MMQ - Resumo

Julio Tedesco & Enrique Arias Chinga

Considerando um conjunto de n pontos e com incerteza de medidas somente em y (ou seja, ignorando que a medida em x gere incerteza). Se estes pontos seguem uma tendência linear, a reta que melhor exprime o comportamento dos pontos tem os seguintes valores de a e b:

$$y(x) = a + bx \qquad \begin{cases} a \pm \Delta a \\ b \pm \Delta b \end{cases}$$

Medida i	x_i	y_i	Δy_i
1	x_1	y_1	Δy_1
2	x_2	y_2	Δy_2
3	x_3	y_3	Δy_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	Δy_n

$$\boxed{a = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{n\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

$$\begin{cases} (\Delta a)^2 = \dfrac{1}{D}\left(\sum x_i^2\right)\sigma^2 \\[2ex] (\Delta b)^2 = \dfrac{1}{D} n\sigma^2 \end{cases}$$

Onde:

$$D = n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2 \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

Considerando um conjunto de n pontos e com incerteza de medidas somente em y (ou seja, ignorando que a medida em x gere incerteza). Se estes pontos seguem uma tendência linear, a reta que melhor exprime o comportamento dos pontos tem os seguintes valores de a e b:

Medida i	x_i	y_i	Δy_i
1	x_1	y_1	Δy_1
2	x_2	y_2	Δy_2
3	x_3	y_3	Δy_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	Δy_n

$$y(x) = a + bx \quad \begin{cases} a \pm \Delta a \\ b \pm \Delta b \end{cases}$$

E os parâmetros que medem a qualidade do ajuste são:

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

Onde: $\bar{y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$

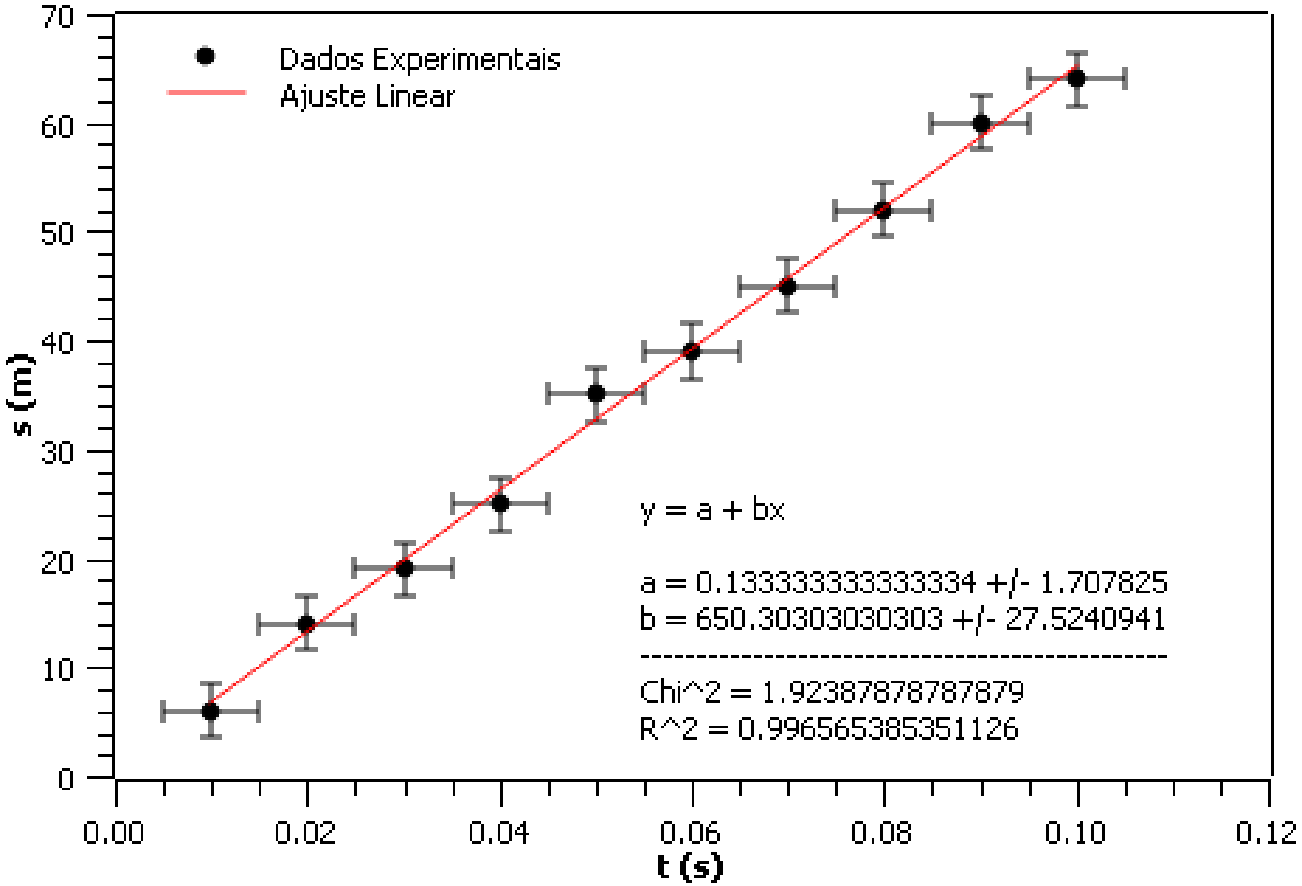
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{(\Delta y_i)^2}$$

Bons ajustes implicam em:
$r^2 \to 1$ e $\chi^2 \to 0$

Votamos nossa atenção para o SciDavis agora....

Considerando um conjunto de 10 pontos e com incerteza de medidas conforme abaixo, optamos por fazer 4 gráficos e seus respectivos ajustes: <u>um com as barras de erros em x e y</u>; outros 2 onde um terá as barras de erro somente em <u>y</u> e o outro com as barras somente em x; e por fim um sem considerar nenhuma barra de erro.

t (± 0.005 s)	s (± 2.5 m)
0.010	6.0
0.020	14.0
0.030	19.0
0.040	25.0
0.050	35.0
0.060	39.0
0.070	45.0
0.080	52.0
0.090	60.0
0.100	64.0

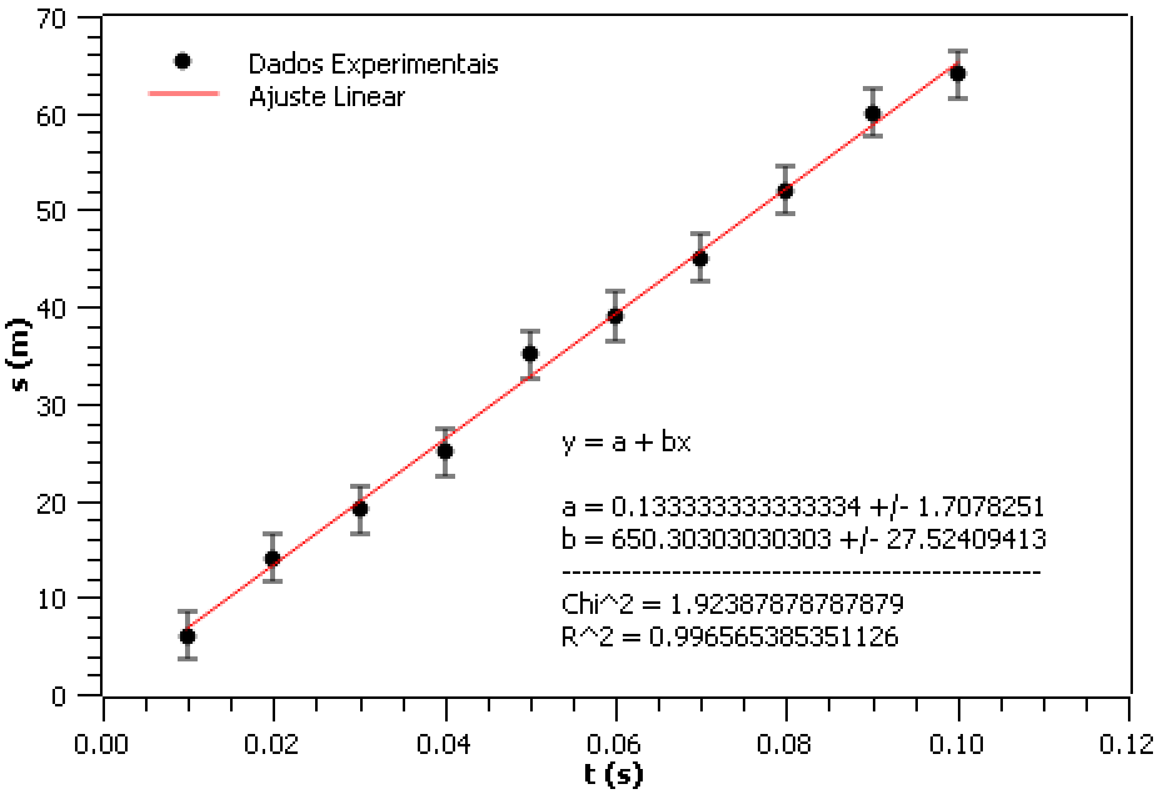


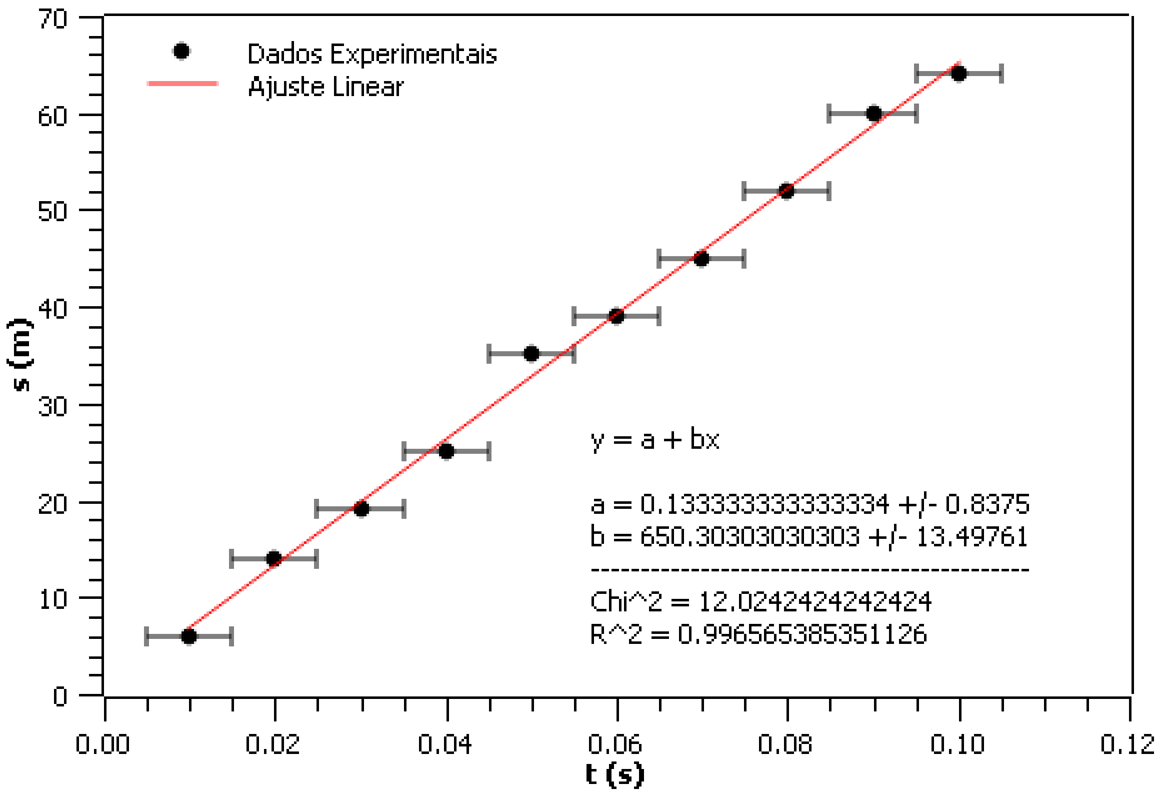
$$\chi^2 = 1.924; r^2 = 0.99656$$

$$\begin{cases} a = (0.13 \pm 1.71)\ m \\ b = (650 \pm 30)\ m\ s^{-1} \end{cases}$$

Os dados tem algarismos significativos variando entre 2 e 3, o que nos indica usar 2. No caso de χ^2 e r^2, 3 ou 4 casas decimais para dados com bom comportamento linear já são suficientes.

Considerando agora o mesmo conjunto de 10 pontos mas um dos gráficos conta com a incerteza <u>somente com incerteza y</u> e outro <u>somente com incerteza x</u>

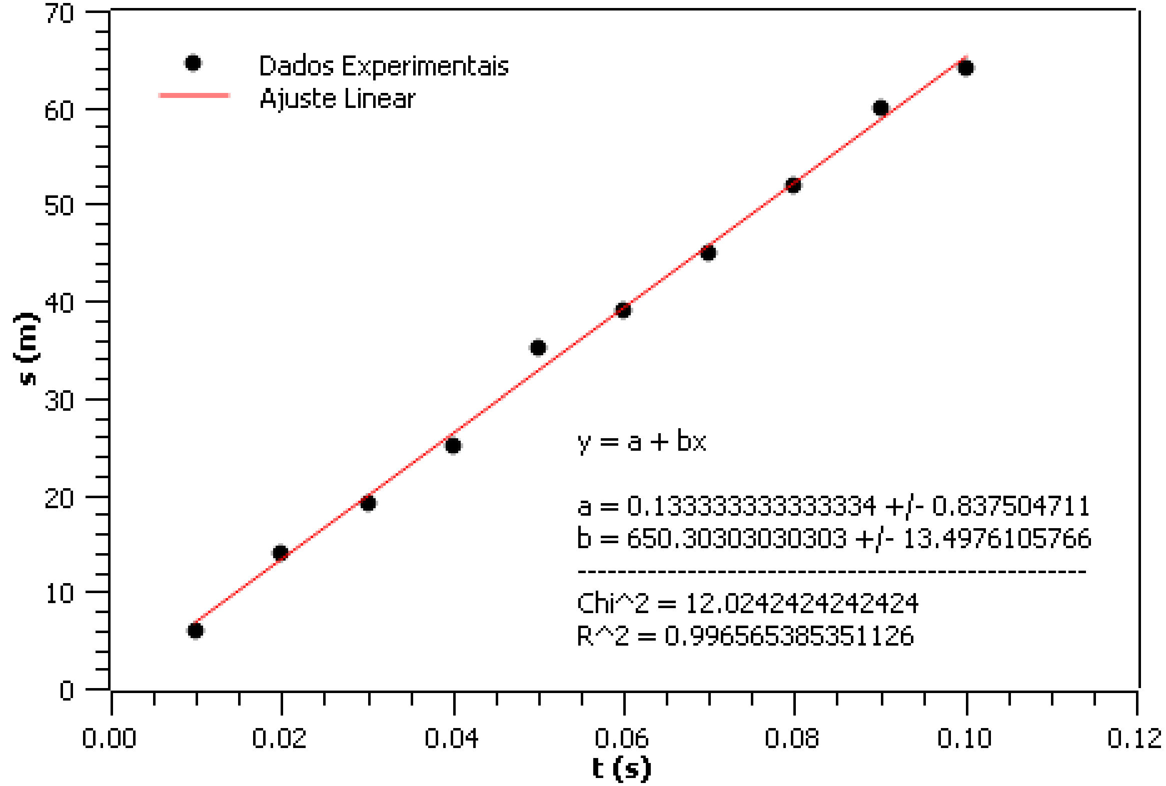




$$\begin{cases} \chi^2 = 1.939 \\ r^2 = 0.99656 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = (0.13 \pm 1.71)\ m \\ b = (650 \pm 30)\ m\ s^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi^2 = 12.024 \\ r^2 = 0.99656 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = (0.13 \pm 0.84)\ m \\ b = (650 \pm 10)\ m\ s^{-1} \end{cases}$$

Assim como anteriormente, os dados tem algarismos significativos variando entre 2 e 3, o que nos indica usar 2.
Repare que no caso do gráfico com as barras de erro somente em y, os parâmetros não se alteram quando comparamos com o gráfico anterior, onde haviam as barras de erro em x e em y. Contudo, se contarmos somente com as barras de erro em x, os δa e δb se alteram, assim como o χ^2.



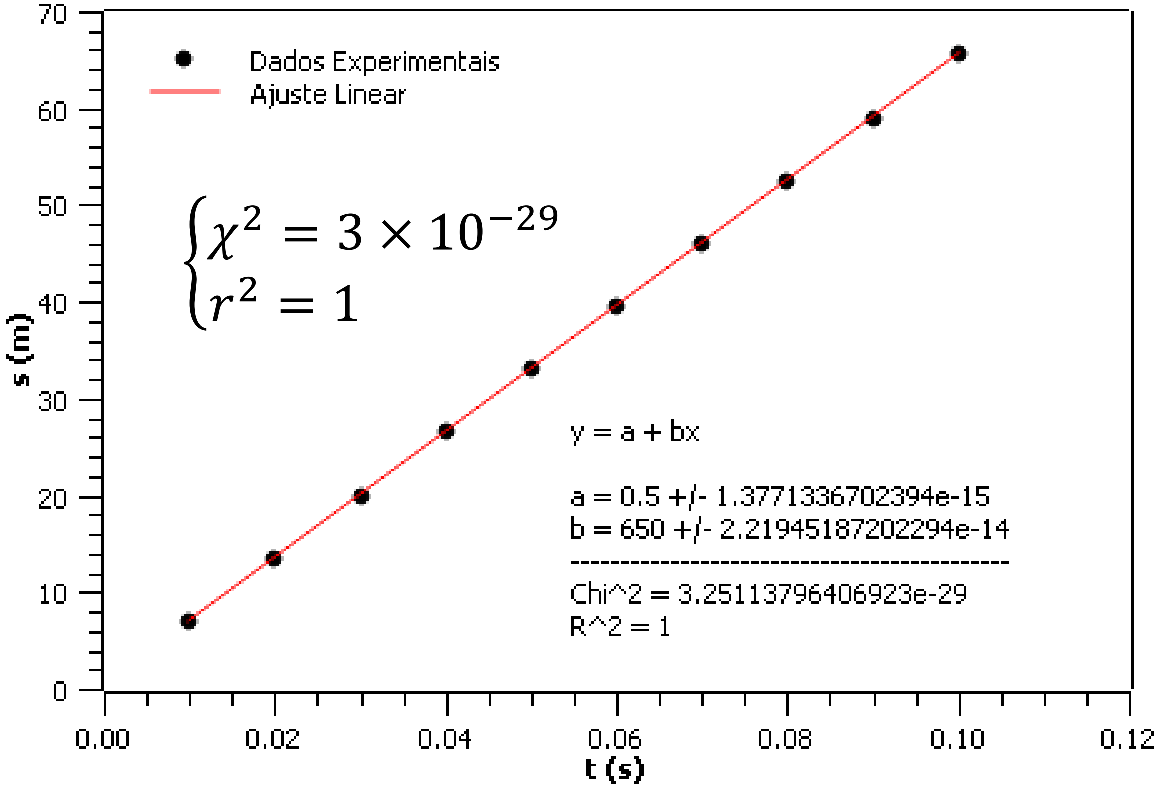
$$\begin{cases} a = (0.13 \pm 0.84)\ m \\ b = (650 \pm 10)\ m\ s^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \chi^2 = 12.024 \\ r^2 = 0.99656 \end{cases}$$

Acima há o gráfico feito usando os mesmo dados anteriores, porém sem considerar nenhuma barra de erro. Neste caso, os valores dos parâmetros são os mesmos do caso em que as barras de erro consideradas eram somente as incertezas de x. Isto indica o que foi dito nos vídeos: o método explicado considera a distância vertical entre o ponto e a melhor reta.

O gráfico abaixo foi gerado usando os pontos gerados a partir da função $y = 0.5 + 650x$, e por isto o ajuste leva à mesma reta. Neste caso, repare que δa e δb são extremamente pequenos comparados com a e b. Além disto $r^2 = 1$, como é para uma reta perfeita, e χ^2 tende a zero.

t (s)	s (m)
0.01	7.0
0.02	13.5
0.03	20.0
0.04	26.5
0.05	33.0
0.06	39.5
0.07	46.0
0.08	52.5
0.09	59.0
0.10	65.5

$$\begin{cases} a = 0.5\ m;\ \delta a = 10^{-15}\ m \\ b = 650\ m\ s^{-1};\ \delta b = 2 \times 10^{-14}\ m\ s^{-1} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \chi^2 = 3 \times 10^{-29} \\ r^2 = 1 \end{cases}$$