No caso (III) o teste falha e precisamos procurar outro teste ou forma de resolver. Vejam os exemplos do livro, página 664.

Outro teste usado é o teste da raiz, mais indicado para séries que envolvam n-ésimas potências.

Teste da raiz:

(I) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente. e, portanto, convergente.

(II) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, ou $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(III) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o teste não nos dá nenhuma conclusão e nada podemos afirmar sobre a convergência ou divergência.

→ Qual teste usar?

- Vimos até aqui vários tipos de séries e testes.

- No caso de séries que são da forma (ou podem ser escritas na forma após manipulações algébricas já que nem sempre a expressão de a_n estará "arrumadinha") geométrica, na forma da série p, ou série harmônica, por exemplo, basta conhecermos muito bem as definições das séries e a análise de convergência é simples.

- Caso tenhamos outros tipos de séries, devemos analisar o que é mais prático e possível usar:

→ Teste da comparação: conheço uma série mais simples que a série dada, com expressão parecida (não precisa ser igual) e sei que essa série converge (ou diverge).

→ Teste da integral: é possível calcular $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ com $a_n = f(n)$ e as condições desse teste são satisfeitas. (Devo conhecer as condições e verificar).

→ A série é da forma $\sum (-1)^{n-1} \cdot b_n$ ou $\sum (-1)^n \cdot b_n$ sendo uma série alternada →, então podemos usar o Teste da Série Alternada.

→ Se preciso verificar a convergência absoluta, usa-se o teste da razão se possível, caso contrário usa-se o teste da raiz, dependendo da série em questão.