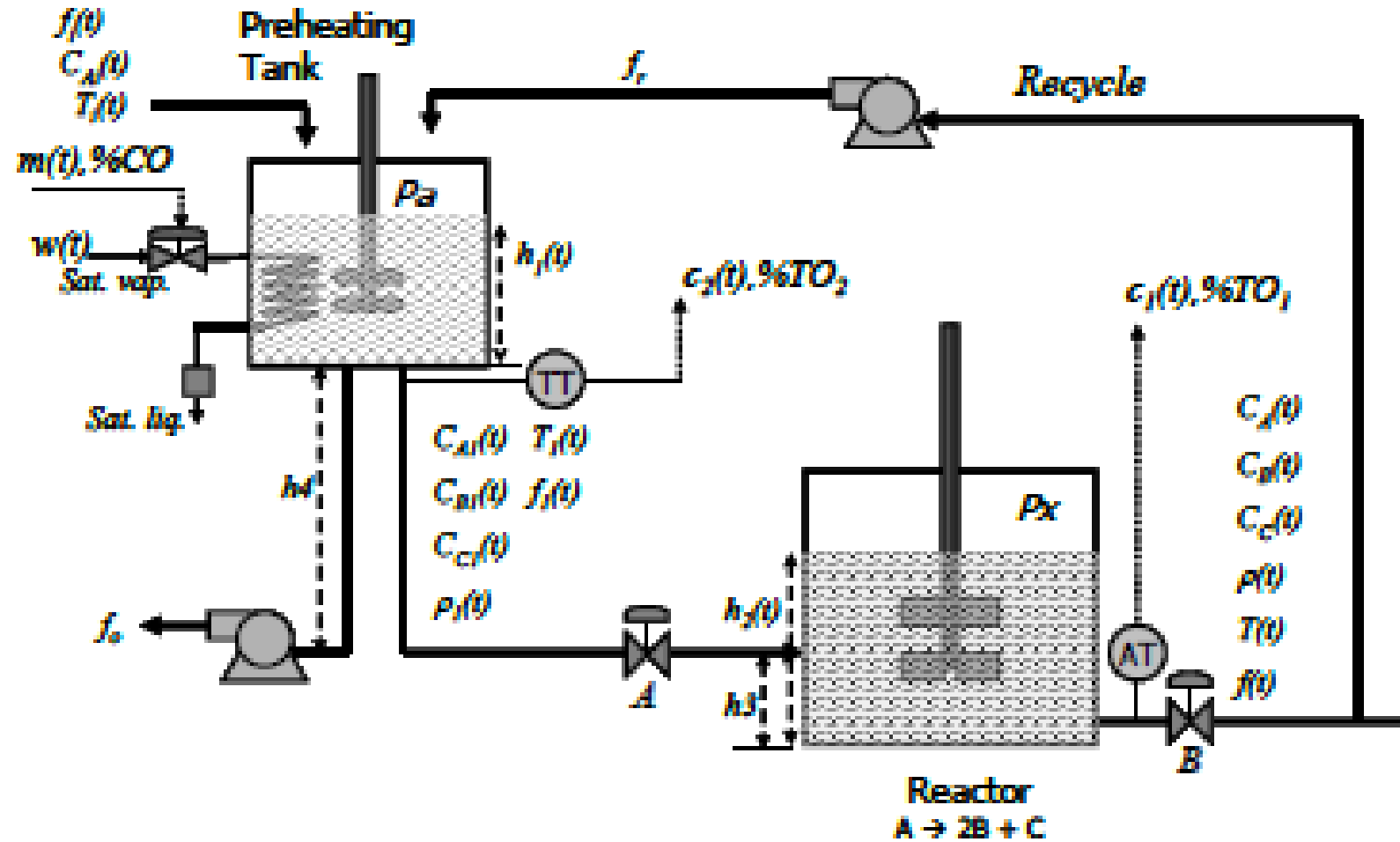


Control Avanzado y Métodos Numéricos



Conexión entre Control Avanzado y Métodos Numéricos

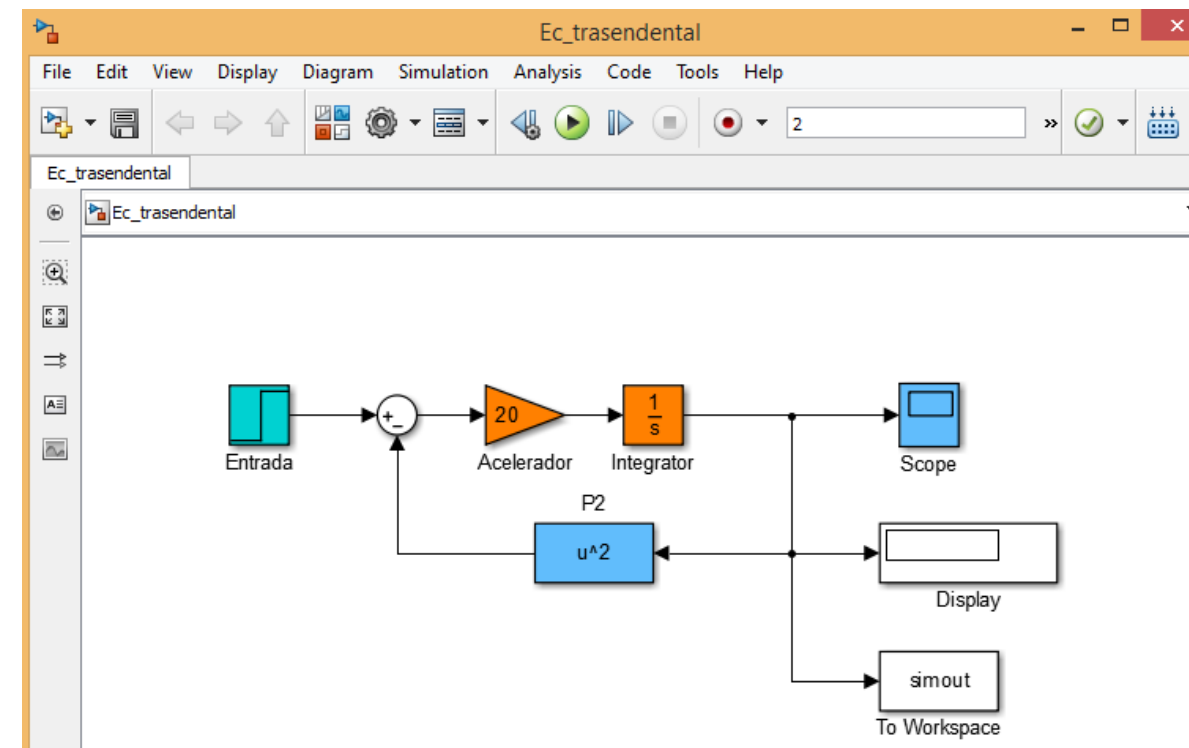
La relación entre el control avanzado y los métodos numéricos es intrínseca y sinérgica. Para implementar y diseñar algoritmos de control avanzado, a menudo es necesario, la creación de modelos matemáticos precisos de los sistemas a controlar, especialmente los complejos o no lineales, a menudo requiere el uso de métodos numéricos para la identificación de parámetros, la linealización o la simplificación de modelos complejos.

En resumen, las ecuaciones trascendentes son aquellas que contienen funciones no algebraicas y requieren métodos especiales para su solución, ya sea numérica o gráfica

Ejemplos de ecuaciones trascendentales:

Aquí tienes algunos ejemplos que ilustran la naturaleza de las ecuaciones trascendentales:

- $x = e^{-x}$
- $\sin(x) + 5 = x$
- $\tan(x) - ex = 0$
- $x \ln(x) = 5$
- $2^x = x^2$



Debido a esta dificultad, las ecuaciones trascendentales se resuelven frecuentemente utilizando **métodos numéricos de aproximación**, como:

- **Método de bisección:** Consiste en reducir repetidamente el intervalo donde se encuentra una raíz.
- **Método de falsa posición (Regula Falsi):** Similar al método de bisección, pero utiliza una secante para aproximar la raíz.
- **Método de Newton-Raphson:** Un método iterativo que utiliza la tangente de la función para encontrar aproximaciones sucesivas de la raíz.
- **Método de la secante:** Similar al método de Newton-Raphson, pero utiliza una secante en lugar de la tangente.
- **Método de iteración de punto fijo:** Transforma la ecuación en una forma $x=g(x)$ y aplica iteraciones.

Linealización de Sistemas No Lineales.

Desde un punto de vista general, muy pocos sistemas reales son estrictamente lineales; sin embargo, en el modelado de sistemas se sacrifica la descripción de la ecuación diferencial, que define un determinado proceso físico, para representarlo a manera de una ecuación diferencial ordinaria.

En este sentido el hecho de que la mayoría de los procesos industriales sean no lineales por naturaleza es muy importante en el control de proceso; mientras más alineal es un proceso, más difícil es su control. Por el momento es importante comprender el significado de las alinealidades, de dónde provienen y en qué forma afectan la personalidad del proceso.

La serie de Taylor establece que cualquier función analítica puede representarse como una serie infinita de la forma:

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)(x - c)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(c)(x - c)^n}{n!} \quad (ec. 124)$$

Cabe destacar que en muchos sistemas físicos industriales, encontraremos radicales tal que:

$$f(x) = \sqrt{x} \approx x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}(x - c) - \frac{1}{4}x^{-3/2} \frac{(x - c)^2}{2!} + \frac{1}{8}x^{-5/2} \frac{(x - c)^3}{3!} + \dots \quad (ec. 124)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \approx x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}(x - c) - \frac{1}{8}x^{-3/2}(x - c)^2 + \frac{1}{48}x^{-5/2}(x - c)^3 + \dots \quad (ec. 125)$$

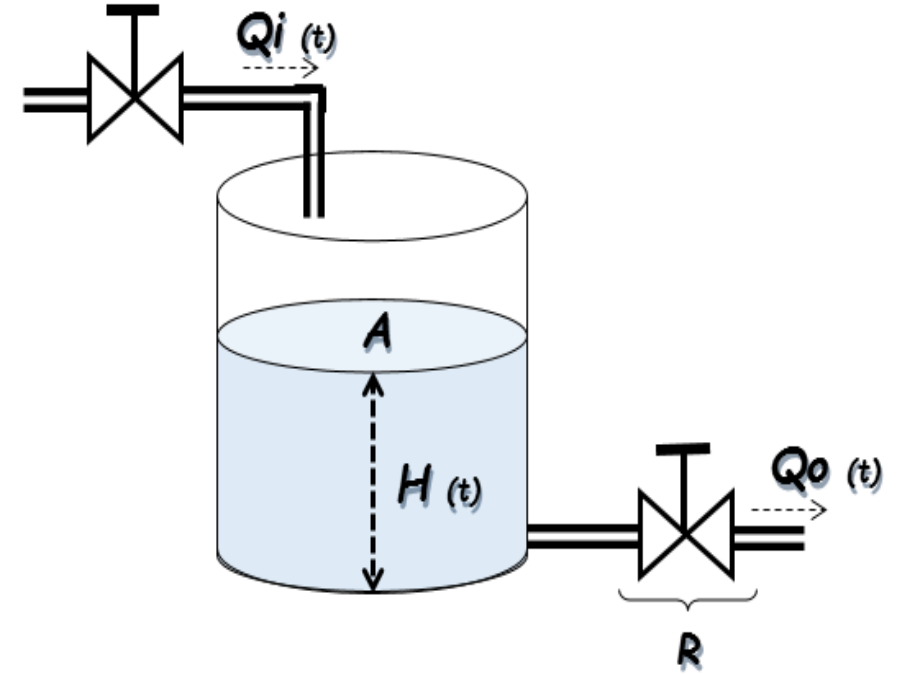
Si calculamos $\sqrt{4,0625}$ usando la aproximación de la serie de Taylor, debemos ubicar $c = 4$ cuyo valor esta alrededor del valor que se desea calcular.

$$\sqrt{4,0625} \approx 4^{1/2} + \frac{1}{2}4^{-1/2}(4,0625 - 4) - \frac{1}{8}4^{-3/2}(4,0625 - 4)^2 + \frac{1}{48}4^{-5/2}(4,0625 - 4)^3 \approx 2,01556 \quad (ec. 126)$$

Cómo abordar la dinámica de un sistema

Caso de estudio: *Tanque Abierto a la Atmósfera*

El proceso que se muestra en la figura es un tanque abierto a la atmósfera, la función de transferencia del proceso puede ser determinada basada en la ley de conservación de masa, que define que la materia no puede ser creada ni destruida. Esto implica que, la tasa de flujo másico del líquido de entrada al tanque menos, la tasa de flujo másico de líquido que sale del tanque, es igual a la masa acumulada. Este enfoque implica la relación de balance de masa.



$$\dot{q}_{i(t)} - \dot{q}_{o(t)} = \dot{m}_a$$

$$\rho \cdot q_{i(t)} - \rho \cdot q_{o(t)} = \frac{d}{dt} (\rho \cdot A \cdot h_{(t)})$$

Si no hay cambios en la densidad del fluido ρ es constante por lo tanto

$$q_{i(t)} - q_{o(t)} = A \cdot \frac{d}{dt}(h_{(t)})$$

En donde

ρ = Densidad de masa del líquido

$q_{i(t)}$ = flujo del líquido de entrada

$q_{o(t)}$ = flujo del líquido de salida

$h_{(t)}$ = Nivel del líquido en el tanque

A = Área del tanque

Asumimos que el tanque drena a través de una tubería de resistencia fluidica R que varía linealmente con el nivel del líquido en el tanque, tomando en cuenta flujo laminar la taza de flujo másico que deja el tanque, puede ser definida por la siguiente relación:

$$q_{o(t)} = k \cdot h_{(t)} \Rightarrow q_{o(t)} = \frac{h_{(t)}}{R} \text{ (ec. 32)}$$

Tal que

$$q_{i(t)} = A \cdot \frac{d}{dt}(h_{(t)}) + q_{o(t)} \Rightarrow q_{i(t)} = A \cdot \frac{d}{dt}(h_{(t)}) + \frac{h_{(t)}}{R} \text{ (ec. 33)}$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$q_{i(s)} = A \cdot h_{(s)} + \frac{h_{(s)}}{R} \Rightarrow q_{i(s)} = \left(A + \frac{1}{R}\right) h_{(s)} \text{ (ec. 33)}$$

Función de Transferencia:

$$\frac{h_{(s)}}{q_{i(s)}} = \frac{R}{RAS + 1} \text{ (ec. 34)}$$

Por lo que en llenado del tanque se comporta como un sistema de primer orden

1. Válvula de Control (Elemento Final de Control).

La característica de flujo de la válvula de control neumática se define como la relación entre el flujo de salida de la válvula y la posición de apertura de ésta (0-100%)

$$Q_{(gpm)} = C_{v_{max}} \cdot f(x^*) \cdot \sqrt{\frac{\Delta P_v}{G_f}}$$

Donde:

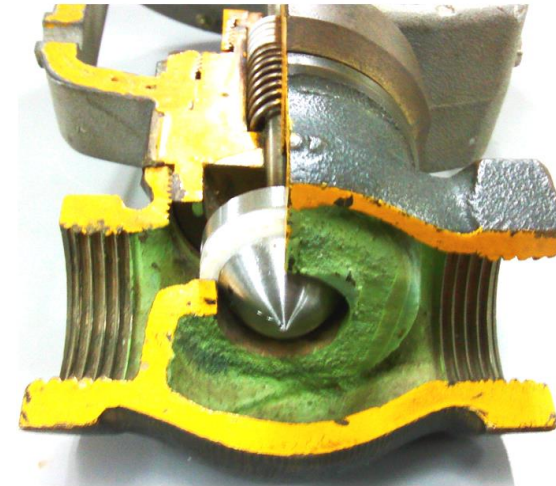
Cv es el Coeficiente de flujo

Cv_{max}: capacidad máxima de flujo de la válvula, gpm/psi^{1/2}

f_(x*): función que determina la característica inherente de la válvula V_p.

G_f: gravedad específica del fluido a la temperatura de flujo.

Cv: Indica el caudal de agua en galones/minuto, que pasa a través de la válvula completamente abierta y con caída de presión en ella de 1 psi.



Proceso de Nivel con válvula a la salida del producto

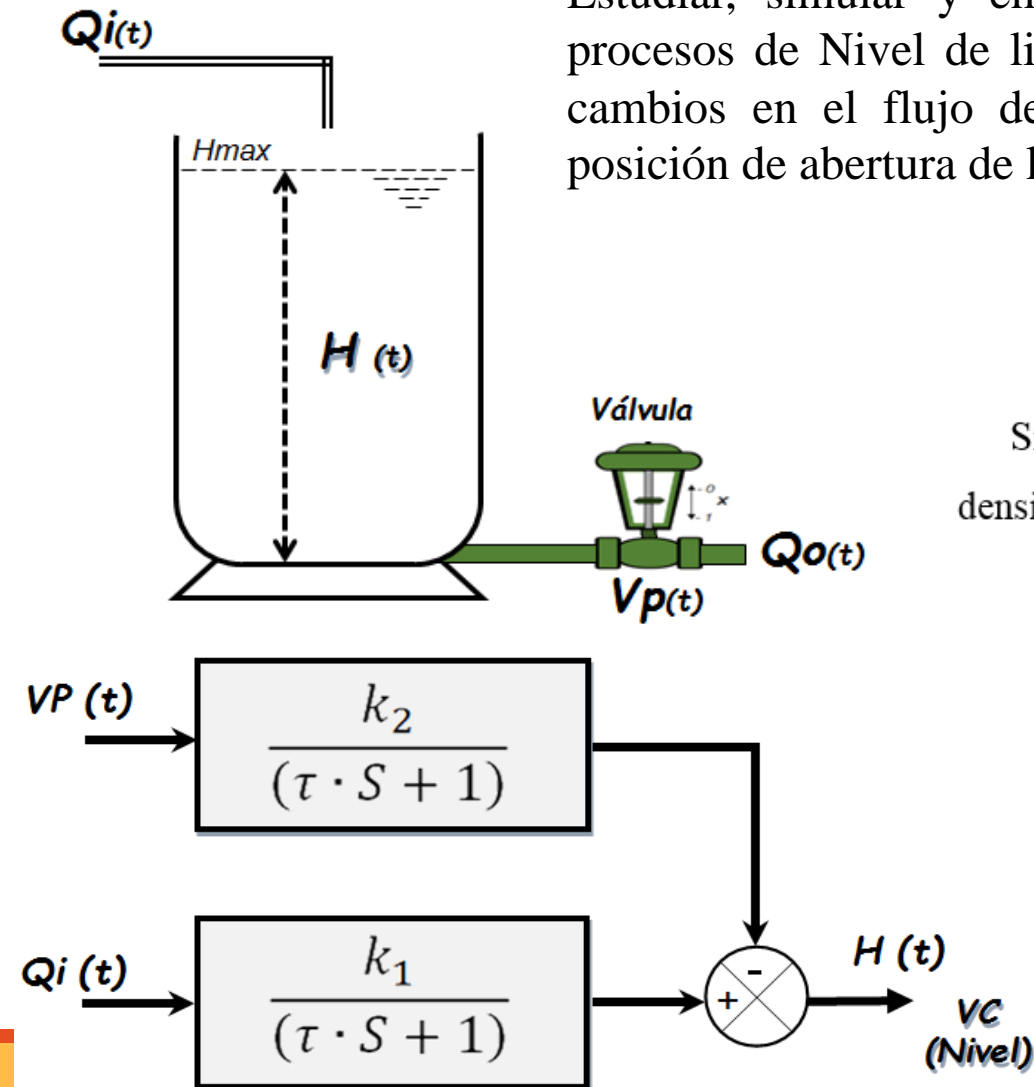
Estudiar, simular y emular el comportamiento dinámico de procesos de Nivel de liquido en el tanque, con respecto a los cambios en el flujo de entrada $Q_{i(t)}$ y a los cambios de la posición de abertura de la válvula de salida $V_{p(t)}$

$$q_{i(t)} - q_{o(t)} = \dot{m}_a \quad (ec.127)$$

$$\rho \cdot q_{i(t)} - \rho \cdot q_{o(t)} = \frac{d}{dt}(\rho \cdot A \cdot h_{(t)}) \quad (ec.128)$$

Si no hay cambios en la densidad del fluido ρ es constante por lo tanto, se supone que la densidad de entrada es igual a la densidad de salida, se tiene

$$q_{i(t)} - q_{o(t)} = A \cdot \frac{d}{dt}(h_{(t)}) \quad (ec.129)$$



En donde

ρ = Densidad de masa del líquido

$q_{i(t)}$ = flujo del líquido de entrada

$q_{o(t)}$ = flujo del líquido de salida

$h_{(t)}$ = Nivel del líquido en el tanque

A = Área del tanque

Dado que el tanque tienen una válvula a la salida para controlar el caudal, este puede ser definido por:

$$q_{o(t)} = C_v \cdot V p_{(t)} \cdot \sqrt{\frac{\Delta P_v}{G_f}} \quad (ec. 130)$$

Para este proceso, la caída de presión a través de la válvula está dada por:

$$\Delta P_v = P_{gas} + P_{liq} - P_2 \implies \Delta P_v = P_{gas} + \rho \cdot g \cdot h_{(t)} - P_2 \quad (ec. 131)$$

Cabe destacar que en esta ecuación se supone que las pérdidas por fricción a lo largo del conducto que va del tanque a la válvula son despreciables. Por lo que tenemos:

$$q_{i(t)} = C_v \cdot V p_{(t)} \cdot \sqrt{\frac{P_{gas} + \rho \cdot g \cdot h_{(t)} - P_2}{G_f}} = A \cdot \frac{d}{dt} (h_{(t)}) \quad (ec. 132)$$

No es posible resolver esta ecuación de manera analítica, a causa de la naturaleza no lineal del segundo término en el lado izquierdo de la misma.

La única forma de resolverla analíticamente es linealizando el término no lineal; puesto que este término se debe linealizar respecto a $h_{(t)}$ y $Vp_{(t)}$, la linealización se debe hacer alrededor de los valores \bar{h} y \bar{Vp} , que son los valores nominales de estado estacionario. Aplicando series de Taylor sobre el termino no lineal

$$q_{o(t)} \approx \bar{q}_o + \frac{\partial q_o}{\partial Vp} (Vp_{(t)} - \bar{Vp}) + \frac{\partial q_o}{\partial h} (h_{(t)} - \bar{h}) \quad (ec.133)$$

Realizando las derivadas parciales tenemos que:

$$q_{o(t)} \approx \bar{q}_o + C_v \cdot \sqrt{\frac{P_{gas} + \rho \cdot g \cdot \bar{h} - P_2}{G_f}} (Vp_{(t)} - \bar{Vp}) + \frac{C_v \rho g \bar{Vp}}{G_f} \cdot \left[\frac{P_{gas} + \rho \cdot g \cdot \bar{h} - P_2}{G_f} \right]^{-\frac{1}{2}} (h_{(t)} - \bar{h}) \quad (ec.134)$$

Haciendo una simplificación y reducción de terminos tenemos:

$$C_1 = C_v \cdot \sqrt{\frac{P_{gas} + \rho \cdot g \cdot \bar{h} - P_2}{G_f}} \quad (ec.135) \quad C_2 = \frac{C_v \rho g \bar{Vp}}{G_f} \cdot \left[\frac{P_{gas} + \rho \cdot g \cdot \bar{h} - P_2}{G_f} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad ec.136)$$

De manera que la ecuacion del caudal de salida se puede expresar como:

$$q_{o(t)} \approx \bar{q}_o + C_1 \cdot (Vp_{(t)} - \bar{Vp}) + C_2 \cdot (h_{(t)} - \bar{h}) \quad (ec.137)$$

Una vez linealizado la ecuacion del balance de masa de la ec. 132 se transforma en:

$$q_{i(t)} - \bar{q}_o - C_1 \cdot (Vp_{(t)} - \bar{Vp}) - C_2 \cdot (h_{(t)} - \bar{h}) = A \cdot \frac{d}{dt} (h_{(t)}) \quad (ec.138)$$

Ahora que se tiene una ecuación diferencial lineal, se pueden obtener las funciones de transferencia que se desean, para lo cual se continúa con el proceso anterior. Al escribir el balance de masa de estado estacionario alrededor del tanque se ve que:

$$\rho \bar{q}_i - \rho \bar{q}_o = 0 \longrightarrow \bar{q}_i - \bar{q}_o = 0 \longrightarrow \bar{q}_i = \bar{q}_o \quad (ec. 139)$$

$$(q_{i(t)} - \bar{q}_i) - C_1 \cdot (Vp_{(t)} - \bar{Vp}) - C_2 \cdot (h_{(t)} - \bar{h}) = A \cdot \frac{d}{dt}(h_{(t)}) \quad (ec. 140)$$

Observamos que tenemos diferentes gradientes alrededor del punto deseado, de manera que podemos expresar cada una como sigue:

$$Qi_{(t)} = (q_{i(t)} - \bar{q}_i) \quad (ec. 141) \quad VP_{(t)} = (Vp_{(t)} - \bar{Vp}) \quad (ec. 142) \quad H_{(t)} = (h_{(t)} - \bar{h}) \quad (ec. 143)$$

Según las variables de desviación tenemos que:

$$Qi_{(t)} - C_1 \cdot VP_{(t)} - C_2 \cdot H_{(t)} = A \cdot \frac{d}{dt}(H_{(t)}) \quad (ec. 144)$$

$$Qi_{(t)} - C_1 \cdot VP_{(t)} = A \cdot \frac{d}{dt}(H_{(t)}) + C_2 \cdot H_{(t)} \quad (ec. 145)$$

Normalizando la expresión tendremos:

$$\frac{A}{C_2} \cdot \frac{d}{dt} (H_{(t)}) + H_{(t)} = \frac{1}{C_2} Qi(t) - \frac{C_1}{C_2} \cdot VP_{(t)} \quad (ec. 146)$$

$$\tau \cdot \frac{d}{dt} (H_{(t)}) + H_{(t)} = K_1 Qi(t) - K_2 \cdot VP_{(t)} \quad (ec. 147)|$$

Caso de estudio: Tanque Abierto

Considere el proceso mostrado en la figura 85, en el cual el tanque es cilíndrico con un radio de 15 cm; que está abierto a la atmosfera, el flujo nominal de entrada y de salida del tanque es de 12,34 gpm; el fluido utilizado es agua cuya densidad $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$; el nivel en estado estacionario es de 40 "H2O, la válvula de salida es lineal con un $C_v = 5,87 \frac{gpm}{\sqrt{psi}}$

$$C_1 = 5,87 \frac{gpm}{\sqrt{psi}} \cdot \sqrt{\frac{P_{ATM} + (1000 \frac{kg}{m^3}) \cdot (9,8 \frac{m}{s^2}) \cdot 40 \text{ "H2O} - P_{ATM}}{1}} = 5,87 \frac{gpm}{\sqrt{psi}} \cdot \sqrt{\left(9800 \frac{kg \cdot m}{s^2}\right) \cdot 1,4451 \frac{psi}{m^3}}$$

$$C_1 = 5,87 \frac{gpm}{\sqrt{psi}} \cdot \sqrt{14,16185 \left(\frac{kPa \cdot psi}{m}\right)} = 5,87 \frac{gpm}{\sqrt{psi}} \cdot \sqrt{2,0535 \left(\frac{psi^2}{m}\right)} \Rightarrow C_1 = 8,4117 gpm \cdot \sqrt{\frac{psi}{m}}$$

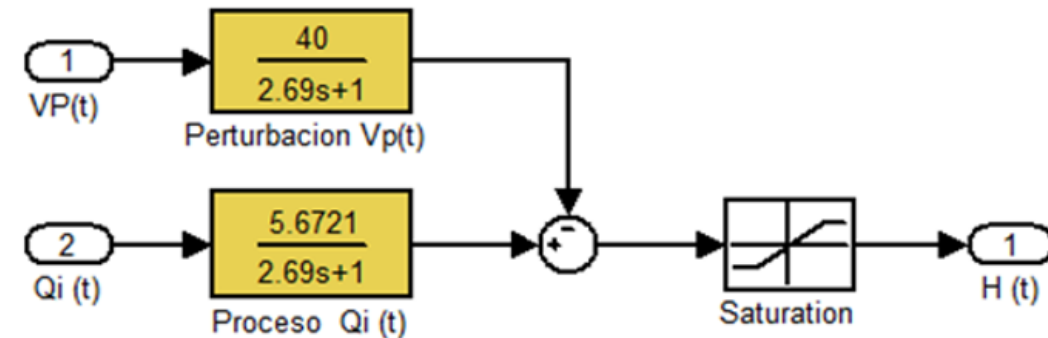
$$C_2 = 5,87 \frac{gpm}{\sqrt{psi}} \cdot \left(1000 \frac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(9,8 \frac{m}{s^2}\right) \cdot \left[P_{ATM} + \left(1000 \frac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(9,8 \frac{m}{s^2}\right) \cdot 40 \text{ "H2O} - P_{ATM}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$C_2 = 8,3413 \frac{gpm \sqrt{psi}}{m} \left[2,0535 \left(\frac{psi^2}{m}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = 5,8208 \frac{gpm}{\sqrt{m \cdot psi}} \Rightarrow C_2 = 0,1763 \frac{gpm}{\text{"H2O}}$$

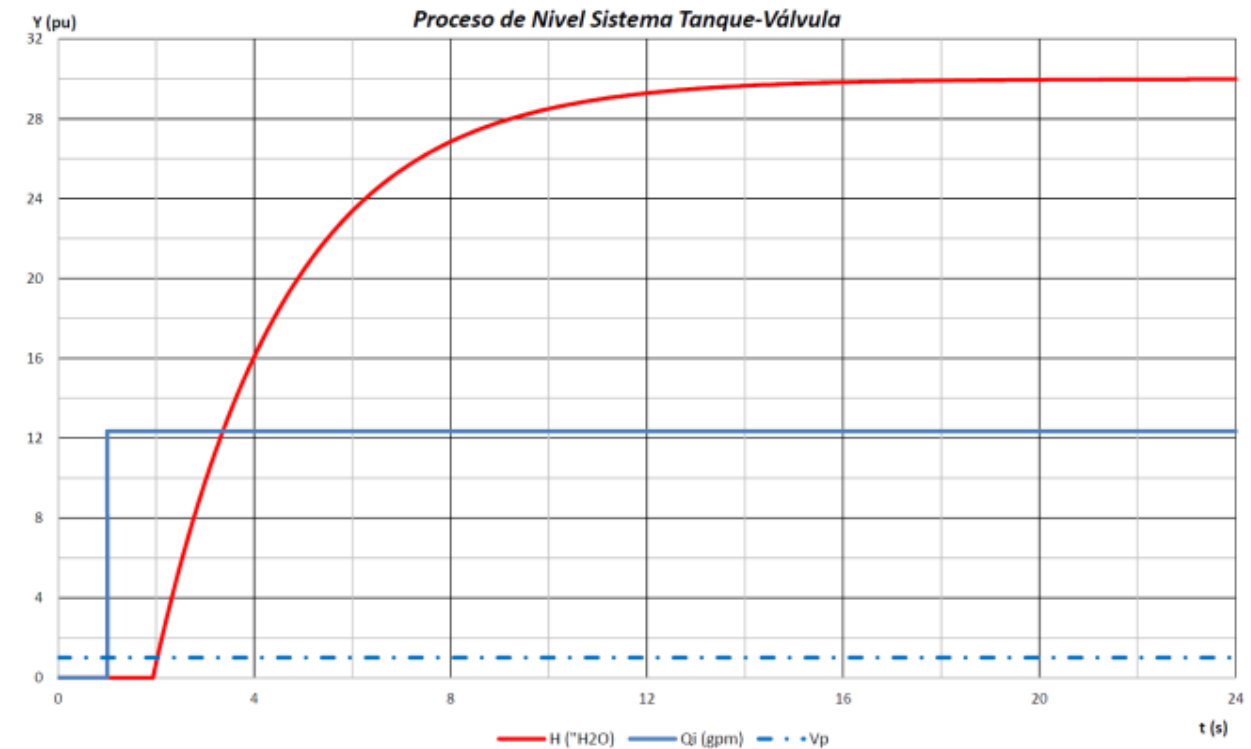
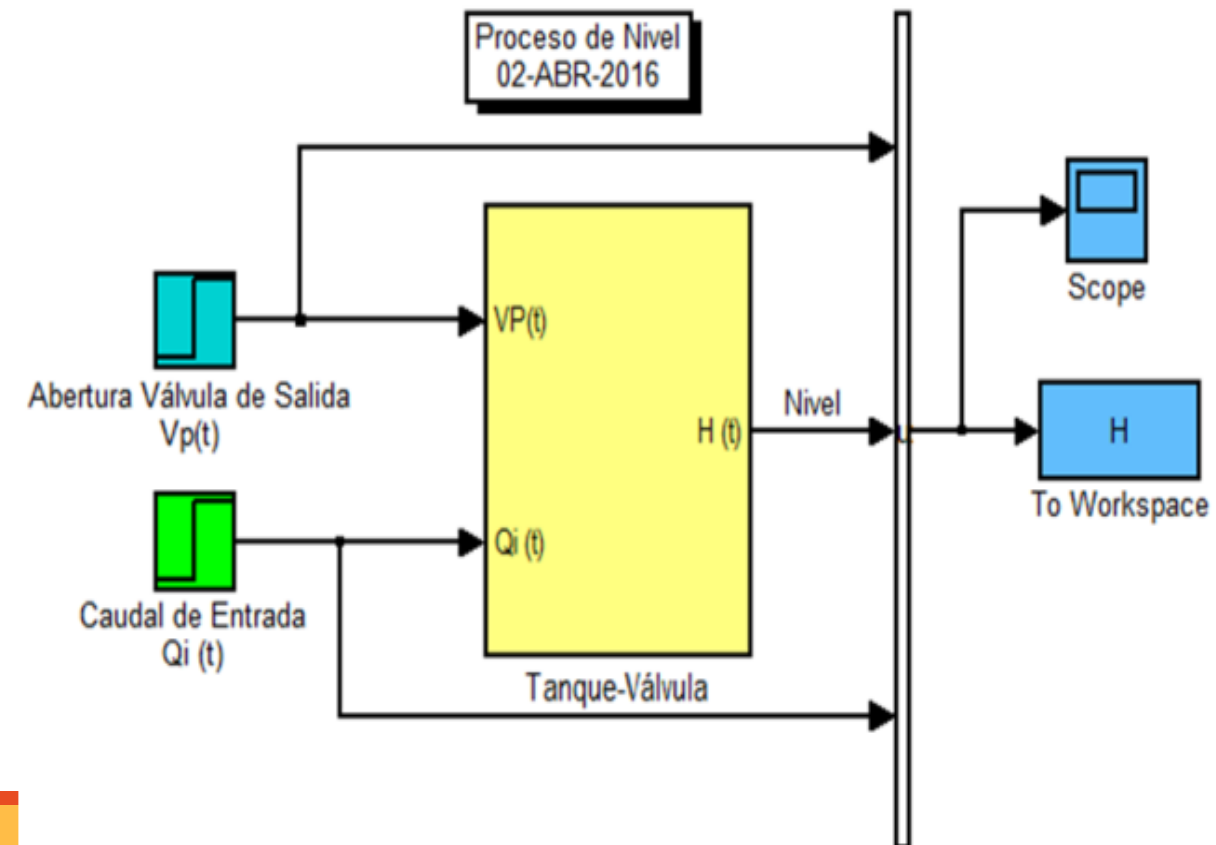
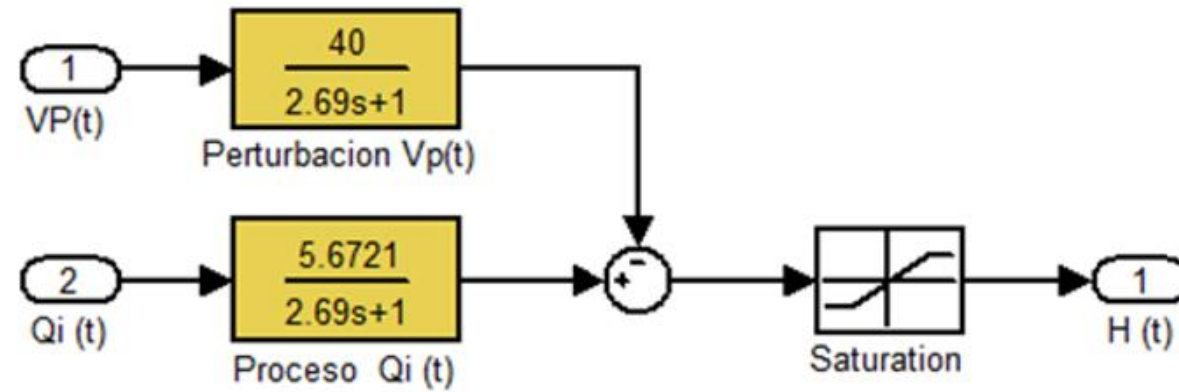
$$K_1 = \frac{1}{C_2} = \frac{1}{0,1763} \frac{\text{"H2O}}{gpm} \Rightarrow K_1 \approx 5,6721 \frac{\text{"H2O}}{gpm}$$

$$K_2 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{7,05319 gpm}{0,1763 \frac{gpm}{\text{"H2O}}} \Rightarrow K_2 \approx 40 \text{ "H2O}$$

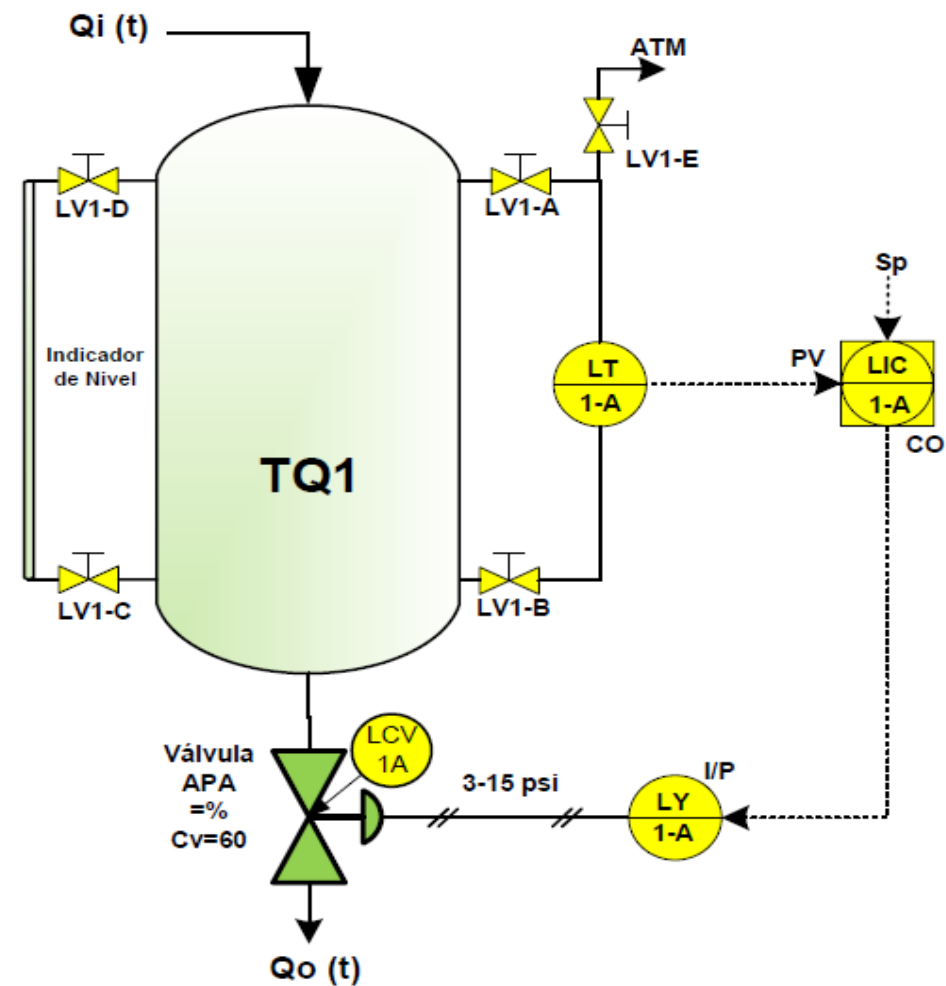
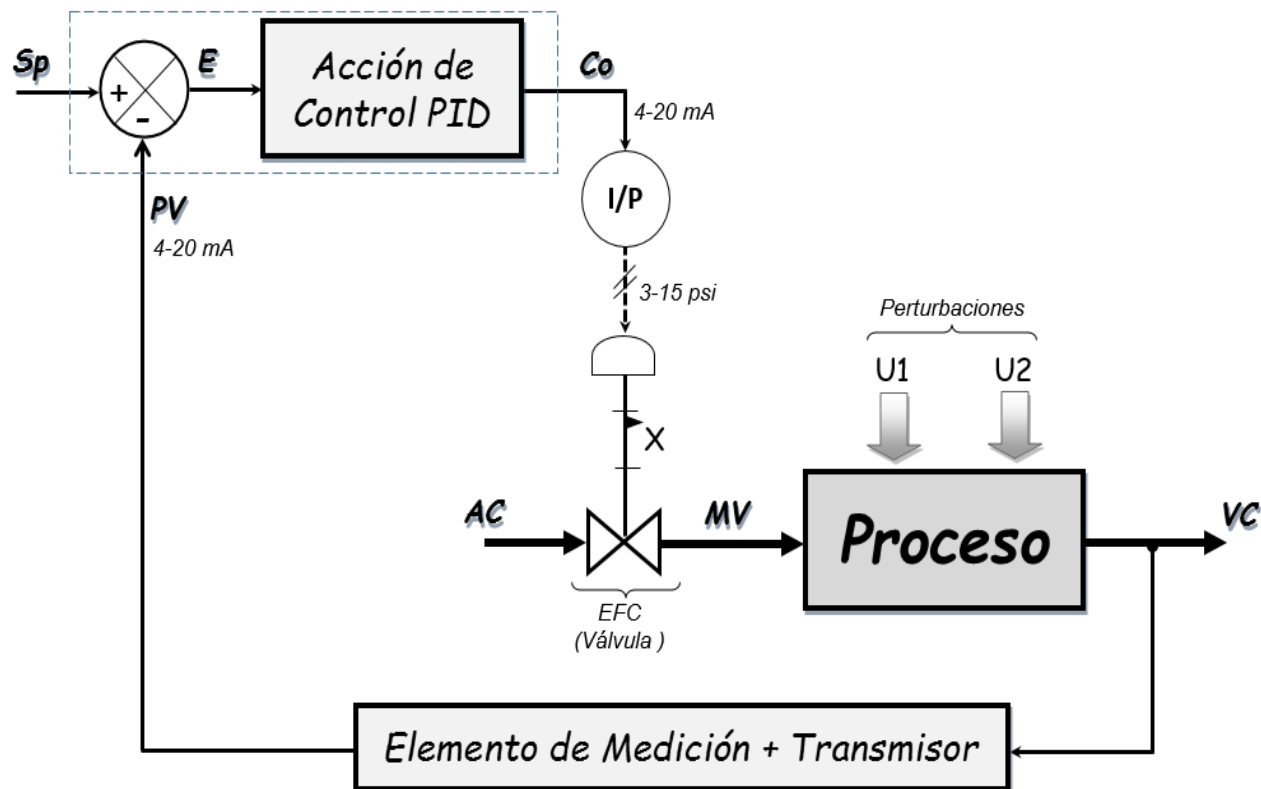
$$\tau = \frac{A}{C_2} = \frac{0,0707 m^2}{0,1764 \frac{gpm}{\text{"H2O}}} = 0,4008 \frac{m^2 \text{ "H2O}}{gpm} \Rightarrow \tau \approx 621,24 \frac{\text{"H2O}^3}{gpm} \approx 2,69 min$$

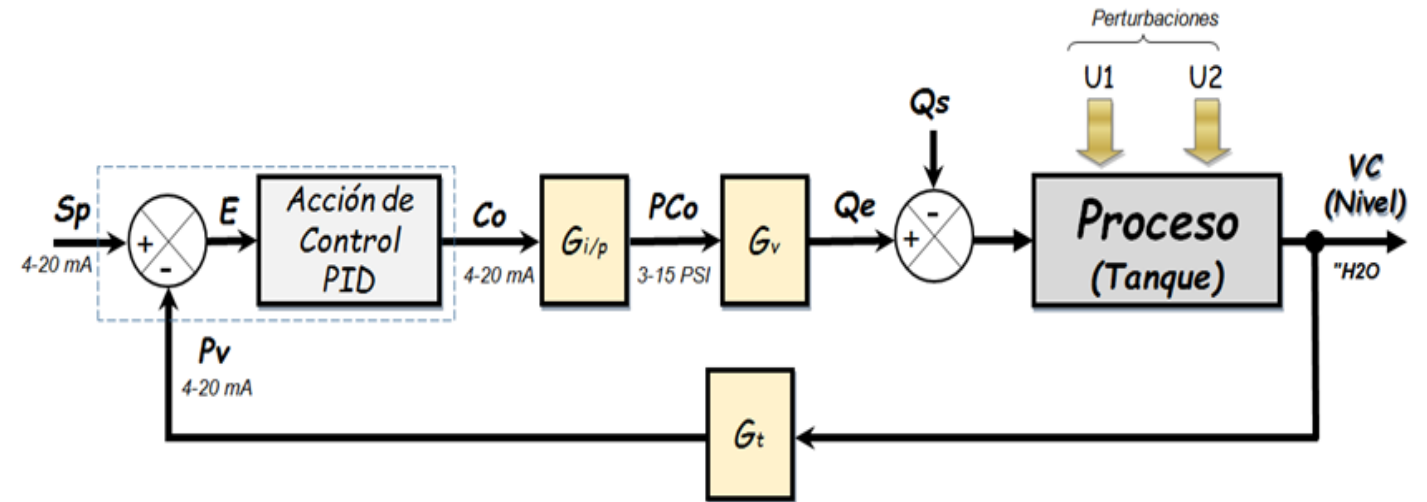
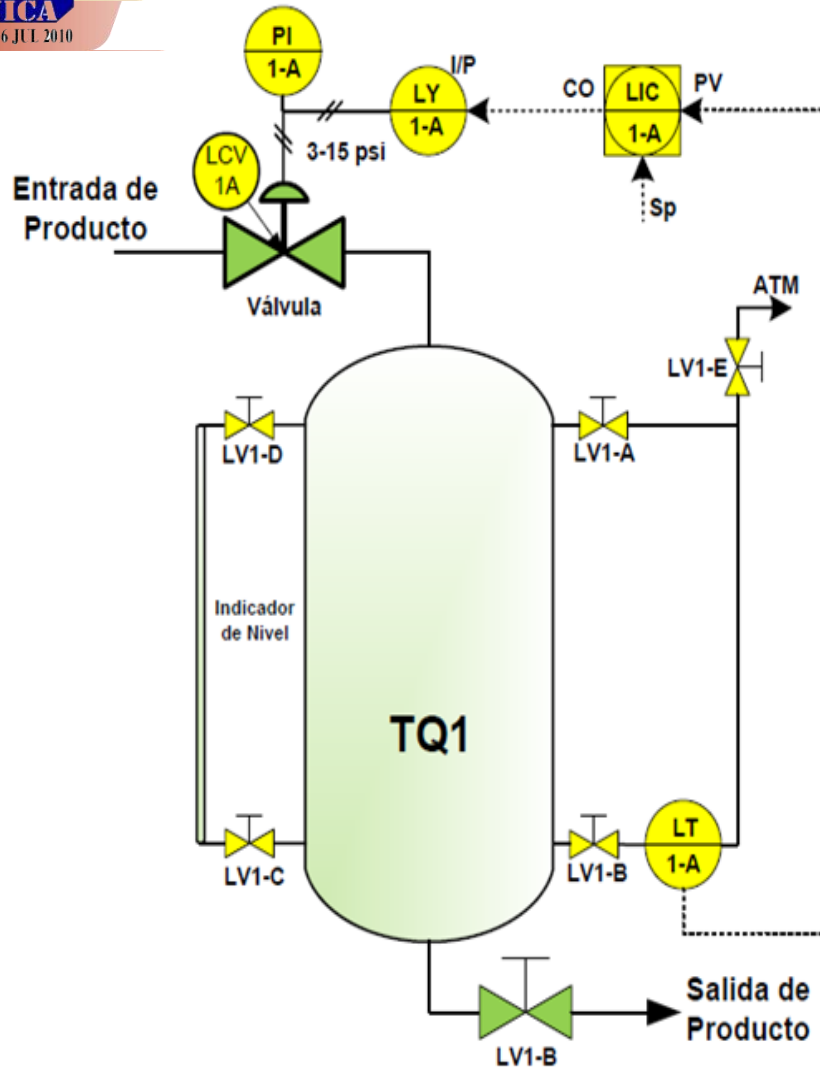


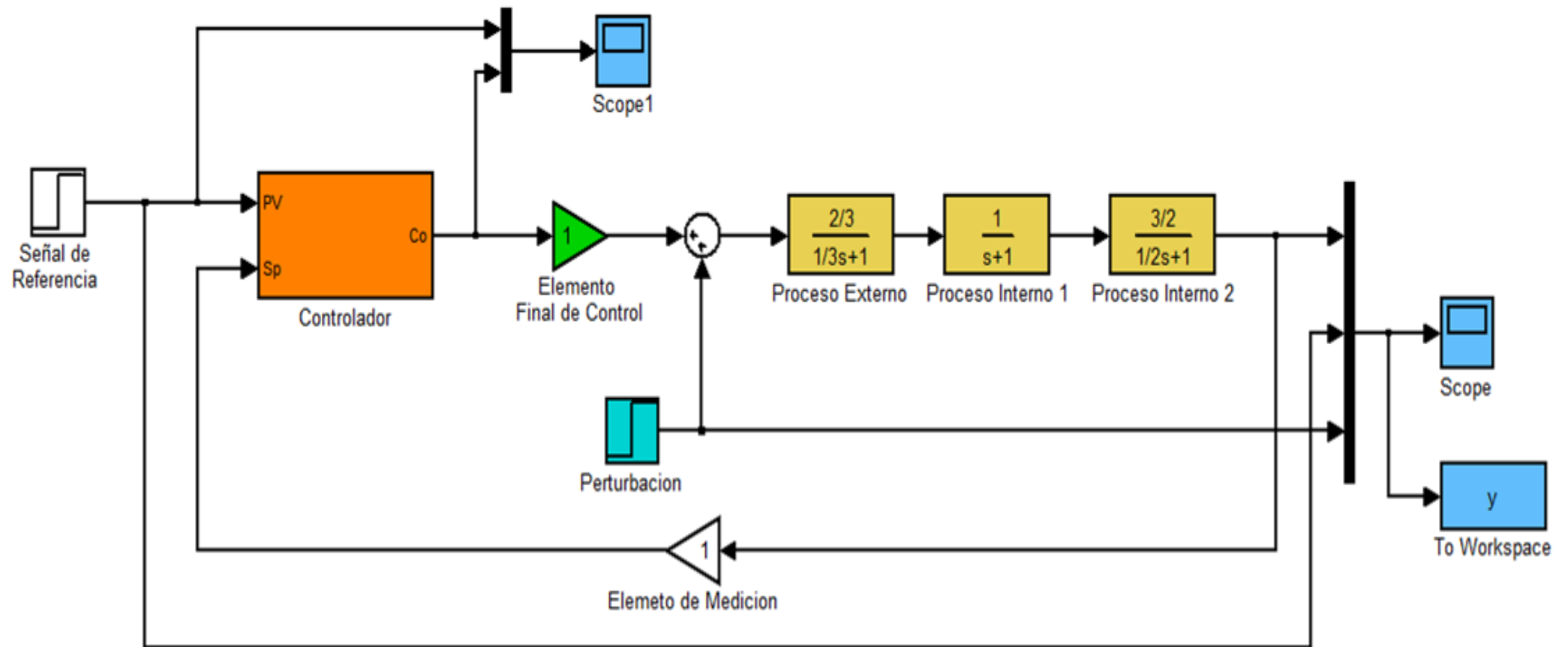
Control Avanzado y Métodos Numéricos

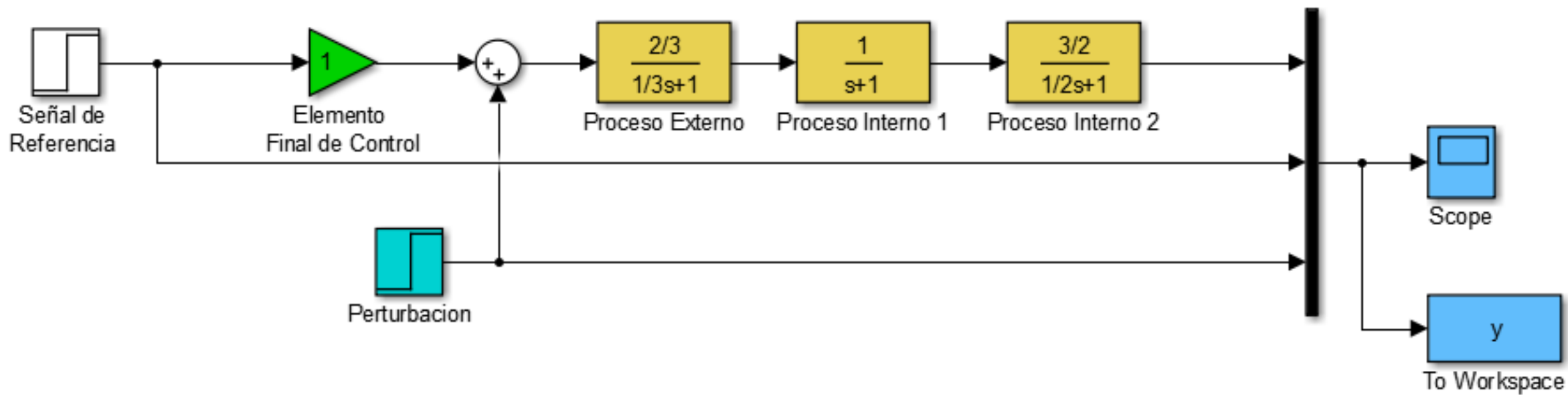


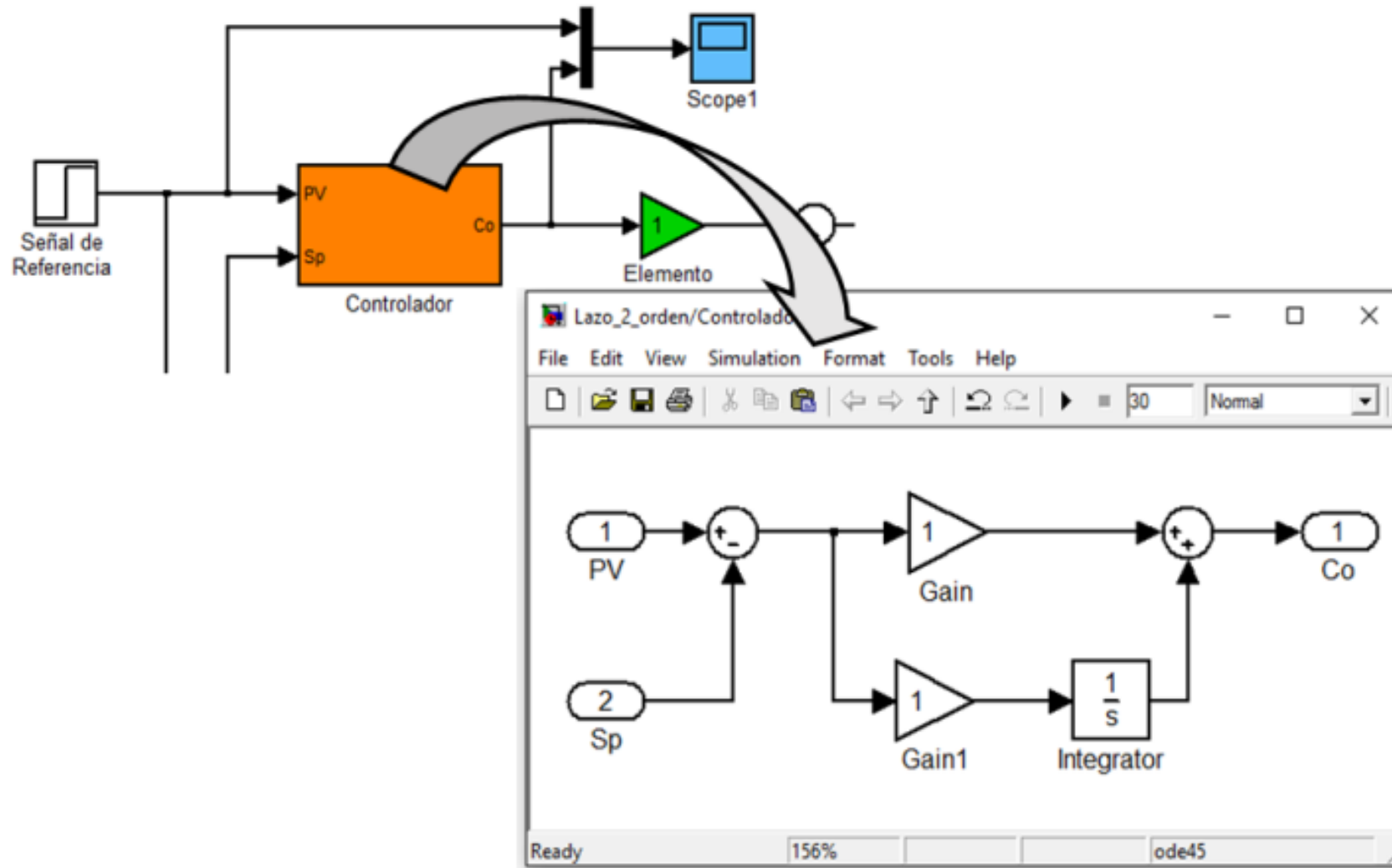
Lazo cerrado de control de procesos.



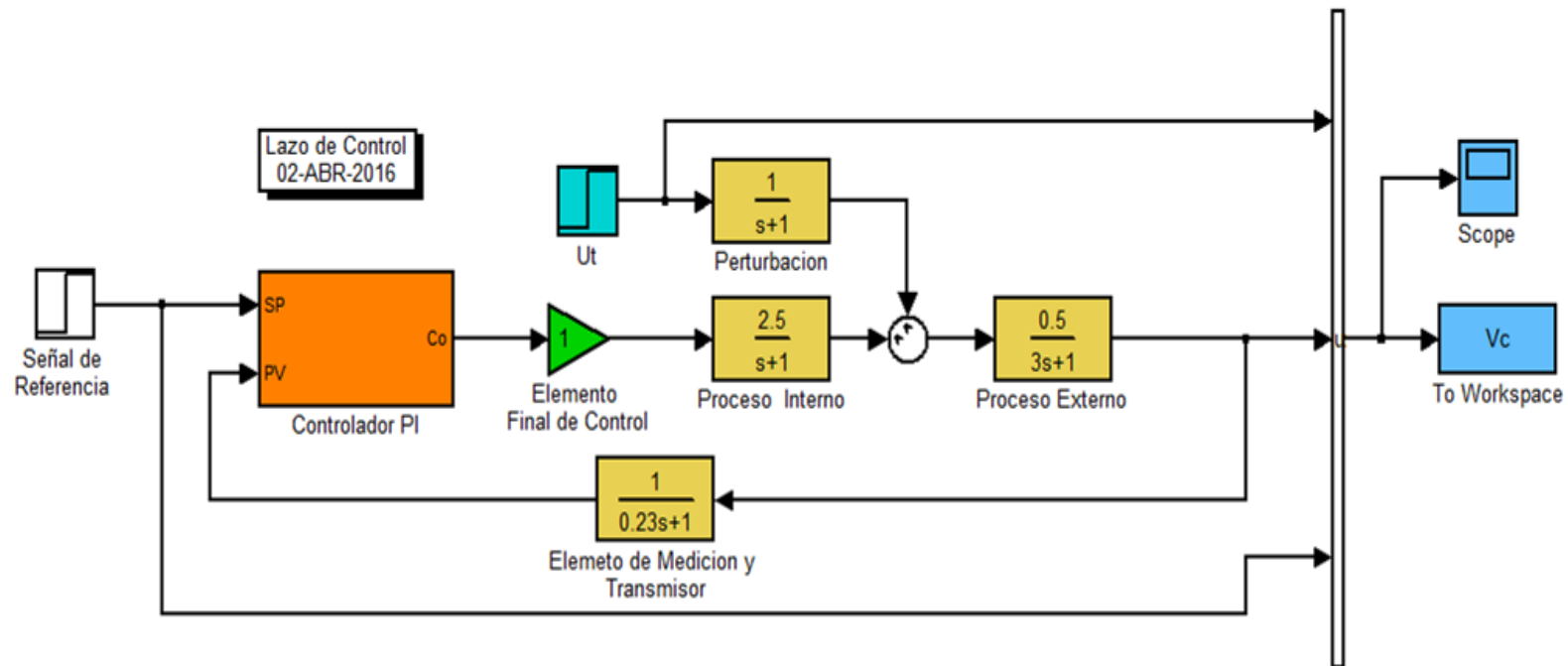




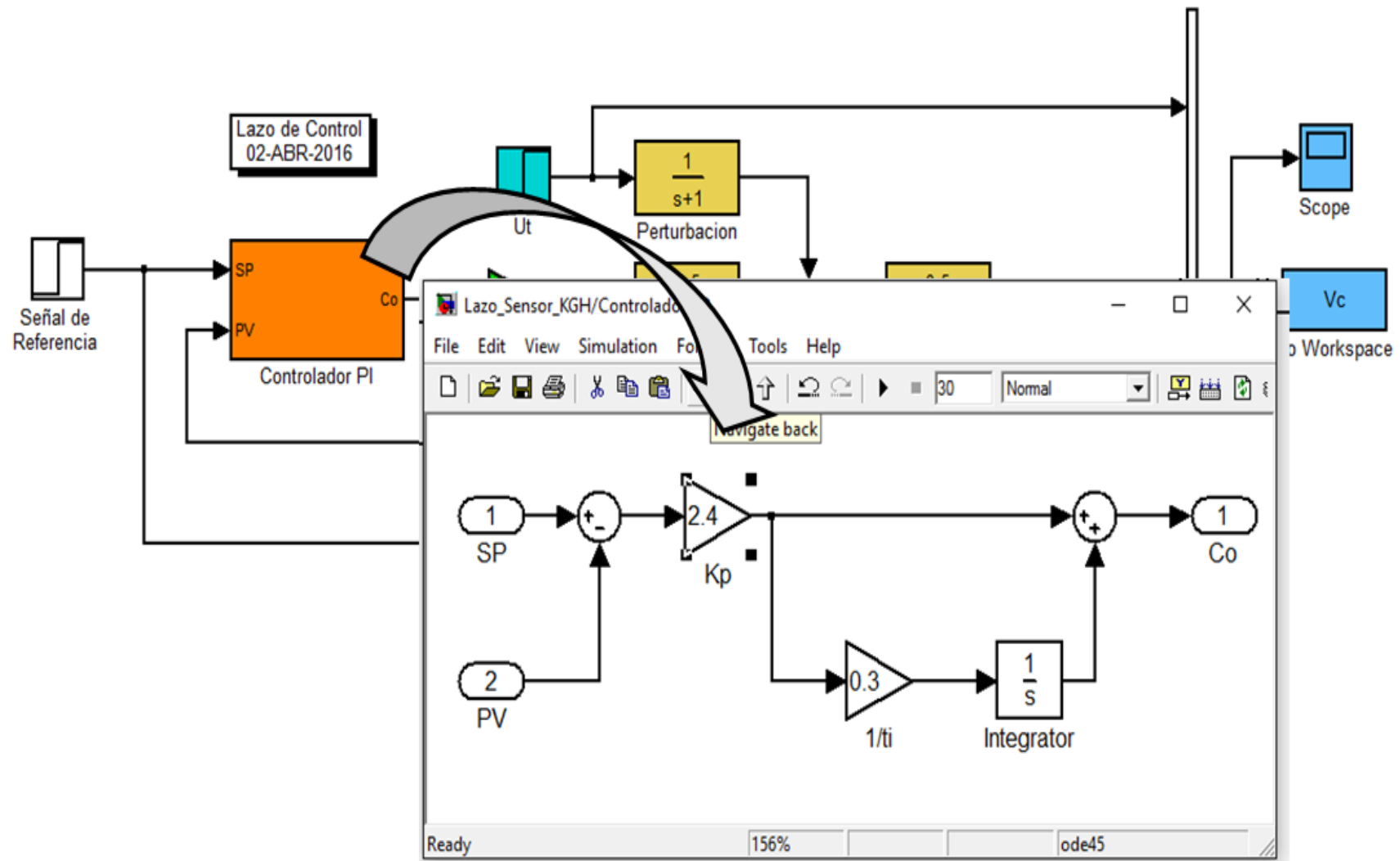




Los sistemas físicos por lo general tienen procesos internos y procesos externos, adicionalmente los sistemas tienen perturbaciones que afectan de una u otra manera el comportamiento dinámico del sistema, además hay que tomar en cuenta que en las plantas reales los elementos de medición y transmisores de la variable de proceso tienen dinámicas de primer o segundo orden, en este sentido en la siguiente figura se muestra un ejemplo de una planta con diferentes bloques para modelar el comportamiento.



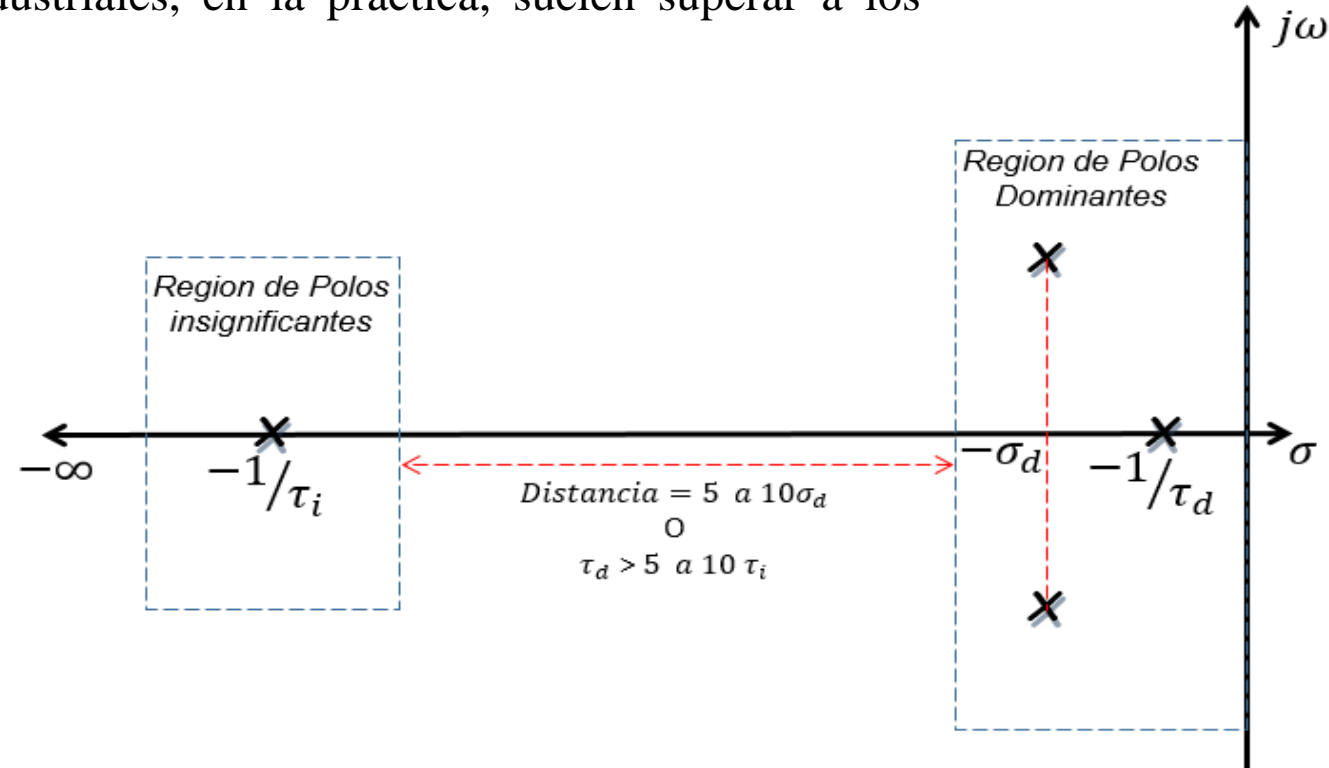
Control Avanzado y Métodos Numéricos



Sistemas de Orden Superior

Hasta ahora sólo se ha estudiado la respuesta del régimen transitorio de los sistemas de primer y segundo orden simples, sin embargo las plantas industriales tienen una evolución temporal que describen sistemas de orden superior (tercero, cuarto, etc.), es decir, los modelos de los procesos industriales, en la práctica, suelen superar a los sistemas de segundo orden.

A los polos más próximos al semiplano positivo se les llama dominantes y a los otros polos insignificantes. La regla práctica de clasificación de unos sobre otros depende de si el polo dominante es complejo conjugado o de primer orden. Si es complejo conjugado, debe de haber una distancia sobre el eje real de 5 a 10 veces el valor de la constante de amortiguamiento



Caso de estudio:

Respuesta ante un escalón unitario de un Sistema sobreamortiguado de orden superior y su equivalente reducido POMTM.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{67,2}{(S + 0,8)(S + 7)(S + 8)}$$

Planta Real:

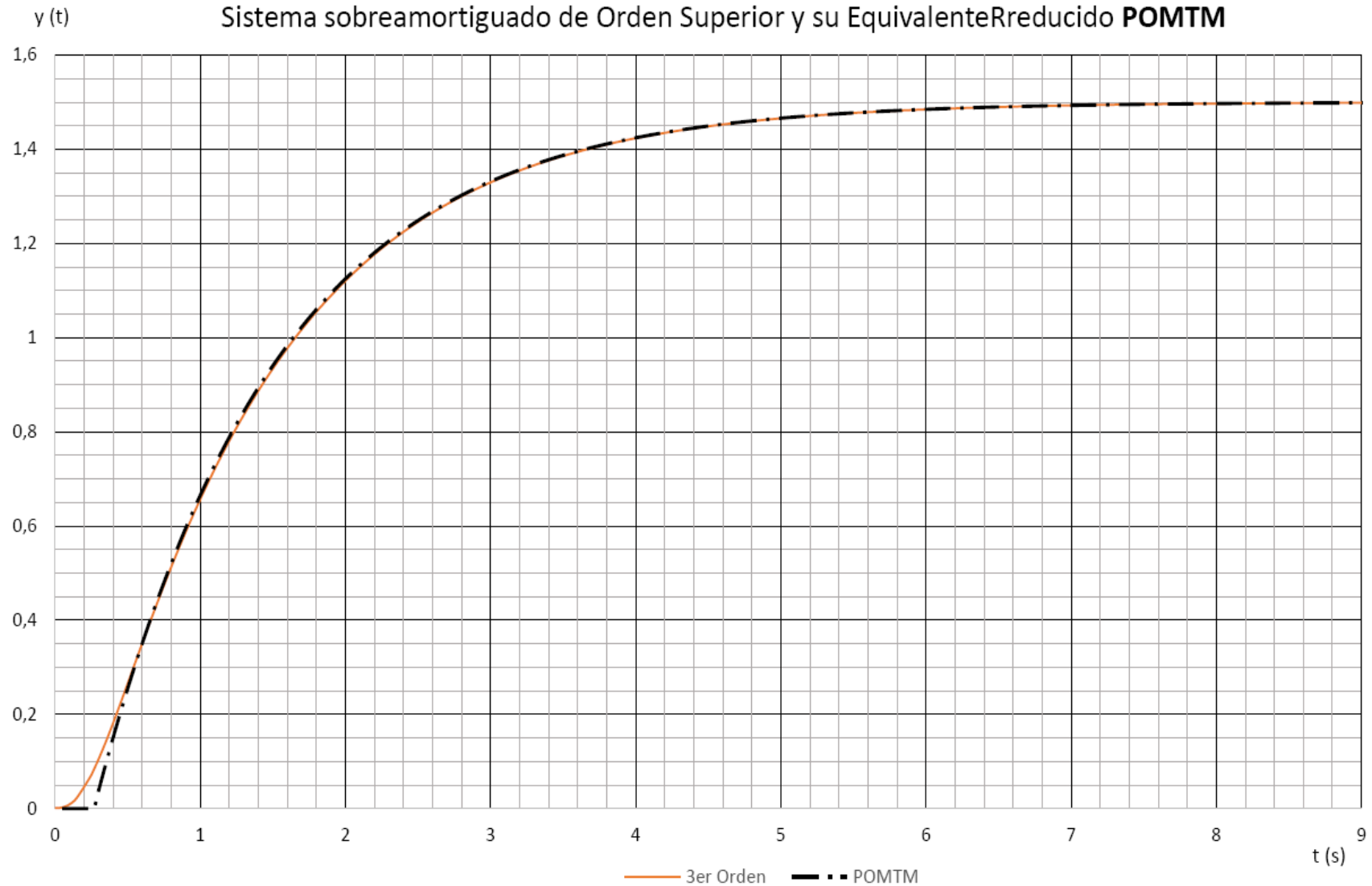
$$Y(s) = \frac{67,2}{S(S + 0,8)(S + 7)(S + 8)} = \frac{1,5}{S} - \frac{1,88}{(S + 0,8)} + \frac{1,548}{(S + 7)} - \frac{1,167}{(S + 8)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1,5 - 1,88 \cdot e^{-0,8t} + 1,548 \cdot e^{-7t} - 1,167 \cdot e^{-8t}$$

Planta Reducida: debemos normalizar la expresión

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{67,2}{0,8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot (1,25 \cdot S + 1)(0,143 \cdot S + 1)(0,125 \cdot S + 1)}$$

Observamos $\tau_1 = 1,25$ segundos, $\tau_2 = 0,143$ segundos, $\tau_3 = 0,125$ segundos, dado que τ_1 es mayor en más de cinco veces despreciamos las otras dos dinámicas. Tal que la función de transferencia reducida nos queda:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1,5}{(1,25 \cdot S + 1)} \cdot e^{-0,268 \cdot S} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1,5 - 1,5 \cdot e^{-0,8(t-0,268)}$$



Caso de estudio: respuesta ante un escalón unitario de un Sistema subamortiguado de orden superior y su equivalente reducido Segundo orden subamortiguado más tiempo muerto PCMTM.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{640}{(S + 40)(S^2 + 4S + 16)}$$

Planta completa Real: Observamos una función de transferencia de 3er orden con un polo simple en $\rho_1 = 40$, y un polo complejo conjugado en $S_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$, se puede deducir que el factor de amortiguamiento $\delta = 0,5$ y $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$

$$Y(s) = \frac{67,2}{S(S + 40)(S^2 + 4S + 16)} = \frac{1}{S} - \frac{1}{91} \cdot \frac{1}{(S + 40)} - \frac{0,98902S + 4,39564}{(S^2 + 4S + 16)}$$

Planta equivalente Reducida:

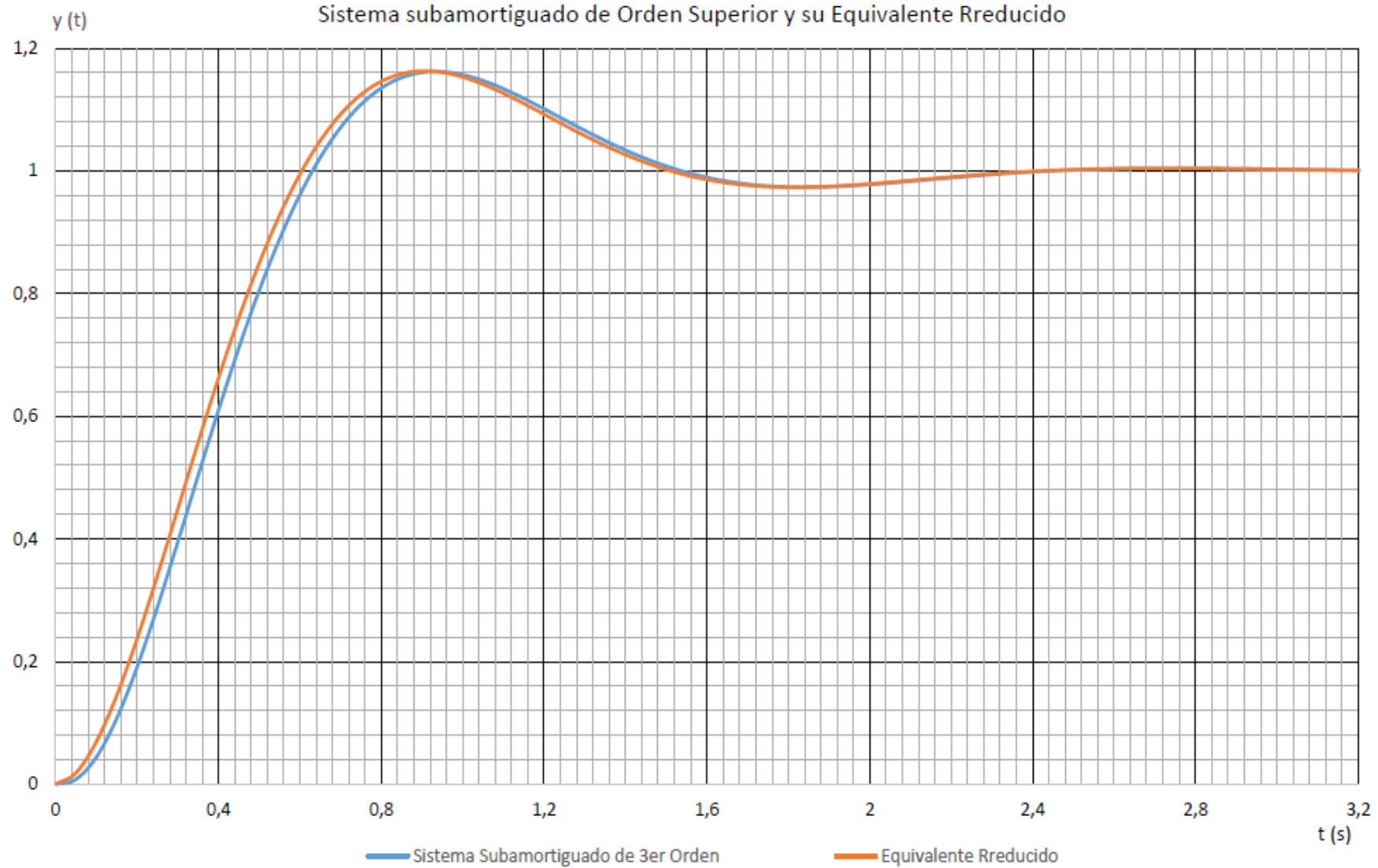
Observamos $\tau_1 = 1/40 \text{ segundos}$, donde $\rho_1 \geq 10\omega_n$ en este caso podemos considerar despreciable el polo simple, quedando como dominante polo complejo conjugado.

Tal que la función de transferencia reducida nos queda:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{640}{40 \cdot (S^2 + 4S + 16)}$$

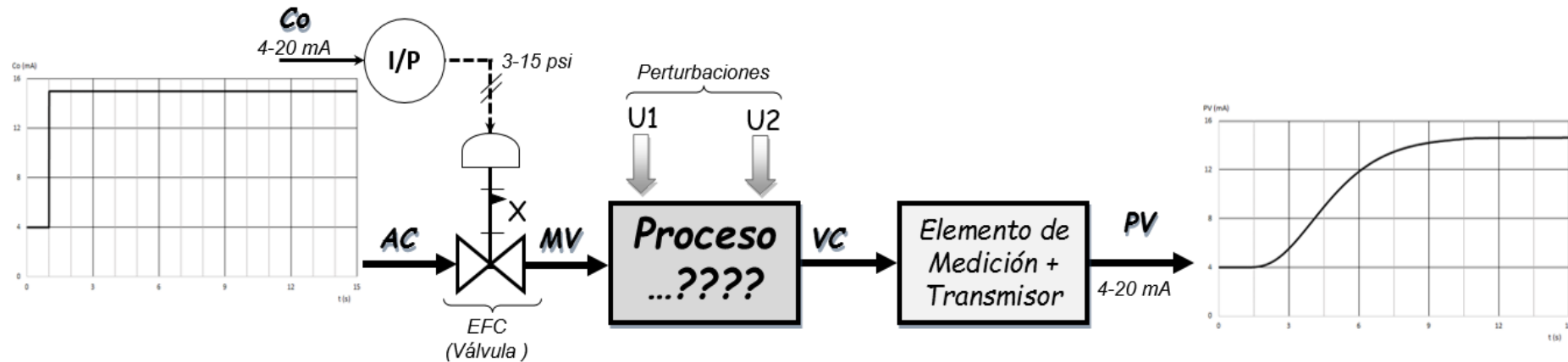
Cuya solución temporal es:

$$y(t) = 1 - 1,1547e^{-2t} \cdot \sin(2\sqrt{3}t + \pi/3)$$



Identificación de sistemas basados en la curva de reacción del proceso

En la práctica los procesos industriales son sistemas dinámicos complejos con dinámicas de orden superior, producto de la intervención de múltiples elementos (ver Figura) dentro del lazo de control. La identificación de los parámetros de estos modelos (ganancia, tiempo muerto y constantes de tiempo), puede hacerse a partir de la respuesta del proceso a un cambio escalón en la entrada, denominada curva de reacción del proceso.



Existen varios métodos para la determinación de estos parámetros, los cuales pueden requerir el trazo de una recta tangente en el punto de inflexión de la curva, la determinación del instante en que este punto ocurre, la determinación de los tiempos para que la respuesta alcance dos o tres porcentajes determinados del cambio total de la respuesta, o el cálculo de áreas definidas por las curvas de las señales de entrada y salida. El primer método de identificación de un modelo de primer orden más tiempo muerto, que utiliza dos puntos sobre la curva de reacción, fue propuesto por Smith.

La mayoría de los métodos para estudiar sistemas de control se basan en los parámetros de un modelo de orden reducido que permita representar sistemas dinámicos de orden alto y por esta razón los más empleados son los de primer o segundo orden más tiempo muerto.

✓ *Primer orden más tiempo muerto (POMTM)*

$$G_{p(s)} = \frac{k_p}{(\tau \cdot S + 1)} \cdot e^{-t_m \cdot S} \quad (ec. 36)$$

✓ *Polo doble más tiempo muerto (PDMTM)*

$$G_{p(s)} = \frac{k_p}{(\tau \cdot S + 1)^2} \cdot e^{-t_m \cdot S} \quad (ec. 37)$$

✓ *Segundo orden sobreamortiguado más tiempo Muerto (SOMTM)*

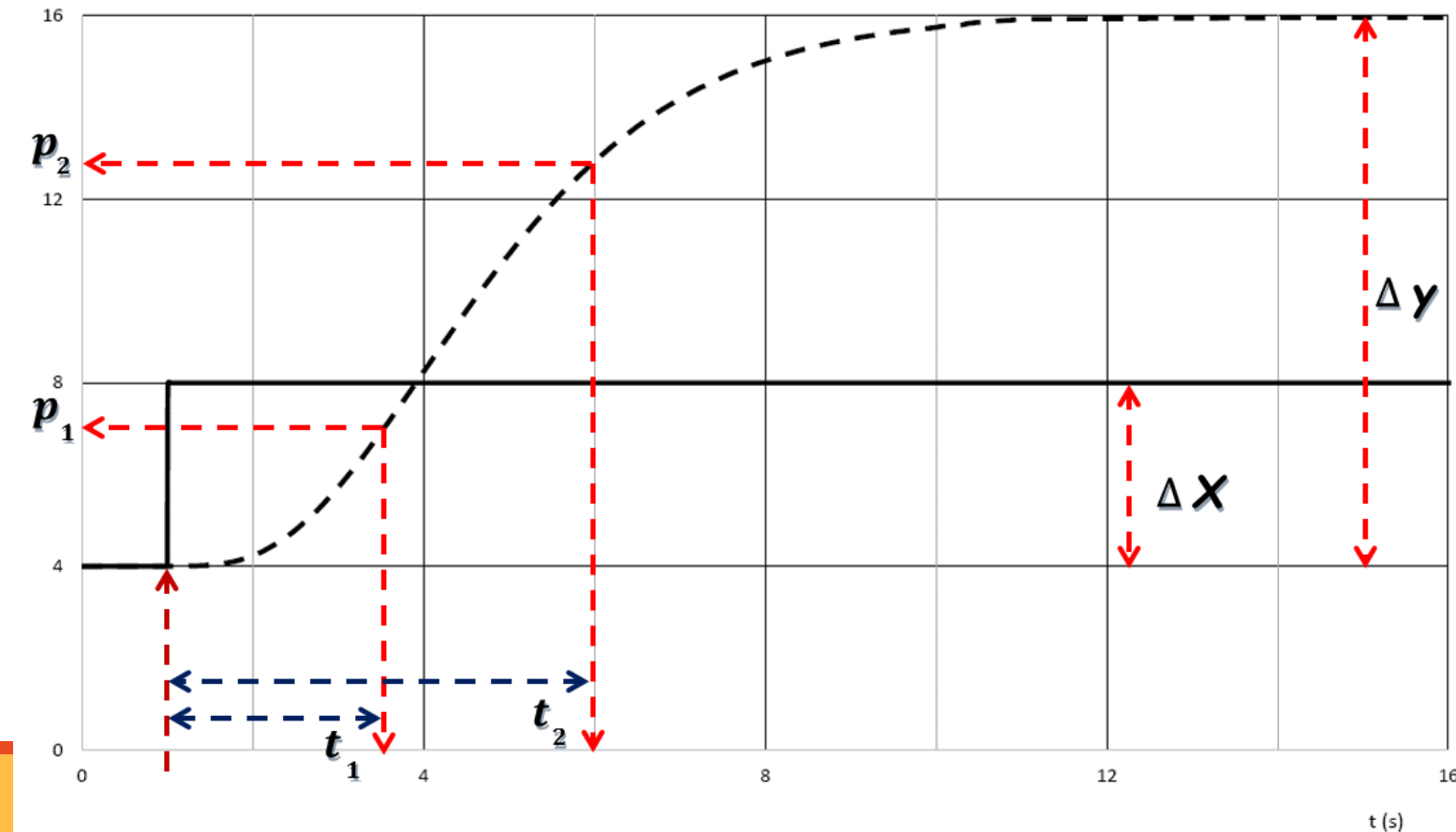
$$G_{p(s)} = \frac{k_p}{(\tau_1 \cdot S + 1)(\tau_2 \cdot S + 1)} \cdot e^{-t_m \cdot S} \quad (ec. 38)$$

✓ *Segundo orden subamortiguado más tiempo muerto*

$$G_{p(s)} = \frac{k_p \cdot \omega_n^2}{S^2 + 2\delta\omega_n S + \omega_n^2} \cdot e^{-t_m \cdot S} = \frac{k_p}{\tau^2 S^2 + 2\delta\tau S + 1} \cdot e^{-t_m \cdot S}$$

Método general de identificación de sistemas basados en “Dos puntos de la curva”

La curva de reacción del proceso se obtiene por medio de una prueba de lazo abierto con el controlador en manual y el sistema funcionando en el punto de operación deseado. En estas condiciones se aplica un cambio escalón en la salida del controlador y se registra esta señal de entrada y la de salida del proceso, desde el instante en que se aplicó el escalón de entrada hasta que el sistema alcance un nuevo punto de operación estable, si éste es un proceso autorregulado.



Pueden establecerse, por consiguiente, ecuaciones generales para los métodos de dos puntos, con el fin de identificar un modelo de primer orden más tiempo muerto con base en los tiempos requeridos para alcanzar dos puntos específicos en la curva de reacción del proceso.

El método propuesto por Smith donde se obtienen modelos de primer orden más tiempo muerto En donde los instantes seleccionados por este autor fueron los tiempos requeridos para que la respuesta alcance el 28.3% (t_{28}) y el 63.2% (t_{63}) del valor final

La ganancia es el cambio total en la salida dividido por el cambio en la entrada:

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad (ec. 43)$$

Donde:

$$t_{28} = t_m + \tau/3 \quad (ec. 40)$$

$$t_{63} = t_m + \tau \quad (ec. 41)$$

$$\tau = 1,5(t_{63} - t_{28}) \quad (ec. 42)$$

De manera general los porcentajes del cambio en la respuesta para la determinación de los dos tiempos requeridos por el procedimiento de identificación, así como los valores de las constantes a , b , c y d para los métodos antes mencionados, están dados por las ecuaciones:

$$\tau = a \cdot t_1 + b \cdot t_2$$

$$t_m = c \cdot t_1 + d \cdot t_2$$

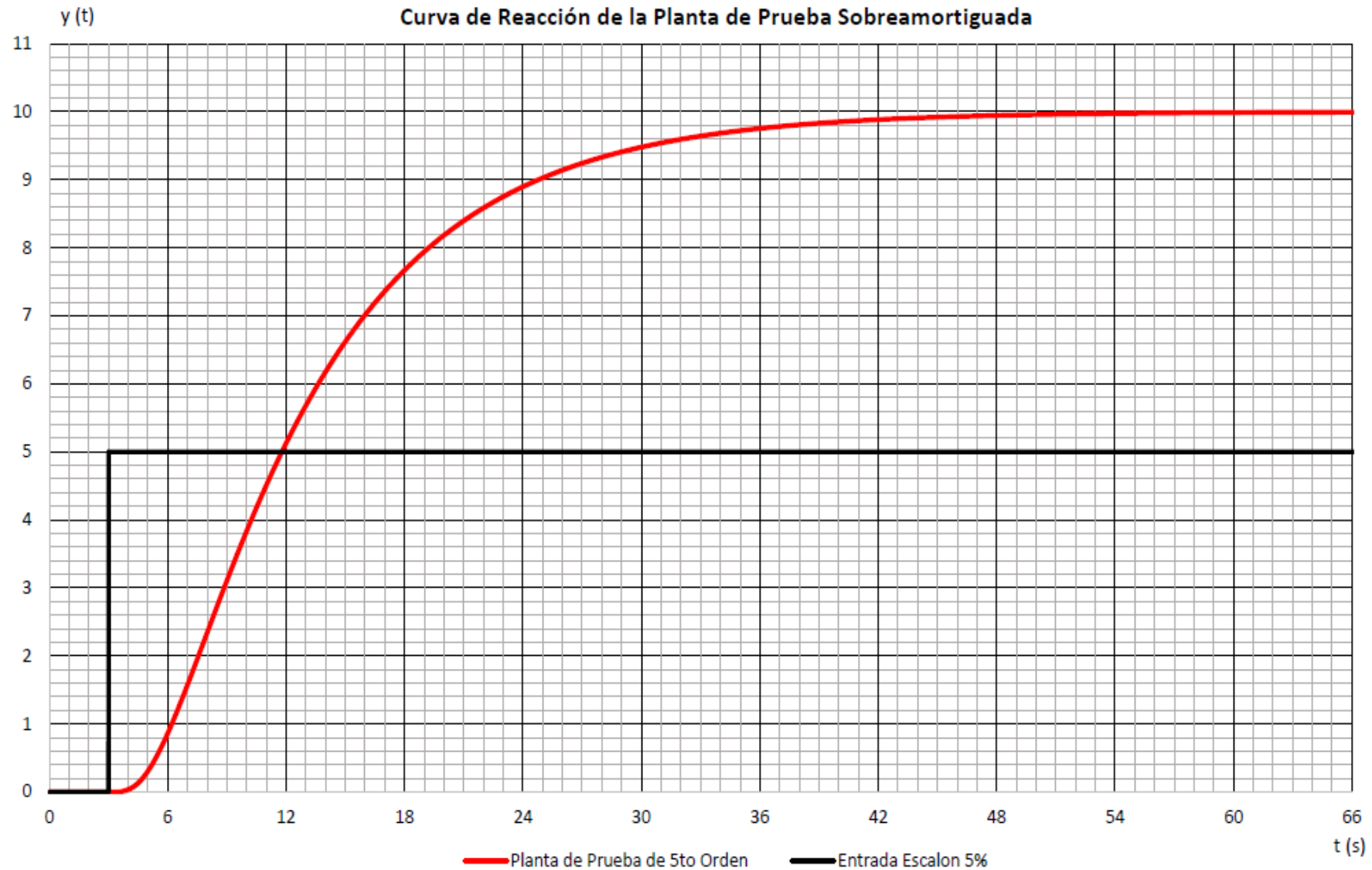
Métodos	% p1	% p2	a	b	c	d
Alfaro	25	75	-0,910	0,910	1,262	-0, ,262
Bröida	28	40	-5,500	5,500	2,800	-1,800
Chen y Yang	33	67	-1,400	1,400	1,540	-0,540
Ho (1 ^{er})	35	85	-0,670	0,670	1,300	-0,290
Smith	28,3	63,2	-1,500	1,500	1,500	-0,500
Vitecková (1 ^{er})	33	70	-1,245	1,245	1,498	-0,498

Prueba comparativa de validación método basado en dos puntos sobre la curva de reacción

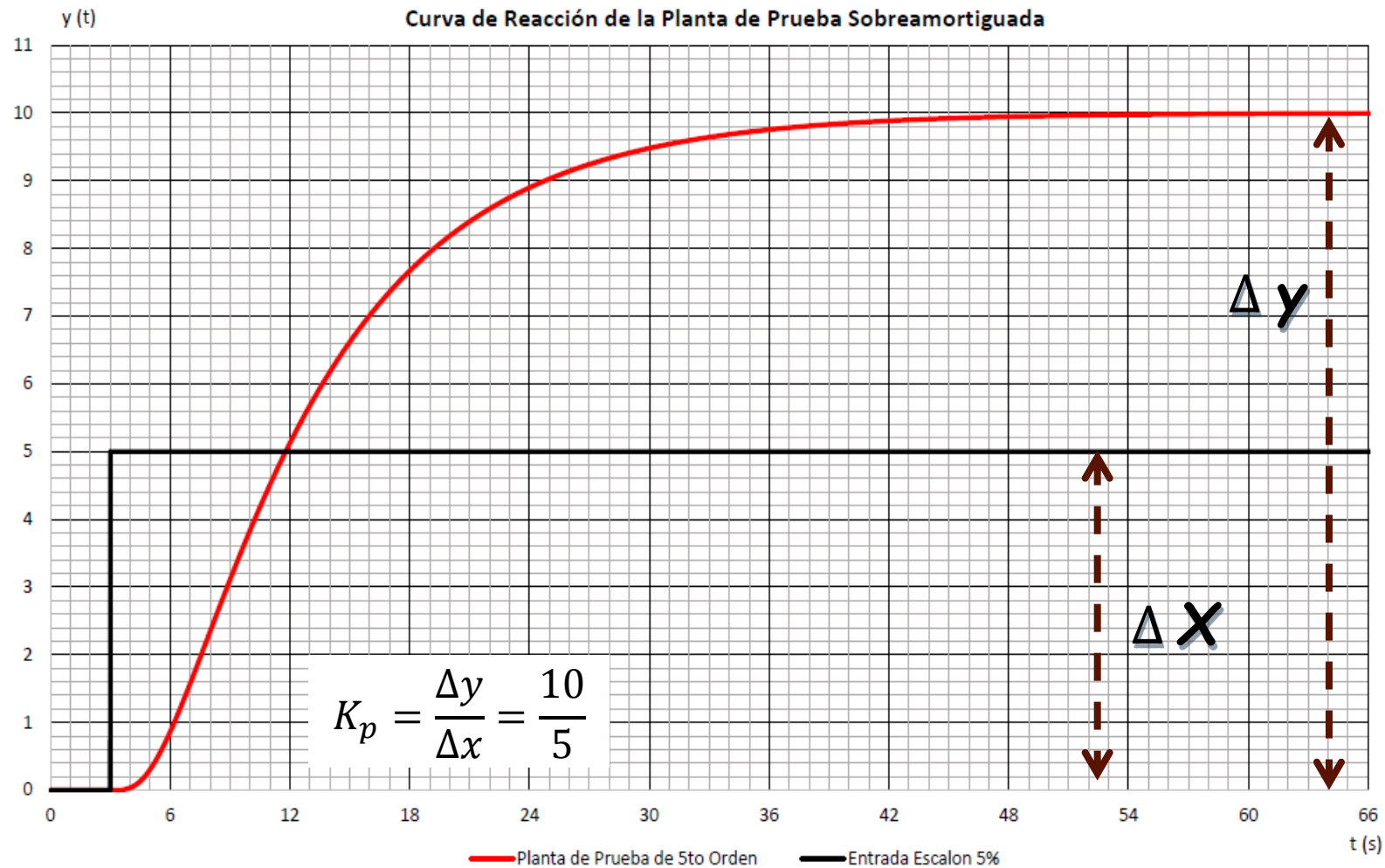
Para hacer las pruebas se utilizó una planta de sobreamortiguada de 5to Orden dada por $G_{p(s)}$, excitada con una entrada del tipo escalón, en la figura se muestra la curva de reacción sobre la cual aplicaremos las técnicas de identificación, descritas anteriormente.

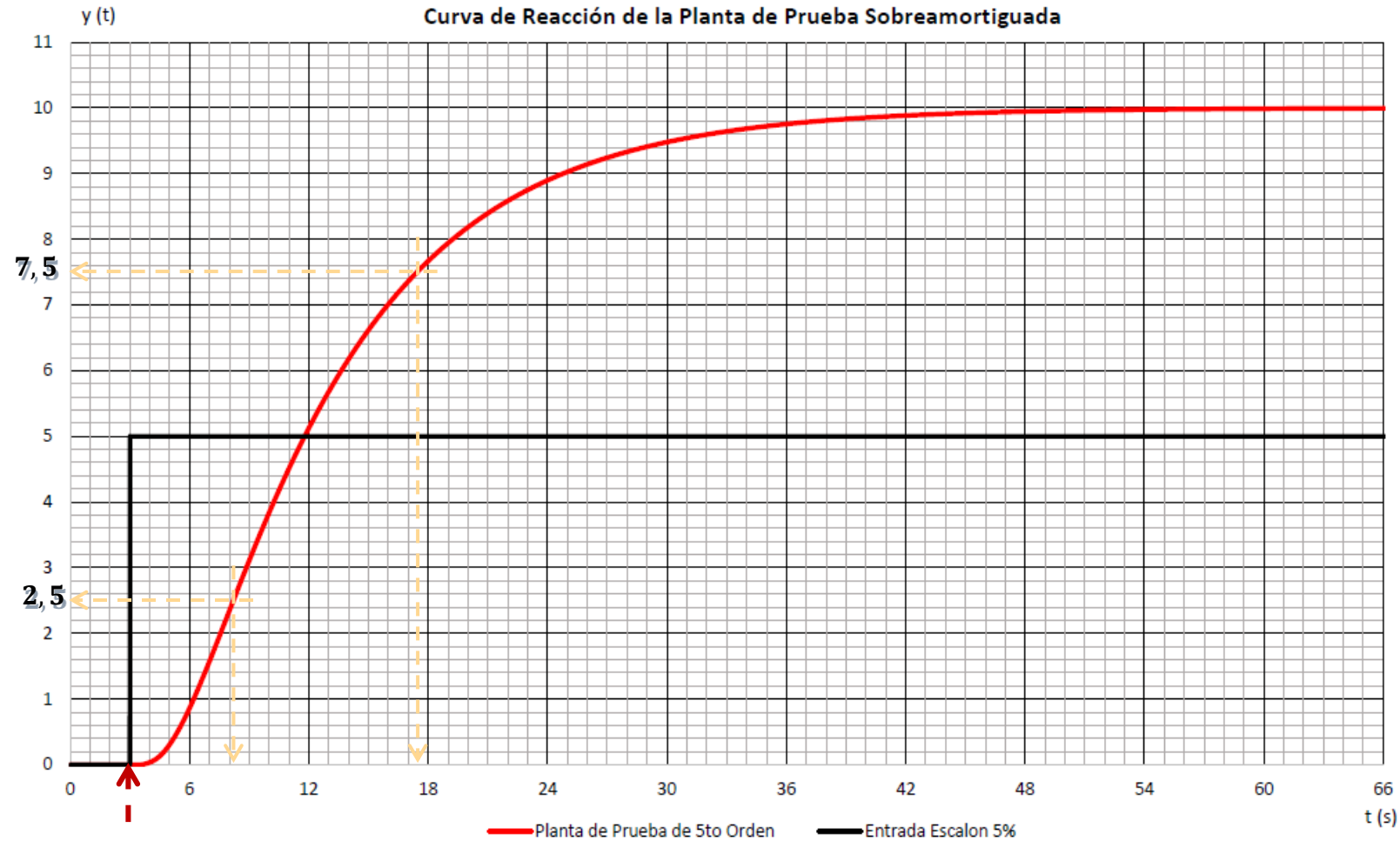
$$G_{p(s)} = \frac{3,75}{(S + 5)(S + 3)(S + 0,5)(S + 0,125)(S + 2)}$$

Control Avanzado y Métodos Numéricos



Procedimiento de Calculo en el Modelo de POMTM método de Alfaro





$$P_1 = 0,25 \cdot \Delta y = 0,25 \cdot 10 = 2,5 \implies t_{25} = 8,2 - 3 = 5,2 \text{ s}$$

$$P_2 = 0,75 \cdot \Delta y = 0,75 \cdot 10 = 7,5 \implies t_{75} = 17,4 - 3 = 14,4 \text{ s}$$

Métodos	% p1	% p2	a	b	c	d
Alfaro	25	75	-0,910	0,910	1,262	-0,262

$$\tau = 0,91 \cdot 14,4 - 0,91 \cdot 5,2 \Rightarrow \tau = 8,372 \text{ s}$$

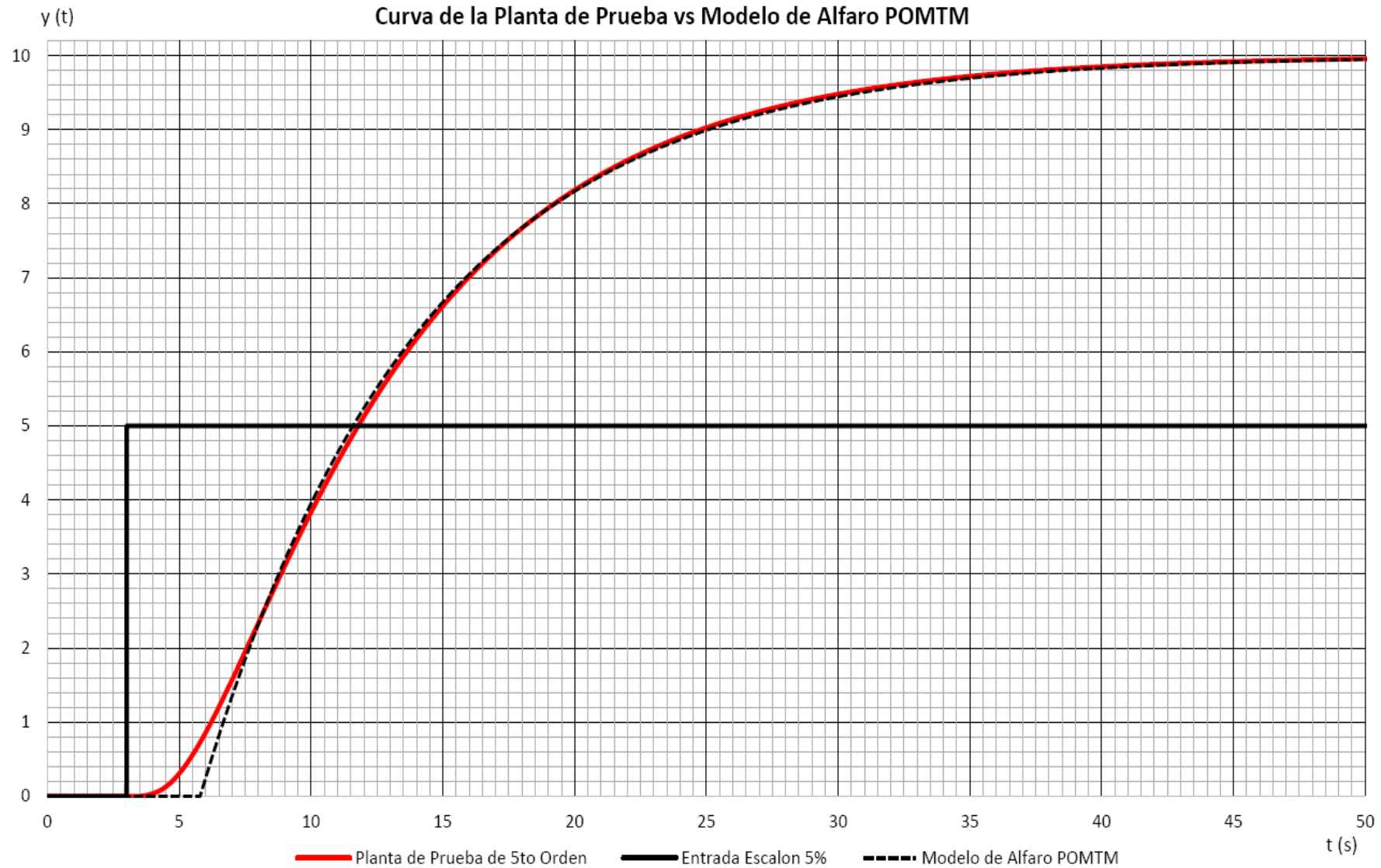
$$t_m = 1,262 \cdot 5,2 - 0,262 \cdot 14,4 = 2,7896 \text{ s}$$

Tal que la función de transferencia del Modelo de Alfaro nos queda:

$$G_{p(s)} = \frac{2}{(8,372 \cdot s + 1)} \cdot e^{-2,7896 \cdot s}$$

Cuya solución temporal es:

$$y(t) = 5 \cdot (2 - 2 \cdot e^{-0,11945(t-2,7896)})$$



A manera de evaluar la bondad del modelo identificado para el proceso de prueba, y que permite realizar una comparación entre cada modelo y la planta de prueba, se buscó la función de transferencia de cada modelo matemático de POMTM.

<i>Métodos</i>	<i>% P₁</i>	<i>% P₂</i>	<i>t₁ (s)</i>	<i>t₂ (s)</i>	<i>τ (s)</i>	<i>t_m (s)</i>	<i>Planta Modelo</i>
<i>Alfaro</i>	25	75	5,2	14,4	8,372	2,7896	$G_{p(s)} = \frac{2 \cdot e^{-2,7896 \cdot S}}{(8,372 \cdot S + 1)}$
<i>Smith</i>	28,3	63,2	5,64	11,28	8,46	2,82	$G_{p(s)} = \frac{2 \cdot e^{-2,82 \cdot S}}{(8,46 \cdot S + 1)}$
<i><u>Chen y Yang</u></i>	33	67	6,25	12,25	8,4	3,01	$G_{p(s)} = \frac{2 \cdot e^{-3,01 \cdot S}}{(8,4 \cdot S + 1)}$
<i>Ho (1^{er})</i>	35	85	6,5	18,5	8,04	3,085	$G_{p(s)} = \frac{2 \cdot e^{-3,085 \cdot S}}{(8,04 \cdot S + 1)}$
<i><u>Bröida</u></i>	28	40	5,57	7,5	10,615	2,096	$G_{p(s)} = \frac{2 \cdot e^{-2,096 \cdot S}}{(10,615 \cdot S + 1)}$
<i><u>Vitecková (1^{er})</u></i>	33	70	6,25	13	11,4888	2,8885	$G_{p(s)} = \frac{2 \cdot e^{-2,8885 \cdot S}}{(11,4888 \cdot S + 1)}$

