Fundamentos da Álgebra Linear

Nélio Henderson

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fundamentos da Álgebra Linear

Nélio Henderson

Instituto Politécnico (IPRJ)
Nova Friburgo, Rio de Janeiro

A todos, todas e todes que se dedicaram a estudar Álgebra Linear em tempos de pandemia.

Capítulo 1

Vetores, Matrizes e Sistemas Lineares

1. O Espaço $\mathbb{V}^3$

Em mecânica clássica, com aplicações em várias áreas técnicas das engenharias, uma força representa a ação de um corpo sobre outro, de modo que uma dada força aplicada em um ponto do corpo é caracterizada por sua magnitude, sua direção e sentido. A intensidade de uma força é dada por um escalar, ou seja, por um número medido em um sistema de unidades apropriado. Por exemplo, no Sistema Internacional (SI) as unidades usadas para medir a magnitude de uma força são o Newton (N) e seus múltiplos. A direção de uma força é definida pela sua linha de ação, ou seja, pela reta ao longo da qual a força atua. Assim, levando-se em consideração magnitude e direção, uma força é representada por um segmento sobre sua linha de atuação, de maneira que o comprimento deste segmento pode ser escolhido para representar a magnitude da força em um sistema de unidades. Finalmente, o sentido da força é indicado por uma seta.

É verificado experimentalmente que duas forças $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ que atuam sobre um ponto material de um corpo (Fig. 1.1) podem ser substituídas por uma única força $\boldsymbol{R}$, que provoca o mesmo efeito sobre esse ponto do corpo. Esta força é chamada de resultante das forças $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$. Como mostra a Fig. 1.1, tal resultante pode ser obtida pela construção de um paralelogramo, onde $\boldsymbol{R}$ está sobre a diagonal que passa pelo referido ponto material. Este princípio, decorrente de experimentos práticos, é conhecido como *lei do paralelogramo* para a adição de duas forças

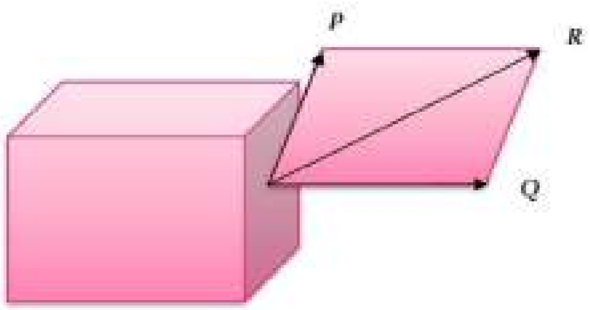


Fig. 1.1.

Não só as forças, mas também diferentes grandezas físicas tais como o deslocamento, velocidade, aceleração e momentos possuem magnitude, direção e sentido, deste modo são somadas de acordo com a lei do paralelogramo. Em mecânica, grandezas como essas são denominadas de *variáveis vetoriais* ou simplesmente vetores.

Vetores são objetos matemáticos que possuem magnitude, direção e sentido e que se somam de acordo com a lei do paralelogramo.

Segmentos Orientados e Vetores

Aqui, se denotará por $\mathbb{E}$ o espaço euclidiano tridimensional, aquele onde se encontram os objetos da geometria de Euclides, tais como retas, planos, esferas, cones, pirâmides, troncos de pirâmides etc. Em mecânica clássica, idealiza-se que os corpos físicos ocupam posições neste espaço euclidiano, de modo que suas partículas materiais são pontos de $\mathbb{E}$. Assim, $\mathbb{E}$ é um espaço de pontos.

Qualquer segmento de uma reta em $\mathbb{E}$ tem dois pontos extremos. Se um deles é tomado como a origem do segmento e o outro é considerado como sendo o seu ponto final, então o segmento em questão se denomina *segmento orientado*. Mais precisamente, dados dois pontos A e B sobre uma reta que se encontra em $\mathbb{E}$, pode-se considerar o segmento orientado denotado por $\overrightarrow{AB}$, onde o ponto A é a origem do segmento e B é seu ponto final, habitualmente denominado de extremo do segmento $\overrightarrow{AB}$. Nestas condições, o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ possui uma direção natural, a direção da reta sobre a qual ele se encontra. Tal segmento orientado possui também uma magnitude, o comprimento do segmento AB. Esta magnitude, chamada de norma do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, será denotada por $\|\overrightarrow{AB}\|$. Finalmente, pode-se notar que $\overrightarrow{AB}$ possui um sentido, aquele que vai da origem A para a extremidade B.

Um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ em $\mathbb{E}$ é uma flecha, com origem no ponto A e extremidade em B.

Dois segmentos orientados em $\mathbb{E}$ são considerados iguais se possuem módulos iguais, estão sobre retas paralelas (ou coincidentes) e estão orientados em um mesmo sentido. Por exemplo, a Fig. 1.2 mostra um paralelogramo $ABCD$, onde os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são iguais, pois $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$ e, além disso, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ possuem a mesma direção e o mesmo sentido. Mas os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ não são iguais, visto que não são paralelos. Os segmentos orientados $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$ possuem a mesma norma e a mesma direção, mas não são iguais pois estão orientados em sentidos opostos.

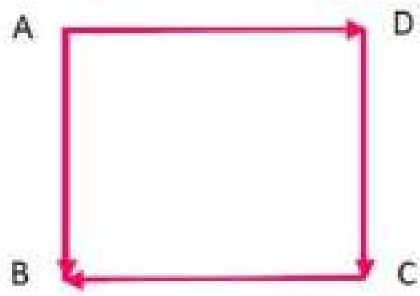


Fig. 1.2.

Com a noção de igualdade introduzida acima, tais segmentos orientados serão denominados de vetores. Mais precisamente, se estabelece o seguinte:

■ DEFINIÇÃO 1.1. Todos os segmentos orientados em $\mathbb{E}$ que são iguais entre si serão representados por um mesmo vetor. O conjunto de todos os vetores deste espaço euclidiano tridimensional (assim representado) será denotado por $\mathbb{V}^3$. Desta maneira, cada vetor $\boldsymbol{a}$ de $\mathbb{V}^3$ será único, no sentido de que $\boldsymbol{a}$ representará todos os segmentos orientados em $\mathbb{E}$ que possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\boldsymbol{a}$.

De acordo com a Fig. 1.2, considerando o vetor $\boldsymbol{a}$ como sendo o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, então $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Neste caso, a norma de $\boldsymbol{a}$, denotado por $\|\boldsymbol{a}\|$, é o comprimento do segmento AB, ou seja, $\|\boldsymbol{a}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$. A direção e o sentido do vetor $\boldsymbol{a}$ são aqueles definidos pelo segmento $\overrightarrow{AB}$, os quais são os mesmos do segmento $\overrightarrow{DC}$ desta mesma figura.

Um segmento orientado cuja origem coincide com sua extremidade representará o vetor zero, que será denotado por $\mathbf{0}$. Assim, se pode escrever $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ etc, tal que $\|\mathbf{0}\| = 0$.

É possível reenfatizar o conteúdo da definição dada acima à luz da teoria dos conjuntos. Para isso, será usado o conceito de classe de equivalência.

Tomando o conjunto de todos os segmentos orientados em $\mathbb{E}$, defina a relação entre os pares de elementos deste conjunto de segmentos, denotada pelo símbolo "$\sim$", que possui a seguinte propriedade: dois segmentos orientados quaisquer participam da relação $\sim$ se, e somente se, possuem o mesmo comprimentos, mesma direção e mesmo sentido.

Claramente, a relação $\sim$ assim definida é a relação de igualdade referida na definição 1.1, que simbolicamente pode ser descrita como $\boldsymbol{a} \sim \mathbf{b} \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. É fácil ver que esta relação satisfaz as propriedades:

- $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{a}$ (propriedade reflexiva);
- se $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$, então $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{a}$ (propriedade simétrica);
- se $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c}$, então $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ (propriedade transitiva).

Uma relação entre os elementos de um dado conjunto que satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva é denominada de *relação de equivalência*. Logo, a igualdade de vetores considerada aqui é uma relação de equivalência entre os segmentos orientados em $\mathbb{E}$.

Dado um segmento orientado $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, na presença da relação de equivalência definida acima, o subconjunto $[\![\boldsymbol{a}]\!] = \{\boldsymbol{b}; \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{a}\}$ é chamado de uma *classe de equivalência* do conjunto dos segmentos orientados em $\mathbb{E}$. Em outras palavras, esta classe de vetores é o subconjunto de todos os segmentos orientados que são iguais ao segmento $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$. Assim, se $\boldsymbol{b} \in [\![\boldsymbol{a}]\!]$, então se diz que $\boldsymbol{b}$ é equivalente a $\boldsymbol{a}$.

Diante do exposto, é possível destacar o seguinte:

> Um vetor $\boldsymbol{a}$ de $\mathbb{V}^3$ pode ser substituído por qualquer segmento orientado pertencente a sua classe de equivalência $[\![\boldsymbol{a}]\!]$.

Este destaque é útil para enfatizar que, ao se trabalhar com $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, pode-se (por conveniência prática) usar, no lugar deste vetor, um outro segmento orientado $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{DC}$ em $\mathbb{E}$ que seja equivalente ao segmento $\overrightarrow{AB}$ (Fig. 1.2).

A função $\boldsymbol{a} \longmapsto [\![\boldsymbol{a}]\!]$ é uma bijeção entre os elementos de $\mathbb{V}^3$ e as classes de equivalência dos segmentos orientados em $\mathbb{E}$, que estabelece uma identificação entre os segmentos orientados e suas respectivas classes de equivalência. Portanto, a menos das naturezas especificas de $\boldsymbol{a}$ e $[\![\boldsymbol{a}]\!]$, tal identificação permite (de uma maneira mais abstrata) olhar para um vetor como sendo uma classe de equivalência, ou seja, pode-se imaginar que

> $\mathbb{V}^3$ é o conjunto das classes de equivalência dos segmentos orientados em $\mathbb{E}$.

Soma de Vetores em $\mathbb{V}^3$

Sejam dois vetores de $\mathbb{V}^3$, denotados por $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Seguindo-se o que é verificado em mecânica, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são adicionados segundo a lei do paralelogramo. Assim, o vetor soma é obtido aplicando incialmente estes dois vetores em um mesmo ponto O de $\mathbb{E}$. Em seguida, escolhe-se dois pontos A e B em $\mathbb{E}$, de modo que ocorra $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$. Finalmente, é construído um paralelogramo que tem $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ como lados (Fig. 1.3). A diagonal deste paralelogramo que passa por O determina a soma dos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, sendo esta soma um vetor que se encontra em $\mathbb{V}^3$, indicado por $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

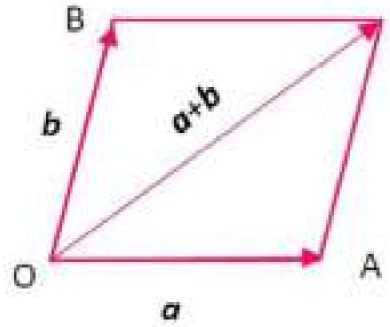
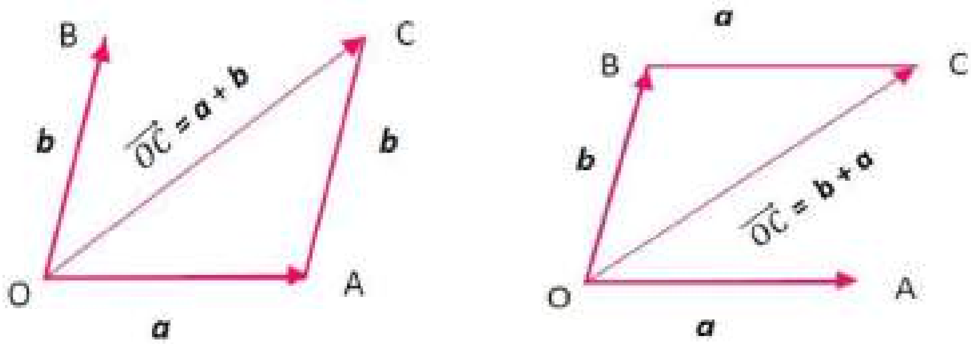


Fig. 1.3.

Como a lei do paralelogramo (Fig. 1.3) não depende da ordem segundo a qual $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são tomados para construir o vetor soma, então pode-se afirmar que a adição de vetores em $\mathbb{V}^3$ é uma operação *comutativa*, ou seja,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

Na Fig. 1.4-a, a soma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ foi obtido pela lei do paralelogramo. Observado essa figura, é fácil notar que os segmento orientados $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são equivalentes. Assim, considere uma nova representação para $\boldsymbol{b}$, dada por $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$. Desse modo, a origem dessa outra representação de $\boldsymbol{b}$ coincide com a extremidade do vetor $\boldsymbol{a}$. Este fato permite enunciar uma regra alternativa para a adição de vetores (decorrente da lei do paralelogramo), conhecida como *regra do triângulo*: *o vetor soma* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ *pode ser determinado pelo segmento orientado cuja origem coincide com a origem de* $\boldsymbol{a}$ *e sua extremidade coincide com a extremidade da nova representação de* $\boldsymbol{b}$. Com esta regra, se obtém $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OC}$ (Fig. 1.4-a).



(a) (b)

Fig. 1.4.

De forma inteiramente análoga, a regra do triângulo pode ser aplicada usando agora o triângulo OBC mostrado na Fig. 1.4-b. Neste caso, uma nova representação é empregada para $\boldsymbol{a}$, dada pelo vetor equivalente $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC}$, enquanto o vetor $\boldsymbol{b}$ é mantido na sua representação original, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$. Feito isso, a soma é determinada pelo vetor $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OC}$, cuja origem coincide com a origem da representação original de $\boldsymbol{b}$ e sua extremidade coincida com a extremidade da nova representação do vetor $\boldsymbol{a}$ ($\overrightarrow{BC}$ na Fig. 1.4-b).

A operação de adição de vetores de $\mathbb{V}^3$ possui a chamada propriedade associativa, ou seja, para quaisquer três vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ em $\mathbb{V}^3$ ocorre:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Para provar esta propriedade, seguindo a Fig. 1.5, trace o segmento orientado $\overrightarrow{OA}$, com extremidade no ponto A e faça $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$. Em seguida, construa o vetor $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$, com origem no ponto anterior A. Finalmente, a partir de B, trace o vetor $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BC}$. Agora, observando o triângulo OAB da Fig. 1.5 e usando a regra do triângulo para a soma de vetores, comprove que $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Feito isto, use novamente a regra do triângulo (desta vez sobre o triângulo OBC) para mostrar que $\overrightarrow{OC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$. Observando o mesmo polígono $OABC$da Fig. 1.5, note que a regra do triângulo, aplicada ao triângulo ABC mostra que $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$. Por último, a partir do triângulo OAC da Fig. 1.5, verifique que $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Assim, fica provado o resultado desejado, pois $\overrightarrow{OC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Portanto, devido a esta propriedade associativa, não há necessidade de se usar parênteses nesta soma, ou seja, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

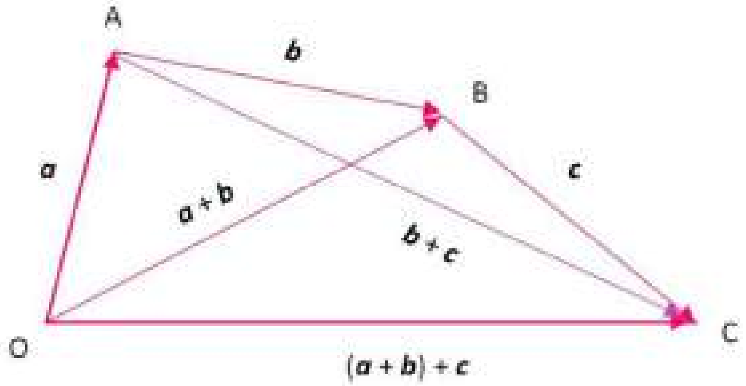


Fig. 1.5.

Retornando à Fig. 1.5, é importante observar que a análise vetorial realizada acima, para provar a propriedade comutativa, estabelece automaticamente uma regra (chamada de *regra do paralelogramo*) que pode ser usada para somar três ou mais vetores de $\mathbb{V}^3$. Para entender esta regra, note que o vetor soma da Fig. 1.5 foi obtido construindo o paralelogramo $OABC$, onde o primeiro lado coincide com o vetor $\boldsymbol{a}$, o segundo lado é formado dispondo-se do vetor $\boldsymbol{b}$, de modo que sua origem coincide com a extremidade de $\boldsymbol{a}$. O terceiro lado é construído com a ajuda do vetor $\boldsymbol{c}$, fazendo a origem deste vetor coincidir com a extremidade de $\boldsymbol{b}$. Finalmente, o vetor $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ (último lado do paralelogramo a ser construído) resulta do procedimento de unir a origem de $\boldsymbol{a}$ ao ponto que representa a extremidade de $\boldsymbol{c}$ (segmento $\overrightarrow{OC}$ da Fig. 1.5).

Dados, por exemplo, quatros vetores arbitrários $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$, para obter o vetor soma pela regra do polígono, se escolhe um ponto O em $\mathbb{E}$ e um segmento orientado equivalente ao vetor $\boldsymbol{a}$, dado por $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, onde A é um ponto apropriado em $\mathbb{E}$. Em seguida, com a ajuda dos vetores $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$, é construída uma linha poligonal, onde a origem de $\boldsymbol{b}$ coincide com a extremidade de $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, a origem de $\boldsymbol{c}$ coincide com a extremidade de $\boldsymbol{b}$ e, finalmente, a origem de $\boldsymbol{d}$ se encontra no mesmo ponto onde está a extremidade do vetor $\boldsymbol{c}$. Após este procedimento, o vetor soma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ é obtido unindo-se o ponto O à extremidade do vetor $\boldsymbol{d}$, formando desse modo um polígono (Fig. 1.6).

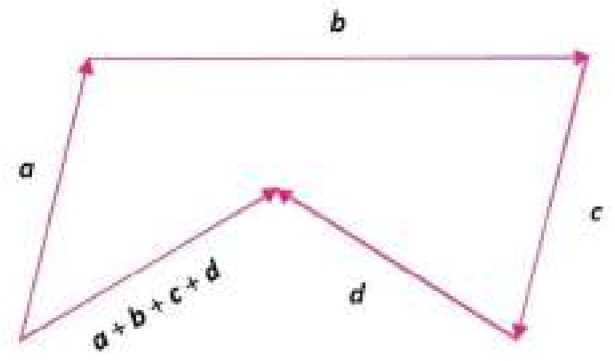


Fig. 1.6.

EXEMPLO 1: Considerando o paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ da Fig. 1.7, determinar o vetor soma $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B}$.

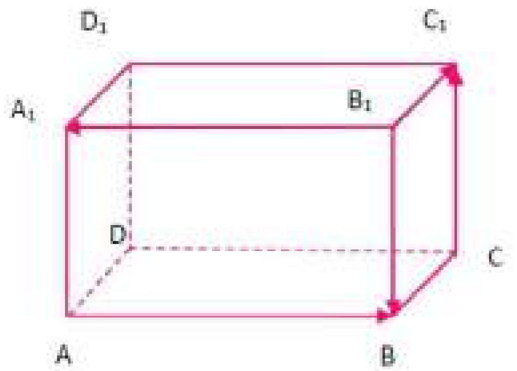


Fig. 1.7.

» SOLUÇÃO: Usando o fato de um paralelogramo possuir diferentes lados com mesmo comprimento e situados sobre retas paralelas, a partir da Fig. 1.7 segue que $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$ e $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$. Portanto

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D}.$$

Finalmente, empregando a regra do paralelogramo, chega-se ao seguinte resultado:

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{AD}.$$

Como ilustrado na Fig. 1.8, deve-se observar que a regra do triângulo, para adição de dois vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$, se mantém válida mesmo quando O, A e B são pontos sobre uma mesma reta.

Fig. 1.8.

Por definição, o vetor zero é o elemento neutro da soma de vetores em $\mathbb{V}^3$:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}, \text{ para todo } \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^3.$$

Vetores Opostos

Dois vetores quaisquer de $\mathbb{V}^3$ são ditos opostos, se a soma entre eles é igual ao vetor zero. O vetor oposto a um dado vetor $\boldsymbol{a}$ será denotado por $-\boldsymbol{a}$. Assim,

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}.$$

Ao se colocar a origem de $-\boldsymbol{a}$ no ponto O, onde se encontra a extremidade de $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, e em seguida se efetuar a soma $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})$, então (pela regra do triângulo) pode-se notar que esta soma é o vetor zero $\mathbf{0} = \overrightarrow{OO}$ se, e somente se, $-\boldsymbol{a}$ é equivalente ao vetor $\overrightarrow{AO}$. Portanto, se destaca o seguinte:

> O oposto a um dado vetor $\boldsymbol{a}$ $\mathbb{V}^3$ é aquele que possui a mesma norma e a mesma direção de $\boldsymbol{a}$, mas tem sentido contrário deste.

EXEMPLO 2: Sabendo que os pontos A, B, C e D são os vértices da pirâmide triangular mostrada na Fig. 1.9, use a propriedade associativa, o conceito de vetor oposto e a regra do triângulo para mostrar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$.

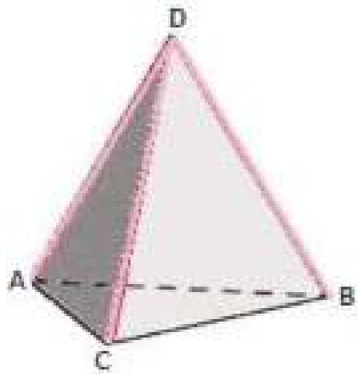


Fig. 1.9.

» SOLUÇÃO: Usando a propriedade associativa, pode-se escrever

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{AC}.$$

Por outro lado, pela regra do triângulo (Fig. 1.9) e pelo conceito de vetor oposto, nota-se que $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AC}$ e $\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$. Assim, chega-se ao resultado procurado:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \underbrace{\overrightarrow{AC} + \left(-\overrightarrow{AC}\right)}_{\mathbf{0}} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.$$

EXEMPLO 3: Sabendo que ambas as circunferências descritas na Fig. 1.10 foram divididas em quatro arcos congruentes, mostre que para os dois casos (a) e (b) ocorrem $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \mathbf{0}$.

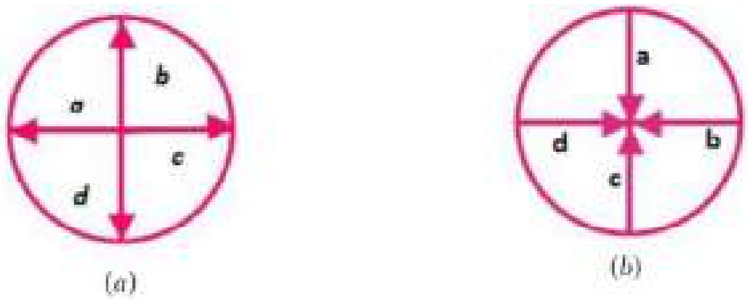


Fig. 1.10.

» SOLUÇÃO: Na Fig. 1.10-a as extremidades dos vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ se encontram nos pontos utilizados para dividir a circunferência em quatro arcos congruentes. Por outro lado, na Fig. 1.10-b tais pontos são ocupados pelas origens destes vetores. Assim, em ambas situações consideradas, nota-se que $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{d}\|$. Além disso, nestes dois casos se pode observar que: (i) $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ possuem a mesma direção, mas sentidos opostos e (ii) $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{d}$ têm a mesma direção, mas sentidos opostos. Logo, independente do caso considerado, é claro que $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{b}$. Portanto, para os dois casos (a) e (b) mostrados na Fig. 1.10, se obtém $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$.

Para quaisquer dois vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{V}^3$, costuma-se chamar $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ de o vetor diferença entra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, que é comumente denotado por $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. É muito importante observar que esta diferença não é uma nova operação entre vetores de $\mathbb{V}^3$. De fato, trata-se exatamente da operação de adição introduzida antes, pela lei do paralelogramo. A única novidade é que agora se está considerando a adição de $\boldsymbol{a}$ com o vetor $-\boldsymbol{b}$ (o oposto de $\boldsymbol{b}$). Enfatizado isto, aqui será usado o símbolo $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, para representar o vetor soma $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

Desse modo, se $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, então com ilustrado na Fig. 1.11, então ocorrem as seguintes igualdades:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

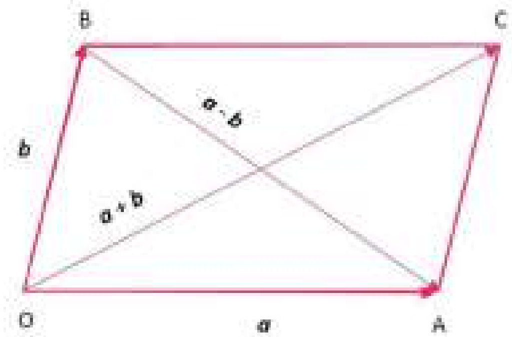


Fig. 1.11.

Portanto, seguindo a Fig. 1.11, pode-se de forma mimética escrever:

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

EXEMPLO 4: Dado um quadrilátero $OPQR$, onde os lados PQ e OR são paralelos, se $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, provar que $OPQR$ é um paralelogramo.

» SOLUÇÃO: Aplicando a fórmula anterior, tem-se

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}.$$

Assim, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$. Portanto, $\|\overrightarrow{OR}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$ e $\overrightarrow{OR} \parallel \overrightarrow{PQ}$. Consequentemente, o quadrilátero $OPQR$ é necessariamente um paralelogramo, pois tem dois lados paralelos possuindo o mesmo comprimento.

Multiplicação por Escalar em $\mathbb{V}^3$

Seja $\boldsymbol{a}$ um vetor de $\mathbb{V}^3$ diferente do vetor zero. Se denomina multiplicação (ou produto) de $\boldsymbol{a}$ por um escalar (número real) $\lambda \neq 0$ o vetor de $\mathbb{V}^3$, denotado por $\lambda\boldsymbol{a}$, que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|\lambda\boldsymbol{a}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{a}\|$;
(ii) $\lambda\boldsymbol{a}$ tem a mesma direção do vetor $\boldsymbol{a}$;
(iii) $\lambda\boldsymbol{a}$ tem o mesmo sentido de $\boldsymbol{a}$, se $\lambda > 0$;
(iv) $\lambda\boldsymbol{a}$ tem sentido contrário de $\boldsymbol{a}$, se $\lambda < 0$.

Para complementar esta definição, o produto do vetor zero por qualquer escalar é o vetor zero. Além disto, o produto de qualquer vetor $\boldsymbol{a}$ pelo número zero é também o vetor zero:

$$\lambda\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}.$$

Sejam os escalares λ_1, λ_2 e um vetor $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$. Se $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ e $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, então os vetores $\lambda_1(\lambda_2\overrightarrow{OA})$ e $(\lambda_1\lambda_2)\overrightarrow{OA}$ possuem a mesma direção (pois estão situados sobre a mesma reta OA) e possuem mesmo comprimento, dado por $|\lambda_1||\lambda_2|\|\overrightarrow{OA}\|$. Além disso, estes vetores têm o mesmo sentido do segmento orientado $\overrightarrow{OA}$, se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, e sentido contrário de $\overrightarrow{OA}$, se $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Assim, estes dois vetores são iguais, ou seja, $\lambda_1(\lambda_2\overrightarrow{OA}) = (\lambda_1\lambda_2)\overrightarrow{OA}$. Por outro lado, se $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ ou $\lambda_1\lambda_2 = 0$, é evidente que $\lambda_1(\lambda_2\overrightarrow{OA}) = (\lambda_1\lambda_2)\overrightarrow{OA}$. Portanto, fica provado que a multiplicação de um vetor por escalar satisfaz a seguinte propriedade associativa

$$\lambda_1(\lambda_2\boldsymbol{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\boldsymbol{a}.$$

É válida também a propriedade distributiva com relação à soma de escalares:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{a}.$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ou se $\lambda_2 = -\lambda_1$, então a verificação desta propriedade distributiva é imediata. Caso contrário, considerando $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, observa-se que os vetores não nulos $(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{a}$, $\lambda_1\boldsymbol{a}$ e $\lambda_2\boldsymbol{a}$ estão todos sobre a reta OA. Consequentemente, os vetores $(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{a}$ e $\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{a}$ apresentam a mesma direção. Também, possuem o mesmo sentido. Este fato é óbvio se os números λ_1 e λ_2 têm os mesmos sinais. Se não, o sentido é definido pelo sinal do escalar de maior módulo, $|\lambda_1|$ ou $|\lambda_2|$. Agora, para finalizar esta demonstração, basta provar que os comprimentos dos vetores $(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{a}$ e $\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{a}$ são iguais. Se os sinais de λ_1 e λ_2 forem os mesmos, então se tem $\|(\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{OA}\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)|\|\overrightarrow{OA}\| = (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\|\overrightarrow{OA}\| = \|\lambda_1\overrightarrow{OA}\| + \|\lambda_2\overrightarrow{OA}\| = \|\lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OA}\|$. Por outro lado, se os sinais de λ_1 e λ_2 forem contrários, por exemplo, se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, verificase que $\|(\lambda_1+\lambda_2)\overrightarrow{OA}\| = |(\lambda_1+\lambda_2)|\|\overrightarrow{OA}\| = (|\lambda_1| - |\lambda_2|)\|\overrightarrow{OA}\| = \|\lambda_1\overrightarrow{OA}\| - \|\lambda_2\overrightarrow{OA}\| = \|\lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OA}\|$. Logo, em ambos os casos, chega-se à conclusão de que $\|(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{a}\| = \|\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{a}\|$, o que conclui a demonstração desta propriedade distributiva.

Outra propriedade da operação de multiplicação de um vetor por escalar é a distributividade com relação à soma de vetores. Assim, se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são vetores e λ é um escalar, então

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.$$

Esta propriedade é óbvia se $\lambda = 0$, ou se ao menos um dos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ for nulo. Caso contrário, a regra do paralelogramo deixa claro que os vetores $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ e $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ têm mesma direção e mesmo sentido. Também pode-se ver que $\|\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\| = \|\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\|$, ou seja, tais vetores possuem o mesmo comprimento. Portanto, são iguais.

Segue da definição que o número 1 é o elemento neutro da operação de multiplicação de um vetor por escalar:

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \text{ para todo } \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^3.$$

EXEMPLO 5: Sabendo M é o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo $ABCD$ mostrado na Fig. 1.12, determinar o valor de λ em cada um dos seguintes casos: (a) $\overrightarrow{MC} = \lambda\,\overrightarrow{CA}$; (b) $\overrightarrow{BD} = \lambda\,\overrightarrow{BM}$; (c) $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{CM}$; (d) $\overrightarrow{BB} = \lambda\,\overrightarrow{BD}$; (e) $\overrightarrow{AA} = \lambda\,\overrightarrow{CC}$.

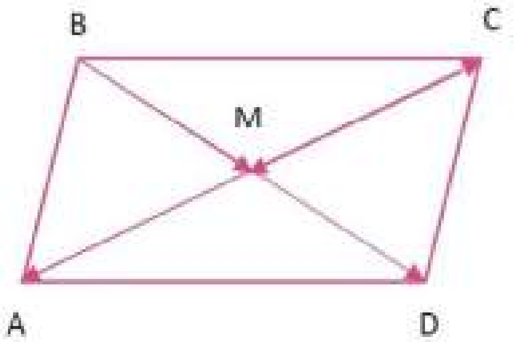


Fig. 1.12

» SOLUÇÃO: Devido à geometria do paralelogramo e de acordo com a definição de multiplicação de vetor por um escalar, tem-se que

(a) os vetores $\overrightarrow{MC}$ e $\overrightarrow{CA}$ têm mesma direção, sentidos contrários e $\|\overrightarrow{CA}\| = 2\,\|\overrightarrow{MC}\|$, logo $\lambda = -1/2$;
(b) os vetores $\overrightarrow{BM}$ e $\overrightarrow{BD}$ têm mesma direção, mesmo sentido e $\|\overrightarrow{BD}\| = 2\,\|\overrightarrow{BM}\|$, logo $\lambda = 2$;
(c) os s vetores $\overrightarrow{CM}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm mesma direção, sentidos contrários e $\|\overrightarrow{CM}\| = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AC}\|$, logo $\lambda = -2$;
(d) $\overrightarrow{BB} = \boldsymbol{0}$ e $\overrightarrow{BD} \neq \boldsymbol{0}$, logo $\lambda = 0$;
(e) $\overrightarrow{AA} = \boldsymbol{0}$ e $\overrightarrow{CC} = \boldsymbol{0}$, logo λ é qualquer número real.

Exercícios

1. Considerando a pirâmide triangular $ABCD$ mostrada na Fig. 1.9, determinar a soma dos vetores (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; (b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$.
2. Trace um pentágono $ABCDE$ e determine a soma dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$.
3. A Fig. 1.13 mostra um triângulo ABC, onde M e N são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB e AC. Prove que $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

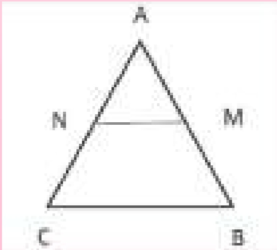


Fig. 1.13.

4. Considerando o hexágono regular $ABCDEF$ mostrado na Fig. 1.14, expressar os vetores (a) $\overrightarrow{DF}$, (b) $\overrightarrow{DA}$, (c) $\overrightarrow{DB}$, (d) $\overrightarrow{DO}$, (e) $\overrightarrow{EC}$, (f) $\overrightarrow{EB}$ e (g) $\overrightarrow{OB}$ em termos dos vetores $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{DE}$.

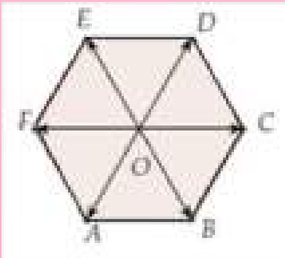


Fig. 1.14.

5. Empregando a pirâmide retangular ilustrada na Fig. 1.15, demonstre que $\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|$, onde $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{AO}$ e $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{CB}$.

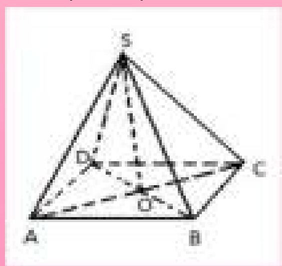


Fig. 1.15

6. Sendo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ um paralelepípedo semelhante àquele da Fig. 1.7, expressar os vetores (a) $\overrightarrow{BB_1}$, (b) $\overrightarrow{AC_1}$, (c) $\overrightarrow{AA_1}$, (d) $\overrightarrow{BC_1}$, (e) $\overrightarrow{AB}+B_1C_1$, (f) $\overrightarrow{AD}+D_1C_1$, (g) $2\overrightarrow{AC}-B_1C_1-BD_1+C_1D_1$, em termos dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB_1}$.
7. Se os vetores não nulos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não são paralelos, prove que $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, se e somente se, $\lambda_1=\lambda_2=0$.

2. Corpos

Até aqui, todos os escalares utilizados foram números reais, o que se mostrou suficiente para estabelecer as propriedades dos vetores de $\mathbb{V}^3$. No entanto, deve-se observar que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é, na realidade, uma classe de escalares que faz parte de uma hierarquia de classes de números. De fato, se $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ representam, respectivamente, os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e complexos, sabe-se que tais classes de escalares cumprem as seguintes relações hierárquicas de inclusão:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Definição de Corpo

A grosso modo, um corpo é um conjunto de escalares equipado com operações, sobre seus elementos, que se comportam como a adição, subtração, multiplicação e divisão usuais.

■ DEFINIÇÃO 1.2. Um corpo consiste de um conjunto de escalares $\mathbb{F}$ equipado com duas operações $+$ e $\cdot$, chamadas genericamente de adição e multiplicação, e dois elementos distintos $0, 1 \in \mathbb{F}$, tal que se verificam as seguintes propriedades:

$\mathbb{F}$ é fechado com relação a adição: Se α e $\beta \in \mathbb{F}$, então $\alpha + \beta \in \mathbb{F}$.

$\mathbb{F}$ é fechado com relação a multiplicação: Se α e $\beta \in \mathbb{F}$, então $\alpha\beta = \alpha \cdot \beta \in \mathbb{F}$.

A adição é comutativa: Se α e $\beta \in \mathbb{F}$, então $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

A adição é associativa: Se $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{F}$, então $\alpha + (\beta + \lambda) = (\alpha + \beta) + \lambda$.

0 é o elemento neutro da adição: $\forall\, \alpha \in \mathbb{F}, \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

Todo elemento tem um inverso aditivo: $\forall\, \alpha \in \mathbb{F}$, existe um elemento

$\beta \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0$.

A multiplicação é comutativa: $\forall\, \alpha$ e $\beta \in \mathbb{F}$, $\alpha\beta = \beta\alpha$.

A multiplicação é associativa: $\forall\, \alpha, \beta$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, $\alpha(\beta\lambda) = (\alpha\beta)\lambda$.

1 é a identidade multiplicativa: $\forall\, \alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha\, 1 = 1\, \alpha = \alpha$.

Todo elemento diferente de zero tem um inverso multiplicativo: $\forall\, \alpha \in \mathbb{F}$,

com $\alpha \neq 0$, existe um elemento $\gamma \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha\, \gamma = \gamma\, \alpha = 1$.

Vale a lei da distributividade: $\forall\, \alpha, \beta$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, $\alpha(\beta + \lambda) = \alpha\beta + \alpha\lambda$.

Por conveniência prática, o inverso aditivo de $\alpha \in \mathbb{F}$ é denotado por $-\alpha$, tal que

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0.$$

Do mesmo modo, o inverso multiplicativo de $\alpha \in \mathbb{F}$ $(\alpha \neq 0)$ é denotado por α^{-1}, tal que

$$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1.$$

A adição de um inverso aditivo é denominada subtração, sendo denotada por

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

Semelhantemente, o produto por um inverso multiplicativo é denominado de divisão, denotada por

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1}.$$

Exercícios

1. Seja $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ o conjunto que contém exatamente dois elementos, 0 e 1, e um par de operações (uma adição e uma multiplicação) definidas pelas seguintes tábuas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

   Mostrar que o conjunto $\mathbb{F}_2$ (com estas duas operações) é um corpo.

2. Usando o corpo definido no exercício 1, mostre que se $a, b \in \mathbb{F}$, então ocorre $a + b = 1$, se $a = 1$ ou $b = 1$, mas não ambos.
3. Mostre que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, munido das operações de adição e multiplicação usuais, não é um corpo.

Corpo dos Números Complexos

Os elementos do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ são escalares da forma

$$z = x + yi.$$

Nesta definição, deve-se notar que x, y são números reais e o escalar i, denominado de unidade imaginária, é tal que

$$i^2 = -1.$$

Se $z = x + yi \in \mathbb{C}$, então os números x e y são denominados, respectivamente, de parte real e parte imaginária de z. É comum se usar as seguintes notações para representar as partes real e imaginária de um número complexo $z = x + yi$:

$$x = \operatorname{Re} z;$$

$$y = \operatorname{Im} z.$$

Dados dois números complexos quaisquer, $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, as operações de adição $z_1 + z_2$ e de multiplicação $z_1 z_2$ são definidas pelas seguinte fórmulas:

$$\underbrace{(x_1 + y_1 i)}_{z_1} + \underbrace{(x_2 + y_2 i)}_{z_2} = x_1 + x_2 + y_1 i + y_2 i = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i;$$

$$\underbrace{(x_1 + y_1 i)}_{z_1}\underbrace{(x_2 + y_2 i)}_{z_2} = x_1 x_2 + y_1 x_2 i + x_1 y_2 i + y_1 y_2 i^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

Note que estas fórmulas são obtidas por simples aplicações de leis dos tipos comutativa e distributiva, além da definição $i^2 = -1$.

Portanto, o conjunto $\mathbb{C}$ é fechado com relação a estas operações de adição e multiplicação.

Se $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$, tem-se o elemento neutro da adição $z = 0 + 0i = 0$. De forma semelhante, o escalar $z = 1 + 0i = 1$, onde $\operatorname{Re} z = 1$ e $\operatorname{Im} z = 0$, é a identidade multiplicativa de $\mathbb{C}$.

Como $(x + yi) + (-x - yi) = 0$, então o inverso aditivo de $z = (x + yi)$ é o número complexo

$$-z = -x - yi = -(x + yi).$$

Logo, a diferença fica estabelecida por

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = x_1 - x_2 + y_1 i - y_2 i = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Usando a fórmula que define a multiplicação, pode-se ver que

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

Assim, se $z = x + yi \neq 0$, o seu inverso multiplicativo é obtido por

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)i.$$

Consequentemente, se $z_2 \neq 0$, a divisão z_1/z_2 fica dada por

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right) = (x_1 + y_1 i)\left[\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} - \left(\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)i\right] = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

As leis comutativas para a adição e a multiplicação, indicadas por

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{e} \quad z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

decorrem das definições de soma e multiplicação de números complexos e do fato de que os números reais satisfazem tais leis. Por exemplo,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i = (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)i = z_2 + z_1.$$

A prova da lei comutativa $z_1z_2 = z_2z_1$ é feita de forma análoga. De acordo com esta lei, tem-se que $yi = iy$. Desse modo, pode-se escrever $z = x + yi$ ou $z = x + iy$.

As leis associativas para a adição e a multiplicação, dadas por

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_2 + z_1) + z_3 \quad \text{e} \quad z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3,$$

e a lei da distributividade da multiplicação em relação à adição

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

são também satisfeitas pelos números complexos. As demonstrações destas leis, que decorrem das definições anteriores para soma e multiplicação, além das leis correspondentes para números reais, são deixadas como exercícios.

Portanto, o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, equipado com estas operações de adição e multiplicação, constitui um corpo, comumente denominado de corpo dos números complexos.

O conjugado de um número complexo $z = x + yi$ é o escalar $\bar{z}$ definido por

$$\bar{z} = x - yi.$$

O módulo de $z = x + yi$, denotado por $|z|$, é por definição

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercícios

1. Verifique: (a) $(5 + 3i) + (-1 + 2i) + (7 - 5i) = 11$; (b) $(2 - i)(-3 + 2i)(5 - 4i) = 8 + 51i$; (c) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i$; (d) $\frac{1}{i} = -i$; (e) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = -\frac{2}{5}$; (f) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{2}i$; (g) $\left|\frac{3-2i}{-1+i}\right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.
2. Encontre o conjugado e o módulo de cada número complexo: (a) $-2 + i$; (b) -3; (c) $(2 + i)(4 + 3i)$; (d) $\frac{3-i}{\sqrt{2}+3i}$; (e) $\frac{i}{i+3}$; (f) ii.
3. Mostre que o conjugado de um número complexo $z = x + yi$ satisfaz as seguintes propriedades: (a) $z\bar{z} = x^2 + y^2$; (b) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; (c) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$; (d) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (e) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; (f) $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$; (g) $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$, $(z_2 \neq 0)$.
4. Mostre que o módulo de um número complexo $z = x + yi$ tem as seguintes propriedades: (a) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$; (b) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, $(z_2 \neq 0)$; (c) $|z|^2 = z\bar{z}$; (d) $|\bar{z}| = |z|$.

Subcorpos

Como formalizado a seguir, um subcorpo de $\mathbb{F}$ é um subconjunto $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ que é, ele próprio, um corpo, quando equipado com as operações de adição e multiplicação herdadas de $\mathbb{F}$.

PROPOSIÇÃO 1.1. Suponha que o conjunto $\mathbb{F}$, equipado com operações de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, é um corpo. Se um subconjunto $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ possui as seguintes propriedades:

(i) se α e $\beta \in \mathbb{K}$, estão $(\alpha + \beta) \in \mathbb{K}$;
(ii) se α e $\beta \in \mathbb{K}$, estão $(\alpha\beta) \in \mathbb{K}$;
(iii) 0 está $\mathbb{K}$;
(iv) 1 está em $\mathbb{K}$;
(v) se $\alpha \in \mathbb{K}$, estão $-\alpha \in \mathbb{K}$;
(vi) se $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, então $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$;

então $\mathbb{K}$, com as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{F}$, é também um corpo. Neste caso, o subconjunto $\mathbb{K}$ é dito um subcorpo de $\mathbb{F}$.

Prova: Os itens (i) e (ii) garantem que $\mathbb{K}$ é fechado com relação às operações de soma e multiplicação. Dados $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$, como $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ e, por sua vez, $\mathbb{F}$ é um corpo, então são válidas as propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação, além da distributividade: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha + (\beta + \lambda) = (\alpha + \beta) + \lambda$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha(\beta\lambda) = (\alpha\beta)\lambda$ e $\alpha(\beta + \lambda) = \alpha\beta + \alpha\lambda$. A existência do elemento neutro da adição em $\mathbb{K}$ é garantida por (iii), enquanto que (v) afirma que todo elemento de $\mathbb{K}$ possui um inverso aditivo. A propriedade (iv) mostra que a identidade multiplicativa está em $\mathbb{K}$ e, finalmente, (vi) diz que o inverso multiplicativo de qualquer elemento do conjunto $\mathbb{K}$ encontra-se em $\mathbb{K}$. Logo, com estas duas operações herdadas do corpo $\mathbb{F}$, o conjunto $\mathbb{K}$ satisfaz todas as propriedades descritas na definição 1.2. Portanto, $\mathbb{K}$ é um corpo. ▮

EXEMPLO 6: Mostre que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ (equipado com as operações usuais de adição e multiplicação) é um corpo, o qual é denominado de corpo dos números reais.

» SOLUÇÃO: Posto que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e tendo em consideração que $\mathbb{C}$ é um corpo, então basta mostrar que $\mathbb{R}$ é um subcorpo do corpo dos números complexos, ou seja, é suficiente verificar que (com as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{C}$) $\mathbb{R}$ cumpre as seis propriedades indicadas na proposição 1.1. Assim, dados dois números z_1 e $z_2 \in \mathbb{R}$, escritos nas formas $z_1 = x_1 + 0i$ e $z_2 = x_2 + 0i$, é claro que (i) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + 0i = (x_1 + x_2) \in \mathbb{R}$ e (ii) $z_1 z_2 = (x_1 x_2) + 0i = (x_1 x_2) \in \mathbb{R}$. (iii) O elemento neutro da adição é um real: $0 + 0i = 0 \in \mathbb{R}$. (iv) A identidade multiplicativa é um número real: $1 + 0i = 1 \in \mathbb{R}$. (v) Para todo $z = x + 0i \in \mathbb{R}$, existe o inverso aditivo $-z = -x - 0i \in \mathbb{R}$, tal que $z - z = 0 + 0i = 0 \in \mathbb{R}$. (vi) Para todo $z = x + 0i \in \mathbb{R}$ (com $x \neq 0$), existe o inverso multiplicativo $z^{-1} = \frac{1}{x} + 0i \in \mathbb{R}$, tal que $zz^{-1} = 1 + 0i = 1 \in \mathbb{R}$. Com isto, conclui-se a prova de que $\mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$, sendo, portanto, ele próprio um corpo.

Exercícios

1. Provar que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, \text{com } q \neq 0\right\}$, munido com as operações usuais de soma e multiplicação, é um subcorpo do corpo dos números reais.
2. Considerando o número irracional $\pi = 3{,}141592$ ...., mostrar que o conjunto $\mathbb{A} = \{a + b\pi;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um subcorpo do corpo dos números reais, mas não é um subcorpo de $\mathbb{Q}$.

3. Matrizes

Dados dois números inteiro positivos m, n e um corpo $\mathbb{F}$, uma matriz A de dimensão $m \times n$, sobre o corpo $\mathbb{F}$, é uma lista de escalares $a_{ij} \in \mathbb{F}$ com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Esta matriz A é representada por uma tabela retangular de escalares, comumente com o seguinte formato:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O conjunto de todas as matrizes de dimensão $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é denotado por $\mathbb{F}^{m\times n}$. Assim, $\mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbb{C}^{m\times n}$ são, respectivamente, os conjuntos de todas as matrizes $m \times n$ reais e complexas.

As linhas de uma matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ são as m listas horizontais de escalares de $\mathbb{F}$ dadas por

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots,\ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}).$$

As colunas de A são as n listas verticas de escalares de $\mathbb{F}$ dadas por

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uma matriz é dita quadrada se seus números de linha e colunas são iguais. Deste modo, se diz que $\mathbb{F}^{n\times n}$ é o conjunto de todas as matrizes quadradas de dimensão $n \times n$, ou simplesmente de ordem n, sobre o corpo $\mathbb{F}$.

O escalar a_{ij}, que aparece na linha i e na coluna j, é denominado a *ij*-ésima entrada (ou elemento) de A. Assim, de forma simplificada, costuma-se denotar uma tal matriz por $A = [a_{ij}]$. Se A é $n \times n$, a chamada diagonal principal de A é a lista $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

EXEMPLO 7: $\begin{bmatrix} 2-8i & 5+3i & 4+7i \\ 0 & -6i & 1+4i \end{bmatrix}$ é uma matriz complexa 2×3. Suas linhas são $(2-8i,\ 5+3i,\ 4+7i)$ e $(0, -6i,\ 1+4i)$ e suas colunas são $\begin{bmatrix} 2-8i \\ 5+3i \\ 4+7i \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -6i \\ 1+4i \end{bmatrix}$.

Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ são ditas iguais se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Operando com Matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ duas matrizes de mesmas dimensões sobre um corpo $\mathbb{F}$. A soma de A e B, denotada por $A + B$, é a matriz de $\mathbb{F}^{m\times n}$ obtida pela soma dos elementos correspondentes de A e B, ou seja, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. Portanto, na forma de uma tabela, pode-se escrever:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Deve-se observar o seguinte: Para que a soma $A + B$ esteja bem definida, se faz necessário que as matrizes A e B possuam as mesmas dimensões, ou seja, o número de linha de A é igual ao número de linha de B e, também, o número de colunas de A é igual ao número de colunas de B.

A multiplicação de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{F}$, denotada por λA, é a matriz de $\mathbb{F}^{m\times n}$ definida por $A = [\lambda a_{ij}]$, ou seja,

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$, a matriz $-A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ é definida por

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde, para todo $i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, o elemento $-a_{ij}$ denota o inverso aditivo do escalar a_{ij} de $\mathbb{F}$.

A adição de $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ com $-B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ é (comumente) chamada de subtração, sendo definida por: $A - B = A + (-B)$. Assim, tem-se $A - A = 0$, onde $0 \in \mathbb{F}^{m\times n}$ denota a matriz onde todas as suas entradas são iguais ao elemento neutro da adição em $\mathbb{F}$, denominada de matriz nula.

Como uma consequência das propriedades de um corpo, tem-se o seguinte:

Propriedades de Operações com Matrizes: Se $A, B, C \in \mathbb{F}^{m\times n}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, então

(i) $A + B = B + A$;
(ii) $A + 0 = A$, onde 0 é a matriz nula;
(iii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
(iv) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
(v) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
(vi) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
(vii) $1A = A$; com $1 \in \mathbb{F}$.

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times p}$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{p\times n}$, onde $\mathbb{F}$ é um corpo e m, n, p são números inteiros positivos, o produto AB é a matriz $C = [c_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ cujo elemento c_{ij} é

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}b_{rj}.$$

Usando tabelas retangulares, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 8: Este exemplo mostra alguns produtos de matriz com elementos reais ou complexos:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-3i & -i \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{bmatrix}$.

Como pode-se ver, para que o produto de matrizes AB esteja bem definido é necessário que o número de linhas de A seja igual ao número de colunas de B.

As propriedades de um corpo implicam nas seguintes identidades relativas à multiplicação de matrizes.

Propriedades da Multiplicação de Matrizes: Sejam A, B, C matrizes sobre um corpo $\mathbb{F}$. Sempre que os produtos e somas envolvidos estiverem bem definidos, valem:

(i) $(AB)C = A(BC)$;
(ii) $A(B + C) = AB + AC$;
(iii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
(iv) $(A + B)C = AC + BC$;
(v) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; para todo $\lambda \in \mathbb{F}$;
(vi) $A0 = 0$ e $B0 = 0$, onde 0 denota a matriz nula.

Exercícios

1. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, verificar que (a) $A(B+C) = AB + AC$, (b) $(A+B)+C = A+(B+C)$, (c) $(A+B)C = AC + BC$, (d) $3(A+B) = 3A + 3B$.
2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcular ABC e CAB.
3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. Verificar que $A(AB) = A(AB)$.
4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$, existe alguma matriz C tal que $CA = B$?
5. Dada uma matriz $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$, mostrar que existem duas matrizes A e B, ambas 2×2, tais que $C = AB - BA$ se, e somente se, $c_{11} + c_{22} = 0$.
6. Encontrar três matrizes não nulas A, B e C tais que $AC = BC$ e $A \neq B$.
7. Dê exemplo de duas matrizes quadradas A e B, tais que $AB \neq BA$.
8. Dê exemplo de duas matrizes quadradas não nulas A e B, tais $AB = BA$.
9. Conclua que, em geral, $AB \neq BA$.
10. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Encontrar uma matriz B 2×3 não nula tal que $AB = 0$.
11. Dadas as matrizes complexas $A = \begin{bmatrix} 3+4i & 1 \\ i & 2+3i \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & i \end{bmatrix}$, calcular (a) $5A - iB$, (b) AA-BB, (c) A(BA).