Prova por Indução Matemática

IPRJ01-10762

Matemática Discreta II

Gustavo Barbosa Libotte

Aula 2

- Para o primeiro passo no processo de indução, pode ser apropriado começar em 0 ou 2 ou 3, em vez de 1. O mesmo princípio pode ser aplicado, não importa em que degrau se começa.

Exemplo

Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

- Aqui devemos usar indução e começar com o passo básico $P(4)$.
- A hipótese de indução é que $k^2 > 3k$ com $k \geq 4$, e queremos provar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$.

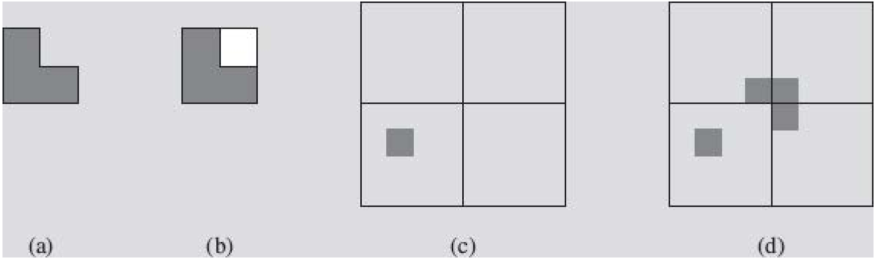
$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&> 3k + 2k + 1 \\
&\geq 3k + 8 + 1 && \text{(pela hipótese de indução)} \\
&\geq 3k + 9 && \text{(já que } k \geq 4\text{)} \\
&> 3k + 3 \\
&= 3(k+1) && \text{(já que } 9 > 3\text{)}
\end{aligned}$$

- Na demonstração anterior, usamos o fato de que $3k + 9 > 3k + 3$. É claro que $3k + 9$ é maior do que um monte de coisas, mas $3k + 3$ é o que dá o resultado de que precisamos.
- Em uma demonstração por indução, como sabemos exatamente o resultado que queremos, podemos deixar que isso nos guie ao manipular expressões algébricas.
- Além disso, demonstrações supostamente por indução, mas que não o são de fato, também são possíveis.
- Quando demonstramos $P(k+1)$ sem usar $P(k)$, fizemos uma demonstração direta de $P(k+1)$, em que $k+1$ é arbitrário.
- Não é que a demonstração esteja errada, é só que ela deve ser reescrita como uma demonstração direta de $P(n)$ para qualquer n, e não como uma demonstração por indução.

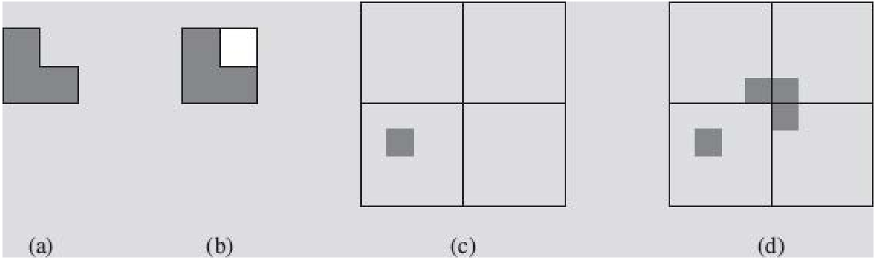
Exemplo

Prove que, para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

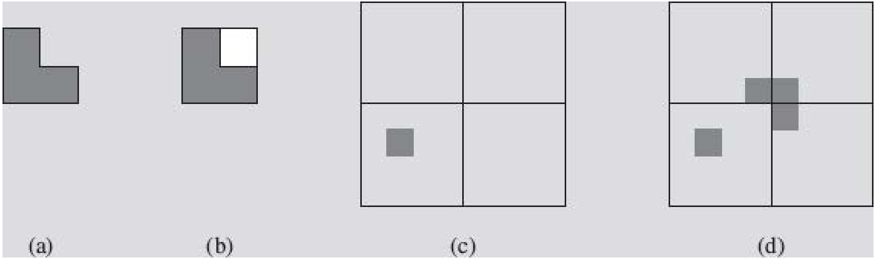
- Pode ser conveniente uma demonstração por indução mesmo em aplicações não tão óbvias como nos exemplos anteriores.
- O enunciado do problema pode não dizer diretamente "prove alguma coisa sobre inteiros não negativos".
- Em vez disso, pode haver alguma quantidade na proposição a ser demonstrada que assume valores inteiros não negativos arbitrários.
- Um problema de "revestimento por ladrilhos" fornece uma boa ilustração de indução em um contexto geométrico.
- Um ângulo de ferro é uma peça em forma de L cobrindo três quadrados em um tabuleiro quadriculado, como o de xadrez—veja a figura (a).



- O problema é mostrar que, para qualquer inteiro positivo n, se removermos um quadrado de um tabuleiro originalmente com $2^n \times 2^n$ quadrados, ele pode ser ladrilhado (completamente revestido) com ângulos de ferro.
- A base da indução é $n = 1$, o que nos dá um tabuleiro com 2×2 quadrados.
- A figura (b) mostra a solução nesse caso se for removido o canto direito superior.



- A remoção de qualquer dos outros três cantos funciona da mesma maneira. Suponha agora que qualquer tabuleiro $2^k \times 2^k$ com um quadrado removido pode ser ladrilhado usando-se ângulos de ferro.
- Vamos considerar um tabuleiro $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Precisamos mostrar que ele pode ser ladrilhado quando se remove um quadrado.
- Para relacionar o caso $k+1$ com a hipótese de indução, divida o tabuleiro $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ em quatro partes iguais.



- Cada parte é um tabuleiro $2^k \times 2^k$, e uma delas terá um quadrado faltando, como na figura (c).
- Pela hipótese de indução, esse tabuleiro pode ser ladrilhado. Remova um canto de cada uma das outras três partes como na figura (d).
- Pela hipótese de indução, essas três partes com os quadrados removidos podem ser ladrilhadas.
- Como um único ângulo de ferro pode ser usado para cobrir esses três quadrados retirados, temos que o tabuleiro original $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ com um dos quadrados removidos pode ser ladrilhado.

Segundo princípio da indução

- Além do primeiro princípio de indução, que temos usado, existe um segundo princípio de indução.

Primeiro princípio da indução matemática

1. $P(1)$ é verdade.
2. $(\forall k)[P(r)$ verdade para todo r, $1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1)$ verdade$]$

Se as proposições 1 e 2 forem verdadeiras, então $P(n)$ é verdade para todos os inteiros positivos n.

- Esses dois princípios de indução diferem na segunda proposição.
- Vamos relembrar a segunda proposição do primeiro princípio de indução:

$$(\forall k)[P(k)\text{verdade} \rightarrow P(k+1)\text{verdade}]$$

- Neste caso, precisamos ser capazes de provar, para um inteiro positivo arbitrário k, que $P(k+1)$ é verdadeira com base apenas na hipótese de que $P(k)$ é verdadeira.

Segundo princípio da indução

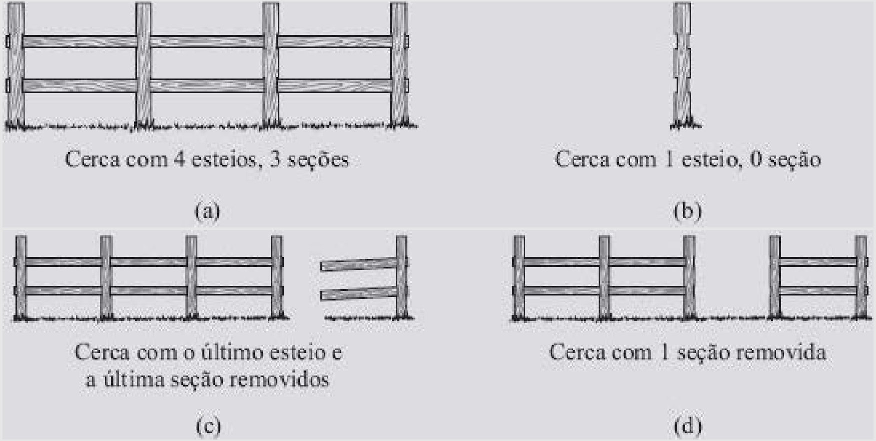
- Na proposição 2 do segundo princípio, podemos supor que $P(r)$ é verdadeira para todos os inteiros r entre 1 e um inteiro positivo arbitrário k para provar $P(k+1)$.
- Isso parece nos dar muito mais "munição", de modo que pode acontecer, algumas vezes, de sermos capazes de provar o condicional 2 do segundo princípio, mas não do primeiro.
- O que nos permite deduzir $(\forall n)P(n)$ em cada caso?
- Veremos que os dois princípios, ou seja, os dois métodos de demonstração, são equivalentes.
- Em outras palavras, se aceitarmos como válido o primeiro princípio, então o segundo também será válido, e vice-versa. Para provar a equivalência entre os dois princípios, vamos considerar outro princípio:

Princípio da boa ordenação

Toda coleção de inteiros positivos que contém algum elemento tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que uma cerca reta com n esteios tem $n-1$ seções para qualquer $n \geq 1$.



Segundo princípio da indução

- **Lembrete:** Use o segundo princípio de indução quando o caso $k+1$ depender de resultados anteriores a k.

- Como regra geral, o primeiro princípio de indução é aplicável quando basta a informação de "uma posição atrás", ou seja, quando a veracidade de $P(k)$ é suficiente para provar a veracidade de $P(k+1)$.

- O segundo princípio é aplicável quando a informação de "uma posição atrás" não é suficiente.

- Em outras palavras, você não pode provar a veracidade de $P(k+1)$ sabendo apenas que $P(k)$ é verdadeira, mas você pode provar que $P(k+1)$ é verdadeira se souber que $P(r)$ é verdadeira para um ou mais valores de r "mais atrás", ou seja, menores do que k.

Exemplo

Prove que qualquer quantia maior ou igual a 8 centavos para franquia postal pode ser conseguida usando-se apenas selos de 3 e de 5 centavos.