Matrizes Inversíveis

■ DEFINIÇÃO 1.5. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma matriz B $n \times n$ tal que $BA = I$ é dita uma inversa à esquerda de A. Uma matriz C $n \times n$ tal que $AC = I$ é dita uma inversa à direita de A, onde aqui $I = [\delta_{ij}]$ é a matriz identidade de ordem n.

O seguinte resultado é fundamental para se estabelecer o conceito de matriz inversa.

PROPOSIÇÃO 1.2. Se A possui uma inversa à esquerda B e uma inversa à direita C, então $B = C$.

Prova: Suponha que $BA = I$ e $AC = I$. Então $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. ▌

Agora, pode-se definir o que se entende por matriz inversa.

■ DEFINIÇÃO 1.6. Se A possui uma inversa à esquerda e uma inversa à direita, então A é dita uma matriz inversível (ou não singular). Nestas condições, usa-se a notação A^{-1} para representar a única matriz que possui a propriedade $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, a qual é chamada de a inversa de A. Se tal inversa não existe, A é chamada de singular.

EXEMPLO 14: A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ é inversível e sua matriz inversa é $\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$. De fato, basta verificar que $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

EXEMPLO 15: Sejam A e B matrizes $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Provar o seguinte:

(a) Se A e B são inversíveis, então o produto AB é uma matriz inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(b) Se A é inversível, então A^T é inversível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

» SOLUÇÃO: (a) Basta notar que ocorrem as relações:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

(b) Usando uma propriedade da transposição de matriz, pode-se ver que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I;$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I.$$

Operações Elementares e a Inversão de Matrizes

Dada uma matriz A $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, existem três operações básicas sobre as linhas de A, chamadas de operações elementares ($\mathcal{OE}s$), dadas por:

$\mathcal{OE}1$. Multiplicação de uma linha de A por um escalar $c(\neq 0) \in \mathbb{F}$.

$\mathcal{OE}2$. Substituição da r-ésima linha de A pela linha r mais c vezes a linha s, sendo $c \in \mathbb{F}$ um escalar arbitrário e r uma linha diferente da linha s.

$\mathcal{OE}3$. Permutação de duas linhas de A.

■ DEFINIÇÃO 1.7. Sejam A e B matrizes $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Diz-se que B é equivalente por linhas a A, se B pode ser obtida a partir de A por uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas de A. Iremos representar uma tal sequência pelo seguinte diagrama de setas:

$$A = A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_k = B.$$

EXEMPLO 16: Determinar a sequência de $\mathcal{OE}s$ usada implicitamente no diagrama de setas a seguir, que torna B equivalente por linhas a A:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_0} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_2} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_3} = B.$$

» SOLUÇÃO: A etapa $A_0 \to A_1$ é realizada permutando-se as linhas 2 e 3, a qual é uma operação do tipo $\mathcal{OE}3$. Na etapa $A_1 \to A_2$ efetuou-se uma operação do tipo $\mathcal{OE}2$: $(linha\ 2\ de\ A_2) \leftarrow [-2 \times (linha\ 1\ de\ A_1) + (linha\ 2\ de\ A_1)]$. Na etapa $A_2 \to A_3$ a matriz resultante B é obtida por uma operação do tipo $\mathcal{OE}1$, sendo a linha 2 multiplicada por -1.

EXEMPLO 17: Encontrar as $\mathcal{OE}s$ que revertem o diagrama de setas do exemplo 16.

» SOLUÇÃO: O diagrama reverso é dado por

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_3} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_2} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_0} = A.$$

Assim, a primeira etapa reversa, $A_3 \to A_2$, é determinada por uma operação do tipo $\mathcal{OE}1$, a multiplicação da linha 2 por -1. Na etapa $A_2 \to A_1$ se fez uma operação do tipo $\mathcal{OE}2$: $(linha\ 2\ de\ A_1) \leftarrow [2 \times (linha\ 1\ de\ A_2) + (linha\ 2\ de\ A_2)]$. Finalmente, na etapa $A_1 \to A_0$ foi usada uma operação do tipo $\mathcal{OE}3$, sendo as linhas 2 e 3 permutadas, obtendo-se novamente a matriz A.

Aqui, sempre que necessário, uma dada operação elementar sobre linhas, de qualquer tipo, será tratada como uma função $\mathcal{OE}i$, que associa a cada matriz A $m \times n$ uma outra matriz $m \times n$ denotada por $\mathcal{OE}i(A)$, com $i = 1,2,3$ especificando o tipo da $\mathcal{OE}$ usada.

Os exemplos 16 e 17 juntos revelam a existência de uma propriedade básica das operações elementares sobre as linhas de uma matriz: cada $\mathcal{OE}$ é revertida por uma outra $\mathcal{OE}$ do mesmo tipo. O seguinte diagrama ilustra este fato. Sobre as setas mostramos o tipo de cada $\mathcal{OE}$ usada nas etapas dos processos considerados nestes dois exemplos:

$$A = A_0 \xrightarrow{(\mathcal{OE}3)} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_2 \xrightarrow{(\mathcal{OE}1)} A_3 = B$$
$$A = A_0 \xleftarrow{(\mathcal{OE}3)} A_1 \xleftarrow{(\mathcal{OE}2)} A_2 \xleftarrow{(\mathcal{OE}1)} A_3 = B$$

Tal propriedade é descrita de forma mais geral como segue.

PROPOSIÇÃO 1.3. Efetuada uma operação do tipo $\mathcal{OE}i$ $(i = 1,2,3)$ sobre as linhas de uma matriz A, existe uma outra operação sobre linhas do mesmo tipo $\mathcal{OE}i$, tal que $\mathcal{OE}i\big(\mathcal{OE}i(A)\big) = A$. Em outras palavras, a operação inversa de qualquer operação elementar sobre linhas existe e é uma operação elementar sobre linhas do mesmo tipo (mas não necessariamente a mesma).

Prova: Suponha, inicialmente, que a operação sobre linhas é do tipo $\mathcal{OE}1$, sendo a r-ésima linha de A multiplicada por um escalar c diferente de zero. Então, a operação inversa é do tipo $\mathcal{OE}1$ e consiste na multiplicação da linha r por c^{-1}. Em seguida, considere que a operação sobre linhas é do tipo $\mathcal{OE}2$, sendo a linha r substituída pela linha r mais c vezes a linha s, com r diferente de s. Neste caso, a operação inversa é do tipo $\mathcal{OE}2$, sendo dada pela substituição da linha r pela linha r mais $(-c)$ vezes a linha s. Finalmente, se a operação sobre linhas é do tipo $\mathcal{OE}3$, determinada pela permutação das linha r e s, então a operação inversa é do tipo $\mathcal{OE}3$ e é também definida pela permutação das linhas r e s. ▮

Considerando a relação $B{\sim}A \Leftrightarrow$ *B é equivalente por linhas a A*, nota-se que ser equivalente por linhas é na realidade uma relação de equivalência entre matrizes. De fato, usando o conteúdo da proposição 1.3, é possível verificar que (i) toda matriz é equivalente por linhas a si própria, ou seja, $A{\sim}A$; (ii) se B é equivalente por linhas a A, então A é equivalente por linhas a B, ou seja, $B{\sim}A \Rightarrow A{\sim}B$; (iii) se B é equivalente por linhas a A e C é equivalente por linhas a B, então C é equivalente por linhas a A, ou seja, $B{\sim}A$ e $C{\sim}B \Rightarrow C{\sim}A$.

EXEMPLO 18: Mostrar que as matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dadas por $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ são equivalente por linhas, ou seja, $A{\sim}B$.

» SOLUÇÃO: Mostraremos que existe uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas de A da forma:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} = A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = B.$$

Inicialmente, substituindo a linha 1 pela linha 1 mais (-2) vezes a linha 2, obtém-se a primeira etapa $A = A_0 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_1$. Substituindo a linha 3 pela linha 3 mais (-2) vezes a linha 2, tem-se a segunda etapa $A_1 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_2$. A terceira etapa é efetuada multiplicando a linha 3 por $(-1/2)$, assim determina-se $A_2 \xrightarrow{(\mathcal{OE}1)} A_3$. A quarta etapa $A_3 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_4$ é construída substituindo a linha 1 pela linha 1 mais 9 vezes a linha 3. Multiplicando a primeira linha por $\frac{2}{15}$, obtém-se a etapa $A_4 \xrightarrow{(\mathcal{OE}1)} A_5$. Em seguida, a segunda linha é substituída pela segunda linha mais 2 vezes a primeira linha, tendo-se $A_5 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_6$. Substituindo a linha 3 pela linha 3 mais $(-1/2)$ vezes a primeira linha, obtém-se a etapa final $A_6 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_7 = B$. Portanto, como mostra o seguinte diagrama de setas, pode-se afirmar que $A \sim B$:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{A_0} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{A_1} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}}_{A_2} \xrightarrow{(\mathcal{OE}1)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}}_{A_3} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}}_{A_4} \xrightarrow{(\mathcal{OE}1)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}}_{A_5} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}}_{A_6} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}}_{A_7} = B$$

EXEMPLO 19: Sejam a matriz complexa $A = \begin{bmatrix} -1 & -i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz real $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. ambas de dimensão 3×2. Mostre que $A \sim B$.

» SOLUÇÃO: Esta relação de equivalência pode ser comprovada pela seguinte sequência de operações elementares sobre as linhas de A:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A_0} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2+i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A_1} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2+i \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A_2} \xrightarrow{(\mathcal{OE}1)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A_3} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A_4} \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_5} = B.$$

A etapa inicial $A = A_0 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_1$ é obtida pela substituição da linha 1 pela linha 1 mais a linha 3. A substituição da linha 2 pela linha 2 mais i vezes a linha 3 gera a segunda etapa $A_1 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_2$. Multiplicando a primeira linha por $\frac{1}{2+i}$ obtém-se a terceira etapa $A_2 \xrightarrow{(\mathcal{OE}1)} A_3$. A quarta etapa $A_3 \xrightarrow{(\mathcal{OE}2)} A_4$ é feita substituindo a linha 2 pela linha 2 mais $(-3-2i)$ vezes a linha 1. A etapa final é obtida pela substituição da linha 3 pela linha 3 mais (-2) vezes a linha 1.

■ DEFINIÇÃO 1.8. Uma matriz elementar sobre um corpo $\mathbb{F}$ é uma matriz quadrada $m \times m$ obtida a partir da matriz identidade $I = [\delta_{ij}]$ de ordem m, efetuando uma única operação elementar sobre as linhas de I.

Assim, é claro que há somente três tipos de matrizes elementares. Aqui, uma matriz elementar será denotada por E.

EXEMPLO 20: Sejam $n = 3$, a matriz identidade $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e o corpo dos números reais. A multiplicação da terceira linha de I por $\sqrt{2}$ resulta em uma matriz elementar do chamado tipo 1, dada por $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Similarmente, substituindo-se a linha 2 de I pela linha 3 mais 4 vezes a linha 1, obtém-se em uma matriz elementar do chamado tipo 2, dada por $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A matriz elementar $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é do tipo 3, a qual foi obtida pela permutação das linhas 2 e 3 de I.

Se E é uma matriz elementar, então segue da definição 1.8 que $E = \mathcal{O}\mathcal{E}i(I)$, para algum $i = 1,2,3$.

PROPOSIÇÃO 1.4: Seja $\mathcal{O}\mathcal{E}i$ uma operação elementar sobre linhas e seja $E = [e_{i,j}]$ a matriz elementar $m \times m$ obtida por $E = \mathcal{O}\mathcal{E}i(I)$, para algum $i = 1,2,3$, onde I é a matriz identidade. Então, para toda matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$, tem-se

$$EA = \mathcal{O}\mathcal{E}i(A).$$

Prova: Inicialmente, considerando que a matriz elementar é do tipo 1, suponha que a matriz $\mathcal{O}\mathcal{E}1(A)$ é obtida multiplicando a linha r de A por um escalar $c \neq 0$. Então, a matriz E é obtida multiplicando a r-ésima linha de I por c. Logo, fazendo $EA = [\beta_{ij}]$ e $\mathcal{O}\mathcal{E}1(A) = [\gamma_{ij}]$, neste caso pode-se ver que

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij,} \text{ se } i \neq r \\ ca_{rj}, \text{se } i = r \end{cases}$$

$$e_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik,} \text{ se } i \neq r \\ c\,\delta_{rk}, \text{se } i = r \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{ij}, \text{ se } i \neq r \\ ca_{rj}, \text{se } i = r \end{cases}$$

Assim, $EA = \mathcal{O}\mathcal{E}1(A)$.

Em seguida, suponha que a matriz elementar é do tipo 2, de modo que a matriz $\mathcal{O}\mathcal{E}2(A)$ é determinada substituindo a linha r de A por esta linha r mais c vezes a linha s de A, com r é diferente de s. Então, a matriz E é obtida substituindo a linha r de I por esta linha r mais c vezes a linha s de I. Neste segundo caso, obtém-se

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, \text{se } i \neq r \\ a_{rj} + ca_{sj}, \text{se } i = r \end{cases}$$

$$e_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, \text{se } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk}, \text{se } i = r \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{ij}, \text{se } i \neq r \\ a_{rj} + c a_{sj}, \text{se } i = r \end{cases}$$

Logo, $EA = \mathcal{OE}2(A)$.

Finalmente, suponha que a matriz elementar é do tipo 3, sendo $\mathcal{OE}3(A)$ obtida permutando as linhas r e s de A. Logo a matriz E é formada pela permutação das linhas r e s de I. Assim, neste último caso, ocorrem:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij,} \text{ se } i \neq r \text{ e } i \neq s \\ a_{sj}, \text{se } i = r \\ a_{rj}, \text{se } i = s \end{cases}$$

$$e_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik,} \text{ se } i \neq r \text{ e } i \neq s \\ \delta_{sk}, \text{se } i = r \\ \delta_{rk}, \text{se } i = s \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{ij,} \text{ se } i \neq r \text{ e } i \neq s \\ a_{sj}, \text{se } i = r \\ a_{rj}, \text{se } i = s \end{cases}$$

Logo, $EA = \mathcal{OE}3(A)$.

Portanto, conclui-se que $EA = \mathcal{OE}i(A)$, para todo $i = 1,2,3$. ▌

PROPOSIÇÃO 1.5 : Sejam A e B matrizes $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então B é equivalente por linhas a A se, e somente se, $B = PA$, onde P é um produto de matrizes elementares de ordem m.

Prova: ($\Rightarrow$) Considere que B é equivalente por linhas a A. Então existe uma sequência finita de operações elementares que pode ser representada pelo seguinte diagrama de setas:

$$A = A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_k = B.$$

Seja $E_1, \dots, E_k$ a sequência de matrizes elementares correspondentes a cada $\mathcal{OE}$ usada nesta sequência sobre as linhas de A. Então, $B = (E_k \dots E_1)A = PA$, com $P = E_k \dots E_1$.

($\Leftarrow$) Por outro lado, suponha que $B = PA$, onde nesta equação $P = E_k \dots E_1$ e as E_i são as matrizes elementares $m \times n$. Então $E_1 A$ é equivalente por linhas a A e, por sua vez, $E_2(E_1 A)$ é equivalente por linhas a $E_1 A$. Consequentemente, pela propriedade transitiva da relação de equivalência, tem-se que $(E_2 E_1 A)$ é equivalente por linhas a A. Continuando desta maneira, pode-se ver que o produto $\underbrace{(E_k E_{k-1} \dots E_1)A}_{B}$ é equivalente por linhas a A, ou seja, a matriz B é equivalente por linhas a A. ▌

Exercícios

1. Se $M_1, M_{2,} \dots, M_k$ é uma sequência de matrizes inversíveis, mostrar que a matriz produto $P = M_1 \dots M_k$ é inversível e sua inversa é a matriz dada por $P^{-1} = {M_k}^{-1} \dots {M_1}^{-1}$.
2. Mostrar que as seguintes matrizes reais são equivalentes por linhas:
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
3. Mostrar que a matriz complexa $\begin{bmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 1-2i & 2-3i \end{bmatrix}$ é equivalente por linhas a matriz identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
4. Identificar quais das matrizes seguintes são matrizes elementares:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
5. Responda cada questão, justificando sua resposta: (a) a matriz identidade é uma matriz elementar? (b) o produto de duas matrizes elementares é uma matriz elementar? (c) a transposta de qualquer matriz elementar é uma matriz elementar?
6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar uma sequência de matrizes elementares $E_1, E_2, \dots, E_k$ tal que $E_k \dots E_1 A = I$.
7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$,
   (a) encontre uma matriz elementar E_1 tal que $E_1 A = B$, (b) encontre uma matriz elementar E_2 tal que $E_2 B = C$, (c) a matriz C é equivalente por linhas a A? Explique sua resposta.
8. Explicar por que uma matriz elementar 2×2 é necessariamente uma das seguintes: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ com $c \neq 0$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$ com $c \neq 0$.

PRORPOSIÇÃO 1.6: Toda matriz elementar é inversível e sua inversa é uma matriz elementar do mesmo tipo.

Prova: Seja E a matriz elementar correspondente a operação elementar $\mathcal{OE}i$, para algum $i = 1,2,3$. Então, da proposição 1.3, sabe-se que existe uma outra operação elementar sobre linhas do mesmo tipo (mas não necessariamente a mesma) que reverte a anterior. Seja E_1 a matriz elementar correspondente a esta operação inversa. Então é claro que $E_1 E = E E_1 = I$. Portanto, E é inversível e $E^{-1} = E_1$. ▌

COROLÁRIO 1.7: Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se A é equivalente por linhas a matriz identidade I $n \times n$, então A é inversível.

Prova: Se A é equivalente por linhas a I, então $A = (E_k \dots E_1)I = E_1 \dots E_k$, sendo cada E_i uma matriz elementar. Como toda matriz elementar é inversível, e posto que o produto de matrizes inversíveis é também uma matriz inversível, então A é inversível e $A^{-1} = (E_k \dots E_1)^{-1} = {E_k}^{-1} \dots {E_1}^{-1}$. ▌

COROLÁRIO 1.8: Sejam A e B matrizes $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se B é equivalente por linhas a A, então B é inversível se, e somente se, A é inversível.

Prova: Se B é equivalente por linhas a A, então existe uma matriz inversível $P = E_k \dots E_1$ (um produto de matrizes elementares) tal que $B = PA$.

($\Rightarrow$) Assim, se A é inversível, então B é o produto de duas matrizes inversíveis sendo, portanto, uma matriz inversível cuja inversa é $B = (PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1}$.

($\Leftarrow$) Multiplicando ambos os lados da equação $B = PA$ por P^{-1}, obtém-se $A = P^{-1}B$. Desse modo, se B é inversível, então A é também inversível, pois é o produto de duas matrizes inversíveis, com inversa dada por $A^{-1} = (P^{-1}B)^{-1} = B^{-1}P$.

■ **DEFINIÇÃO 1.9:** Uma matriz R $m \times n$ é dita reduzida por linhas se:

(∗) o primeiro elemento não-nulo em cada linha não-nula de R é igual a 1;

(∗∗) cada coluna de R que contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha (não-nula) tem todos os seus outros elementos nulos.

EXEMPLO 21: As seguintes matrizes são do tipo reduzida por linhas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 2-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 22: Dois exemplos de matrizes que não são do tipo reduzida por linhas são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que a primeira matriz não satisfaz a condição (∗∗) na terceira coluna, enquanto que a segunda não satisfaz a condição (∗) na primeira linha.

TEOREMA 1.9: Toda matriz $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é equivalente por linhas a uma matriz R reduzida por linhas.

Prova: Se a primeira linha de $A = [a_{ij}]$ é nula, então, em relação à linha 1, a condição (⁎) está satisfeita. Se a linha 1 tem um elemento não-nulo, seja k_1 a coluna onde se encontra o primeiro elemento não-nulo da linha 1, isto é, $a_{1k_1} \neq 0$. Neste caso, multiplica-se a linha 1 por $a_{1k_1}^{-1}$. Assim, a condição (⁎) fica satisfeita em relação à linha 1. Depois, são efetuadas as seguintes operações elementares: $(linha\ i) \longleftarrow \left[\left(-a_{ik_1}\right) \times (\text{linha } 1)\right] + (\text{linha } i)$, para toda linha $i \neq 1$ com $a_{ik_1} \neq 0$. Denotando a matriz resultante por $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$, pode-se ver que neste estágio tem-se: $\tilde{a}_{ik_1} = 0$, para toda linha $i \neq 1$, e $\tilde{a}_{1k_1} = 1$.

Se a segunda linha da matriz resultante $\tilde{A}$ é nula, nada se faz à linha 2. Se algum elemento da linha 2 é não-nulo, então é claro que ele não pode ocorrer na coluna k_1. Assim, seja $k_2 \neq k_1$ a coluna onde aparece o primeiro elemento não nulo da linha 2 de $\tilde{A}$. Em seguida, multiplica-se a segunda linha dessa matriz $\tilde{A}$ pelo inverso multiplicativo do elemento não nulo que se encontra na linha 2 e coluna k_2. Após isto, o primeiro elemento não nulo da linha 2 torna-se 1. Em seguida, realiza-se as operações elementares sobre linhas: $(linha\ i) \longleftarrow \left[\left(-\tilde{a}_{ik_2}\right) \times (\text{linha } 2)\right] + (\text{linha } i)$, para todo $i \neq 2$ com $\tilde{a}_{ik_2} \neq 0$. Isto anula todos os elementos da coluna k_2 que se encontram abaixo e acima do primeiro elemento não nulo da linha 2. É muito importante notar que este último procedimento não altera as entradas da linha 1 que ocupam as colunas $1, \dots, k_1$; e também não alteram os elementos que estão na coluna k_1.

Repetindo este mesmo procedimento sobre as linhas remanescentes, uma depois da outra, chega-se (após um número finito destas etapas) a uma matriz do tipo reduzida por linhas. ▮

NOTAÇÃO: No que segue, denotaremos por $\mathcal{L}i$ a i-ésima linha de uma dada matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$, ou seja, consideraremos $\mathcal{L}i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, para todo $i = 1,2, \dots, m$.

Deve-se observar que o processo descrito na prova do teorema 1.9 estabelece, de forma efetiva, um algoritmo para transformar qualquer matriz A sobre um corpo $\mathbb{F}$ em uma matriz R reduzida por linhas, a qual é equivalente por linhas a A.

A seguir, são mostrados os passos deste algoritmo.

ALGORITMO 1.1.

Dados: Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$.

Passo 1: Faça $i = 0$.

Passo 2: Faça $i = i + 1$.

Passo 3: Se $i > m$, então pare.

Passo 4: Se $a_{ij} = 0$, $\forall\, j = 1, \dots, n$; então retorne para o Passo 2.

Passo 5: Determine o menor inteiro k_i, entre 1 e n, tal que $a_{ik_i} \neq 0$.

Passo 6: Faça

$$\mathcal{L}i \longleftarrow \left(a_{ik_i}^{-1}\right) \times \mathcal{L}i.$$

Passo 7: Para $r = 1, \dots, m$, se $r \neq i$ e $a_{rk_i} \neq 0$, faça

$$\mathcal{L}r \longleftarrow \left(-a_{rk_i}\right) \times \mathcal{L}i + \mathcal{L}r.$$

Passo 8: Volte para o Passo 2.

Saída: Uma matriz A do tipo reduzida por linhas.

EXEMPLO 23: Usando uma sequência finita de operações elementares sobre linhas, determinar uma matriz R reduzida por linhas tal que $R \sim A$, sendo A a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

» SOLUÇÃO: Seguindo os passos do algoritmo 1.1, o processo que determina a matriz R reduzida por linhas, a partir A, é mostrado no diagrama de setas:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}1 \leftarrow (1/2) \times \mathcal{L}1} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall\, i=2,3,4,5]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i2}) \times \mathcal{L}1 + \mathcal{L}i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}2 \leftarrow (1/3) \times \mathcal{L}2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall\, i=1,3,4,5]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i1}) \times \mathcal{L}2 + \mathcal{L}i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}4 \leftarrow (1/4) \times \mathcal{L}4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall\, i=1,2,3,5]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i3}) \times \mathcal{L}4 + \mathcal{L}i}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Neste diagrama, cada elemento indicado no interior de um quadrado é chamado de pivô. Portanto, como se costuma dizer, um pivô é usado para "zerar" os demais elementos (não-nulos) da sua coluna, mas não somente os que estão abaixo dele.

NOTAÇÃO: No que segue, manteremos o uso da notação k_i para indicar a coluna onde se encontra o primeiro elemento não-nulo da linha i de uma matriz.

EXEMPLO 24: Seja a matriz R reduzida por linhas, que possui 4 linhas não-nulas:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efetue sobre as linhas de R uma sequência de operações elementares constituída apenas de permutações de linhas, tal que a matriz resultante U possui as seguintes propriedades:

(a) as linhas $1, 2, 3$ e 4 de U são não-nulas;
(b) as colunas k_1, k_2, k_3 e k_4, onde se encontram os primeiros elementos não-nulos das, respectivas, linhas não nulas de U satisfazem a relação $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$.

» SOLUÇÃO: Note que as linhas não-nulas de R são as linhas 1, 3, 5 e 6. Assim, para esta matriz R as ditas colunas k_i são $k_1 = 1$, $k_3 = 5$, $k_5 = 4$ e $k_6 = 2$, que não estão na ordem indicada em (b). Portanto, para resolver este problema, inicialmente permutamos as linhas 2 e 6 de R, obtendo uma matriz R_1 cujas colunas k_i tomam agora a forma $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$ e $k_5 = 4$. Depois, permutamos as linhas 4 e 5 de R_1, obtendo uma matriz R_2, com $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$ e $k_4 = 4$. Finalmente, permutamos as linhas 3 e 4 da matriz R_2. Assim, chegamos a matriz reduzida por linha U, equivalente à matriz original R, tal que suas colunas k_i são dadas por $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$ e $k_4 = 5$, de modo que $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$. Este procedimento é ilustrado no seguinte diagrama de setas, de maneira que sobre cada seta mostramos a permutação de linhas utilizada:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R} \xrightarrow{\mathcal{L}2 \leftrightarrow \mathcal{L}6} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_1} \xrightarrow{\mathcal{L}4 \leftrightarrow \mathcal{L}5} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_2} \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftrightarrow \mathcal{L}4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

Observe que a relação $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ equivale a se afirmar o seguinte: se i e $i + 1$ são quaisquer duas linhas não-nulas consecutivas de U, então o número de entradas nulas (zeros) antes do primeiro elemento não-nulo da linha $i + 1$ é sempre maior que o número de entradas nulas (zeros) antes do primeiro elemento não-nulo da linha i.

O exemplo 24 indica a existência de uma importante subclasse de matrizes do tipo reduzida por linhas, tal que cada matriz U dessa subclasse pode ser obtida a partir de uma matriz reduzida por linha R, usando uma sequência de operações elementares sobre linhas, que consiste apenas em se efetuar, apropriadamente, um número finito de permutações das linhas de R. Mais formalmente, isto pode ser estabelecido como segue.

■ DEFINIÇÃO 1.10: Uma matriz U $m \times n$ é dita escalonada reduzida por linhas se:

($\lozenge$) U é reduzida por linhas;

($\lozenge\lozenge$) toda linha nula de U ocorre abaixo de todas as linhas que possuem elementos não-nulos;

($\lozenge\lozenge\lozenge$) se $1, 2, \dots, r$ são as linhas não nulas de U, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, onde k_i é a coluna onde se encontra o primeiro elemento não-nulo da linha i $(= 1,2, \dots, r)$.

EXEMPLO 25: As seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida por linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4i \\ 0 & 1 & 7i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 26: Este exemplo considera quatro matrizes reduzidas por linhas que não estão na forma escalonada reduzida por linhas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz viola a condição ($\lozenge\lozenge\lozenge$). A segunda, apesar de satisfazer a condição ($\lozenge\lozenge\lozenge$), não cumpre a condição ($\lozenge\lozenge$). A terceira também viola a condição ($\lozenge\lozenge\lozenge$). A última matriz infringe ambas as condições ($\lozenge\lozenge$) e ($\lozenge\lozenge\lozenge$).

TEOREMA 1.10: Toda matriz A $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é equivalente por linhas a uma matriz U escalonada reduzida por linhas.

Prova: Dada uma matriz A, a partir do teorema 1.9 sabemos que existe uma matriz R reduzida por linhas tal que A é equivalente por linhas a R. Portanto, para finalizar esta prova, basta observar que, efetuando um número finito de permutações de linhas, pode-se obter uma matriz U escalonada por linhas equivalente por linhas a A.

Feito isto, tem-se $A \sim R$ e $R \sim U$. Logo, pela propriedade transitiva da relação de equivalência entre matrizes, ocorre $A \sim U$, ou seja, A é equivalente por linhas a uma matriz escalonada reduzida por linhas, o que conclui a prova. ▌

EXEMPLO 27: Usando uma sequência finita de operações elementares sobre linhas, determine uma matriz U escalonada reduzida por linhas que é equivalente por linhas a matriz A, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -13 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

» SOLUÇÃO: Empregaremos os métodos descritos nas provas dos teoremas 1.9 e 1.10, como mostrado no seguinte diagrama de setas. Inicialmente, obtemos uma matriz R reduzida por linhas, após um número finito de operações elementares apropriadas. Finalmente, para este exemplo, duas operações de permutações de linhas bastaram para transformar R em uma matriz U escalonada reduzida por linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -13 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}1 \leftarrow (1/2)\times\mathcal{L}1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -13 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall\, i=2,3,4]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i1})\times\mathcal{L}1+\mathcal{L}i} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftarrow (1/8)\times\mathcal{L}3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/8 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall\, i=1,2,4]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i2})\times\mathcal{L}3+\mathcal{L}i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 21/8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}4 \leftarrow (8/21)\times\mathcal{L}4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall\, i=1,2,3]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i3})\times\mathcal{L}4+\mathcal{L}i}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R \xrightarrow{\mathcal{L}2 \leftrightarrow \mathcal{L}3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftrightarrow \mathcal{L}4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

EXEMPLO 28: Repita o exemplo 27 para a matriz complexa $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4i \end{bmatrix}$.

» SOLUÇÃO: Este problema é resolvido usando uma sequência de três operações elementares sobre linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4i \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftarrow (1/4i)\times\mathcal{L}3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}1 \leftarrow (-i)\times\mathcal{L}3+\mathcal{L}1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R} \xrightarrow{\mathcal{L}2 \leftrightarrow \mathcal{L}3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Note que, ao contrário do resultado obtido no exemplo 27, neste último exemplo a matriz U escalonada reduzida por linhas apresenta uma entrada diferente de 0 e 1.

TEOREMA 1.11: Se U é uma matriz quadrada $n \times n$ na forma escalonada reduzida por linhas, então $U = I$, onde I é a matriz identidade de ordem n, ou U possui uma linha nula.

Prova: Se U não tem nenhuma linha nula, então, pela condição (◊), o primeiro elemento de cada linha de U é igual a 1. Além disso, pela condição (◊◊◊), o número de entradas nulas (zeros) antes do primeiro elemento não-nulo da linha $i+1$ é sempre maior que o número de entradas nulas (zeros) antes do primeiro elemento não-nulo da linha i, para toda linha $i = 1,2,\dots,n-1$ de U. Logo, $U = I$. Portanto, só pode ocorrer um dos dois casos distintos: (i) $U = I$; (ii) U tem uma linha nula. ▌

TEOREMA 1.12: Toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ que possui uma linha nula é singular.

Prova: Considere que todas as entradas da r-ésima linha de A são nulas. Afirmamos que A é singular. Para demostrar isto, suponha (por contradição) que A é inversível. Então existe uma matriz quadrada $B = [b_{ij}]$ de ordem n tal que $AB = I$, sendo $I = [\delta_{ij}]$ a matriz identidade $n \times n$. Assim, fazendo $AB = [\lambda_{ij}]$ temos que

$$\lambda_{rr} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk} b_{kr} = \sum_{k=1}^{n} 0 \times b_{kr} = 0.$$

Por outro lado, como $AB = I$, então $\lambda_{rr} = \delta_{rr} = 1$. O que é um absurdo. Logo, a matriz A é singular. ▌

O próximo resultado é fundamental para se estabelecer um procedimento para verificar se uma dada matriz A é inversível e, quando for o caso, calcular a matriz inversa A^{-1}.

COROLÁRIO 1.13: Uma matriz quadrada A $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é inversível se, e somente se, é equivalente por linhas a matriz identidade I de ordem n.

Prova: ($\Rightarrow$) Pelo teorema 1.10, A é equivalente por linhas a uma matriz U escalonada reduzida por linhas. Isto significa que existe uma sequência finita de matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tal que

$$U = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A.$$

Pelo teorema 1.11, $U = I$ ou U possui uma linha nula. Em outras palavras, usando o teorema 1.12, $U = I$ ou U é singular. Como toda matriz elementar é inversível, se A é inversível então $U = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$ é também inversível, pois é o produto de matrizes inversíveis. Portanto, se a matriz A é inversível, então $U = I$.

($\Leftarrow$) Se A é equivalente por linhas a matriz identidade, então a partir do corolário 1.7 sabe-se que A é inversível. ▌

Dada uma matriz quadrada A $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, pelo corolário 1.13, sabe-se que A é inversível se, e somente se, existe uma sequência de matrizes elementares $E_1 \ldots E_k$ tal que

$$\boxed{E_k E_{k-1} \ldots E_1 A = I}$$

Multipicando ambos os lados desta equação por A^{-1} obtém-se

$$\boxed{E_k E_{k-1} \ldots E_1 I = A^{-1}}$$

Portanto, chega-se ao seguinte resultado de grande interesse prático:

COROLÁRIO 1.14: Se A é inversível e se $E_k E_{k-1} \ldots E_1$ é a sequência de matrizes elementares que reduz A a identidade I, então esta mesma sequência de operações elementares sobre linhas, quando aplicada a I, produz a inversa A^{-1}.

Agora, estamos em condições de descrever o procedimento para calcular a inversa de uma matriz inversível, que também pode ser empregado para verificar se uma matriz quadrada é singular.

ALGORITMO 1. 2.

Dados: Uma matriz quadrada A $n \times n$.

Passo 1: Construa a chamada matriz ampliada, dada por $(A|I)$, onde I é a matriz identidade de ordem n.

Passo 2: Efetue uma sequência de operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada $(A|I)$, a fim de que a matriz A se transforme em uma matriz U escalonada reduzida por linhas:

$$(U|B) = E_k E_{k-1} \dots E_1 (A|I).$$

Passo 3: Se $U = E_k E_{k-1} \dots E_1 A = I$, então A é inversível e $A^{-1} = B = E_k E_{k-1} \dots E_1$. Caso contrário A é singular.

Saída: As matrizes U e B mais o diagnóstico sobre a inversibilidade de A.

EXEMPLO 29: Verificar se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ é inversível. Em caso afirmativo, obter sua inversa.

» SOLUÇÃO: Seguindo os passos do algoritmo 1.2, tem-se:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}1 \leftarrow (1/2)\times\mathcal{L}1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\forall\, i=2,3]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i1})\times\mathcal{L}1 + \mathcal{L}i}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}2 \leftarrow (1/3)\times\mathcal{L}2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4/3 & -1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & -9 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\forall\, i=1,3]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i2})\times\mathcal{L}2 + \mathcal{L}i}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/3 & 5/6 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -7/2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftarrow (1/14)\times\mathcal{L}3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/3 & 5/6 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/4 & 3/14 & 1/14 \end{array}\right) \xrightarrow[\forall\, i=1,2]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i3})\times\mathcal{L}3 + \mathcal{L}i}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/12 & -13/42 & 5/42 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/21 & -2/21 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/14 & 1/14 \end{array}\right) = (U|B).$$

Como $U = I$, então a matriz A é inversível e sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 5/12 & -13/42 & 5/42 \\ 1/6 & 1/21 & -2/21 \\ -1/4 & 3/14 & 1/14 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 30: Verificar se a matriz complexa $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\i&i&i\end{bmatrix}$ é singular.

» SOLUÇÃO: As etapas de redução da matriz ampliada são:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{1}&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\i&i&i&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\forall\, i=2,3]{\mathcal{L}i\leftarrow(-a_{i1})\times\mathcal{L}1+\mathcal{L}i}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&\boxed{1}&1&-1&1&0\\0&i&i&-i&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\mathcal{L}3\leftarrow(-i)\times\mathcal{L}2+\mathcal{L}3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&0&0&-i&1\end{array}\right)=(U|B).$$

A terceira linha da matriz $U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ é nula. Logo, A é singular.

Exercícios

1. Encontrar uma matriz R equivalente por linhas a A:
   (a) $A=\begin{bmatrix}3&-1&1&2\\2&1&0&-1\\1&-3&3&5\end{bmatrix}$, (b) $A=\begin{bmatrix}i&-(1+i)&0\\1&-2&1\\1&2i&-1\end{bmatrix}$.
2. Demonstrar que as duas matrizes seguintes não são equivalentes por linhas:
   $$\begin{bmatrix}2&0&0\\a&-1&0\\b&c&3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&0&-1\\1&3&5\end{bmatrix}$$
3. Determinar uma matriz U escalonada reduzida por linhas a A:
   (a) $A=\begin{bmatrix}1&-i\\2&2\\i&1+i\end{bmatrix}$, (b) $A=\begin{bmatrix}3&-6&2&0\\-2&4&1&3\\0&0&1&1\\1&-2&1&0\end{bmatrix}$
4. Para a matriz $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{bmatrix}$, obter a sequência de matrizes $E_1,\dots,E_k$ que transforma A em uma matriz escalonada reduzida por linhas.
5. Seja $A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\-1&0&3&5\\1&-2&1&1\end{bmatrix}$. Determinar uma matriz R do tipo reduzida por linhas que seja equivalente por linhas a A e uma matriz 3×3 inversível tal que $R=PA$. Repita o mesmo com a matriz $A=\begin{bmatrix}2&0&i\\1&-3&-i\\1&1&1\end{bmatrix}$
6. Descobrir se cada uma das matrizes é inversível e determinar a inversa, caso exista:
   $$\begin{bmatrix}1&1i\\2&2i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5&-1\\4&-1&2\\6&4&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&2&4\\0&1&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

3. Sistemas Lineares

Nesta seção, consideraremos o problema da determinação de n escalares x_i de um corpo $\mathbb{F}$ que satisfazem m equações do tipo:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad\;\; \vdots \quad & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

sendo $b_1, \dots, b_m$ e a_{ij}, $\forall\ 1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, escalares pertencentes ao corpo $\mathbb{F}$, dados previamente.

Juntas, estas equações formam o que se denomina de um sistema de m equações lineares a n incógnitas sobre o corpo $\mathbb{F}$, ou simplesmente, um sistema linear $m \times n$.

Toda lista de n elementos $(x_1, \dots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente todas estas equações é denominada de uma solução do sistema linear.

Um sistema linear $m \times n$ pode ser escrito na chamada forma matricial:

$$AX = b,$$

Nesta equação, a matriz $m \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é denominada de matriz dos coeficientes do sistema linear. A matriz coluna $m \times 1$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes e, finalmente, a matriz coluna $n \times 1$ denotada por

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é a matriz das incógnitas do sistema.

A matriz ampliada

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

é comumente denominada de matriz aumentada do sistema linear $AX = b$.

■ DEFINIÇÃO 1.11: Um sistema linear que não possui solução é dito inconsistente. Se o sistema tem solução, então é denominado consistente.

Um sistema consistente com uma única solução é chamado determinado, caso contrário é dito indeterminado

O seguinte resultado é a chave para o desenvolvimento da metodologia usada aqui para a resolução de sistemas lineares.

TEOREMA 1.15: Seja $AX = b$ um sistema linear $m \times n$ consistente. Se $(B|c)$ é uma matriz equivalente por linhas a matriz aumentada $(A|b)$, então os sistemas lineares $AX = b$ e $BX = c$ possuem exatamente as mesmas soluções.

Prova: Primeiro, note que realizar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada $(A|b)$ é inteiramente equivalente a realizar as mesmas operações sobre as linhas do sistema linear $AX = b$.

Em seguida, observe que trocar a r-ésima linha do sistema, dada por $a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_r = b_r$, pela r-ésima linha multiplicada por um escalar $c \neq 0$, dada por $c(a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}) = cb_r$, ou trocá-la pela r-ésima linha somada com a s-ésima linha multiplicada por um escalar c qualquer, dada por $(a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}b_r) + c(a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}) = b_r + cb_s$, são operações que não mudam o conjunto solução do sistema linear $AX = b$. O mesmo ocorre se a r-ésima linha for permutada com a s-ésima.

Como $(B|c) = E_k \ldots E_1(A|b)$, sendo $E_k \ldots E_1$ uma sequência de operações elementares sobre linhas, então os sistemas $AX = b$ e $BX = c$ possuem as mesmas soluções. ▮

■ DEFINIÇÃO 1.12: Dois sistemas lineares $AX = b$ e $BX = c$, ambos $m \times n$, são ditos equivalentes, se as matrizes aumentadas $(A|b)$ e $(B|c)$ são equivalentes por linhas.

Como veremos, o fato de uma matriz U ser escalonada reduzida por linhas torna a resolução do sistema linear $UX = c$ uma tarefa substancialmente simples.

Este fato e o resultado do teorema 1.15 permitem a elaboração de um método para obter as soluções de $AX = b$, chamado de *método da redução de Guass-Jordan*, o qual busca sistematicamente resolver um sistema equivalente $UX = c$, cuja matriz dos coeficientes $(U|c)$ está na forma escalonada reduzida por linhas e $(U|c) \sim (A|b)$.

ALGORITMO 1.3 (de Gauss-Jordan).

Dados: Um sistema linear consistente $AX = b$ de dimensão $m \times n$.

Passo 1: Construir a matriz aumentada $(A|b)$.

Passo 2: Obter uma matriz $(U|c)$ de modo que

$$(U|c) = E_k \dots E_1(A|b),$$

onde $E_k \dots E_1$ é uma sequência finita de matrizes elementares, tal que $(U|c)$ é uma matriz escalonada reduzida por linhas equivalente a $(A|b)$.

Passo 3: Determinar as soluções do sistema equivalente $UX = c$.

Saída: Matrizes X, $n \times 1$, soluções do sistema linear $AX = b$.

EXEMPLO 31: Encontrar as soluções do seguinte sistema linear sobre o corpo dos números reais:

$$\begin{aligned} x_1 \ + \ 2\,x_2 + 3\,x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 \ - \ \ \ x_2 + \ x_3 + 2\,x_4 &= 4 \end{aligned}$$

» SOLUÇÃO: A matriz aumentada do sistema é $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$.

Usando apenas três etapas, pode-se determinar uma matriz $(U|c)$ escalonada reduzida por linhas equivalente a $(A|b)$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}2 \leftarrow (-1)\times\mathcal{L}1 + \mathcal{L}2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) = \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftarrow (-1/3)\times\mathcal{L}1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}1 \leftarrow (-2)\times\mathcal{L}2 + \mathcal{L}1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right) = (U|c).$$

Assim, o sistema linear equivalente é dado por

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \frac{5}{3}x_3 + \ x_4 &= \ \frac{8}{3} \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \ x_4 &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Eliminando x_1 e x_2 a partir das equações deste sistema escalonado, obtém-se

$$\begin{aligned} x_1 &= \ \ \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4; \\ x_2 &= -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Designando valores escalares para x_3 e x_4, tais como $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$, nota-se que o sistema possui infinitas soluções, as quais são da forma:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\alpha - \beta \\ -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Portanto, o dado sistema linear é consistente e indeterminado.

EXEMPLO 32: Resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

» SOLUÇÃO: No seguinte diagrama de setas, mostramos cada operação elementar usada para obter uma matriz $(U|c)$ escalonada reduzida por linhas, equivalente a matriz aumentada deste sistema linear:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\forall\, i=2,3,4]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i1})\times\mathcal{L}1+\mathcal{L}i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}2 \leftarrow (-1/3)\times\mathcal{L}2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\forall\, i=1,3,4]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i2})\times\mathcal{L}2+\mathcal{L}i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -14/3 & -14/3 \\ 0 & 0 & -14/3 & -14/3 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftarrow (-3/14)\times\mathcal{L}3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & -14/3 & -14/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\forall\, i=1,2,4]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i3})\times\mathcal{L}3+\mathcal{L}i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (U|c).$$

Feito isto, o sistema linear equivalente é simplesmente:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, este sistema linear é consistente e determinado, tendo como solução única:

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O resultado a seguir é uma consequência direta do teorema 1.15.

COROLÁRIO 1.16: Sejam $AX = b$ e $BX = c$ dois sistemas lineares, ambos $m \times n$, onde a matriz aumentada $(B|c)$ é equivalente por linhas a $(A|b)$. Se $BX = c$ é inconsistente, então $AX = b$ é inconsistente.

Prova: Seja $BX = c$ um sistema linear inconsistente. Se $(B|c)$ é equivalente por linhas a $(A|b)$, então afirmamos que $AX = b$ é também inconsistente. De fato, suponha por contradição que $AX = b$ é consistente e seja a matriz $\tilde{X}$, $n \times 1$, uma solução de $AX = b$. Como $(A|b) \sim (B|c)$, então, pelo teorema 1.15, $\tilde{X}$ é também uma solução do sistema linear $BX = c$. Mas isto é um absurdo, pois $BX = c$ não tem solução. Portanto, $AX = b$ é inconsistente. ▮

O próximo exemplo mostra como o método de Gauss-Jordan pode ser utilizado para verificar se um dado sistema linear $AX = b$ é inconsistente.

Tal verificação é feita notando a presença de inconsistências matemáticas em uma ou mais equações do sistema escalonado $UX = c$ equivalente a $AX = b$.

EXEMPLO 33: Usando o método de redução de Gauss-Jordan, mostrar que o seguinte sistema linear (sobre o corpo dos números reais) é inconsistente:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 &= 6 \end{aligned}$$

» SOLUÇÃO: As etapas do processo de redução da matriz aumentada a uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas são dadas a seguir:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\forall\, i=2,3,4]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i1}) \times \mathcal{L}1 + \mathcal{L}i} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}2 \leftarrow (-1/3) \times \mathcal{L}2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\forall\, i=1,3,4]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i2}) \times \mathcal{L}2 + \mathcal{L}i} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 1 & 8/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}4 \leftarrow (1/14) \times \mathcal{L}4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 1 & 8/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftrightarrow \mathcal{L}4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 1 & 8/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U|c).$$

Assim, o sistema linear equivalente na forma escalonada pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{5}{3}x_3 + x_4 &= \tfrac{8}{3} \\ x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 - x_4 &= -\tfrac{4}{3} \\ 0x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Claramente não existe $x_4 \in \mathbb{R}$ que satisfaça a última equação $0x_4 = 1$. Logo o sistema equivalente $UX = c$ é inconsistente. Portanto, pelo corolário 1.16, o sistema original é também inconsistente.

TEOREMA 1.17: Seja A uma matriz quadrada $n \times n$, sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então A é inversível se, e somente se, fixada qualquer matriz b $n \times 1$ sobre $\mathbb{F}$ o sistema linear $AX = b$ possui uma única solução, a qual depende de b.

Prova: $(\Rightarrow)$ Seja A uma matriz $n \times n$ inversível e seja b uma matriz $n \times 1$ qualquer. Então é claro que $\hat{X} = A^{-1}b$ é solução do sistema linear $AX = b$, pois $A\left(\underbrace{A^{-1}b}_{\hat{X}}\right) = (AA^{-1})b = Ib = b$. Em seguida, supondo que $\hat{X}$ e $\tilde{X}$ são duas soluções deste sistema $AX = b$, para algum b previamente fixado, então pode-se escrever $A\hat{X} - A\tilde{X} = b - b = 0$, ou seja, $A(\hat{X} - \tilde{X}) = 0$. Como A é inversível, multiplicando ambos os lados desta última equação por A^{-1}, verifica-se que $\hat{X} - \tilde{X} = 0$, ou seja, $\hat{X} = \tilde{X}$.

Portanto, se A é inversível, o sistema $AX = b$ tem uma única solução, dada por $X = A^{-1}b$, a qual obviamente depende da escolha de b.

$(\Leftarrow)$ Suponha que o sistema $AX = b$ é determinado, para toda matriz b $n \times 1$. Seja $E_1 \dots E_k$ uma sequência de matrizes elementares de modo que

$$U = E_k \dots E_1 A$$

e U é uma matriz $n \times n$ escalonada reduzida por linhas. Assim, para qualquer b $n \times 1$, a matriz ampliada

$$(U|E_k \dots E_1 b)$$

é equivalente por linhas a matriz aumentada $(A|b)$ do sistema linear $AX = b$. Logo, pelo teorema 1.15, o sistema $UX = E_k \dots E_1 b$ é determinado, para qualquer matriz b $n \times 1$.

Nestas condições, pode-se afirmar que a matriz quadrada $U = [u_{ij}]$ não tem linha nula. Para verificar este fato, suponha, por contradição, que a r-ésima linha de U é nula, ou seja, $u_{rj} = 0$, para todo $j = 1, \dots, n$. Em seguida, como a sequência $E_k \dots E_1$ está fixada e a matriz b é arbitrária, então se pode selecionar b de modo que a matriz coluna $c = E_k \dots E_1 b$ possui sua r-ésima entrada não nula, ou seja, $c_r \neq 0$. Assim, a r-ésima linha do sistema linear $UX = c$ apresenta a seguinte inconsistência:

$$0x_{r1} + 0x_{r2} + \cdots + 0x_{rn} = c_r \neq 0.$$

Mas isto é um absurdo, pois o sistema $UX = E_k \dots E_1 b$ é determinado, para todo b. Desse modo, fica provado que a matriz U escalonada reduzida por linhas não possui nenhuma linha nula.

Logo, o teorema 1.11 garante que $U = I$, ou seja, U é a identidade de ordem n. Consequentemente, a matriz A é equivalente por linhas a matriz identidade e, portanto, a partir do corolário 1.13, conclui-se que A é inversível. ▌

■ DEFINIÇÃO 1.13: Um sistema linear $AX = b$, $m \times n$, é dito homogêneo se $b = 0$.

É evidente que todo sistema homogêneo $AX = 0$ é consistente, pois admite sempre a solução $X = 0$, a qual é denominada de solução trivial.

EXEMPLO 34: Determinar as soluções do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

» SOLUÇÃO: Este sistema pode ser representado por $AX = 0$, sendo a matriz dos coeficientes dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, se pode observar que a matriz aumentada de um tal sistema homogêneo tem a forma particular $(A|0)$ e, neste caso, para toda sequência de matrizes elementares $E_1 \dots E_k$, ocorre

$$E_1 \dots E_k(A|0) = (E_1 \dots E_k A|0).$$

Portanto, o uso do método de Guass-Jordan na resolução de um sistema homogêneo pode ser simplificado. De fato, basta escalonar a matriz dos coeficientes A, em vez da matriz aumentada $(A|0)$.

Desse modo, o seguinte diagrama de setas mostra as etapas do processo de redução usado para se obter a matriz escalonada reduzida por linhas $U \sim A$:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall\, i=2,3]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i1}) \times \mathcal{L}1 + \mathcal{L}i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall\, i=1,3]{\mathcal{L}i \leftarrow (-a_{i2}) \times \mathcal{L}2 + \mathcal{L}i}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}3 \leftarrow (-1) \times \mathcal{L}2 + \mathcal{L}3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U.$$

Assim, o sistema homogêneo equivalente $UX = 0$ tem a seguinte forma escalonada:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 0 \\ x_4 \quad &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Atribuindo valores arbitrários as incógnitas x_2 e x_3, tais como $x_2 = \alpha$ e $x_3 = \beta$, conclui-se que o sistema homogêneo original $AX = 0$ é indeterminado, possuindo infinitas soluções da forma:

$$X = \begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escolhendo $\alpha = \beta = 0$, tem-se a solução trivial $X = 0$, comum a todo sistema homogêneo.

TEOREMA 1.18: Seja A uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se $m < n$, então o sistema homogêneo $AX = 0$ possui uma solução não-trivial.

Prova: Seja U uma matriz escalonada reduzida por linhas equivalente por linhas a matriz A. Então os sistemas homogêneos $AX = 0$ e $UX = 0$ possuem exatamente as mesmas soluções. Se k é o número de linhas não nulas de U, então é claro que $k \leq m$. Assim, como $m < n$, segue que $k < n$. Deste modo, pode-se tomar algum x_j que não aparece nas r linhas não-nulas do sistema escalonado e construir uma solução de $AX = 0$, com x_j possuindo um valor α arbitrário. Em particular, escolhendo $\alpha \neq 0$, obtém-se uma solução não trivial do sistema homogêneo $AX = 0$. ∎

TEOREMA 1.19: Seja A uma matriz $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então A é inversível se, e somente se, o sistema homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial.

Prova: ($\Rightarrow$) Seja A uma matriz quadrada inversível. Então, pela prova do teorema 1.17, o sistema $AX = 0$ possui uma única solução, dada por $X = A^{-1}0 = 0$.

($\Leftarrow$) Suponha que o sistema homogêneo $AX = 0$, $n \times n$, possui somente a solução trivial. Seja U uma matriz escalonada reduzida por linhas equivalente por linhas a matriz A. Então o sistema homogêneo equivalente $UX = 0$ só possui a solução trivial. Assim, a matriz escalonada U não possui linha nula. De fato, se existisse r linhas nulas, então $r < n$ e, deste modo, seria possível tomar algum x_j que não aparece nas r linhas não-nulas do sistema escalonado e construir uma solução não trivial de $AX = 0$. Portanto, a matriz quadrada U não tem linha nula e, pelo teorema 1.11, $U = I$, sendo I a identidade de ordem n. Logo, a matriz A é equivalente por linhas a matriz identidade e, portanto, a partir do corolário 1.13, conclui-se que A é inversível. ∎

EXEMPLO 35: Mostrar que o sistema linear homogêneo só possui a solução trivial:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

» SOLUÇÃO: A matriz dos coeficientes deste sistema é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Como mostrado no exemplo 29, esta matiz é inversível. Logo, o sistema homogêneo só possui a solução trivial.

Corolário 1.20: Seja A uma matriz $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. O sistema homogêneo $A^T X = 0$ possui somente a solução trivial se, e somente se, A é inversível.

Prova: Este resultado segue diretamente do teorema 1.19, basta notar que A é inversível se, e somente se, a transposta A^T é inversível. No exemplo 15 verificamos que a transposta A^T é inversível, se A é inversível. Logo, nos resta provar a recíproca: se a transposta A^T é inversível então A é inversível. Para isto, seja B a inversa de A^T. Então, note que ocorrem as seguintes implicações: (i) $BA^T = I \Rightarrow (AB^T)^T = I \Rightarrow AB^T = I$; (ii) $A^T B = I \Rightarrow (B^T A)^T = I \Rightarrow B^T A = I$. Logo $AB^T = B^T A = I$. Portanto, A é inversível e $A^{-1} = B^T$. ▌

Exercícios

1. Determinar todas as soluções dos seguintes sistemas lineares:

(a)
$$\begin{aligned} (1-i)x_1 - ix_2 &= 0 \\ 2x_2 + (1-i)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 5x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 13x_3 &= 0 \\ -\tfrac{7}{3}x_1 + 2x_2 - \tfrac{8}{3}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 &= -2 \\ 2x_1 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= -7 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Mostrar que os seguintes sistemas são inconsistentes:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 &= 6 \end{aligned}$$