Prova por Indução Matemática

IPRJ01-10762

Matemática Discreta II

Gustavo Barbosa Libotte

Aula 1

Motivação

- Para ilustrar como a indução matemática funciona, imagine que você está subindo uma escada infinitamente alta.
- Como você sabe se será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto? Suponha que você faça as seguintes hipóteses sobre sua capacidade de subir:
  1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
  2. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo. (Note que esta asserção é um condicional.)
- Se a proposição 1 e o condicional 2 forem ambos verdadeiros, então, pela proposição 1, você consegue chegar ao primeiro degrau e portanto, pela proposição 2, consegue chegar ao segundo.
- Novamente pela proposição 2, você consegue chegar ao terceiro degrau.
- Mais uma vez pela proposição 2, você consegue chegar ao quarto degrau; e assim por diante.

Motivação

- Você pode subir tão alto quanto quiser. Ambas as hipóteses são necessárias.
- Se apenas a primeira proposição fosse verdadeira, você não teria nenhuma garantia de passar do primeiro degrau, e se apenas a segunda fosse verdadeira você poderia nunca ser capaz de começar.
- Vamos supor que os degraus da escada estejam numerados pelos inteiros positivos–1, 2, 3 etc.
- Agora pense sobre uma propriedade específica que um número possa ter.
- Em vez de “chegar a um degrau arbitrariamente alto”, podemos falar sobre um inteiro positivo arbitrário tendo essa propriedade.
- Vamos usar a notação $P(n)$ para dizer que o inteiro positivo n tem a propriedade P.
- Como usar a mesma técnica que usamos para subir a escada para provar que, qualquer que seja o inteiro positivo n, temos $P(n)$?

Primeiro princípio da indução matemática

- As duas proposições que precisamos provar são:

(1)	$P(1)$	(1 tem a propriedade P.)
(2)	Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \to P(k+1)$	(Se qualquer número tem a propriedade P, o próximo também tem.)

- Se pudermos provar ambas as proposições 1 e 2, então $P(n)$ será válida para qualquer inteiro positivo n, da mesma forma que você poderia subir até um degrau arbitrário da escada.
- O fundamento para argumentos desse tipo é o **primeiro princípio de indução matemática**.

Primeiro princípio da indução matemática

1. $P(1)$ é verdade.
2. $(\forall k)$ [$P(k)$ verdade $\to P(k+1)$ verdade].

Se as proposições 1 e 2 forem verdadeiras, então $P(n)$ é verdade para todos os inteiros positivos n.

Primeiro princípio da indução matemática

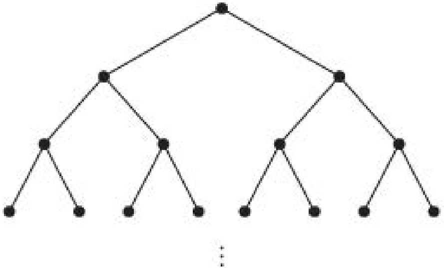
- O primeiro princípio de indução matemática é um condicional. A conclusão é uma proposição da forma "$P(n)$ é verdade para todo inteiro positivo n".
- Portanto, sempre que quisermos provar que alguma coisa é verdade para todo inteiro positivo n, é bastante provável que a indução matemática seja uma técnica de demonstração apropriada para ser usada.
- Para mostrar que a conclusão desse condicional é verdadeira, precisamos provar que as duas hipóteses, 1 e 2, são verdadeiras.
- Para provar a proposição 1, basta mostrar que o número 1 tem a propriedade P, geralmente uma tarefa trivial.
- A proposição 2 é um condicional que tem que ser válido para todo k. Para provar esse condicional, suponha que $P(k)$ é verdade para um inteiro positivo arbitrário k e mostre, com base nessa hipótese, que $P(k+1)$ é verdade.
- Portanto, $P(k) \rightarrow P(k+1)$, e, usando a generalização universal, $(\forall k)[P(k) \rightarrow P(k+1)]$.

Primeiro princípio da indução matemática

- Você deve se convencer de que supor que o número k tem a propriedade P não é a mesma coisa que supor o que queremos provar (essa é uma confusão comum na primeira vez que se encontra uma demonstração desse tipo).
- Essa é, simplesmente, a maneira de proceder para obter uma demonstração direta do condicional $P(k) \to P(k+1)$.
- Ao fazer uma demonstração por indução, o estabelecimento da veracidade da proposição 1 é chamado de **base da indução** ou **passo básico** da demonstração por indução. O estabelecimento da veracidade de $P(k) \to P(k+1)$ é o **passo indutivo**.
- Quando supomos que $P(k)$ é verdade para provar o passo indutivo, $P(k)$ é chamada de **hipótese de indução**.

- Suponha que um progenitor ancestral Silva casou e teve dois filhos. Vamos chamar esses dois filhos de geração 1. Suponha, agora, que cada um desses filhos teve dois filhos; então, a geração 2 contém quatro descendentes.

- Isso continua de geração em geração. A árvore genealógica da família Silva, portanto, tem a forma ilustrada na figura abaixo.



Geração	Descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
$\vdots$	$\vdots$

Instituto Politécnico

- Parece que a geração n contém 2^n descendentes. Mais formalmente, se denotarmos por $P(n)$ o número de descendentes em cada geração, nossa conjectura é que

$$P(n) = 2^n$$

Podemos usar indução para provar que nossa conjectura para $P(n)$ está correta.

- O passo básico é estabelecer $P(1)$, que é a equação

$$P(1) = 2^1 = 2$$

Isso é verdade, pois nos foi dito que Silva teve dois filhos.

- Vamos supor, agora, que nossa conjectura está correta para uma geração arbitrária k, $k \geq 1$, ou seja, vamos supor que

$$P(k) = 2^k$$

e tentar mostrar que

$$P(k+1) = 2^{k+1}$$

- Nessa família, cada descendente tem dois filhos, de modo que o número de descendentes na geração $k+1$ será o dobro do número de descendentes na geração k, ou seja, $P(k+1) = 2P(k)$.
- Pela hipótese de indução, $P(k) = 2^k$, logo

$$P(k+1) = 2P(k) = 2\left(2^k\right) = 2^{k+1}$$

  e, de fato,

$$P(k+1) = 2^{k+1}$$

  Isso **completa nossa demonstração**.
- Agora vamos aplicar o método de demonstração por indução a problemas menos óbvios.

Exemplo

Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

- O termo à esquerda do sinal de igualdade nessa equação é a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até $2n - 1$. A expressão à direita do sinal de igualdade é uma fórmula para o valor dessa soma.
- Embora possamos verificar a veracidade dessa equação para qualquer **valor particular** de n substituindo esse valor na equação, não podemos substituir n por **todos os inteiros positivos** que existem.
- Assim, uma demonstração por exaustão não funciona. Uma demonstração por indução é apropriada.

Demonstrações por Indução Matemática

- Para demonstrações com o primeiro princípio de indução:

  Passo 1 Prove o passo básico;

  Passo 2 Suponha $P(k)$;

  Passo 3 Prove $P(k+1)$.

- Qualquer problema de indução envolvendo uma "soma" funciona exatamente da mesma maneira.
- Escreva a soma incluindo o penúltimo termo; você encontrará a expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação para $P(k)$ e poderá usar a hipótese de indução.
- Depois disso, é só manipulação algébrica.

Exemplo

Prove que

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

vale para todo $n \geq 1$.

Instituto Politécnico

- **Lembrete:** Para provar $P(k) \to P(k+1)$, você tem que descobrir o caso $P(k)$ dentro de $P(k+1)$.
- Nem todas as demonstrações por indução envolvem somas.
- Outras identidades algébricas sobre os inteiros positivos podem ser demonstradas por indução, assim como proposições não algébricas, como o número de descendentes na geração n da família Silva.

Exemplo

> Prove que, para qualquer inteiro positivo $n, 2^n > n$.

- $P(1)$ é a proposição $2^1 > 1$, que certamente é verdade.
- Vamos supor, agora, $P(k), 2^k > k$, e tentar concluir $P(k+1), 2^{k+1} > k+1$.

Exemplo (continuação)

- Mas onde está escondido o $P(k)$ aqui?
- Podemos escrever a expressão à esquerda do sinal de igualdade em $P(k+1)$ como $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$ e aí está a expressão à esquerda do sinal de igualdade em $P(k)$.
- Usando a hipótese de indução $2^k > k$ e multiplicando os dois membros dessa desigualdade por 2, obtemos $2^k \cdot 2 > k \cdot 2$.
- Completando o argumento,

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k \cdot 2 = k + k \geq k + 1 \text{ (já que } k \geq 1)$$

ou seja,

$$2^{k+1} > k + 1$$