

# CONJUNTOS      Prof. Alberto Escande

**Conjunto** es una palabra familiar, que conocemos de cursos anteriores. Una constelación es un conjunto de estrellas; una circunferencia es un conjunto de puntos que verifican equidistar de otro punto llamado centro; el abecedario es el conjunto de todas las letras. Sin embargo, si queremos contestar a la pregunta: ¿Qué es un conjunto? ¿Responderíamos: una colección de objetos? ¿Una agrupación? Tendríamos a su vez que conocer la definición de los conceptos “colección”, “agrupación”, y otros similares, y entraríamos en un círculo vicioso. Si afirmamos que “toda reunión de objetos es un conjunto”, el concepto participa circularmente de su propia definición.

En matemática eludimos estos problemas, eligiendo algunos conceptos que llamamos “**conceptos primitivos**”, aceptándolos sin definición. Los elegimos como punto de partida, suponiendo que todos tenemos una noción intuitiva de lo que quieren decir. Entonces, a los efectos del desarrollo de este tema, vamos a partir de los siguientes conceptos primitivos:

CONJUNTO

ELEMENTO

PERTENECE

Promediando la mitad del siglo XIX, el matemático alemán Georg Cantor creaba la primera teoría de conjuntos. Hasta fines de ese siglo nadie se había preocupado por una definición rigurosa de conjunto, hasta que en 1895 Cantor expresa:

*Un conjunto es la agrupación en un todo, de objetos definidos y distintos de nuestra intuición o de nuestro pensamiento.*

Esta definición no clarifica el concepto de conjunto. Al hablar de “objetos definidos” Cantor quería expresar la idea de que dado un conjunto siempre es posible, ante un objeto cualquiera, decidir si dicho objeto pertenece o no al conjunto. Al exigir que estos elementos fuesen “distintos” Cantor quería significar que todos los elementos del mismo conjunto debían ser diferentes; es decir, un conjunto no debía tener elementos repetidos. Cantor nunca llegó a utilizar esta definición. Él mismo hizo una fuerte crítica a su teoría en 1897 y 1899.

En 1901 Bertrand Russell<sup>1</sup> descubrió la “Paradoja de Russell”, que agudizó algunos problemas de la teoría de conjuntos y provocó una de las mayores crisis de la lógica. ¿Qué dice la “Paradoja de Russell”? Es claro que un conjunto A de lápices no es un lápiz, y puesto que A contiene sólo lápices, es inmediato que A no es elemento de A. Análogamente, el conjunto N de los números naturales no es un número natural. Dado que en N sólo encontramos números naturales, N no se pertenece a sí mismo. Según la definición de Cantor, parecería acertado afirmar que si agrupamos todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, como A y N, obtendríamos un conjunto. Russell probó que no es cierto. Esto proviene de una definición “ingenua” del concepto de conjunto. Dentro de esa “ingenuidad” con la que Cantor elaboró y desarrolló su teoría, estaba planteada la llamada crisis de los fundamentos de la matemática de comienzos del siglo XX.

---

<sup>1</sup> Bertrand Russell: filósofo británico nacido en el País de Gales, vivió entre 1872 y 1970, y es considerado el último sabio universal. Ganó el Premio Nobel de Literatura en 1950.

En 1908 el matemático Ernst Zermelo (1871-1953) desarrolla un enfoque axiomático que elimina lo del conjunto de los elementos que no se pertenecen a sí mismos, y busca retener la riqueza operativa de la teoría de Cantor.

### **Pertenecer - Elemento**

Sea el conjunto de los ríos del Uruguay. El Río Negro es un río del Uruguay. Entonces, este río es un **elemento** del conjunto “Ríos del Uruguay”. Se dice también: el Río Negro **pertenece** al conjunto “Ríos del Uruguay”. Todo esto se abrevia con el símbolo

$$\boxed{\in}$$

Este símbolo (que se lee “pertenece”) se usará siempre en lugar de las frases “es miembro del conjunto”, “es elemento del conjunto”, “pertenece al conjunto”, “está en el conjunto”.

### **Ejemplo 1**

Sea el conjunto  $V = \{a, e, i, o, u\}$

Entonces se verifica:

$$a \in V$$

$$b \in V$$

etc.

A la derecha del símbolo  $\in$  tiene que estar el nombre del conjunto, y a su izquierda el nombre de alguno de sus elementos.

### **Determinación de los conjuntos**

Los conjuntos se determinan indicando claramente cuáles son sus elementos.

Un conjunto está bien determinado si se sabe exactamente cuáles son los elementos que pertenecen a él y cuáles no.

Hay **dos maneras** de determinar un conjunto:

**1º) Por extensión** (o por enumeración). Esta manera de determinar un conjunto consiste en nombrar cada uno de sus elementos. El conjunto  $V$  definido en el Ejemplo 1, fue determinado “por extensión”. Otro ejemplo:  $P = \{2, 3, 5, 7\}$

**2º) Por comprensión.** Esta forma consiste en indicar la característica o propiedad común a todos los elementos del conjunto. Los dos conjuntos citados en el caso anterior, se pueden determinar por comprensión del modo siguiente:

$$V = \{\text{las vocales}\}$$

$$P = \{\text{los números primos menores que } 11\}$$

Este segundo método sirve para determinar cualquier conjunto, pero es especialmente útil en el caso de conjuntos con muchos o infinitos elementos.

### **Ejemplo 2**

No podríamos definir por extensión el conjunto formado por todos los naturales mayores que 7. Lo estamos haciendo del único modo posible, es decir, por comprensión, expresando las

propiedades comunes a todos los elementos del conjunto (ser números naturales y mayores que siete).

Muchas propiedades matemáticas se expresan mediante fórmulas simbólicas para lograr brevedad y precisión. Convencionalmente, los conjuntos matemáticos se definen o determinan del modo siguiente: una letra mayúscula que indica el nombre del conjunto, y encerrado entre llaves  $\{ \}$  escribimos los elementos que lo componen (si es por extensión) o las propiedades comunes a todos (si es por comprensión), precedidas por una letra (por ejemplo, la “x”) que designará genéricamente a los elementos del conjunto. Si al conjunto del Ejemplo 2 lo llamamos A, definiríamos del modo siguiente:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 7\}$$

Podríamos leer así la expresión precedente: “el conjunto A está formado por elementos x, tales que pertenecen al conjunto de los números naturales y son mayores que 7”.

### **Ejemplo 3**

El conjunto formado por los naturales cuyo cuadrado es menor que 60 se expresa:

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 60\}$$

Si queremos saber si un cierto número pertenece o no al conjunto, sustituimos la x por él, y verificamos el cumplimiento de todas las condiciones o propiedades. Analizaremos el caso de los números 9, 2 y -7:

$$\begin{aligned} 9 \in \mathbb{N} \text{ pero } 9^2 = 81 > 60 \text{ entonces } 9 \notin C \\ 2 \in \mathbb{N} \text{ y } 2^2 = 4 < 60 \text{ entonces } 2 \in C \\ -7 \notin \mathbb{N} \text{ entonces } -7 \notin C \text{ (aunque } (-7)^2 = 49 < 60) \end{aligned}$$

### **Ejercicio 1**

Lea los siguientes conjuntos y establezca por extensión cuáles son sus elementos:

- i)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$
- ii)  $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, 0 < y < 7\}$
- iii)  $C = \{z \mid z \in \mathbb{N}, 4 \cdot z < 30\}$

### **Ejercicio 2**

Expresa con una variable los siguientes conjuntos:

- i)  $M = \{\text{números naturales que divididos por 3 dan un cociente menor que 12}\}$
- ii)  $P = \{\text{números enteros cuya duplicación sea menor o igual que 30}\}$
- iii)  $H = \{\text{números naturales a cuyo producto por 4 se le suma 2, den como resultado un divisor exacto de 30}\}$

### **Resumen:**

Hasta ahora vimos que conjunto, elemento, pertenece, son conceptos primitivos que no necesitan definición. Un conjunto está bien determinado si dado un elemento cualquiera sabemos averiguar si pertenece a él o no. Hay dos formas de determinar un conjunto: por extensión (enumeración) y por comprensión.

## IGUALDAD DE CONJUNTOS

### Definición 1

Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos, o sea si son el mismo conjunto.

La notación correspondiente es  $A = B$ , y significa el cumplimiento de las siguientes dos condiciones:

- i) todo elemento de A es elemento de B
- ii) todo elemento de B es elemento de A

Esto también se puede expresar así: si  $a \in A$  entonces  $a \in B$  y si  $b \in B$  entonces  $b \in A$ . Para abreviar, introduciremos nuevos símbolos:

$\Rightarrow$  que significa “entonces” o “implica”

$\forall$  que significa “para todo”

$\Leftrightarrow$  que significa “si y sólo si”

La definición de igualdad (definición 1), entonces, puede escribirse en términos simbólicos del modo siguiente:

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B \text{ y } \forall b \in B \Rightarrow b \in A$$

### Definición 2

Dos conjuntos son diferentes cuando no son iguales.

Eso quiere decir que basta que no se cumpla alguna de las condiciones establecidas en la definición de igualdad, para que dos conjuntos sean diferentes. Es decir:

$$A \neq B \Leftrightarrow \exists a \in A / a \notin B \text{ o } \exists b \in B / b \notin A$$

### Nota 1

La conjunción “o” la entendemos en sentido amplio, es decir: que suceda una cosa o la otra o las dos. Por ejemplo, si decimos “quiero helados o caramelos” significa “quiero helados o quiero caramelos o quiero las dos cosas”.

## EL CONJUNTO VACÍO

Por lo general, la palabra “conjunto” evoca la idea de varios elementos. Cuando definimos un conjunto por una propiedad, sin saber cuántos objetos la poseen, puede ocurrir que haya varios, sólo uno, o ninguno. Por eso la palabra conjunto se utiliza aunque exista sólo un elemento o incluso ninguno. Por ejemplo, sea el conjunto

$$J = \{\text{alumnos de esta clase que se llaman Aparicio}\}$$

J puede tener varios elementos, uno o ninguno. Si ningún alumno de esta clase se llama Aparicio, entonces **J es un conjunto vacío**. Expresaremos lo mismo mediante símbolos:

$$J = \emptyset$$

#### Ejemplo 4

Sea  $H = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 5 < 2\}$

Ningún número natural satisface la segunda condición, porque ésta es equivalente a:

$$x < -3$$

entonces podemos afirmar

$$H = \emptyset$$

**Observación 1:** Todos los conjuntos vacíos son el mismo conjunto, que se representa con el símbolo  $\emptyset$ . Cualquiera sea un elemento a, se cumple que no pertenece a  $\emptyset$ :

$$\forall a \Rightarrow a \notin \emptyset$$

Si ahora expresamos el conjunto vacío por extensión, llegaremos a la siguiente representación:

$$\emptyset = \{\}$$

### PARTES DE UN CONJUNTO

Vamos a definir en primer lugar el concepto de **inclusión**. Consideremos antes el siguiente ejemplo: sea A el conjunto de los actuales habitantes de este país. Los elementos de A son personas. Sea ahora B el conjunto de los habitantes de este país que tienen menos de 50 años. Todos los elementos de B son elementos de A, puesto que viven en este país. En símbolos:

$$p \in B \Rightarrow p \in A$$

Cuando eso sucede, decimos que “el conjunto B es parte o subconjunto del conjunto A”, o también que “B está incluido, o contenido, en A”. Ambas frases significan lo mismo, y se abrevian con el símbolo  $\subset$  o  $\subseteq$  según los casos, como veremos a continuación.

#### Definición 3

Decimos que un conjunto B **está incluido** (o **contenido**) en otro conjunto A si y sólo si para todo elemento de B se cumple que es elemento de A.

$$B \subseteq A \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow x \in A$$

Esta definición se refiere al “sentido amplio” de la inclusión, es decir, contempla la posibilidad de que B sea A. En la definición siguiente, nos referiremos a la inclusión “en sentido estricto”.

#### Definición 4

Decimos que B está **estrictamente incluido** en A (o que B **es parte propia** de A) si B está incluido en A pero es diferente de A.

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \text{ y } B \neq A$$

Esta definición consta en realidad de dos partes. Veamos lo que implica cada una:

$B \subseteq A$  quiere decir, por definición:  $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$

$B \neq A$  implica necesariamente, dada la condición anterior:  $\exists x, x \in A / x \notin B$

Entonces podemos formular de otro modo la Definición 4:

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x, x \in B \Rightarrow x \in A \text{ y } \exists x, x \in A / x \notin B$$

**Observación 2:** Aplicando simultáneamente las definiciones 1 y 3, observaremos que A y B son iguales si y sólo si se cumple, a la vez, que  $A \subseteq B$  y que  $B \subseteq A$ :

$$A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

Queda la demostración como ejercicio para el estudiante.

**Observación 3:** Basta que no se cumpla la condición establecida en la Definición 3, para que podamos afirmar que un conjunto B *no está incluido* en otro conjunto A. Es decir:

$$B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x, x \in B / x \notin A$$

**Observación 4:** La **Definición 3** también puede formularse “por la negativa”, del modo siguiente:

Un conjunto B está contenido en otro conjunto A, si todo elemento que no pertenece a A tampoco pertenece a B. Es decir:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x, x \notin A \Rightarrow x \notin B$$

## **PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN**

### **Propiedad 1**

**Propiedad reflexiva:** Todo conjunto es parte de sí mismo:

La demostración es inmediata, a partir de la definición:

$\forall A, A \subseteq A$ , dado que:  $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in A$

### **Propiedad 2**

**Propiedad transitiva:** Si un conjunto es parte de otro, que a su vez es parte de un tercer conjunto, el primero es parte del tercero.

Es decir: sean A, B, C, conjuntos cualesquiera. La propiedad que acabamos de enunciar establece:

**Hipótesis:**  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq C$

**Tesis:**  $A \subseteq C$

**Demostración:**

Por hipótesis  $A \subseteq B$ , entonces, por definición:  $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$

También por hipótesis  $B \subseteq C$ , y por definición:  $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in C$

En consecuencia, podemos afirmar:  $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in C$  lo que, por definición es lo mismo que la tesis que queremos demostrar:

$$A \subseteq C$$

### **Propiedad 3**

**Propiedad antisimétrica:** Si un conjunto A es parte propia de otro conjunto B, entonces B no es parte de A.

**Hipótesis:**  $A \subset B$

**Tesis:**  $B \not\subset A$

**Demostración:**

Por hipótesis, A está contenido estrictamente en B. Es decir que, aplicando la definición 4:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \text{ y } \exists x, x \in B / x \notin A$$

La segunda condición nos dice que hay elementos de B que no pertenecen a A, por lo que, tal como vimos en la Observación 3, se verifica la tesis:

$$B \not\subset A$$

### **Propiedad 4**

El conjunto vacío es parte de todo otro conjunto.

Es decir, que:  $\emptyset \subseteq D, \forall D$

Vamos a demostrar esta propiedad apelando a la vía de definición de la inclusión que vimos en la Observación 4. En efecto, como  $\emptyset$  no tiene ningún elemento, cualquier x que no pertenezca a D, tampoco va a pertenecer a  $\emptyset$ . Es decir:

$$\forall x, x \notin D \Rightarrow x \notin \emptyset \Rightarrow \emptyset \subseteq D$$

### **Familia de partes de un conjunto**

Vamos a formularnos la siguiente pregunta: ¿cuántas partes tiene un conjunto?. O, de otro modo, ¿cuántos subconjuntos admite un conjunto dado? Comencemos por el conjunto vacío. De acuerdo a la primera propiedad, se cumple  $\emptyset \subseteq \emptyset$ . El conjunto vacío (igual que todos los demás) es subconjunto de sí mismo. Pero, en este caso particular, es el único. Entonces la respuesta es 1.

A continuación analizaremos un conjunto unitario, es decir, con un único elemento. Sea  $A = \{a\}$ . De acuerdo a las propiedades 1 y 4 podemos afirmar:

$$\emptyset \subseteq A$$

$$A \subseteq A$$

Entonces en este caso nuestra respuesta es 2.

Nos planteamos ahora la misma pregunta, pero para un conjunto de dos elementos. Sea  $B = \{a, b\}$ . Ahora, además de los dos subconjuntos que surgen de las propiedades 1 y 4, podemos observar que admite dos subconjuntos unitarios. Es decir:

$$\emptyset \subseteq B$$

$$\{a\} \subseteq B$$

$$\{b\} \subseteq B$$

$$B \subseteq B$$

Entonces un conjunto de dos elementos admite cuatro partes o subconjuntos.

Dejamos como ejercicio para el estudiante la verificación de que un conjunto de tres elementos admite ocho partes. La observación que surge inmediatamente es que cada vez que agregamos un elemento al conjunto, duplicamos la cantidad de subconjuntos que admite: 1, 2, 4, 8, y así sucesivamente. Estos números son las sucesivas potencias de 2:

$$1 = 2^0$$

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

$$\dots\dots$$

$$\dots\dots$$

Entonces, podríamos generalizar y decir que

Un conjunto con  $n$  elementos admite  $2^n$  partes o subconjuntos

### **Definición 5**

Llamamos *familia de partes* de un conjunto, al conjunto formado por todos sus subconjuntos.

### **Ejemplo 5**

Sea  $B = \{a, b\}$ . Entonces, si llamamos  $\mathbf{F}$  a la familia de partes, podemos expresarla por extensión:

$$\mathbf{F}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

### **Ejercicio 3**

Dados los siguientes conjuntos, exprese mediante símbolos todas las inclusiones posibles:

$A = \{\text{personas argentinas}\}$ $M = \{\text{personas latinoamericanas}\}$ $S = \{\text{naturales múltiplos de 6}\}$ $R = \{\text{rectángulos}\}$ $T = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3\}$ $P = \{\text{naturales pares}\}$ $C = \{\text{cuadrados}\}$	$D = \{\text{divisores de 12}\}$ $V = \{\text{vertebrados}\}$ $B = \{\text{ballenas}\}$ $H = \{\text{mamíferos}\}$ $N = \{x \mid x \in \text{naturales}\}$
---	--

### **Ejercicio 4**

Indique las familias de partes de los siguientes conjuntos:

$$C = \{\text{letras de la palabra CASA}\}$$

$$D = \{\text{divisores de 6}\}$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x < 5\}$$

$$F = \{\text{rosa, clavel}\}$$

$$G = \{\text{colores de la bandera francesa}\}$$



## OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

### 1. UNIÓN DE CONJUNTOS

La conjunción “o” se usa, en nuestro idioma, en dos sentidos distintos: en sentido excluyente y en sentido inclusivo. Se utiliza en sentido excluyente cuando se considera válida sólo una de dos alternativas: “Compro ese libro, o no lo compro”. En cambio, en sentido inclusivo, la conjunción “o” considera válida a cualquiera de las dos alternativas e incluso a ambas a la vez. Por ejemplo: “Para entrar gratis al estadio hay que ser socio del club o menor de 8 años”. Claramente, un niño de seis años, que sea socio del club, entrará gratis. En las definiciones y demostraciones que siguen a continuación, utilizaremos “o” en sentido inclusivo, y lo simbolizaremos “ $\vee$ ”.

#### Definición 6

Llamaremos **unión** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

#### Ejemplo 6

Sea A el conjunto de los objetos que son amarillos, y B el conjunto de objetos blandos. En ese caso,  $A \cup B$  es el conjunto de los objetos que son amarillos o blandos, es decir, los que son amarillos, los que son blandos, y también los que son amarillos y blandos a la vez.

#### Nota 2

Evidentemente, cada conjunto de los que se unen está incluido en la unión:

$$A \subset A \cup B \text{ y } B \subset A \cup B$$

#### Nota 3

La unión de tres o más conjuntos puede definirse de un modo análogo. Si los conjuntos son A, B, C:

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

También podríamos generalizar del modo siguiente:

La unión de dos o más conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen por lo menos a uno de ellos.

#### Nota 4

Un conjunto cualquiera es la unión de todas sus partes. La unión de todas las partes de A, se simboliza:

$$U\{B \mid B \subseteq A\}$$

Entonces:

$$A = U\{B \mid B \subseteq A\}$$

## PROPIEDADES DE LA UNIÓN

### Propiedad 1

La unión de un conjunto consigo mismo, es el propio conjunto original.

$$A \cup A = A$$

Para demostrarla:

$$\begin{aligned} A \cup A &= \{x \mid x \in A \vee x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A \\ A \cup A &= A \end{aligned}$$

### Propiedad 2

La unión de conjuntos es una operación **conmutativa**.

$$A \cup B = B \cup A$$

Lo demostraremos aplicando la definición. En ambos casos llegamos al mismo conjunto:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\ B \cup A &= \{x \mid x \in B \vee x \in A\} \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

### Propiedad 3

La unión de conjuntos es una operación **asociativa**.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

#### Demostración:

Aplicando sucesivamente la definición de unión de conjuntos:

$$(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in (A \cup B) \vee x \in C\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Entonces:

$$(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\} \quad [1]$$

Por otro lado, y aplicando la misma definición:

$$A \cup (B \cup C) = \{x \mid x \in A \vee x \in (B \cup C)\}$$

$$B \cup C = \{x \mid x \in B \vee x \in C\}$$

O sea:

$$A \cup (B \cup C) = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\} \quad [2]$$

Como los segundos miembros de las igualdades [1] y [2] son iguales entre sí, entonces también son iguales los primeros miembros, lo que demuestra la propiedad:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

### Propiedad 4

El conjunto vacío es **neutro** de la operación unión. Es decir:

$$A \cup \emptyset = A$$

Para demostrarlo, volvemos a aplicar la definición de unión:

$$A \cup \emptyset = \{x \mid x \in A \vee x \in \emptyset\}$$

Como no existe ningún elemento que pertenezca a  $\emptyset$  (por su propia definición), entonces nos queda:

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= \{x \mid x \in A\} \\ A \cup \emptyset &= A \end{aligned}$$

### **Definición 7**

Llamamos **conjunto universal** a un conjunto  $\mathbf{U}$  que verifica:

$$x \in \mathbf{U} \quad \forall x$$

### **Propiedad 5**

La unión de cualquier conjunto con el conjunto universal, es el conjunto universal.

$$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$$

La demostración queda como ejercicio para el estudiante.

Vamos a ver, ahora, algunos teoremas referidos a la unión de conjuntos.

### **Teorema 1**

Un conjunto A está contenido en otro conjunto B, si y sólo si la unión de A y B es B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

#### **Directo**

**Hipótesis:**  $A \subseteq B$

**Tesis:**  $A \cup B = B$

**Demostración:**

Partimos del primer miembro de la tesis, aplicándole la definición de unión:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Aplicando la definición de inclusión, como por hipótesis  $A \subseteq B$ , entonces se cumple:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Entonces, sustituyendo, nos queda:

$$A \cup B = \{x \mid x \in B \vee x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in B\}$$

$$A \cup B = B$$

#### **Recíproco**

**Hipótesis:**  $A \cup B = B$

**Tesis:**  $A \subseteq B$

**Demostración:**

A partir de la hipótesis, y aplicando la definición de unión, podemos afirmar:

$$\{x \mid x \in A \vee x \in B\} = B$$

$$\{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in B\}$$

Es decir, que todo x que pertenezca a A, pertenece a B:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Y eso es la definición de inclusión, por lo que se demuestra la tesis:

$$A \subseteq B$$

## **Teorema 2**

Si dos conjuntos, A y B, están incluidos en un mismo conjunto C, entonces la unión de ambos también está incluida en C.

**Hipótesis:**  $A \subseteq C$

$$B \subseteq C$$

**Tesis:**  $(A \cup B) \subseteq C$

### **Demostración:**

Aplicando la definición de inclusión a ambos puntos de la hipótesis:

$A \subseteq C$  implica que:  $\forall x: x \in A \Rightarrow x \in C$

$B \subseteq C$  implica que:  $\forall x: x \in B \Rightarrow x \in C$

Entonces, podemos afirmar:

$$\forall x: x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in C$$

Y aplicando la definición de unión:

$$\forall x: x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in C$$

Aplicando otra vez la definición de inclusión llegamos a la tesis:

$$(A \cup B) \subseteq C$$

## **2. INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS**

La intersección de dos conjuntos es el conjunto de sus elementos comunes, los elementos que están a la vez en los dos, que pertenecen a ambos. La intersección se simboliza con el signo  $\cap$ .

### **Definición 8**

Llamaremos **intersección** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

De un modo análogo se define la intersección de tres o más conjuntos: es el conjunto formado por los elementos comunes a todos los conjuntos dados.

### **Ejemplo 7**

Sean los conjuntos:

$D = \{\text{días del mes de marzo}\}$

$S = \{\text{días soleados}\}$

$M = \{\text{días del año 2003}\}$

$S \cap D \cap M$  es el conjunto de los días soleados del mes de marzo de 2003.

### **Ejercicio 5**

- i) Determine por extensión y por comprensión la intersección de los conjuntos  $M = \{\text{divisores de 30}\}$  y  $D = \{\text{divisores de 12}\}$

- ii) ¿Qué es la intersección de dos semiplanos de distinto borde? ¿Y la de tres semiplanos?

## **PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN**

### **Propiedad 1**

La intersección de conjuntos es una operación **conmutativa**.

$$A \cap B = B \cap A$$

La demostración queda a cargo del estudiante.

### **Propiedad 2**

La intersección de conjuntos es una operación **asociativa**.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

#### **Demostración:**

Aplicando sucesivamente la definición de intersección de conjuntos:

$$(A \cap B) \cap C = \{x \mid x \in (A \cap B) \wedge x \in C\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Entonces:

$$(A \cap B) \cap C = \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} \quad [1]$$

Por otro lado, y aplicando la misma definición:

$$A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \in A \wedge x \in (B \cap C)\}$$

$$B \cap C = \{x \mid x \in B \wedge x \in C\}$$

O sea:

$$A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} \quad [2]$$

Como los segundos miembros de las igualdades [1] y [2] son iguales entre sí, entonces también son iguales los primeros miembros, lo que demuestra la propiedad:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

### **Propiedad 3**

La intersección de cualquier conjunto con el conjunto vacío, es el conjunto vacío.

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

La demostración queda como ejercicio para el estudiante.

A continuación, presentaremos algunos teoremas referidos a la intersección de conjuntos:

### **Teorema 3**

Si un conjunto está contenido en otros dos, está contenido en la intersección de ambos.

**Hipótesis:**  $C \subseteq A$  y  $C \subseteq B$

**Tesis:**  $C \subseteq (A \cap B)$

**Demostración:**

Por hipótesis, y aplicando la definición de inclusión, se cumple a la vez:

$$\forall x, x \in C \Rightarrow x \in A \quad (\text{porque } C \subseteq A)$$

$$\forall x, x \in C \Rightarrow x \in B \quad (\text{porque } C \subseteq B)$$

Entonces, todos los elementos de C pertenecen a A y a B:

$$\forall x, x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$$

O sea:

$$\forall x, x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B)$$

Y, por la definición de inclusión:

$$C \subseteq (A \cap B)$$

**Teorema 4**

Es condición necesaria y suficiente para que un conjunto A esté incluido en otro conjunto B, que la intersección de A y B sea A.

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$$

**Directo**

**Hipótesis:**  $A \cap B = A$

**Tesis:**  $A \subseteq B$

**Demostración:**

De acuerdo con la hipótesis,

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Entonces:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Lo que, por la definición de inclusión, nos lleva directamente a la tesis:

$$A \subseteq B$$

**Recíproco**

**Hipótesis:**  $A \subseteq B$

**Tesis:**  $A \cap B = A$

**Demostración:**

Por hipótesis,

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Entonces:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$$

Además es evidente que

$$\forall x, x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$$

Entonces, se verifican las dos condiciones de la igualdad de conjuntos (Definición 1), así que se cumple la tesis:

$$A \cap B = A$$

**Definición 9**

Decimos que A y B son **conjuntos disjuntos**, si su intersección es vacía, es decir, si

$$A \cap B = \emptyset$$

### **Propiedades distributivas de la unión y la intersección**

Vamos a ver, a continuación, que las operaciones unión e intersección de conjuntos verifican dos propiedades distributivas:

- i)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

#### **Propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión**

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
--

Hay que demostrar, de acuerdo con la definición de igualdad de conjuntos (Def. 1), que todo elemento del primer miembro pertenece al segundo y viceversa.

Comenzaremos de izquierda a derecha:

$$\forall x, x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

La última afirmación implica necesariamente una de estas dos alternativas (o ambas a la vez):

$$x \in A \wedge x \in B$$

o

$$x \in A \wedge x \in C$$

Es decir, entonces, que se cumple  $\forall x, x \in A \cap (B \cup C)$ :

$$x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$$

O sea:

$$\forall x, x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

Es decir:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \quad [1]$$

Veamos ahora el sentido recíproco:

$$\begin{aligned} \forall z, z \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)] &\Rightarrow z \in (A \cap B) \vee z \in (A \cap C) \\ &\Rightarrow (z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in A \wedge z \in C) \\ &\Rightarrow z \in A \wedge (z \in B \vee z \in C) \end{aligned}$$

Entonces se cumple que:

$$\forall z, z \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \Rightarrow z \in A \cap (B \cup C)$$

Que es lo mismo que decir:

$$[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \subseteq A \cap (B \cup C) \quad [2]$$

La verificación simultánea de las inclusiones [1] y [2] nos permite afirmar, de acuerdo con lo que habíamos visto al comienzo del tema, en la Observación 3, que ambos conjuntos son iguales, es decir:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

#### **Propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección**

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
--

Siendo la demostración muy similar a la de la propiedad anterior, la dejamos a cargo del estudiante.

### 3. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

#### Definición 10

Se denomina **diferencia de A y B** (en ese orden), y se representa  $A-B$ , al conjunto formado por todos los elementos de A que no son elementos de B.

$$A-B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

#### Complemento de un conjunto

Dado un conjunto de referencia, toda vez que una cierta propiedad determina un subconjunto, formado por los elementos que la verifican, determina al mismo tiempo otro subconjunto, que es el de los elementos que no la verifican. A este subconjunto se le llama **complemento** del primero, respecto del conjunto de referencia. Por ejemplo, si tomamos como referencia el conjunto de todos los animales, y dentro de él llamamos M al conjunto de los mamíferos, veremos que automáticamente queda configurado otro conjunto, al que llamaremos N, de los animales no mamíferos. Diremos que N es complemento de M, y la notación será:

$$N = M' \text{ o también } N = \overline{M}$$

Al conjunto de referencia lo llamaremos **referencial**, designándolo con la letra griega omega ( $\Omega$ ), o también universal, como ya vimos.

Dándole ahora rigor a la definición de complemento:

#### Definición 11

Llamaremos **complemento** de un conjunto A respecto de un referencial  $\Omega$ , al conjunto de todos los elementos de  $\Omega$  que no pertenecen a A. Es decir:

$$A' = \Omega - A$$

Como ya vimos en la definición de diferencia, esto mismo se podría escribir:

$$A' = \{x \mid x \in \Omega \wedge x \notin A\}$$

O directamente, si el referencial está sobreentendido:

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

#### Propiedades del complemento

Las siguientes propiedades están, todas ellas, basadas en la definición de complemento. Queda su demostración, entonces, a cargo del estudiante.

##### Propiedad 1

$$A' \cap A = \emptyset$$

##### Propiedad 2

$$(A')' = A$$

##### Propiedad 3

$$(\emptyset)' = \Omega$$

##### Propiedad 4

$$\Omega' = \emptyset$$



## **Propiedad 5**

$$A \cup A' = \Omega$$

Vamos a ver ahora algunos teoremas de importancia:

## **Teorema 5**

Si un conjunto  $A$  está contenido en  $B$ , el complemento de  $B$  está contenido en el complemento de  $A$ .

**Hipótesis:**  $A \subseteq B$

**Tesis:**  $B' \subseteq A'$

**Demostración:**

Aplicando la definición de inclusión a la hipótesis, podemos afirmar:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Como todo elemento de  $A$  está en  $B$ , podemos afirmar que ningún elemento de  $A$  pertenecerá a  $B'$ . Es decir entonces:

$$\forall x, x \in B' \Rightarrow x \notin A$$

Eso es lo mismo que decir:

$$\forall x, x \in B' \Rightarrow x \in A'$$

O sea, aplicando la definición de inclusión:

$$B' \subseteq A'$$

## **LEYES DE MORGAN**

## **Teorema 6**

**Primera Ley de Morgan:** El complemento de la unión es la intersección de los complementos.

**Hipótesis:**  $A$  y  $B$  son conjuntos de un cierto referencial  $\Omega$

**Tesis:**  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

**Demostración:**

Seguiremos el camino habitual para demostrar que dos conjuntos son iguales (es decir, que cada uno de ellos está contenido en el otro).

En primer lugar:

$$\begin{aligned} \forall x, x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin (A \cup B) \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \\ &\Rightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

Entonces, si  $\forall x, x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in A' \cap B'$ , llegamos a:

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cap B' \quad [1]$$

Ahora, razonaremos en el sentido inverso:

$$\forall x, x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B'$$

Como  $x \in A' \Rightarrow x \notin A$ , y esto puede implicar dos alternativas:

$$\begin{aligned} x &\in (B - A) \\ &\text{o} \\ x &\notin B \end{aligned}$$

La primera es falsa, porque ya vimos que  $x \notin B$  (por pertenecer a  $B'$ ). Así que se cumple, a la vez:

$$x \notin A \wedge x \notin B$$

Entonces podemos asegurar que

$$\forall x, x \in A' \cap B' \Rightarrow x \notin (A \cup B)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\forall x, x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in (A \cup B)'$$

lo que nos lleva a:

$$A' \cap B' \subseteq (A \cup B)' \quad [2]$$

Y la verificación simultánea de las inclusiones [1] y [2] nos permite afirmar:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

## **Teorema 7**

**Segunda Ley de Morgan:** El complemento de la intersección es la unión de los complementos.

**Hipótesis:** A y B son conjuntos de un cierto referencial  $\Omega$

**Tesis:**  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

**Demostración:**

Razonaremos del mismo modo que en el caso anterior. Así que partimos del primer miembro de la tesis:

$$\forall x, x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$$

Analizaremos cada una de esas alternativas:

$$x \in (A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in B'$$

$$x \in (B - A) \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

$$x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in (A' \cap B')$$

Es decir:

$$\forall x, x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in A' \vee x \in B' \vee x \in (A' \cap B')$$

$$\forall x, x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in (A' \cup B')$$

$$(A \cap B)' \subseteq (A' \cup B') \quad [1]$$

Trabajando ahora con el segundo miembro:

$$\forall x, x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in A' \vee x \in B'$$

Si  $x \in A'$ , hay dos alternativas: que x pertenezca a B o que no. Entonces:

$$x \in A' \Rightarrow x \in (B - A) \vee x \in (A' \cap B')$$

Análogamente:

$$x \in B' \Rightarrow x \in (A - B) \vee x \in (A' \cap B')$$

Entonces podemos afirmar ahora:

$$\forall x, x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \vee x \in (A' \cap B')$$

$$x \in (A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B)$$

$$x \in (B - A) \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \notin (A \cap B)$$

$$x \in (A' \cap B') \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B)$$

De modo que

$$\forall x, x \in A' \cup B' \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap B)'$$

$$A' \cup B' \subseteq (A \cap B)' \quad [2]$$

Y otra vez, las inclusiones simultáneas [1] y [2] nos permiten afirmar la igualdad de ambos conjuntos:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

#### **4. PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS**

Antes de estudiar esta nueva operación entre conjuntos, debemos definir su componente fundamental: el par ordenado.

##### **Definición 12**

Un **par ordenado** es un conjunto formado por dos elementos que se distinguen según su ubicación en el mismo: primer componente y segundo componente. Su notación es  $(a,b)$ , siendo  $a$  el primer componente y  $b$  el segundo. Los pares ordenados responden al siguiente criterio de igualdad:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

##### **Definición 13**

Dados dos conjuntos,  $A$  y  $B$ , llamamos **producto cartesiano de  $A$  y  $B$**  (notación:  $A \times B$ ) al conjunto de todos los pares ordenados cuyo primer componente es elemento de  $A$  y cuyo segundo componente es elemento de  $B$ .

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

##### **Ejemplo 8**

Sean los conjuntos:

$$A = \{a,b,c\} \text{ y } B = \{1,2\}$$

Entonces podemos hacer dos productos cartesianos **diferentes**:

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

##### **Teorema 8**

Es condición necesaria y suficiente para que un producto cartesiano  $A \times B$  no sea vacío, que ni  $A$  ni  $B$  lo sean. Es decir:

$$A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$$

##### **Directo**

**Hipótesis:**  $A \times B \neq \emptyset$

**Tesis:**  $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

**Demostración:**

Como por hipótesis  $A \times B$  no es vacío, existe algún par ordenado que pertenece a dicho producto:

$$\exists (x,y) / (x,y) \in A \times B$$

Por definición de producto cartesiano:

$$\begin{aligned} & x \in A \wedge y \in B \\ \exists x / x \in A \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge \exists y / y \in B \Rightarrow B \neq \emptyset \\ & A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \end{aligned}$$

## Recíproco

**Hipótesis:**  $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

**Tesis:**  $A \times B \neq \emptyset$

### Demostración:

Por hipótesis, podemos afirmar que existen elementos a y b, por lo menos uno de cada conjunto:

$$\exists a \in A \wedge \exists b \in B \Rightarrow \exists (a,b) \in A \times B \Rightarrow A \times B \neq \emptyset$$

## Nota 5

Como todo teorema es equivalente a su contrarrecíproco, podemos afirmar:

$$A = \emptyset \vee B = \emptyset \Leftrightarrow A \times B = \emptyset$$

## Ejercicio 6

- Se considera los conjuntos  $A = \{1,2,3\}$  y  $B = \{a,b\}$   
Halla:  
i)  $B \times B$  ii)  $A \times A$  iii)  $A \times B$  iv)  $B \times A$
- Del conjunto  $A \times A$  se conocen los elementos (a,b) y (c,d). Además se sabe que  $A \times A$  tiene 16 elementos. Halla  $A \times A$ .
- Un alumno dice haber hallado el siguiente producto cartesiano:  
 $A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(c,1),(c,2)\}$   
¿Tiene razón? Fundamenta tu respuesta.
- Halla todos los subconjuntos de  $A \times B$  (es decir, su familia de partes), siendo  $A = \{0,1\}$  y  $B = \{2\}$

## RELACIONES Y FUNCIONES

### RELACIÓN BINARIA

### Definición 14

Dados dos conjuntos A y B, llamamos **relación binaria de A en B** a cualquier subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ .

Si R es una relación de A en B, y un par (x,y) pertenece a ella, diremos que “x está en la relación R con y”, lo que se expresa simbólicamente  $xRy$ . Es decir:

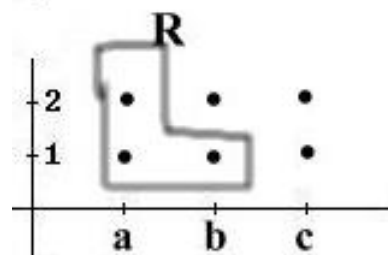
$$\text{Sea } R / R \subseteq A \times B \text{ entonces } (x,y) \in R \Leftrightarrow x R y$$

### Ejemplo 9

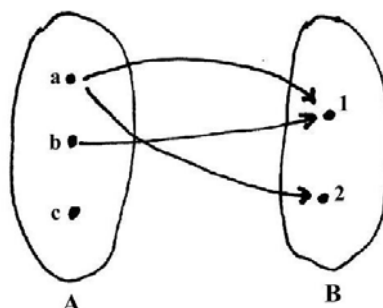
Sean los conjuntos  $A = \{a,b,c\}$  y  $B = \{1,2\}$  y la relación  $R = \{(a,1),(a,2),(b,1)\}$ .

Representamos  $A \times B$  en el gráfico llamado diagrama cartesiano, y también allí marcamos R como subconjunto de  $A \times B$ :

$a$  está en relación con 1  $\Rightarrow a R 1$   
 $a$  está en relación con 2  $\Rightarrow a R 2$   
 $b$  está en relación con 1  $\Rightarrow b R 1$   
 $c$  no está en relación con 1  $\Rightarrow c \not R 1$



Otra manera corriente de visualizar una relación es el “diagrama sagital”:

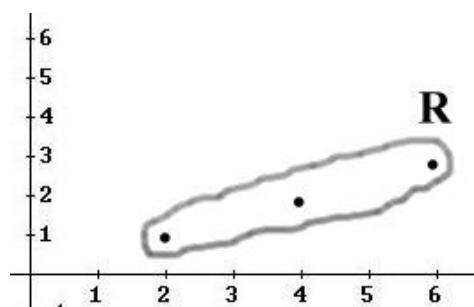


### Ejemplo 10

Sea ahora el conjunto  $C = \{1,2,3,4,5,6\}$  y  $R$  una relación de  $C$  en  $C$  (o sea,  $R \subseteq C \times C$ ) tal que  $R = \{(2,1), (4,2), (6,3)\}$

La relación  $R$  está compuesta por los pares ordenados de la forma  $(2x, x)$  donde  $x \in C$  y además es  $x \leq 3$ . Es decir,  $R$  está compuesta por todos los pares ordenados de  $C \times C$  que verifican que su primer componente es el doble del segundo. Expresaremos la relación  $R$  por comprensión:

$$R \subseteq C \times C / xRy \Leftrightarrow y = x/2$$



## CLASIFICACIÓN DE RELACIONES BINARIAS

Veremos a continuación ciertos tipos de relaciones binarias que tienen gran importancia: las relaciones de equivalencia, las de orden, y las funciones.

### 1. Relación de equivalencia

#### Definición 15

Sea  $A$  un conjunto cualquiera. Decimos que una relación  $R$  en  $A \times A$  es una **relación de equivalencia en  $A$** , si es reflexiva, simétrica y transitiva. Precizando los términos:

- i. Reflexiva:  $\forall x \in A \Rightarrow xRx$
- ii. Simétrica:  $\forall (x,y) \in A \times A \quad xRy \Rightarrow yRx$
- iii. Transitiva:  $\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

### Ejemplo 11

La relación de paralelismo  $\mathbf{E}$  definida en el conjunto de las rectas del plano  $\alpha$  es una relación de equivalencia en dicho plano.

$$x \mathbf{E} y \Leftrightarrow x \parallel y$$

Efectivamente, sean  $a, b, c$ , rectas cualesquiera del plano  $\alpha$ :

- i.  $\forall a \quad a \parallel a$  (toda recta es paralela a sí misma)
- ii.  $\forall a, b \quad a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$
- iii.  $\forall a, b, c \quad a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

### **Ejemplo 12**

Para un recital de rock se ha habilitado tres clases de localidades, con diferente precio:

- 1) césped
- 2) platea
- 3) tribuna

Los asistentes al recital tienen la opción de elegir entre tres precios distintos. Indirectamente queda definida una relación de equivalencia  $R$  (tener el mismo precio), en el conjunto  $E$  de todas las entradas del recital. Es decir:

Siendo  $a$  y  $b$  dos entradas cualesquiera:  $aRb$  si  $a$  tiene el mismo precio que  $b$

Como ejercicio, verifique el estudiante que  $R$  cumple con las tres propiedades de una relación de equivalencia.

A continuación, observaremos:

- i) En el conjunto  $E$ , la relación  $R$  permitió formar los siguientes subconjuntos:
  - \* el subconjunto de todas las entradas de “césped”
  - \* el subconjunto de todas las entradas de “platea”
  - \* el subconjunto de todas las entradas de “tribuna”

Dos entradas cualesquiera, que pertenecen a un mismo subconjunto de  $E$  son equivalentes, es decir, valen lo mismo. Y puesto que son equivalentes, toda entrada “ $a$ ” puede servirnos de representante de su subconjunto, que llamaremos **clase de equivalencia de “ $a$ ” módulo  $R$** .
- ii) Ninguna de las clases es vacía.
- iii) Dos clases de equivalencia cualesquiera, son iguales o son disjuntas.
- iv) La unión de las clases de equivalencia mencionadas es igual al conjunto de todas las localidades:  $E$ .

Decimos, en ese caso, que la relación  $R$  **produjo una partición en  $E$** .

### **Definición 16**

Una relación de equivalencia en un conjunto  $A$ , produce en  $A$  una **partición** en subconjuntos, llamados **clases de equivalencia**, tales que:

- i) Ninguna clase es vacía:  $C_i \neq \emptyset \quad \forall i \in A$
- ii) Dos clases de la partición son siempre disjuntas:  $C_i \neq C_j \quad \forall i \in A, \forall j \in A$
- iii) La unión de todas las clases es el conjunto  $A$  en el que está definida la relación

## **2. Relación de orden**

### **Definición 17**

Sea  $A$  un conjunto cualquiera. Decimos que una relación  $R$  en  $A \times A$  es una **relación de orden en  $A$** , si es **antisimétrica** y **transitiva**. Precizando los términos:

- i. Antisimétrica:  $\forall (x, y) \in A \times A \quad x R y \Rightarrow y R x \Rightarrow x = y$
- ii. Transitiva:  $\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A \quad x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

### Ejemplo 13

La inclusión de conjuntos (en sentido estricto) es una relación de orden. Para demostrarlo, veremos que cumple las propiedades antisimétrica y transitiva.

$$A \subset B \Rightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B, \exists z \in B / z \notin A$$

$$\exists z \in B / z \notin A \Rightarrow B \not\subset A$$

Es decir, la inclusión estricta es antisimétrica. Veremos ahora que es también transitiva, es decir:

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \Rightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \\ B \subset C \Rightarrow \forall x, x \in B \Rightarrow x \in C \end{array} \right\} \Rightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in C$$

Por lo tanto, la inclusión estricta es una relación transitiva. Y entonces, es una relación de orden.

## 3. Función

### Definición 18

Sean A y B dos conjuntos. Decimos que una relación de  $A \times B$  es una **función de A en B** (se expresa  $f : A \rightarrow B$ ) si para cada elemento “a” del conjunto A existe un único “b” perteneciente a B, tal que (a,b) pertenece a f (se expresa  $f(a) = b$ ).

Sea  $f : A \rightarrow B$ , una función de A en B. En ese caso diremos:

- A es el **dominio** de f, y se simboliza  $D(f)$
  - B es el **codominio** de f, y se simboliza  $C(f)$
  - Si  $(x,y) \in f$  se dice que:
    - i) x es la **preimagen** de y al aplicar f.
    - ii) y es la **imagen** de x al aplicar f.
- El conjunto de todas las imágenes al aplicar f se llama **recorrido** de f, y se simboliza  $R(f)$

## CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Veremos a continuación algunos tipos de funciones, cuya descripción resulta de importancia: las funciones inyectivas, las sobreyectivas y las biyectivas. La clasificación no es exhaustiva, por lo que hay funciones que no integran ninguna de las tres categorías.

### Definición 19

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice **inyectiva** si para todo par de elementos de su dominio,  $x_1$  y  $x_2$ , distintos entre sí, las imágenes  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  también son diferentes. Es decir:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A$$

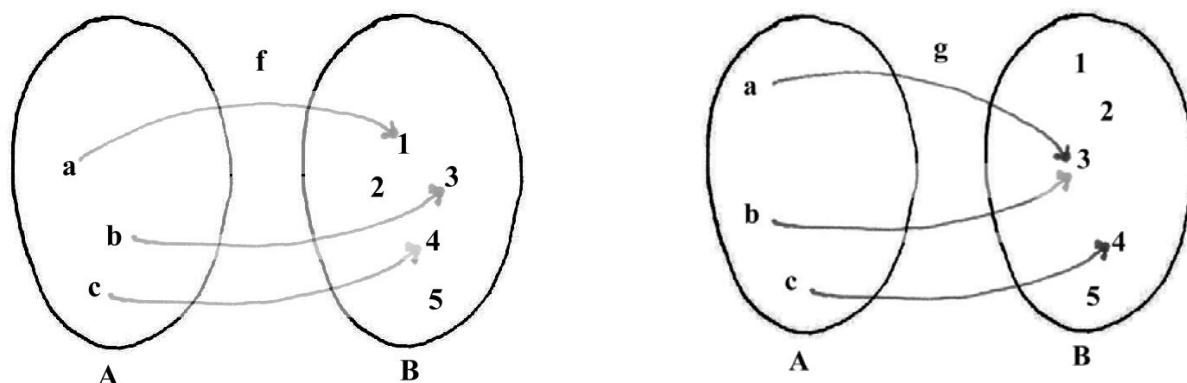
### Ejemplo 14

Sea  $A = \{a,b,c\}$  y  $B = \{1,2,3,4,5\}$ .

Sea  $f : A \rightarrow B$  tal que  $f = \{(a,1),(b,3),(c,4)\}$

Sea  $g : A \rightarrow B$  tal que  $g = \{(a,3),(b,3),(c,4)\}$

Observemos que la función  $f$  es inyectiva, mientras que  $g$  no lo es. Si las representamos en forma sagital:



### Definición 20

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice **sobreyectiva** si el recorrido de la función es igual al codominio. Es decir, si todo elemento del codominio es una imagen.

$$\forall y \in B \exists x \in A / f(x) = y$$

### Ejemplo 15

Sea  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{1, 2\}$ .

Sea  $f : A \rightarrow B$  tal que  $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$

Sea  $g : A \rightarrow B$  tal que  $g = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

Indique el estudiante cuál es sobreyectiva y cuál no lo es. A continuación dibuje la representación sagital de cada una de las funciones.

### Definición 21

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice **biyectiva** si es, a la vez, inyectiva y sobreyectiva. Es decir, si todo elemento del codominio es imagen de un único elemento del dominio. En ese caso se dice que la función  $f$  es una **biyección**.

Es decir, que  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva si:

- i)  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A$
- ii)  $\forall y \in B \exists x \in A / f(x) = y$

### Función inversa

Sea  $f : A \rightarrow B$  una biyección. Puesto que  $f$  es sobreyectiva, para todo elemento “ $y$ ” perteneciente a  $B$ , existe un “ $x$ ” perteneciente a  $A$ , tal que  $f(x) = y$ . Además,  $x$  es único puesto que  $f$  es inyectiva y una misma imagen no puede corresponder a dos preimágenes diferentes.

Es decir que  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Entonces, existe una nueva función  $h : B \rightarrow A$  tal que  $h(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

A esta función la llamaremos **función inversa**.



## **Definición 22**

Sea  $f: A \rightarrow B$  una biyección. Se llama **función inversa de  $f$**  a la función  $f^{-1}: B \rightarrow A$  tal que:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Hemos visto, entonces, que para poder definir una función inversa tenemos que estar en presencia de una función biyectiva. Veremos ahora que **también la función inversa es biyectiva**. Partiremos de la función  $f^{-1}: B \rightarrow A$  aludida en la definición precedente, y demostraremos que es a la vez sobreyectiva e inyectiva.

- $f^{-1}$  es sobreyectiva  
 $\forall x, x \in A \exists y \in B / f(x) = y$  (porque  $f$  es una función), por lo tanto  
 $\forall x, x \in A \exists y \in B / f^{-1}(y) = x$
- $f^{-1}$  es inyectiva  
Como  $f$  es inyectiva,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow y_1 \neq y_2$   
Como  $f$  es función,  $y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$   
Es decir:  $y_1 \neq y_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$  que es lo mismo que decir  
 $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 \neq y_2$

## **Ejemplo 16**

Sea  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$ .

Sea  $f: A \rightarrow B$  tal que  $f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$

De acuerdo a la definición, como  $f$  es biyectiva, podemos encontrar  $f^{-1}: B \rightarrow A$  tal que:

$f^{-1} = \{(1, c), (2, a), (3, b)\}$

Sabiendo que ésta a su vez es biyectiva, debe tener una función inversa.

¿Quién será  $(f^{-1})^{-1}$ ?

**Prof. Alfredo Escande**