Dúvidas sobre relação de equivalência

Vejamos, inicialmente, a definição de uma **relação de equivalência**:

Definição: sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se, somente se:

P1 $\forall x \in A, (x, x) \in R$;

P2 $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$;

P3 $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$.

Em outras palavras, dizemos que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de equivalência se R for: reflexiva, simétrica e transitiva, respectivamente.

Agora vejamos, por exemplo, o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ correspondente ao primeiro exercício, no slide 13 da aula 4. Tínhamos que avaliar as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade quanto aos subconjuntos:

a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$;

b) $R_2 = \{(1, 1)(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

Em ambos os casos, de fato $R_1, R_2 \subset A \times A$, o que vai ao encontro da definição.

Para avaliarmos a reflexividade, por exemplo, temos que considerar todos os valores de $x \in A$, o que significa considerar x igual a 1, 2, 3 ou 4. Portanto, qualquer relação só seria reflexiva se tivéssemos os pares ordenados $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ na relação.

Para o caso da simetria, a interpretação da propriedade P2 é tal que: "para todo x, y pertencente a A, **SE** (x, y) pertence a R, **ENTÃO** (y, x) pertence a R." Analogamente, a interpretação vale para a propriedade P3, da transitividade.

O gabarito para estas atividades é o seguinte:

Como A contém os quatro elementos 1, 2, 3 e 4, uma relação R em A é reflexiva se contém os quatro pares $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ e $(4, 4)$. Assim, apenas R_2 é reflexiva. Observe que R_1 não é reflexivas pois $(2, 2)$ não pertence à relação; R_1 não é simétrica porque $(1, 2) \in R_1$ mas $(2, 1) \notin R_1$. Por sua vez, R_2 é simétrica; ambas as relações são transitivas.

Na aula de revisão tínhamos a seguinte atividade:

Considere o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e defina a relação R em S como

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 5), (6, 6)\}$$

Mostre que R <u>**é**</u> uma relação de equivalência em S e encontre a partição correspondente de S.

Veja, entretanto, que para que R seja uma relação de equivalência neste exercício, falta o par ordenado $(4, 4)$. Portanto, é impossível "mostrar que R é uma relação de equivalência" pois, de fato, não é.

Neste caso, desconsidere este exercício. O enunciado estava errado. Vale ressaltar, entretanto, que as definições e demais exercícios apresentados durantes as aulas estão **CORRETOS**.