Capítulo 2

Espaços Vetoriais

1. Definição e Exemplos

O espaço $\mathbb{V}^3$, cujos elementos são segmentos orientados no espaço euclidiano tridimensional, é o protótipo de todo e qualquer espaço vetorial. Mais precisamente, o arcabouço teórico natural de $\mathbb{V}^3$ é o progenitor das estruturas teóricas fundamentais da álgebra linear, destinadas ao entendimento e utilização das propriedades de um espaço vetorial de qualquer natureza.

Assim, mesmo que um elemento de um dado espaço vetorial tenha um aspecto muito diferente de uma flecha no espaço de Euclides, em um contexto teórico possivelmente mais abstrato, o referido elemento sempre herdará o caráter de uma tal flecha em $\mathbb{E}$.

Esta característica, herdada das propriedades matemáticas de $\mathbb{V}^3$, nos permitirá chamar de (e tratar como) *vetor* qualquer elemento de um espaço vetorial arbitrário, mesmo que ele seja uma matriz, uma solução de um sistema linear homogêneo, um polinômio ou uma função contínua, por exemplo.

■ DEFINIÇÃO 2.1. Um espaço vetorial consiste do seguinte:

(i) um corpo $\mathbb{F}$ de escalares $\alpha, \beta, \ldots$;

(ii) um conjunto V de objetos $x, y, z, \ldots$, denominados vetores;

(iii) uma regra (ou operação), dita adição de vetores, que associa a cada par de vetores $x, y \in V$ um vetor $x + y \in V$, denominado a soma de x e y, de maneira tal que:

(a) a adição é comutativa, $x + y = y + x$;
(b) a adição é associativa, $x + (y + z) = (x + y) + z$;
(c) existe um único vetor $0 \in V$, denominado o vetor nulo de V, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in V$;
(d) existe um único vetor $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$, para cada vetor $x \in V$;

(iv) uma regra (ou operação), dita multiplicação por escalar, que associa a cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ e cada vetor $x \in V$ um vetor $\alpha x \in V$, denominado o produto de α por x de maneira tal que:

(e) $1x = x$, para todo $x \in V$;
(f) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
(g) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
(h) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

O Espaço Vetorial $\mathbb{V}^3$

O conjunto de todos os segmentos orientados, com a adição definida pela lei do paralelogramo e a multiplicação por um número real, satisfazem (como detalhado na primeira seção do capítulo 1) todos as propriedades listadas na definição 2.1. Deste modo, $\mathbb{V}^3$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, sendo, na realidade, tais propriedades de $\mathbb{V}^3$ as inspiradoras desta definição 2.1.

O Espaço Vetorial $\mathbb{F}^{m\times n}$

Dado um corpo $\mathbb{F}$, o conjunto $\mathbb{F}^{m\times n}$ de todas as matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{F}$, com as operações de soma $A+B$ de matizes e multiplicação αA de matriz por um escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, é um exemplo de conjunto cujos elementos satisfazem as propriedades mostradas na definição 2.1, como pode-se ver na terceira seção do capítulo 1. Portanto, $\mathbb{F}^{m\times n}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

Em particular, $\mathbb{R}^{m\times n}$ é o espaço vetorial das matrizes reais de dimensão $m \times n$. Semelhantemente, cada vetor do espaço vetorial $\mathbb{C}^{m\times n}$ é uma matriz complexa A com m linhas e n colunas.

O Espaço Vetorial $\mathbb{F}^n$

Dado um corpo $\mathbb{F}$ arbitrário, seja $\mathbb{F}^n$ o conjunto de todas as n-listas ordenadas do tipo $x = (x_1, \dots, x_n)$, formadas por n escalares do corpo $\mathbb{F}$. Se $y = (y_1, \dots, y) \in \mathbb{F}^n$, a soma de x e y é definida por

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

O produto de um escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ por um elemento $x \in \mathbb{F}^n$ é definido por

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Com estas operações, pode-se ver facilmente que $\mathbb{F}^n$ é um espaço vetorial. De fato, cada vetor de $\mathbb{F}^n$ é um elemento do espaço vetorial $\mathbb{F}^{1\times n}$, cujos vetores são as matrizes-linhas com n colunas.

Em particular, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, cujos vetores são n-lista ordenada $(x_1, \dots, x_n)$, com $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Similarmente, $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos, sendo cada vetor de $\mathbb{C}^n$ uma lista ordenada com n números complexos.

O Espaço Vetorial $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{F})$

Seja $\mathbb{F}$ um corpo qualquer e seja Ω um conjunto não-vazio arbitrário. Denotaremos por $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{F})$ o conjunto de todas as funções do tipo $f: \Omega \to \mathbb{F}$, as quais estão definidas no conjunto Ω e assumem valores no corpo $\mathbb{F}$. A soma de duas funções f e g, definidas em Ω com valores em $\mathbb{F}$, é a função $(f+g): \Omega \to \mathbb{F}$ dada por

$$(f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega), \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

O produto do escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ pela função f é a função $(\alpha f): \Omega \to \mathbb{F}$ dada por

$$(\alpha f)(\omega) = \alpha f(\omega), \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Para a adição de funções, pode-se notar as seguintes propriedades:

(a) Como a adição em $\mathbb{F}$ é comutativa, então

$$(f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega) = g(\omega) + f(\omega) = (g+f)(\omega),$$

para todo $\omega \in \Omega$. Logo, as funções $f+g$ e $g+f$ são idênticas.

(b) Como a adição em $\mathbb{F}$ é associativa, então

$$\big(f+(g+h)\big)(\omega) = f(\omega) + \big(g(\omega)+h(\omega)\big) = \big(f(\omega)+g(\omega)\big) + h(\omega) = \big((f+g)+h\big)(\omega),$$

para todo $\omega \in \Omega$. Assim, as funções $f+(g+h)$ e $(f+g)+h$ são as mesmas.

(c) Para cada função f de Ω em $\mathbb{F}$, existe a função $(-f)\colon \Omega \to \mathbb{F}$ dada por

$$(-f)(\omega) = -f(\omega).$$

Para a multiplicação de um escalar de $\mathbb{F}$ por uma função, pode-se observar o seguinte:

(d) Como $\mathbb{F}$ possui uma identidade multiplicativa 1, então

$$(1f)(\omega) = 1f(\omega)=f(\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega$. Logo, $(1f)$ e f são as mesmas funções.

(e) Como a multiplicação em $\mathbb{F}$ é associativa, então

$$\big((\alpha\beta)f\big)(\omega) = (\alpha\beta)f(\omega) = \alpha\big(\beta f(\omega)\big) = (\alpha(\beta f))(\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega$. Assim, as funções $(\alpha\beta)f$ e $\alpha(\beta f)$ são idênticas.

(f) Como para um corpo $\mathbb{F}$ vale a lei da distributividade, então

$$\big(\alpha(f+g)\big)(\omega) = \alpha(f(\omega)+g(\omega)) = \alpha f(\omega) + \alpha g(\omega) = \big((\alpha f)+(\alpha g)\big)(\omega),$$

para todo $\omega \in \Omega$. Portanto, as funções $\alpha(f+g)$ e $(\alpha f)+(\alpha g)$ coincidem.

(g) Novamente, como para um corpo $\mathbb{F}$ vale a distributividade (e a comutatividade da multiplicação), então

$$\big((\alpha+\beta)f\big)(\omega) = (\alpha+\beta)f(\omega) = \alpha f(\omega) + \beta f(\omega) = (\alpha f + \beta f)(\omega),$$

para todo $\omega \in \Omega$. Logo, as funções $(\alpha+\beta)f$ e $(\alpha f + \beta f)$ são as mesmas.

Deste modo, dados um corpo $\mathbb{F}$ e qualquer conjunto $\Omega \neq \emptyset$, provamos que o conjunto $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{F})$, com estas operações de adição e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial. Logo, toda função $f\colon \Omega \to \mathbb{F}$ pode ser chamada de vetor.

Em particular, $\mathcal{F}([\mathrm{a}, \mathrm{b}], \mathbb{R})$, o conjunto de todas as funções reais definidas sobre um intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, denotadas por $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Outro exemplo particular é o conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de todas as funções complexas do tipo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, o qual é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$.

O Espaço Vetorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$

Dados um corpo $\mathbb{F}$ e um número inteiro não-negativo n, seja $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ o conjunto de todas as funções polinomiais de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{F}$, denotadas por $p: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, que são da forma:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n, \text{ para todo } x \in \mathbb{F},$$

sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ escalares fixados em $\mathbb{F}$, os quais não dependem de x. Uma função deste tipo é chamada de um polinômio de grau menor ou igual a n sobre o corpo $\mathbb{F}$. Se $\alpha_n \neq 0$, um tal polinômio é dito de grau n.

Com as operações de adição de funções e a multiplicação por escalar, ambas definidas antes, pode-se ver que a soma de dois polinômios p e q em $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ é um polinômio $p + q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ e o produto αp está em $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$. Isto e o fato destas operações satisfazerem todas as propriedades exigidas na definição 2.1 garantem que $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$.

É útil observar que dois polinômios quaisquer $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ e $q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n$ em $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ são iguais se $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 0,1, \dots, n$.

Exercícios

1. Seja V o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais e seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Defina a soma e o produto por escalar como seguem:
   $(x, y) + (x_1, y_1) = (2y + 2y_1, -x - x_1)$, $\forall\ (x, y)$ e $(x_1, y_1) \in V$;
   $\alpha(x, y) = (2\alpha y, -\alpha x)$, $\forall\ (x, y) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Verificar se V, com estas operações, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2. Seja V o conjunto de todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas sobre a reta real e tomando valores complexos, tais que
   $$f(-t) = \overline{f(t)}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$
   Aqui, a barra indica conjugação complexo. Mostrar que V, com as operações
   $$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \forall\ f, g \in V,$$
   $$(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \forall\ f \in V \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$
   é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
3. Seja o conjunto $V = \{x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5};\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$. Considere as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar sobre V: se $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5}$ e $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3} + d_1\sqrt{5}$ estão em V e α é um escalar em $\mathbb{Q}$, então
   $x + x_1 = \left((a + a_1) + (b + b_1)\sqrt{2} + (c + c_1)\sqrt{3} + (d + d_1)\sqrt{5}\right)$,
   $\alpha x = (\alpha a) + (\alpha b)\sqrt{2} + (\alpha c)\sqrt{3} + (\alpha d)\sqrt{5}$.
   Mostrar que V, com estas operações, é um espaço vetorial sobre o corpo dos números racionais.

2. Dependência Linear

Combinação Linear

Dois segmentos orientados em $\mathbb{V}^3$ são ditos colineares se possuem a mesma direção. Por definição, o vetor nulo é considerado colinear a qualquer vetor de $\mathbb{V}^3$.

Por exemplo, na Fig. 1.2 (do capítulo 1) os vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$ são colineares e opostos. Da mesma forma, na Fig. 2.1 os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são colineares e possuem o mesmo sentido. Mas, nessa mesma figura, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são colineares.

PROPOSIÇÃO 2.1: Dois vetores em $\mathbb{V}^3$ são colineares se, e somente se, um deles pode ser escrito como o produto de um escalar pelo outro vetor.

Prova: ($\Rightarrow$) Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são dois vetores não-nulos em $\mathbb{V}^3$ que possuem a mesma direção e o mesmo sentido, então é claro que $\boldsymbol{a} = \frac{\|\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{b}$. Por outro lado, se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não-nulos, possuem a mesma direção mas sentidos opostos, então $\boldsymbol{a} = -\frac{\|\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{b}$. Finalmente, se $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 0$, então $\boldsymbol{a} = 0.\boldsymbol{b}$. Portanto, em todos os casos, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

($\Leftarrow$) Se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$, então: (i) $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ possuem mesma direção e sentido, se $\alpha > 0$. (ii) $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ possuem mesma direção, mas sentidos opostos, se $\alpha < 0$. (iii) $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são nulos, se $\alpha = 0$. Portanto, em qualquer uma destas situações geométricas, vê-se que $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são colineares. ▌

Da geometria euclidiana, sabe-se que uma reta é paralela a um plano se não possui pontos em comuns com o plano ou está situada nele. Usando este conceito básico, se diz que um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ em $\mathbb{V}^3$ é paralelo a um plano do espaço euclidiano $\mathbb{E}$, se sua reta suporte é paralela a este plano. O vetor nulo é considerado paralelo a qualquer plano.

Vetores $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ em $\mathbb{V}^3$ são chamados coplanares, se cada um deles é paralelo a um certo plano. Assim, é evidente que tais vetores podem ser representados por segmentos orientados $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ situados no mesmo plano. Em particular, quaisquer vetores colineares são coplanares.

Dois vetores quaisquer $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$ de $\mathbb{V}^3$ são sempre coplanares. De fato, se pelo menos um destes vetores é nulo, este resultado é óbvio. Assim, suponha que $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$ são ambos não-nulos. Como o paralelogramo que contém o vetor soma $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ contém também cada um dos componentes desta soma, então os vetores $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$ são coplanares.

PROPOSIÇÃO 2.2: Três vetores em $\mathbb{V}^3$ são coplanares se, e somente se, um deles pode ser escrito como a soma dos produtos de cada um dos outros por escalares.

Prova: ($\Rightarrow$) Sejam $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ três vetores coplanares. Considere um ponto O em $\mathbb{E}$ e as representações para $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, dadas por $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, com os pontos O, A e B sobre um mesmo plano P. Se $\boldsymbol{c}$ é colinear a um dos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, digamos ao vetor $\boldsymbol{a}$, então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{c} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + 0.\overrightarrow{OB}$. Se $\boldsymbol{c}$ não é colinear a nenhum dos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, então existe um ponto C do plano P que não se encontra sobre nenhuma das retas suportes dos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, tal que $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$, veja a Fig. 2.1. Logo existem dois segmentos orientados $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$, sendo $\overrightarrow{OD}$ colinear a $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OE}$ colinear $\overrightarrow{OB}$, tais que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ (Fig. 2.1). Assim, pela proposição 2.1, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{OD} = \alpha\,\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OE} = \beta\,\overrightarrow{OB}$. Portanto, $\boldsymbol{c} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}$.

($\Leftarrow$) Dados três vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ em $\mathbb{V}^3$, suponha que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$. Como dois vetores de $\mathbb{V}^3$ são sempre coplanares, então $\alpha\boldsymbol{a}$ e $\beta\boldsymbol{b}$ são coplanares. Logo, é claro que o vetor soma $\boldsymbol{c}$ e os vetores componentes desta soma $\alpha\boldsymbol{a}$ e $\beta\boldsymbol{b}$ são coplanares. Como $\alpha\boldsymbol{a}$ é colinear a $\boldsymbol{a}$ e $\beta\boldsymbol{b}$ é colinear a $\boldsymbol{b}$, então conclui-se que os vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são coplanares. ▌

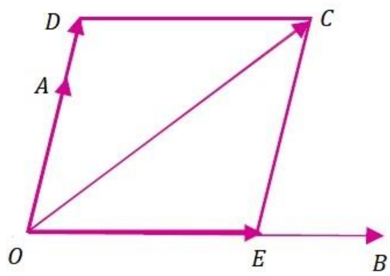

Fig. 2.1.

As condições de colinearidade e coplanaridade entre vetores de $\mathbb{V}^3$ dão origens a conceitos mais gerais, que se aplicam a um número arbitrário de vetores de qualquer espaço vetorial.

■ DEFINIÇÃO 2.2: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Um vetor ϑ em V é dito uma combinação linear dos vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ em V, se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\mathbb{F}$ tais que $\vartheta = \alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n$.

EXEMPLO 1: Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$, nota-se que o vetor $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é uma combinação linear dos vetores $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, pois pode-se escrever: $A = 2B + 3C + 2E$.

Dependência e Independência Linear

■ DEFINIÇÃO 2.3: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Os vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ em V são ditos linearmente dependentes, se existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\mathbb{F}$, não todos zeros, tais que

$$\alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n = 0, \text{ onde } 0 \text{ é o vetor nulo de } V.$$

Se $\alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n = 0$ é possível somente no caso onde

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

então os vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ são ditos linearmente independentes.

O próximo resultado generaliza os conteúdos das proposições 2.1 e 2.2, específicos para $\mathbb{V}^3$.

PROPOSIÇÃO 2.3: Seja V um espaço vetorial qualquer sobre um corpo $\mathbb{F}$. Os vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ em V são linearmente dependentes se, e somente se, um deles pode ser escrito como combinação linear dos demais.

Prova: ($\Rightarrow$) Suponha que $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ em V são linearmente dependentes. Então, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\mathbb{F}$ que satisfazem a equação $\alpha_1\vartheta_1 + \dots + \alpha_n\vartheta_n = 0$, sendo pelo menos um destes escalares diferente de zero. Digamos que $\alpha_r \neq 0$. Assim, dividindo esta equação por α_r, obtém-se $\vartheta_r = \sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{n}(\alpha_k/\alpha_r)\vartheta_k$.

($\Leftarrow$) Sejam $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ vetores em V. Suponha que, para algum $r \in \{1,2,\dots,n\}$, tem-se a equação $\vartheta_r = \sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{n} \alpha_k\,\vartheta_k$, sendo cada α_i um escalar em $\mathbb{F}$. Então $\sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{n} \alpha_k\,\vartheta_k - \vartheta_r = 0$, ou seja, $\alpha_1\vartheta_1 + \dots + \alpha_n\vartheta_n = 0$, com $\alpha_r = -1$ (isto é $\alpha_r \neq 0$). Portanto, os vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ são linearmente dependentes. ▌

EXEMPLO 2: Considerando $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, o espaço vetorial dos polinômios reais que possuem grau menor ou igual a 5, mostrar que os vetores $p_1(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + x^4 + 4x^5$, $p_2(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 5x^5$, $p_3(x) = 3x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 6x^5$, $p_4(x) = 4x + 5x^2 + x^3 + 12x^4 - 3x^5$ e $p_5(x) = 5x + x^2 + 2x^3 + 9x^4 + 3x^5$ são linearmente dependentes.

» SOLUÇÃO: Sejam escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \dots + \alpha_5 p_5(x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Considerando o polinômio $s(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \dots + \alpha_5 p_5(x)$ e observando que 0 pode ser visto como o polinômio nulo de $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, dado por $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^5$, então a igualdade entre os polinômios $s(x)$ e 0 conduz ao seguinte sistema linear nas incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 &= 0\\
2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + \alpha_5 &= 0\\
3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 &= 0\\
\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 &= 0\\
4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 6\alpha_3 - 3\alpha_4 + 3\alpha_5 &= 0
\end{aligned}$$

Após uma sequência finita de operações elementares, a matriz A dos coeficientes deste sistema homogêneo é transformada em uma matriz U equivalente por linhas a A, que se encontra na forma escalonada reduzida por linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9\\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9\\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13\\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4\\ 0 & -3 & -6 & -19 & -17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13\\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4\\ 0 & -3 & -6 & -19 & -17 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-13\\0&1&2&3&9\\0&0&0&-5&5\\0&0&0&5&-5\\0&0&0&-10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-13\\0&1&2&3&9\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&5&-5\\0&0&0&-10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-15\\0&1&2&0&12\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

Logo, o sistema homogêneo equivalente pode ser escrito como

$$\alpha_1 \quad - \alpha_3 \quad - 15\alpha_5 = 0$$

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 \quad + 12\alpha_5 = 0$$

$$\alpha_4 - \quad \alpha_5 = 0$$

Designando valores arbitrários para as incógnitas α_3 e α_5, digamos $\alpha_3 = \alpha$ e $\alpha_5 = \beta$, nota-se que este sistema homogêneo possui infinitas soluções da forma:

$$\alpha_1 = \alpha + 15\beta; \alpha_2 = -2\alpha - 12\beta; \alpha_3 = \alpha; \alpha_4 = \beta \text{ e } \alpha_5 = \beta.$$

Em particular, tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, obtemos uma solução não-trivial, dada por:

$$\alpha_1 = 1; \alpha_2 = -2; \alpha_3 = 1; \alpha_4 = 0 \text{ e } \alpha_5 = 0.$$

Assim, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, não todos zeros, tal que $\alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_5 p_5(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, estes cinco polinômios do espaço $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ são linearmente dependentes.

EXEMPLO 3: Mostrar que os seguintes vetores de $\mathbb{R}^4$ são linearmente independentes: $\vartheta_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\vartheta_2 = (2, 2, 1, 1)$, $\vartheta_3 = (3, -3, -1, 1)$, $\vartheta_4 = (4, 4, 1, 1)$.

» SOLUÇÃO: Sejam os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ e a combinação linear

$$\alpha_1\vartheta_1 + \alpha_2\vartheta_2 + \alpha_3\vartheta_3 + \alpha_4\vartheta_4 = (0, 0, 0, 0).$$

Realizando a soma indicada no lado esquerdo desta equação, pode-se escrever:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4,\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4,\ \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = (0,0,0,0).$$

Em outras palavras, tem-se o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$$

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

As etapas do processo de redução da matriz dos coeficientes deste sistema a uma matriz escalonada reduzida por linhas são mostradas a seguir:

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&2&-3&4\\0&1&-1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&4&0&8\\0&1&-1&1\\0&-1&-2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&2\\0&1&-1&1\\0&-1&-2&-3\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&2\\0&0&-1&-1\\0&0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Assim, o sistema equivalente é dado por:

$$\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = 0$$

Logo, esta combinação linear $\alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n = 0$ é possível somente no caso onde

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Portanto, estes vetores são linearmente independentes.

Exercícios

1. Os vetores $(1,\ i,\ 2-i,\ 3+i)$ e $(1-i,\ 1+i,\ 1-3i,\ 4-2i)$ em $\mathbb{C}^4$ são linearmente independentes?
2. Expressar o polinômio $p(t) = 3t^2 + 5t - 5$ como uma combinação linear dos seguintes vetores em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: $p_1(t) = t^2 + 2t + 1$, $p_2(t) = 2t^2 + 5t + 4$, $p_3(t) = t^2 + 3t + 6$.
3. Mostrar que $u = (2, 7, 10)$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 3, 5)$, $u_3 = (1, 5, 9)$.
4. Os polinômios $q_1(t) = 1$, $q_2(t) = (t-1)$, $q_3(t) = (t-1)^2$, $q_4(t) = (t-1)^3$ são vetores linearmente independentes em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$?
5. Mostrar que as seguintes matrizes são linearmente dependentes em $\mathbb{R}^{2\times 3}$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -11 \\ 16 & 10 & 9 \end{bmatrix}$.
6. Escrever a matriz M como uma combinação linear dos vetores A, B, C em $\mathbb{R}^{2\times 2}$:
   $M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Subespaços

Considere todos os vetores em $\mathbb{V}^3$ que são paralelos a um determinado plano P no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{E}$. Assim, estes vetores coplanares podem ser representados por segmentos orientados em P. Portanto, se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são vetores arbitrários com representações no plano P, então, a partir da lei do paralelogramo, sabemos que o vetor soma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ está representado em P. Se λ é um dado escalar, então $\lambda\boldsymbol{a}$ é colinear a $\boldsymbol{a}$. Logo, $\lambda\boldsymbol{a}$ está representado em P. Como $\boldsymbol{a}$ e $-\boldsymbol{a}$ são colineares, então o vetor oposto também está em P. O vetor nulo $\boldsymbol{0}$ é representado em P pelo segmento nulo $\overrightarrow{OO}$, sendo O um ponto qualquer neste plano. Além disto, a comutatividade e a associatividade da adição de segmentos orientados e as propriedades (e), (f), (g) e (h) da multiplicação por escalar, consideradas na definição 2.1, são todas cumpridas, uma vez que vetores representados em P estão em $\mathbb{V}^3$ e tais propriedades são características de $\mathbb{V}^3$. Logo, pela definição 2.1, pode-se ver que o conjunto de todos os segmentos orientados representados em P é, ele próprio, um espaço vetorial. Semelhantemente, o conjunto de todos os vetores sobre uma reta em $\mathbb{V}^3$ tem esta mesma propriedade.

■ DEFINIÇÃO 2.4: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subespaço de V é um subconjunto W de V que é, ele próprio, um espaço vetorial sobre F com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar de V.

TEOREMA 2.4: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subconjunto não-vazio $W \subset V$ é um subespaço de V se, e somente se, para quaisquer vetores x, y em W:

(i) $x + y \in W$;

(ii) $\alpha x \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$.

Prova: ($\Rightarrow$) Suponha que V é um espaço vetorial. Se o subconjunto não-vazio $W \subset V$ é um subespaço de V, então W é ele próprio um espaço vetorial. Logo, os itens (iii) e (iv) da definição 2.1 garantem que $x + y \in W$, para todos x, y em W, e $\alpha x \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ e qualquer $x \in W$.

($\Leftarrow$) Suponha $W \subset V$ é um subconjunto não-vazio tal que $x + y \in W$ e $\alpha x \in W$, para todos x, y em W e $\alpha \in \mathbb{F}$. Como W é não vazio, então existe $x \in W$. Logo, o vetor nulo $(-1)x + x = 0$ e o vetor oposto $-x = (-1)x$ estão em W. Uma vez que todo vetor de W está no espaço vetorial V, então ocorrem as propriedades comutativa e associativa em relação à adição de vetores, e tais somas resultantes estão em W. Assim, mostramos que os axiomas (a), (b), (c) e (d) da proposição 2.1 são satisfeitos para W. Por outro lado, as propriedades da operação de multiplicação por um escalar, axiomas (e), (f), (g) e (h), decorrem imediatamente do fato de que todo vetor de W pertencer ao espaço vetorial V, e da hipótese de que $\alpha x \in W$, para todo $x \in W$ e $\alpha \in \mathbb{F}$. ▮

EXEMPLO 4: Se $\mathbb{F}^{n\times n}$ é o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n sobre o corpo F, então o conjunto de todas as matrizes simétricas de ordem n sobre $\mathbb{F}$ é um subespaço de $\mathbb{F}^{n\times n}$. Esta afirmação é verdadeira, pois a soma de matrizes simétricas é uma matriz simétrica e o produto de um escalar por uma matriz simétrica é também uma matriz simétrica.

De forma semelhante, pode-se ver que o conjunto de todas as matrizes complexas hermitianas de dimensão n constitui um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ se diz triangular-superior se $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$, isto é, se cada elemento abaixo da diagonal principal é 0. A soma de duas matrizes $n \times n$ do tipo triangular-superior sobre o corpo $\mathbb{F}$ é uma matriz triangular-superior. Da mesma forma, o produto de um escalar por uma matriz triangular-superior é também uma matriz triangular-superior. Portanto, o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ do tipo triangular-superior é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{F}^{n\times n}$.

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ é chamada triangular-inferior se $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$. Assim, todo elemento de uma matriz triangular-inferior que se encontra acima da diagonal principal é zero. Similarmente, vê-se que o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n sobre o corpo $\mathbb{F}$ do tipo triangular-inferior é um subespaço de $\mathbb{F}^{n\times n}$.

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de dimensão n é chamada de matriz diagonal se $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$. Pode-se também verificar facilmente que o conjunto de todas as matrizes diagonais $n \times n$ é um subespaço de $\mathbb{F}^{n \times n}$.

EXEMPLO 5: Considerando o espaço vetorial $\mathbb{F}^n$ das n-listas ordenadas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de escalares de $\mathbb{F}$, pode-se notar que $\mathbb{F}^{n-1}$ não é um subespaço de $\mathbb{F}^n$. Isto é claro, pois $\mathbb{F}^{n-1}$ não é um subconjunto de $\mathbb{F}^n$. No entanto, como o leitor deve verificar, o subconjunto de todas as n-listas ordenadas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de escalares de $\mathbb{F}$ com $\alpha_n = 0$ é um subespaço de $\mathbb{F}^n$.

Observa-se também que o subconjunto de todas as n-listas ordenadas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de escalares de $\mathbb{F}$ com $\alpha_n = 1$ não é um subespaço de $\mathbb{F}^n$. Basta notar que a n-lista nula $(0,0, \dots, 0)$, o vetor zero de $\mathbb{F}^n$, não pertence a este subconjunto.

EXEMPLO 6: Usando o teorema 2.4, é fácil verificar que $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, o conjunto de todas as funções polinomiais de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{F}$ com grau menor ou igual a n, é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ de todas as funções de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{F}$.

O conjunto $C[a, b]$ de todas as funções reais contínuas no intervalo $[a, b]$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{F}([\mathrm{a}, \mathrm{b}], \mathbb{R})$ das funções reais definidas em $[a, b]$.

EXEMPLO 7: Seja V um espaço vetorial arbitrário sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se $0 \in V$ é o vetor zero em V, então o subconjunto unitário constituído somente por este vetor nulo, dado por $W = \{0\}$, é um subespaço V, denominado o subespaço nulo de V.

EXEMPLO 8: Seja A uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então o conjunto de todas as matrizes-colunas X $n \times 1$ sobre $\mathbb{F}$ tais que $AX = 0$ é um subespaço de $\mathbb{F}^{n \times 1}$, chamado de espaço-solução do sistema linear homogêneo. Para provar isto, suponha que X e Y em $\mathbb{F}^{n \times 1}$ são tais que $AX = 0$ e $AY = 0$. Então $A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$. Por outro lado, se $\alpha \in \mathbb{F}$ e $AX = 0$, então $(\alpha A)X = \alpha(AX) = \alpha 0 = 0$.

COROLÁRIO 2.5: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. A interseção de uma coleção arbitrária de subespaços de V é um subespaço de V.

Prova: Seja $\{W_a\}$ uma coleção de subespaço de V e seja $W = \bigcap_a W_a$ a sua interseção. Como cada W_a é um espaço vetorial, todos os membros desta coleção contêm o vetor nulo de V. Assim, a interseção W contém este vetor nulo sendo, portanto, $W \neq \emptyset$. Em seguida, sejam ϑ e ω vetores em W. Pela definição de interseção, ϑ e ω estão em cada W_a e, como cada W_a é um subespaço, o vetor $(\vartheta + \omega)$ encontra-se em todo W_a. Assim, $(\vartheta + \omega) \in W$. Seja $\alpha \in \mathbb{F}$. Se $\vartheta \in W$, já vimos que ϑ está em cada W_a. Como todo W_a é um subespaço, então $\alpha\vartheta$ está em cada W_a. Logo, $\alpha\vartheta$ se encontra na interseção W ▌

EXEMPLO 9: Sejam W_1 e W_2 conjuntos de matrizes quadradas $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$, sendo W_1 o conjunto de todas as matrizes do tipo triangular-superior, enquanto que W_2 é o conjunto de todas as matrizes do tipo triangular-inferior. A partir do Exemplo 4, sabemos que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{F}^{n \times n}$. Logo, pelo corolário 2.5, a interseção $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de $\mathbb{F}^{n \times n}$. Este subespaço é o conjunto de todas as matrizes $A = [a_{ij}]$ quadradas de ordem n sobre $\mathbb{F}$ com $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Um elemento deste subespaço é uma matriz diagonal de ordem n sobre $\mathbb{F}$.

COROLÁRIO 2.6: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se $W_1, \dots, W_k$ são subespaços de V, então a soma

$$W_1 + \cdots + W_k = \{\vartheta = (\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_k) \in V;\ \vartheta_i \in W_i, \forall i = 1, \dots, k\}$$

é um subespaço de V.

Prova: Sejam ϑ e $\omega \in W_1 + \cdots + W_k$. Então $\vartheta = \vartheta_1 + \cdots + \vartheta_k$ e $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_k$, com $\vartheta_i, \omega_i \in W_i$, $\forall\ i = 1, \dots, k$. Como cada W_i é um subespaço, então $(\vartheta_i + \omega_i) \in W_i$ para cada i. Logo, vê-se que $\vartheta + \omega = (\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_k) + (\omega_1 + \cdots + \omega_k) = (\vartheta_1 + \omega_1) + \cdots + (\vartheta_k + \omega_k)$ está em $W_1 + \cdots + W_k$. Sejam $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\vartheta = (\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_k) \in W_1 + \dots + W_k$, com $\vartheta_i \in W_i$ para todo i. Como cada W_i é um subespaço de V, então $\alpha\vartheta_i \in W_i$ para cada i. Portanto, $\alpha\vartheta = \alpha(\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_k) = (\alpha\vartheta_1 + \cdots + \alpha\vartheta_k) \in W_1 \dots + W_k$. ▌

EXEMPLO 10: Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{F}^{2\times 2}$ das matrizes 2×2 sobre o corpo $\mathbb{F}$ e os seguintes subespaços W_1 e W_2 de V:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F} \right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix};\ \delta, \lambda \in \mathbb{F} \right\}.$$

Portanto, neste exemplo, o subespaço soma $W_1 + W_2$ é o próprio espaço vetorial $\mathbb{F}^{2\times 2}$:

$$W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\} = \mathbb{F}^{2\times 2}.$$

O subespaço $W_1 \cap W_2$ é o subconjunto

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{F} \right\}.$$

Subespaço Gerado

Dados os vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ em um espaço vetorial V sobre o corpo F, o teorema 2.4 garante que o conjunto formado por todas as combinações linear do tipo $\vartheta = \alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n$, com cada $\alpha_i \in \mathbb{F}$, é um subconjunto de V. Na realidade, como será estabelecido a seguir, este subconjunto é um importante subespaço de V.

■ DEFINIÇÃO 2.5: Sejam $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ vetores em um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{F}$. Denomina-se conjunto gerado por $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ o subconjunto de V constituído de todas as combinações lineares destes vetores, o qual é denotado por $[\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,]$. Assim, pode-se escrever:

$$[\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,] = \{\,\vartheta \in V;\ \vartheta = \alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n \text{ e } \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall i = 1, \dots, n\,\}.$$

COROLÁRIO 2.7: Dados quaisquer vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ em um espaço vetorial V sobre o corpo F, o conjunto $[\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,]$ gerado por estes vetores é um subespaço de V.

Prova: Dados dois vetores em $[\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,]$, $\vartheta = \alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n$ e $\omega = \beta_1\vartheta_1 + \cdots + \beta_n\vartheta_n$, então $\vartheta + \omega = \gamma_i\vartheta_1 + \cdots + \gamma_n\vartheta_n$, com $\gamma_i = (\alpha_i + \beta_i) \in \mathbb{F}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, $(\vartheta + \omega) \in [\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,]$. Se $\lambda \in \mathbb{F}$, então $\lambda\vartheta = \rho_1\vartheta_1 + \cdots + \rho_n\vartheta_n$, com $\rho_i = \lambda\alpha_i \in \mathbb{F}$

para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, $\lambda\vartheta \in [\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,]$. Portanto, $[\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,]$ é um subespaço de V. ▌

O conjunto $[\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,]$ é chamado o subespaço gerado pelos vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$. Se $[\,\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\,] = V$, costuma-se dizer que os vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in V$ geram o espaço vetorial V.

EXEMPLO 11: Em ambos os itens (a) e (b) são dados três vetores ϑ_1, ϑ_2 e ϑ_3 em $\mathbb{R}^3$. Em que caso se tem $[\,\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\,] = \mathbb{R}^3$?

(a) $\vartheta_1 = (1,1,1)$, $\vartheta_2 = (1,1,0)$, $\vartheta_3 = (1,0,0)$;
(b) $\vartheta_1 = (1,2,4)$, $\vartheta_2 = (2,1,3)$, $\vartheta_3 = (4,-1,1)$.

» SOLUÇÃO: Para verificar se os vetores $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ geram o espaço $\mathbb{R}^3$, deve-se determinar se um vetor arbitrário $\vartheta = (a, b, c)$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Para solucionar a parte (a), sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a, b, c) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0).$$

Dai, segue o sistema linear:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= a \\ \alpha_1 + \alpha_2 \quad\;\; &= b \\ \alpha_1 \qquad\qquad &= c \end{aligned}$$

que possui infinitas soluções, da forma $\alpha_1 = c$, $\alpha_2 = b - c$, $\alpha_3 = a - b$.

Assim, todo vetor (a, b, c) em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como a combinação linear

$$(a, b, c) = c\,(1,1,1) + (b - c)\,(1,1,0) + (a - b)\,(1,0,0).$$

Portanto, os vetores $\vartheta_1 = (1,1,1)$, $\vartheta_2 = (1,1,0)$, $\vartheta_3 = (1,0,0)$ geram o espaço $\mathbb{R}^3$.

Para verificar a parte (b), sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a, b, c) = \alpha_1\,(1,2,4) + \alpha_2\,(2,1,3) + \alpha_3\,(4,-1,1).$$

Esta equação fornece o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= b \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= c \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema pelo método de Gauss-Jordan, obtém-se as seguintes etapas de redução da matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 2 & 1 & -1 & b \\ 4 & 3 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & -3 & -9 & b - 2a \\ 0 & -5 & -15 & c - 4a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & (2a - b)/3 \\ 0 & -5 & -15 & c - 4a \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & (b - a)/3 \\ 0 & 1 & 3 & (2a - b)/3 \\ 0 & 0 & 0 & -(2a - 3c + 5b)/3 \end{array}\right).$$

Assim, se $2a - 3c + 5b \neq 0$, então o sistema é inconsistente. Logo, existem inúmeros vetores $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, com $2a - 3c + 5b \neq 0$, que não podem ser escritos como combinação linear dos vetores $\vartheta_1 = (1,2,4)$, $\vartheta_2 = (2,1,3)$, $\vartheta_3 = (4,-1,1)$. Portanto, estes três vetores não geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Espaço-linha

■ DEFINIÇÃO 2.6: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Os vetores-linhas de A são os m vetores em $\mathbb{F}^n$ dados por $\boldsymbol{a}_{i:} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$. O espaço-linha da matriz $A = [a_{ij}]$, denotado por $[\ \boldsymbol{a}_{1:}, \dots, \boldsymbol{a}_{m:}\ ]$, é o subespaço de $\mathbb{F}^n$ gerado pelos vetores-linhas de A.

EXEMPLO 12: O subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $(1, 2, 0, 3, 0)$, $(0, 0, 1, 4, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, 1)$ é o espaço-linha da seguinte matriz em $\mathbb{R}^{3\times5}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.8: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$. Os vetores-linhas de A, dados por $\boldsymbol{a}_{i:} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{F}^n$; $i = 1, \dots, n$, são linearmente independentes se, e somente se, A é inversível.

Prova: Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ escalares em $\mathbb{F}$ e $0 = (0, \dots, 0)$ o vetor nulo em $\mathbb{F}^n$. Então, a combinação linear dos vetores-linhas de A

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_{1:} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_{n:} = 0$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n &= 0 \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

Vê-se que este sistema linear homogêneo tem a seguinte forma matricial:

$$A^T\alpha = 0,$$

com $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T \in \mathbb{F}^{n\times1}$ e $0 = [0, \dots, 0]^T \in \mathbb{F}^{n\times1}$.

Assim, os vetores-linhas de A são linearmente independentes se, e somente se, o sistema $A^T\alpha = 0$ admite apenas a solução trivial $\alpha = [0, \dots, 0]^T$. Mas, pelo corolário 1.20, $A^T\alpha = 0$ admite apenas a solução trivial se, e somente se, A é inversível, o que conclui a demonstração ▌

EXEMPLO 13: Mostrar que os vetores $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 2, 3, 4)$, $(0, 0, 3, 4)$ e $(0, 0, 0, 4)$ de $\mathbb{R}^4$ são linearmente independentes.

» SOLUÇÃO: Seguindo o teorema 2.8, é suficiente verificar se a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, cujas linhas são estes vetores, é inversível. Para isto, procuraremos transformar A na matriz identidade 4×4 . As etapas do processo de escalonamento são mostradas no seguinte diagrama de setas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Desse modo, notamos que A é equivalente por linhas a matriz identidade. Logo, A é inversível e, portanto, os vetores são linearmente independentes.

Mais Sobre Subespaço Gerado

O corolário 2.7 faz referência ao conceito de subespaço gerado por um número finito de vetores. Agora, generalizaremos este conceito. Assim, se S é um subconjunto arbitrário do espaço vetorial V, podendo ter infinitos vetores de V, chamaremos de conjunto gerado por S, denotado por $[\,S\,]$, o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores em S.

TEOREMA 2.9: Se S é um subconjunto de um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{F}$, então o conjunto $[\,S\,]$ de todas as combinações lineares dos vetores em S é um subespaço de V. Mais ainda, $[\,S\,]$ é a interseção da coleção de todos os subespaços de V que contem S. Em outras palavras, $[\,S\,]$ é o menor subespaço de V que contém S.

Prova: O fato de $[\,S\,]$ ser um subespaço de V é uma consequência do teorema 2.4, uma vez que a soma de duas combinações lineares de vetores de S é uma combinação linear de tais vetores e, também, o produto de um escalar em $\mathbb{F}$ por uma combinação linear de vetores de S é um vetor em $[\,S\,]$.

Seja $\{W_a\}$ a coleção de todos os subespaços de V que contêm S. Mostraremos que $[\,S\,] = \bigcap_a W_a$. Dado um vetor arbitrário $\vartheta \in \bigcap_a W_a$, é claro que $\vartheta \in S$. Logo $\bigcap_a W_a \subset [\,S]$. Por outro lado, se $\vartheta \in [\,S\,]$, então ϑ é a combinação linear de vetores de S. Como cada subespaço W_a contém todas as combinações lineares de S, vemos que ϑ está em cada W_a. Logo, $\vartheta \in \bigcap_a W_a$ e, consequentemente, $[\,S\,] \subset \bigcap_a W_a$. Resumindo, $\bigcap_a W_a \subset [\,S\,]$ e $[\,S\,] \subset \bigcap_a W_a$. Portanto, $[\,S\,] = \bigcap_a W_a$. ▌

EXEMPLO 14: Seja $C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais contínuas sobre $\mathbb{R}$. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o subespaço de $C(\mathbb{R})$ de todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiais, do tipo:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n;\ n = 0,1,2,\dots$$

sendo cada α_i um número real. Claramente, o subconjunto infinito $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}$ das funções polinomiais definidas por

$$f_k(x) = x^k,\ k = 0,1,2,\dots$$

gera o subespaço $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, ou seja, $[\,f_0, f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\,] = \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Exercícios

1. Quais dos seguintes conjuntos de vetores $\{v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n;\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^n$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 3$?
   (a) todos $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tais que $\alpha_1 > 0$;
   (b) todos $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tais que $\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$;
   (c) todos $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tais que $\alpha_2 = \alpha_1^2$;
   (d) todos $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tais que $\alpha_1\alpha_2 = 0$;
   (e) todos $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tais que $\alpha_2 \in \mathbb{Q}$.
2. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reais de variáveis reais. Quais dos seguintes conjuntos de funções são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
   (a) todas f tais que $f(x^2) = f(x)^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
   (b) todas f tais que $f(0) = f(1)$;
   (c) todas f tais que $f(3) = 1 + f(-5)$;
   (d) todas f tais que $f(-1) = 0$.
3. O vetor $(3i,\ -1,\ 0,\ i-1)$ está no subespaço de $\mathbb{C}^4$ gerado pelos vetores $(3-i,\ 1-2i,\ 5i-7,\ 3i+4)$, $(1+3i,\ 1+i, -6-7i,\ 4i)$ e $(0,\ 1,\ 1,\ -3)$?
4. Seja $\mathbb{F}$ um corpo e seja um número inteiro $n \geq 2$. Quais dos seguintes conjuntos de matrizes são subespaços do espaço vetorial $\mathbb{F}^{n\times n}$?
   (a) todas as matrizes $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ inversíveis;
   (b) todas as matrizes $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ singulares;
   (c) todas A tais que $AB = BA$, onde B é uma certa matriz fixada em $\mathbb{F}^{n\times n}$;
   (d) todas as matrizes $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tais que $A^2 = A$.
5. Seja $W_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(-x) = f(x)\}$ o conjunto das funções pares e $W_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(-x) = -f(x)\}$ o conjunto das funções ímpares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
   (a) Demonstrar que W_1 e W_2 são subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (b) Demonstrar que $W_1 + W_2 = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (c) Demonstrar que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
6. Seja $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios reais de grau ≤ 4. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$?
   (a) o conjunto dos polinômios em $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ de grau par;
   (b) o conjunto dos polinômios em $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ de grau 3;
   (c) o conjunto dos polinômios $p(x)$ em $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tais que $p(0) = 0$.
7. Quais dos seguintes conjuntos de vetores em $\mathbb{R}^3$ geram o espaço $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\{(1,0,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\}$;
   (b) $\{(1,0,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1), (1,2,3)\}$;
   (c) $\{(2,1,-2),\ (-2,-1,2),\ (4,2,-4)\}$;
   (d) $\{(1,1,3),\ (0,2,1)\}$.
8. Mostrar que as seguintes matrizes em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que $[E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}] = \mathbb{R}^{2\times 2}$.
9. Os vetores-linhas da matriz complexa $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i & 2+3i \\ i & 1 & 2 \\ 1-i & -1-i & 3-2i \end{bmatrix}$ são linearmente independentes?