Lógica y conjuntos

Simbolización de proposiciones

Profesor: Gustavo Ahumada

Introducción

En la actualidad la Lógica se ha convertido en una materia no sólo profunda, sino de gran amplitud y aplicación a otras Ciencias. Sólo desde hace algunos años se han establecido relaciones sistemáticas entre la Lógica y la Matemática, formulándose una teoría de inferencia completamente explícita que se adecua a todos los ejemplos típicos del razonamiento deductivo en Matemáticas y a las Ciencias empíricas. En la mente de todos los matemáticos modernos está el concepto de axioma y la deducción de teoremas a partir de axiomas. El propósito de la Unidad de **Lógica y conjuntos** es introducir al estudiante en el método deductivo de la Matemática moderna, a un nivel que, aun siendo riguroso, sea lo suficientemente sencillo en presentación y contexto, para que permita una fácil comprensión.

Como lo estudiaremos, la lógica matemática o simbólica tiene dos aspectos. Por una parte la lógica es una teoría analítica del arte de razonar cuyo objetivo es sistematizar y codificar razonamientos validos. Ha emergido desde un estudio del uso del lenguaje en argumentos y persuación, además esta basado en la identificación y examinación de aquellas partes del lenguaje que son esenciales para tal propósito. Por lo tanto, logra versatilidad: la lógica puede ser usada para juzgar el correcto uso de una cadena de razonamientos (en particular, una "**demostración matemática**") solamente en la base de la forma no del contenido y de las subsecuentes proposiciones que puedan integran la cadena.

La **lógica matemática**, también llamada lógica simbólica, es el estudio formal y simbólico de la lógica, y su aplicación a algunas áreas de la matemática y la ciencia. Comprende la aplicación de las técnicas de la lógica formal a la construcción y el desarrollo de las matemáticas y el razonamiento matemático La investigación en lógica matemática ha jugado un papel crucial en el estudio de los fundamentos de las matemáticas.

La lógica matemática estudia la inferencia mediante la construcción de sistemas formales como la lógica proposicional, la lógica de primer orden o la lógica modal. Estos sistemas capturan las características esenciales de las inferencias válidas en los lenguajes naturales, pero al ser estructuras formales susceptibles de análisis matemático, permiten realizar demostraciones rigurosas sobre ellas.

1 Simbolización de proposiciones

1.1 Proposiciones

Con el estudio de la Lógica se persigue llegar a ser preciso y cuidadoso. La Lógica tiene un lenguaje exacto. Pero aunque así sea, vamos a intentar construir un vocabulario para este lenguaje preciso utilizando el lenguaje cotidiano algunas veces un tanto confuso. Para realizar este trabajo se utilizarán proposiciones, de la misma manera que se usa la lengua para explicar las reglas precisas de un juego a alguien que no ha jugado a ese juego.

Las proposiciones tiene una forma lógica a la que se le dará un nombre. En primer lugar, se consideran y simbolizan dos clases de proposiciones en Lógica; unas se denominan **proposiciones atómicas** y otras **proposiciones moleculares**.

En Lógica, **atómicas** son las proposiciones de forma más simple (o más básicas).

Si se juntan una o varias proposiciones atómicas con un término de enlace, se tiene una proposición molecular.

Por ejemplo, considérense dos proposiciones atómicas,

- Hoy es sábado.
- No hay clase.

Proposición molecular

- Hoy es sábado y no hay clases

1.2 Términos de enlace

Gran parte de lo que se tratará en el estudio de la Lógica se refiere a la manera cuidadosa de cómo se han de utilizar estos términos de enlace. Se les denominará *términos de enlace de proposiciones.*

Los términos de enlace que se utilizarán son las palabras "y", "o", "no", y "si. . . , entonces". Los tres términos de enlace "y", "no" y "si. . . , entonces", se usan para enlazar dos proposiciones atómicas. Mientras, el término "no" se agrega a una sola proposición atómica para formar una molecular.

Ejemplos:

- La luna no está hecha de queso verde
- El viento arrastrará las nubes o lloverá hoy con seguridad
- Si estamos en diciembre entonces llegará pronto Navidad

Ejercicio 1: Señalar cada proposición atómica con una A y cada proposición molecular con una M. Escribir junto a cada proposición molecular el término de enlace utilizado.

1. El gran oso negro andaba perezosamente por el camino de abajo.
2. Si María canta, entonces es feliz.
3. Esta proposición es atómica o es molecular.
4. $x + y > 2$.
5. $x = 1$ o $y + z = 2$.

Ejercicio 2: Formar cuatro proposiciones moleculares utilizando una o dos de las proposiciones escritas a continuación junto con un término de enlace. Por ejemplo, se puede poner el término de enlace «y» entre dos de ellas y también se puede utilizar la misma proposición atómica más de una vez. Utilícese cada uno de los cuatro términos de enlace una sola vez, de manera que cada una de las proposiciones moleculares tenga distinto término de enlace.

1. El viento sopla muy fuerte.
2. Pablo podría ganar fácilmente.
3. La lluvia puede ser la causa de que abandone la carrera.
4. Veremos qué planes hay para mañana.
5. Todavía tendríamos tiempo de llegar a las siete.
6. El amigo de Juan tiene razón.
7. Estábamos confundidos respecto a la hora de la junta.
8. $z > 10$.
9. $x + y$.
10. $y + z > 10$.

1.3 La forma de las proposiciones moleculares

La forma de las proposiciones moleculares construidas depende del término de enlace seguido, no del contenido de la proposición o proposiciones atómicas.

- "si…, entonces…"
- ( ) o ( )
- ( ) y ( )
- O ( ) o ( )
- A la vez ( ) y ( )

Ejemplos:

- María está aquí o Elena está en casa.
- (Juan está en la ciudad) o (María no está en casa). Si 2+3=* entonces *=5.
- Si ($v + 1 = 4$) entonces ($y = 3$).
- Si (José no es infiel) entonces (Juan es fiel).
- Es muy pesado o es hueco
- O es muy pesado o es hueco.
- O $x + y = 6$ y $y = 2$, o $x = 0$.
- A la vez ($x > 0$) y ($y \neq 0$).

Otras formas proposicionales

- Si ( ), ( ), es similar a "si…, entonces…"
- Si $x + y = 2$ y $y = 0$, $x = 2$.
- No ocurre que ( ), es similar a no ( )
- No ocurre que ($x + y > 2$).
- No ($x + y > 2$).

Ejercicio 2: Ir a la página 9 de Lógica matemática de Suppes.

1.4 Simbolización de proposiciones

Generalmente se cree que las proposiciones atómicas son proposiciones cortas, pero también algunas de las proposiciones atómicas del lenguaje corriente son largas, resultando por ello pesadas y de difícil manejo. En Lógica se afronta este problema utilizando símbolos en lugar de las proposiciones completas.

Los símbolos que usaremos en lógica para representar proposiciones, son letras mayúsculas tales como "**P**", "**Q**", "**R**", "**S**", "**A**", y "**B**". Por ejemplo, sea:

P = La nieve es profunda.

Q = E1 tiempo es frío.

(La nieve es profunda) y (el tiempo es frío).

(P) y (Q).

Ahora empleado el término de enlace "o"

R = Se puede elegir sopa.

S = Se puede elegir ensalada.

y simbolizamos la proposición por

(R) o (S).

Término de enlace "no"

Q = Los perros son animales de dos patas,

No (Q)

Ejemplo:

1. Si $x \neq 2$ entonces $y > 1$.

Recordar que $\neq$ es la negación de $=$.

P = $x \neq 2$

Q = $y > 1$

Si no (P), entonces (Q).

Ejercicio 3: Ir a la página 11-12 de Lógica matemática de Suppes.

1.5 Los términos de enlaces y sus simbolos

Ahora que ya sabemos simbolizar proposiciones atómicas, el trabajar con proposiciones moleculares resulta mucho más fácil. Pero también se pueden utilizar símbolos para los mismos términos de enlace. Se considerará cada término de enlace por separado y se le asignará un símbolo. También se dará un nombre a la proposición molecular que se forme utilizando cada uno de los términos de enlace.

Y. La unión de dos proposiciones con la palabra "y", se denomina conjunción de las dos proposiciones.

Sus ojos son azules y los ojos de su hermano también son azules.

Sea **P** la proposición atómica (Sus ojos son azules) y sea **Q** la proposición atómica (Los ojos de su hermano también son azules). Entonces tenemos:

(P) y (Q).

Es también útil introducir un símbolo para "y". Nosotros usaremos el símbolo $\wedge$.

(P) $\wedge$ (Q).

Recuérdese que el símbolo $\wedge$ sustituye al término de enlace completo tanto si se refiere a "y" como si es "a la vez... y...".

Ejercicio 4: Ir a la página 13-14 de Lógica matemática de Suppes.

O La unión de dos proposiciones por medio de la palabra "o" se denomina disjunción de las dos proposiciones. Por ejemplo:

- Ésta es el aula cuatro o es una aula de Física.

- O ésta es el aula cuatro o es una aula de Física.

El símbolo que utilizaremos para la disjunción es: $\vee$.

Si F es la proposición "Ésta es el aula cuatro" y R es la proposición "Ésta es una aula de Física", entonces la disjunción queda completamente simbolizada por:

- (F) $\vee$ (R).

Ejercicio 5: Ir a la página 15-16 de Lógica matemática de Suppes.

No. Cuando a una proposición se le añade el término de enlace "no", el resultado se denomina la negación de la proposición

- Las elecciones presidenciales no siempre terminan con armonía.

P = (Las elecciones presidenciales siempre terminan en armonía)

entonces la proposición se indica como sigue:

No (P)

Para simbolizar completamente la proposición, emplearemos un símbolo para la negación: $\neg$

La proposición del ejemplo anterior, totalmente simbolizada, será:

$\neg$ (P).

- O el juego no ha empezado) o (el público no es numeroso).
- ($\neg$ P) $\vee$ ($\neg$ C)

Ejercicio 6: Ir a la página 18-16 de Lógica matemática de Suppes.

Si..., entonces... Cuando se unen dos proposiciones mediante las palabras (si..., entonces...), la proposición molecular resultante se denomina una proposición condicional.

Un ejemplo de una proposición condicional es: Si llueve hoy, entonces se suspende el picnic.

Para poder simbolizar completamente esta proposición condicional emplearemos el símbolo siguiente para el término de enlace: $\Longrightarrow$

P = (Hoy llueve) Q = (Se suspende el picnic),

$$(P) \implies (Q).$$

La proposición situada entre la palabra (si) y la palabra (entonces) es el antecedente. La proposición que sigue a la palabra (entonces) es el consecuente.

Ejercicio 7: Ir a la página 21-22 de Lógica matemática de Suppes.