

# Control Estadístico de Procesos

*Gustavo Ahumada*

## Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad

### Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria discreta asume cada uno de sus valores con cierta probabilidad. Cuando dos dados son lanzados, la probabilidad de que su suma sea 7, escrita  $f(x) = P(X = x)$ , es igual  $1/6$ . La función que asigna la probabilidad a los valores de las variables aleatorias es llamada **función de densidad de probabilidad (pdf)** o **distribución de probabilidad**. Toda pdf debe satisfacer las siguientes condiciones:

1.  $f(x) \geq 0$ .
2.  $\sum_x f(x) = 1$ .
3.  $P(X = x) = f(x)$ .

Hay muchos problemas en los cuales deseamos calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria  $X$  sea mayor o igual que algún número real  $x$ . Al escribir  $F(X) = P(X \leq x)$  para cualquier número real  $x$ , definimos la **distribución acumulada (cdf)**  $F(X)$  de una variable aleatoria discreta  $X$  con distribución  $f(x)$ . Se define como:

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \text{ para } -\infty < x < \infty.$$

Tiene las siguientes propiedades:

1.  $0 \leq F(X) \leq 1$ .
2. Si  $a < b$ , entonces  $F(a) < F(b)$  para cualquier números reales  $a$  y  $b$ . Por lo tanto,  $F(X)$  es una función no decreciente de  $x$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(X) = 1$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(X) = 0$ .

**Ejemplo 1** Lanzar una moneda equilibrada tres veces y sea la variable aleatoria  $X$  el número de caras observadas en los tres intentos.

**Solución** El espacio muestral para el experimento es:

$$S = \{TTT, HTT, THT, HHT, TTH, HTH, THH, HHH\}$$

La variable aleatoria  $X$  puede tomar los valores de 0, 1, 2, y 3 con probabilidades  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$ , y  $\frac{1}{8}$ , respectivamente. Definir la cdf para  $X$ ,  $F(x) = P(X \leq x)$  como sigue:

```
opar <- par(no.readonly = TRUE)
library(MASS)
par(mfrow=c(1,2), pty = "s")
S <- expand.grid(moneda1 = 0:1, moneda2 = 0:1, moneda3 = 0:1)
n.heads <- apply(S, 1, sum)
cbind(S, n.heads)
```

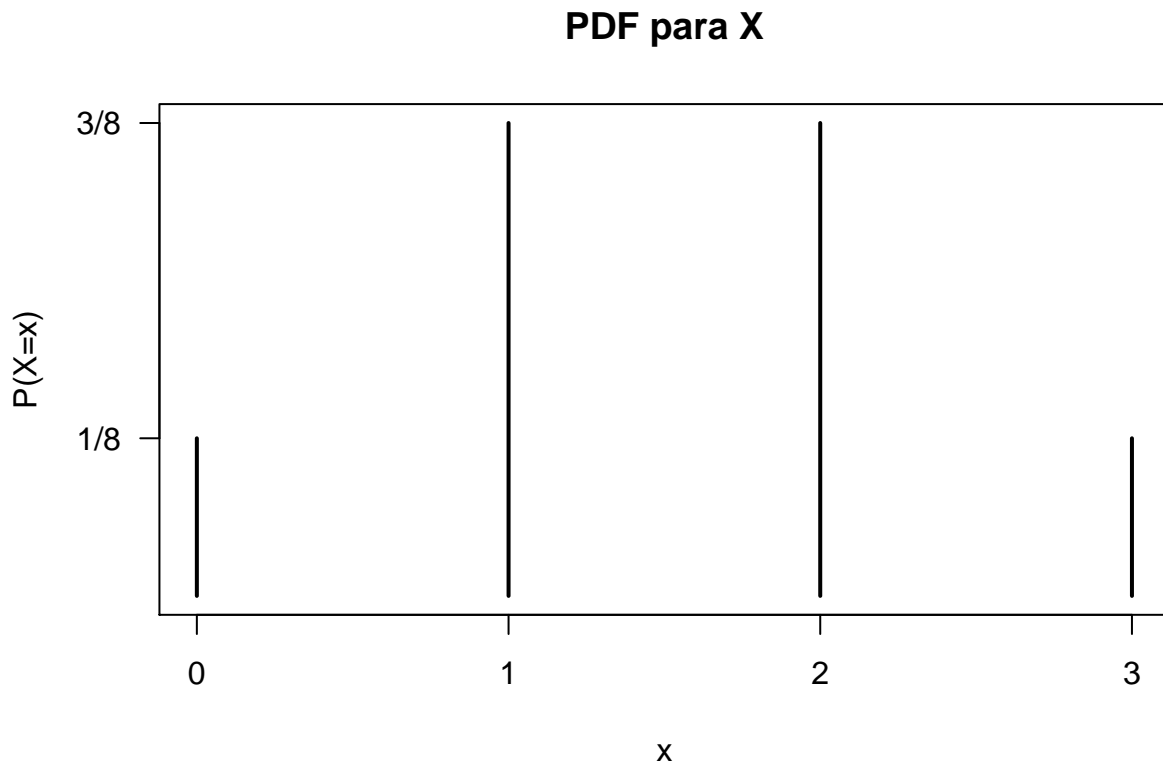
```
##   moneda1 moneda2 moneda3 n.heads
## 1      0      0      0      0
## 2      1      0      0      1
## 3      0      1      0      1
```

```
## 4      1      1      0      2
## 5      0      0      1      1
## 6      1      0      1      2
## 7      0      1      1      2
## 8      1      1      1      3
```

```
T1 <- table(n.heads)/length(n.heads)
fractions(T1)
```

```
## n.heads
## 0 1 2 3
## 1/8 3/8 3/8 1/8
```

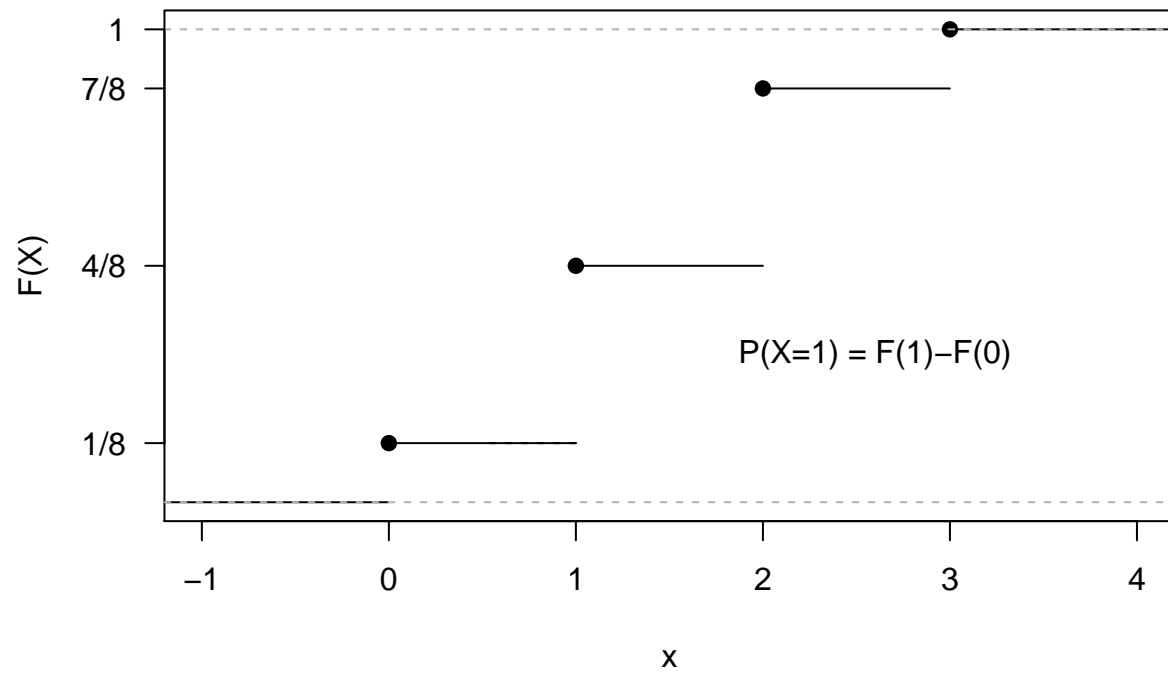
```
plot(T1, xlab = "x", ylab = "P(X=x)", yaxt = "n", main = "PDF para X") +
axis(2, at = c(1/8, 3/8), labels = c("1/8", "3/8"), las = 1)
```



```
## [1] 0.125 1.375 2.125 3.375
```

```
plot(ecdf(n.heads), main = "CDF para X", ylab = "F(X)", xlab = "x",
     yaxt = "n") +
axis(2, at = c(1/8, 4/8, 7/8, 1), labels = c("1/8", "4/8", "7/8", "1"),
     las = 1) +
segments(1, 1/8, 4/8, lty = 2) +
text(2.6, 2.5/8, "P(X=1) = F(1)-F(0)")
```

### CDF para X



```
## numeric(0)
```

```
par(opar)
```