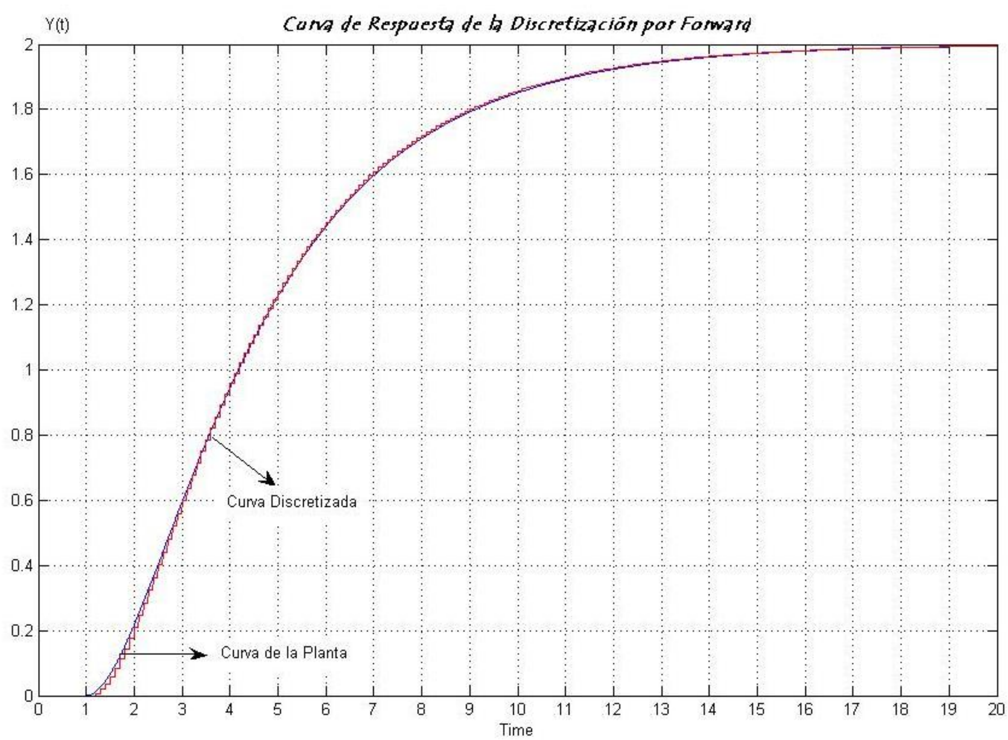
Donde

$$a_1 = \left(\frac{A_1}{A_0}\right) = \frac{(-2.\tau_A - \tau_B.T)}{A_0} \Rightarrow a_1 = \frac{(-2*3-4*0{,}01)}{3+4*0{,}01+(0{,}01)^2} = -1{,}986776751$$

$$a_2 = \left(\frac{A_2}{A_0}\right) = \frac{(\tau_A)}{A_0} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{3+4*0{,}01+(0{,}01)^2} = 0{,}986809644$$

$$b_0 = \left(\frac{B_0}{A_0}\right) = \frac{k.T^2}{A_0} \Rightarrow b_0 = \frac{2*(0{,}01)^2}{3+4*0{,}01+(0{,}01)^2} = 65{,}78730963\,{}_x10^{-6}$$

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{65{,}78730963\,{}_x10^{-6}}{(1-1{,}986776751*Z^{-1}+0{,}986809644*Z^{-2})}}$$



c) Discretizar $G_{(s)}$ por Diferencia Centrada si el tiempo de Muestreo es de 0,01seg. (T=0,01 seg)

$$\boxed{G_{(Z)}=\frac{b_1 Z^{-1}}{(1+a_1.Z^{-1}+a_2.Z^{-2})}}$$

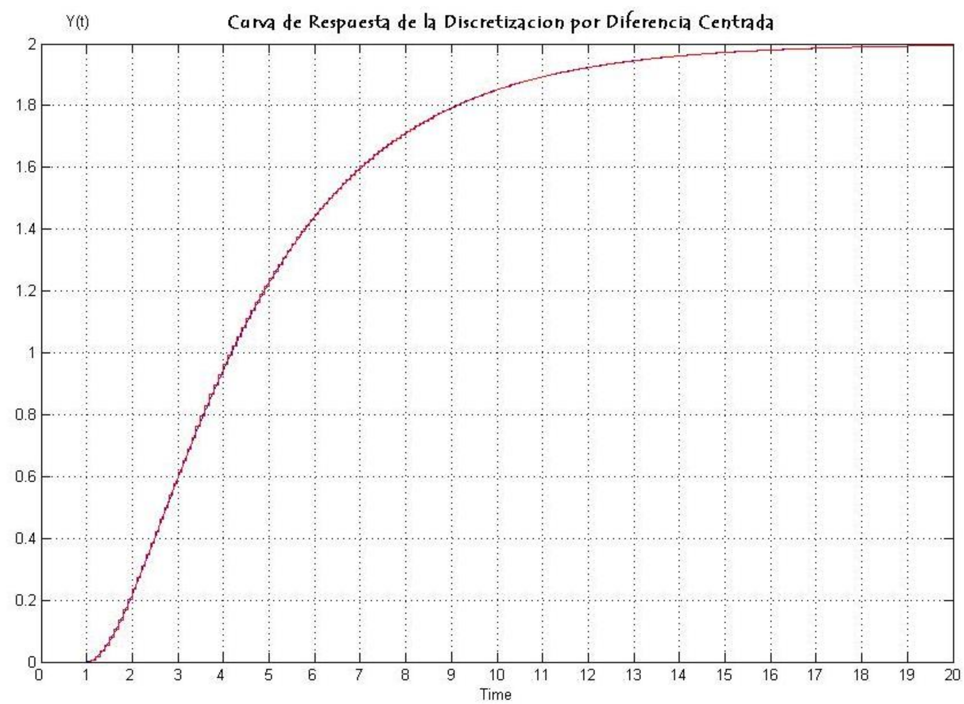
Donde

$$b_1=\left(\frac{2.k.T^2}{2.\tau_A+\tau_B T}\right)=\left(\frac{2*2*(0{,}01)^2}{2*3+4*0{,}01}\right)=66{,}22516556\,_x10^{-6}$$

$$a_1=\left(\frac{2.T^2-4.\tau_A}{2.\tau_A+\tau_B T}\right)=\left(\frac{2*(0{,}01)^2-4*3}{2*3+4*0{,}01}\right)=-1{,}986721854$$

$$a_2=\left(\frac{2.\tau_A-\tau_B T}{2.\tau_A+\tau_B T}\right)=\left(\frac{2*3-4*0{,}01}{2*3+4*0{,}01}\right)=0{,}986754966$$

$$\boxed{G_{(Z)}=\frac{66{,}22516556\,_x10^{-6}*Z^{-1}}{(1-1{,}986721854*Z^{-1}+0{,}986754966*Z^{-2})}}$$



d) Discretizar $G_{(s)}$ por la Regla del Trapecio Transformacion Bilinial, si el tiempo de Muestreo es de 0,01seg. (T=0,01 seg)

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1 + a_1.Z^{-1} + a_2.Z^{-2}}}$$

Donde

$$A_0 = \left(4\tau_A + 2\tau_B T + T^2\right) = 4*3 + 2*4*0,01 + (0,01)^2 = 12,0801$$

$$b_0 = b_2 = \frac{kT^2}{A_0} = \frac{2*(0,01)^2}{12,0801} = 16,55615434\ {}_x10^{-6} \qquad b_1 = 2*\frac{kT^2}{A_0} = 2*\frac{2*(0,01)^2}{12,0801} = 33,11230867\ {}_x10^{-6}$$

$$a_1 = \left(\frac{2T^2 - 8\tau_A}{A_0}\right) = \left(\frac{2(0,01)^2 - 8*3}{12,0801}\right) = -1,986721964$$

$$a_2 = \left(\frac{4\tau_A - 2\tau_B T + T^2}{A_0}\right) = \left(\frac{4*3 - 2*4*0,01 + (0,01)^2}{12,0801}\right) = 0,986755076$$

$$\boxed{G_{(Z)} = \frac{16,55615434\ {}_x10^{-6} + 33,11230867\ {}_x10^{-6} * Z^{-1} + 16,55615434\ {}_x10^{-6} * Z^{-2}}{1 - 1,986721964 * Z^{-1} + 0,986755076 * Z^{-2}}}$$