Prova analise real

Exercício 2 Use a notação de construção de conjuntos para dar uma descrição do conjunto $\{0, 3, 6, 9, 12\}$.

Exercício 4 Existem 2 conjuntos A e B tais que $A \in B$ e $A \subset B$ simultâneamente?

Exercício 5 Para os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 3, 6\}$, determine I) $A \cup B$; II) $A \cap B$; III) $A \setminus B$ e; IV) $B \setminus A$.

Exemplos:
~~1- Qual é o conjunto das partes do conjunto $\{0, 1, 2\}$?~~
2- Qual é o conjunto das partes do conjunto vazio?
3- Qual é o conjunto das partes do conjunto obtido no exemplo anterior?

Demonstração: Exercício!

Proposição 1 *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ temos: $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$*

Exercício: Se $a, b \in \mathbb{R}^-$, que tipo de número é ab? O subconjunto $\mathbb{R}^-$ satisfaz o axioma de fecho? Justifique sua resposta!

Teorema 2 *Regras de derivação: Sejam f e g duas funções reais e diferenciáveis em $x_0 \in (a, b)$. Então, $f + g$, $f \cdot g$, f/g são diferenciáveis em x_0 e*

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
- $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, $g(x_0) \neq 0$.

Dem. Exercício: provar as primeira e terceira regras de derivação.
Para provar a segunda regra de derivação, utilizamos a definição da derivada. Assim,

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplos: Diretamente da definição de derivada, podemos provar que:
1- $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$.
2- $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$.
3- Recursivamente, podemos provar que $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Exercício!

5^a Questão: Use o princípio de indução finita e o fato de que $x' = 1$, para provar que $(x^n)' = nx^{n-1}$, para qualquer n inteiro não-nulo.

Hint: É preciso provar para 2 casos diferentes, $n > 0$ e $n < 0$.

8^a Questão: Finalize a demonstração do teorema do valor médio generalizado, ou seja, resolva os itens:

(A) Prove que a função φ satisfaz as condições do teorema do valor médio.

(B) Prove que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

(C) Deduza o teorema do valor médio generalizado a partir do teorema do valor médio, *i.e.*, prove que $\varphi'(x_0) = 0$ e deduza que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

9^a Questão: Considere $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ definidas em $\mathbb{R}$. Prove que **não** existe $x_0 \in (-1, 1)$ tal que

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Que condição do teorema do valor médio generalizado não é satisfeita?

10^a Questão: Encontre uma aproximação polinomial para a função exponencial e^x, ao redor do ponto $x = 2$ e com um desvio de ± 0.005.

Questão bônus: Demonstre o seguinte teorema:
Sejam f uma função real definida em $D \subset \mathbb{R}$, $R := f(D)$, e g uma função real definida em R. Suponha, ademais, que f é contínua em $x_0 \in D$ e g é contínua em $f(x_0)$.
Defina a função real $h : D \to \mathbb{R}$, $h(x) := g(f(x))$. Então h é contínua em x_0.

Questão bônus: Quantos termos da soma no teorema de Taylor são necessários para que a função $\log x$, definida em $[1/2, 3/2]$ centrada em $x_0 = 1$ possua um erro de no máximo 10^{-3}? Como muda o número de termos se o intervalo passa a ser $[1, 3/2]$?

1^a Questão: Considere a função $f(x) = \exp x$, $x \in [-1, 1]$.

- Encontre uma aproximação polinomial para f ao redor de $a = 0$, com um desvio de $\pm 6 \cdot 10^{-4}$.
- Esboce os gráficos de f e da aproximação polinomial obtida.
- Encontre uma aproximação para o valor da integral $\int_{-1}^{1} \exp -x^2 \, dx$. Para isso, avalie em $-x^2$o polinômio obtido no primeiro item e resolva a integral do mesmo.
- Compare, analítica e graficamente, os valores da função f e do polinômio em $x = 0$ e $x = 1$.

2^a Questão: Considere a função $r(x) = \sqrt{x}$.

- Se o Dom(f)= $[1, 5]$, encontre uma aproximação polinomial para r, ao redor de $x = 4$, com um desvio de $\pm 10^{-3}$.
- Se o Dom(f)= $[3, 5]$, encontre uma aproximação polinomial para r, ao redor de $x = 4$, com um desvio de $\pm 10^{-3}$.
- Esboce os gráficos de r e dos polinômios obtidos nos itens anteriores. Analise e compare matematicamente os resultados obtidos.
- Encontre uma aproximação para $\sqrt{3}$.

3^a Questão: Encontre uma aproximação polinomial para a função $T : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, com um desvio de $\pm 10^{-3}$.

4^a Questão: Calcule o polinômio de Taylor de quarto grau da função $q : [0, 1.5] \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^3 \exp x^2$, ao redor de $x = 1$. Determine o desvio, *i.e.*, o valor de R (cf. Teorema de Taylor). Esboce os gráficos de q e do polinômio obtido.