Álgebra Linear Numérica

Estudando SVD

Gustavo Dias de Oliveira - 202010078511

Introdução

SVD (Decomposição em Valores Singulares) é uma técnica fundamental na álgebra linear numérica. Ela é usada para decompor uma matriz A em três componentes principais: matriz U^T, matriz Λ e matriz V, onde U e V são matrizes ortogonais e Λ é uma matriz diagonal.

A decomposição em valores singulares é geralmente representada como:

$$A = V \Lambda U^T$$

Onde:

- A é uma matriz m x n que queremos decompor.
- V é uma matriz m x m.
- Λ é uma matriz diagonal m x n.
- U^T é a transposta da matriz U, que é uma matriz n x n.

Os valores singulares são ordenados de forma decrescente na diagonal de Λ. Eles fornecem informações importantes sobre a matriz original A, incluindo sua forma, dimensionalidade e comportamento.

A decomposição SVD tem várias aplicações, como compressão de imagem, reconstrução de imagens, aproximação de matrizes, resolução de sistemas lineares, entre outros.

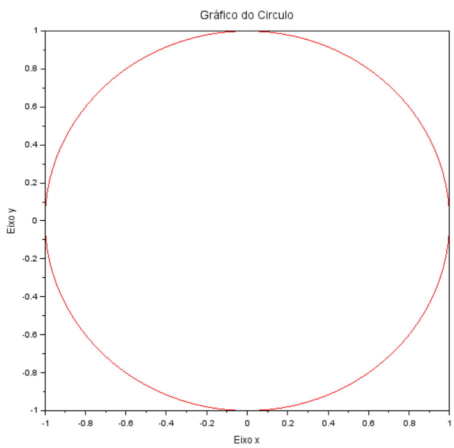
Desenvolvimento

Para realizar o estudo sobre SVD, foi criado um círculo e uma matriz A, onde:

Matriz A:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

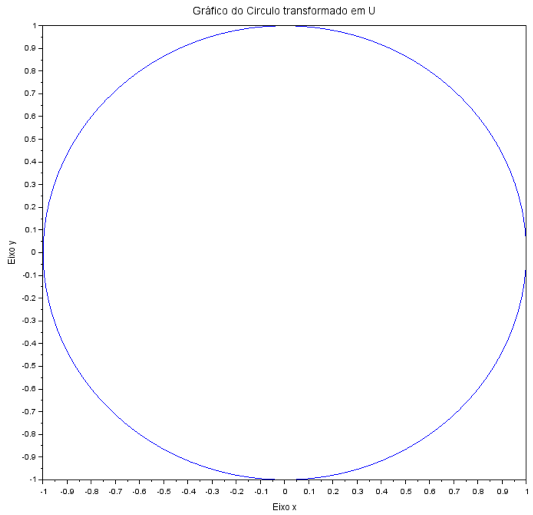
Circulo:



Após isso foi utilizado o SVD para decompor a matriz em ($V \Lambda U^T$), para entender o que cada uma dessas matrizes que foi gerada pela decomposição de A faz, vamos multiplicar elas em 3 etapas.

1º Etapa: U^T . Circulo

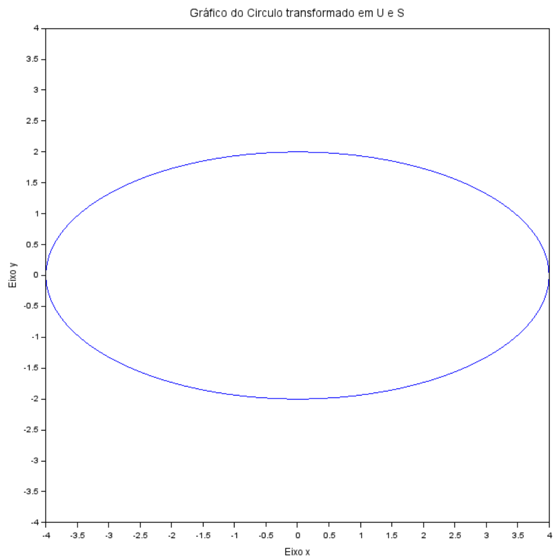
Que gerou o seguinte gráfico:



Aqui não conseguimos perceber muito bem a diferença, pois a matriz U^T faz a rotação do círculo até os eixos estarem na direção de esticamento desejadas.

2º Etapa: Λ . U^T . Circulo

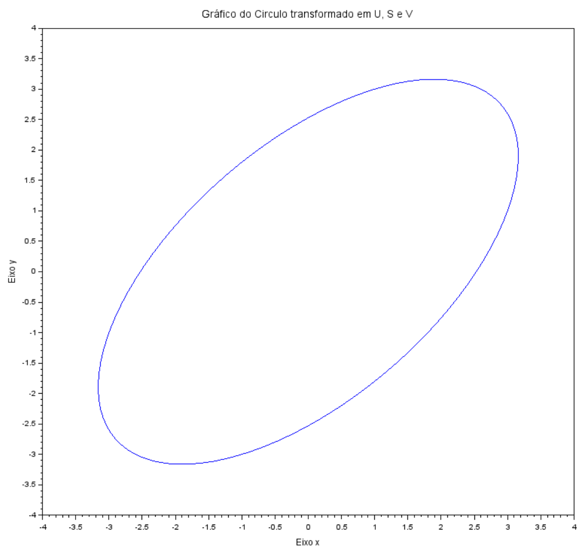
Gerando o gráfico:



Aqui conseguimos perceber melhor a diferença, pois a matriz Λ é quem faz o esticamento dos eixos até o tamanho desejado.

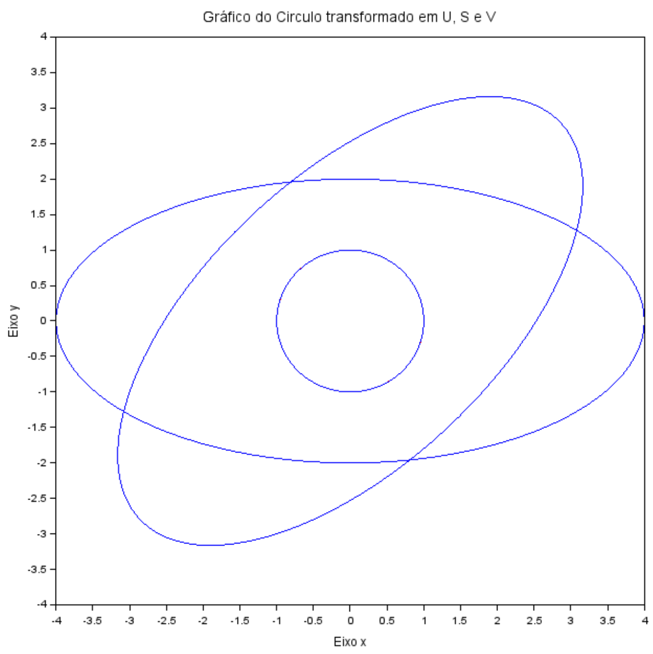
3º Etapa: V . Λ . U^T . Circulo

Gerando o gráfico:



Também conseguimos perceber nitidamente a diferença, pois a matriz V é quem gira de forma arbitraria a nova elipse formada pela 2 etapa. Onde essa é a elipse final caso fosse efetuado o produto direto entre a matriz e a circunferência.

Analisando os 3 passos juntos temos:



Onde na 1º etapa foi feita a rotação dos eixos, na 2º etapa foi esticada em direção aos eixos e na 3º etapa a elipse foi rotacionada de forma arbitrária.

Para realizar um estudo mais refinado, foi criado mais duas matrizes B(aleatória) e C(não-aleatória), Onde:

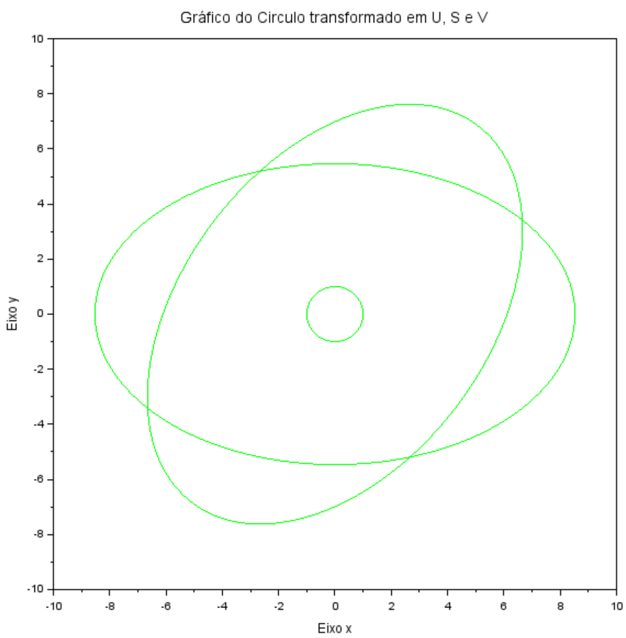
Matriz B:

$$\begin{vmatrix} 2.26 & 7.61 \\ 6.27 & 0.49 \end{vmatrix}$$

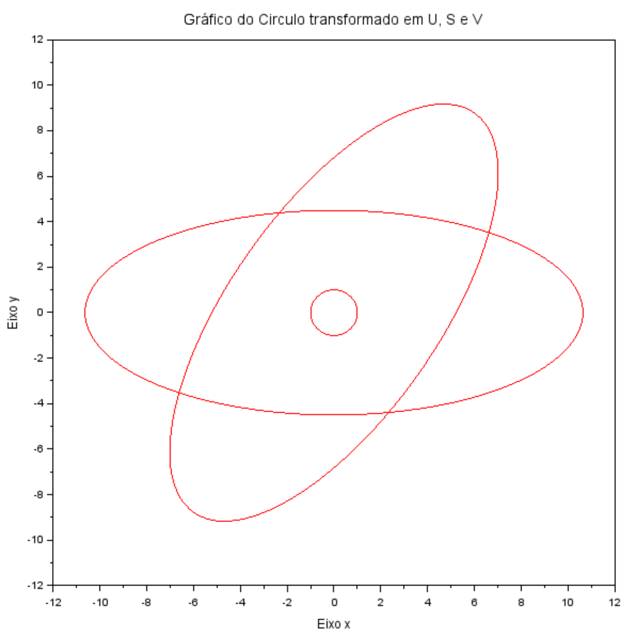
Matriz C:

$$\begin{vmatrix} 6.72 & 3.91 \\ 2.02 & 8.30 \end{vmatrix}$$

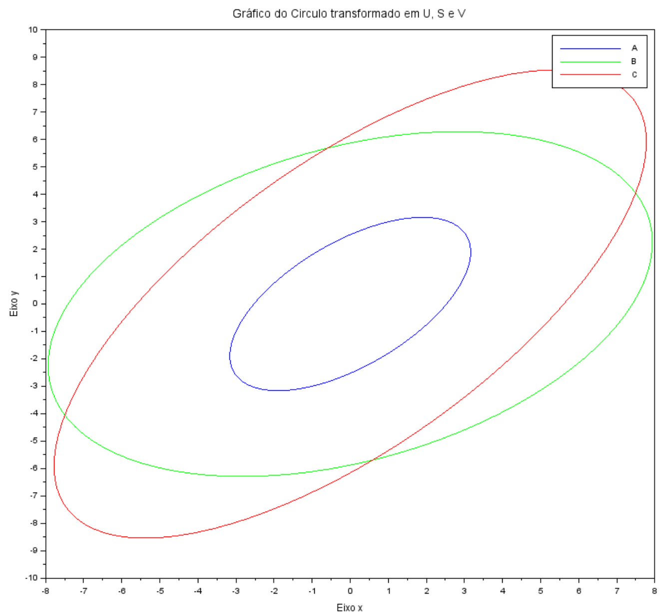
Que após todos os cálculos da SVD, as 3 etapas, temos a representação da matriz B dada por:



Após todos os cálculos da decomposição SVD, que consiste nas 3 etapas, obtemos a representação da matriz C dada por:



Que sobrepondo o resultado final das matrizes A, B e C obtemos o seguinte grafico abaixo:



Que se pode perceber que uma mesma circunferência pode tomar diversas formas diferentes dependendo da matriz que for multiplicada.

E tendo isso em mente, podemos analisar, estudar e criar diversas aplicações diferentes apenas com multiplicação de matrizes, nesse caso usando SVD.

Esse estudo foi realizado com o seguinte código:

```
// Plotar um círculo unitário

c = linspace(0, 2*%pi, 100);
x = cos(c);
y = sin(c);

// Escolher uma matriz

A = [3 1; 1 3];
disp(A);
B = 10 * rand(2, 2);
disp(B);
C = [6.72 3.91; 2.02 8.30];
disp(C);

// Realizar SVD
[UA,SA,VA] = svd(A);
[UB,SB,VB] = svd(B);
[UC,SC,VC] = svd(C);
```

```
// Transformação
pontos = [x; y];

pontostransformados1A =  UA * pontos;
pontostransformados2A = SA * pontostransformados1A
pontostransformados3A = VA * pontostransformados2A

pontostransformados1B =  UB * pontos;
pontostransformados2B = SB * pontostransformados1B
pontostransformados3B = VB * pontostransformados2B

pontostransformados1C =  UC * pontos;
pontostransformados2C = SC * pontostransformados1C
pontostransformados3C = VC * pontostransformados2C

//xtitle('Gráfico do Circulo', 'Eixo x', 'Eixo y');
//plot(x, y, 'red');

//-----------------------------------------------------------------

//xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U', 'Eixo x', 'Eixo y');
//plot(pontostransformados1A(1,:), pontostransformados1A(2,:), 'blue');
//
//xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U e S', 'Eixo x', 'Eixo y');
//plot(pontostransformados2A(1,:), pontostransformados2A(2,:), 'blue');
//
xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U, S e V', 'Eixo x', 'Eixo y');
plot(pontostransformados3A(1,:), pontostransformados3A(2,:), 'blue');

//-----------------------------------------------------------------

//xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U', 'Eixo x', 'Eixo y');
//plot(pontostransformados1B(1,:), pontostransformados1B(2,:), 'green');
//
//xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U e S', 'Eixo x', 'Eixo y');
//plot(pontostransformados2B(1,:), pontostransformados2B(2,:), 'green');
//
xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U, S e V', 'Eixo x', 'Eixo y');
plot(pontostransformados3B(1,:), pontostransformados3B(2,:), 'green');

//-----------------------------------------------------------------

//xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U', 'Eixo x', 'Eixo y');
//plot(pontostransformados1C(1,:), pontostransformados1C(2,:), 'red');
//
//xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U e S', 'Eixo x', 'Eixo y');
//plot(pontostransformados2C(1,:), pontostransformados2C(2,:), 'red');
//
xtitle('Gráfico do Circulo transformado em U, S e V', 'Eixo x', 'Eixo y');
plot(pontostransformados3C(1,:), pontostransformados3C(2,:), 'red');

legend('A', 'B', 'C')
```

Conclusão

Em resumo, o estudo sobre a decomposição em valores singulares (SVD) envolveu a criação de um círculo e uma matriz A. Onde A matriz A foi decomposta em três etapas: (U^T.Circulo), (Λ.U^T.Circulo) e (V.Λ.U^T.Circulo). Cada uma dessas etapas produziu transformações diferentes no círculo.

Na primeira etapa, a matriz U^T realizou uma rotação do círculo para alinhar os eixos com a direção de esticamento desejada. **Na segunda etapa**, a matriz Λ esticou os eixos até o tamanho desejado, resultando em uma elipse. **Na terceira etapa**, a matriz V girou arbitrariamente a elipse formada na segunda etapa.

Além disso, para um estudo mais refinado, foram criadas mais duas matrizes, B e C, e aplicadas as mesmas etapas da SVD. As representações finais das matrizes B e C foram obtidas e sobrepostas ao resultado final da matriz A.

Ao analisar as três etapas em conjunto, pode-se observar que a rotação dos eixos, o esticamento em direção aos eixos e a rotação arbitrária resultaram em diferentes formas da elipse final, dependendo da matriz multiplicada.

Essa observação demonstra que a multiplicação de matrizes, nesse caso, utilizando a SVD, pode ter várias aplicações e possibilita a criação de diferentes transformações geométricas. Isso abre caminho para explorar e desenvolver diversas aplicações utilizando esse conceito.