ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

Κωνσταντίνος Νικολός

2019030096

Μέθοδος Newton-Raphson

Σκοπός της άσκησης: Η υλοποίηση ενός απλού μαθηματικού εργαλείου και η τριβή με αυτό για την παραγωγή ορισμένων εμπειρικών αποτελεσμάτων.

Περιγραφή της άσκησης: Σύμφωνα με την μέθοδο Newton-Raphson εάν τραβήξουμε την εφαπτομένη μια συνάρτησης το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x’x είναι πιο κοντά στην ρίζα της εξίσωσης . Αναζητούνται διαδοχικά τα επόμενα σημεία έως ότου η τιμή της συνάρτησης να πλησιάζει το 0. Το σημείο αυτό μπορεί να υπολογιστεί από τον εξής τύπο: $Xn + 1 = Xn - \frac{F(Xn)}{F'(Xn)}$

Dataset πολυωνύμων: Ζητήθηκε η χρήση πολυωνύμων 5^{ου} βαθμού καθώς έχουν πιο πολύπλοκες λύσεις.

- $x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 12 + 4 = 0$
- $3x^5 - 124x^4 + 439x^3 + 1234x^2 + 10439x - 931678 = 0$
- $8x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 12 = 0$

$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 12\chi + 4$

Αρχικά αναλύεται ένα πολυώνυμο με 3 πραγματικές ρίζες x≈-2.03808 , x≈0.52032, x≈2.94237 και 2 μιγαδικές που δεν υπολογίζονται από το πρόγραμμα.

Ανάλυση με διαφορετικά δέλτα

Επικεντρωνόμαστε στο χ0=0 κοντά στην ρίζα , x≈0.52032 για να παρατηρήσουμε την επιρροή της τιμές δέλτα

X0=0

δέλτα= 1 -> x= 0.520412 with definition after 4 iterations , x= 0.520320 with der after 4 iterations after 7 iterations

δέλτα= 10^-1 -> x=0.520288 with definition after 4 iterations , x=0.520320 with der after 4 iterations

δέλτα= 10^-3 -> x=0.520321 with definition after 4 iterations, x=0.520320 with der after 4 iterations

δέλτα= 10^-5 -> x=0.520319 with definition after 4 iterations, x=0.520320 with der after 4 iterations

δέλτα= 10^-6 -> x=0.520320 with definition after 5 iterations, x=0.520320 with der after 4 iterations

δέλτα= 10^-7 -> x=0. 0.520285 with definition after 4 iterations, x=0.520320 with der after 3 iterations

δέλτα= 10^-8 -> failed to found after 25 iterations with definition , x=0.520320 with der after 4 iterations

δέλτα= 10^-9 -> failed to found after 25 iterations with definition, x=0.520320 with der after 4 iterations

Παρατηρήσεις:

Διαπιστώνεται ότι για μεγάλες τιμές του ε τα αποτελέσματα διαφέρουν, και για αρκετά μικρές το πρόγραμμα μας δεν καταφέρνει καν να συγκλίνει , ενώ οι διαφορές σε επαναλήψεις δεν είναι σημαντικές.

Ανάλυση με διαφορετικά χ0

Δοκιμάζουμε διαφορετικά χ0 κοντά στις πιθανές ρίζες διατηρώντας σταθερή την τιμή του δέλτα σε 10^-3

δέλτα= 10^-3

X0=10 -> x=2.942388 with definition after 11 iterations, x= 2.942369 with der after 11 iterations

X0=-10 -> x= -2.038103 with definition after 11 iterations, x= -2.038080 with der after 11 iterations

X0=0 -> x=0.520321 with definition , x=0.520320 with der

X0=-2 -> x= -2.038080 with definition after 3 iterations , x= -2.038080 with der after 3 iterations

X0=3 -> x= 2.942369 with definition after 3 iterations , x= 2.942369 with der after 3 iterations

<u>Παρατηρήσεις:</u>

Δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές στο χ0 συμπεραίνεται ότι μπορούν να βρεθούν όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου αν χρησιμοποιηθεί χ0 με τιμή κοντά στην ρίζα. Αντίθετα εάν το χ0 διαφέρει αρκετά από τις πιθανές ρίζες το πρόγραμμα δεν θα συγκλίνει σε κάποια σωστά.

$3x^5 - 124x^4 + 439x^3 + 1234x^2 + 10439x - 931678$

Πρόκειται για ένα πολυώνυμο με μία μόνο πραγματική ρίζα με τιμή x≈37.1966 , επομένως δεν έχει νόημα να δοκιμάσουμε διαφορετικά χ0.

Ανάλυση με διαφορετικά δέλτα

X0=0

δέλτα= 10^-1 -> x= 37.196606 with definition after 11 iterations, x= 37.196606 with der after 10 iterations

δέλτα= 10^-3 -> x= 37.196606 with definition after 10 iterations, x= 37.196606 with der after 10 iterations

δέλτα= 10^-5 -> x= 37.196724 with definition after 11 iterations, x= 37.196606 with der after 10 iterations

δέλτα= 10^-7 -> root not found with definition after 25 iterations, x= 37.196606 with der after 10 iteration

Παρατηρήσεις:

Παρατηρείται ότι οι διαφορές στα δέλτα συμφωνούν με τις παραπάνω παρατηρήσεις. Αξίζει όμως να αναφερθεί η σημαντική διαφορά στις επαναλήψεις (τριπλάσιες από το προηγούμενο). Το συγκεκριμένο γεγονός πιθανώς να οφείλεται στην ΄΄δύσκολη΄΄φύση του πολυωνύμου καθώς κοντά στην λύση του η γραφική παράσταση είναι σχεδόν κάθετη στον άξονα χ'χ , δυσκολεύοντας την εύρεση νέου στοιχείου μέσω της εφαπτομένης η οποία θα τέμνει τον χ'χ πολύ κοντά στο προηγούμενο χκ.

$8x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 12$

Πρόκειται για ένα πολυώνυμο με μία μόνο πραγματική ρίζα με τιμή x≈-1.66916

Ανάλυση με διαφορετικά δέλτα

X0=-1

δέλτα= 10^-1 -> x= -1.063358 with definition after 4 iterations, x= -1.063480 with der after 3 iterations

δέλτα= 10^-3 -> x= -1.063480 with definition after 4 iterations, x= -1.063480 with der after 4 iterations

δέλτα= 10^-5 -> x= -1.063480 with definition after 3 iterations, x= -1.063480 with der after 3iterations

δέλτα= 10^-7 -> x= -1.063390 with definition after 3 iterations, x= -1.063480 with der after 3 iterations

Ανάλυση με διαφορετικά x0

X0=0-> root not found with definition after 25 iterations, root not found with definition after 25 iterations

X0=1-> x= -1.063480 with definition after 4 iterations, x= -1.063480 with der after 4 iterations

Παρατηρήσεις:

Ενδιαφέρον είναι το παράδειγμα με αρχικό χ0=0   στο οποίο το πρόγραμμα δεν κατάφερε να συγκλίνει και στις 2 μεθόδους, αποτέλεσμα το οποίο λογικά οφείλεται στο γεγονός πως η παράγωγος του πολυωνύμου, $f'(x) = 40x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 4x$, μηδενίζει στο σημείο χ0=0 επομένως είναι αδύνατο να βρεθεί το επόμενο σημείο χκ και το πρόγραμμα δεν συγκλίνει ποτέ.

<u>Συμπεράσματα:</u>

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα για την χρήση αυτής της μεθόδου πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια τιμή δέλτα κοντά στο 10^-3 ούτε αρκετά μεγάλη ούτε αρκετά μικρή. Επίσης θα ήταν συνετό για περαιτέρω βελτίωση της μεθόδου να γίνεται αρχικά μία εκτίμηση για την πιθανή ρίζα του πολυωνύμου μέσω της γραφικής παράστασης του. Τέλος παρατηρήθηκε ότι πρόκειται για μία ¨ευαίσθητη¨ μέθοδο η οποία μπορεί να αποτύχει σε 3 διαφορετικές περιπτώσεις. Είτε γιατί το αρχικό χ0 ήταν αρκετά μακριά από την ρίζα του πολυωνύμου, είτε γιατί η παράγωγος του πολυωνύμου μηδενίζει σε κάποια από τα πιθανά χκ, είτε διότι μπορεί να δημιουργηθεί ένας κύκλος γύρω από δύο ίδιες τιμές χκ με αποτέλεσμα να μην συγκλίνει το πρόγραμμα. Για την τελευταία περίπτωση δυστυχώς δεν βρέθηκε κάποιο πιθανό παράδειγμα.