RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 2 – UERJ/2021 LOENA COUTO

Exercício 2: Usando a definição de integral imprópria determine se as seguintes integrais convergem ou divergem e, se convergir, ache o seu valor:

a) $\int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx$ c) $\int_1^{3} \frac{1}{(x-3)^4}\,dx$

b) $\int_2^{\infty} x^2e^{-x^3}\,dx$ d) $\int_1^{4} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx$

Solução:

a) Por definição de integral imprópria, temos:

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t} xe^{-x}\,dx\,.$$

Usando integração por partes com

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

tem-se:

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{-e^{-x}}_{v}\cdot\underbrace{dx}_{du} = -xe^{-x} - e^{-x} + C\,.$$

Assim:

$$\int_1^{t} xe^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x} - e^{-x} + C\Big]_1^{t} = (-te^{-t} - e^{-t} + C) - (-e^{-1} - e^{-1} + C) = -te^{-t} - e^{-t} + 2e^{-1}\,.$$

Logo:

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} -te^{-t} - e^{-t} + 2e^{-1}\,.$$

Mas, $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ e, usando a regra de L'Hôpital, tem-se:

$$\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t} = 0\,.$$

Assim,

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} -te^{-t} - e^{-t} + 2e^{-1} = 2e^{-1}\,.$$

Assim, a integral imprópria converge e seu valor é $2e^{-1}$.

b) Usando a definição de integral imprópria, tem-se:

$$\int_2^{\infty} x^2e^{-x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_2^{t} x^2e^{-x^3}\,dx\,.$$

Fazendo a mudança

$$\begin{cases} u = x^3 \\ du = 3x^2\,dx \end{cases} \Rightarrow x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$$

tem-se:

$$\int x^2e^{-x^3}\,dx = \int e^{-x^3}x^2\,dx = \int e^{-u}\tfrac{1}{3}\,du = -\tfrac{1}{3}e^{-u} + C = -\tfrac{1}{3}e^{-x^3} + C\,.$$

Assim:

$$\int_2^{t} x^2e^{-x^3}\,dx = \Big[-\tfrac{1}{3}e^{-x^3} + C\Big]_1^{t} = \Big(-\tfrac{1}{3}e^{-t^3} + C\Big) - \Big(-\tfrac{1}{3}e^{-1} + C\Big) = \tfrac{1}{3}e^{-1} - \tfrac{1}{3}e^{-t^3}\,.$$

Logo:

$$\int_2^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t x^2 e^{-x^3}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \tfrac{1}{3}e^{-1} - \tfrac{1}{3}e^{-t^3} = \tfrac{1}{3}e^{-1} - 0 = \tfrac{1}{3}e^{-1}\,.$$

Assim, a integral converge e seu valor é $\frac{1}{3}e^{-1}$.

c) Por definição de integral imprópria, temos:

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-3)^4}\, dx = \lim_{t\to 3^-} \int_1^t \frac{1}{(x-3)^4}\, dx\,.$$

Também, fazendo a mudança $\left\{\begin{array}{l} u = x-3 \\ du = dx \end{array}\right.$ tem-se:

$$\int \tfrac{1}{(x-3)^4}\, dx = \int \tfrac{1}{u^4}\, du = \tfrac{u^{-3}}{-3} + C = -\tfrac{1}{3(x-3)^3} + C\,.$$

Assim

$$\int_1^t \tfrac{1}{(x-3)^4}\, dx = \left[-\tfrac{1}{3(x-3)^3} + C\right]_1^t = \left(-\tfrac{1}{3(t-3)^3} + C\right) - \left(\tfrac{1}{24} + C\right) = -\tfrac{1}{3(t-3)^3} - \tfrac{1}{24}\,.$$

Logo:

$$\int_1^3 \tfrac{1}{(x-3)^4}\, dx = \lim_{t\to 3^-} \int_1^t \tfrac{1}{(x-3)^4}\, dx = \lim_{t\to 3^-} \ -\tfrac{1}{3(t-3)^3} - \tfrac{1}{24} = -\tfrac{1}{0^-} - \tfrac{1}{24} = +\infty\,.$$

Assim, a integral imprópria diverge.

d) Por definição de integral imprópria, tem-se:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx = \lim_{t\to 2^-} \int_1^t \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx + \lim_{s\to 2^+} \int_s^4 \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx\,.$$

Também, fazendo a mudança $\left\{\begin{array}{l} u = x-2 \\ du = dx \end{array}\right.$ tem-se:

$$\int \tfrac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx = \int \tfrac{1}{\sqrt[5]{u}}\, du = \int u^{-1/5}\, du = \tfrac{5}{4}u^{4/5} + C = \tfrac{5}{4}(x-2)^{4/5} + C\,.$$

Logo,

$$\int_1^t \tfrac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx = \left[\tfrac{5}{4}(x-2)^{4/5} + C\right]_1^t = \tfrac{5}{4}(t-2)^{4/5} - \tfrac{5}{4}$$

e

$$\int_s^4 \tfrac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx = \left[\tfrac{5}{4}(x-2)^{4/5} + C\right]_s^4 = \tfrac{5}{4}(2)^{4/5} - \tfrac{5}{4}(s-2)^{4/5}\,.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \tfrac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx &= \lim_{t\to 2^-} \int_1^t \tfrac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx + \lim_{s\to 2^+} \int_s^4 \tfrac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\, dx \\
&= \lim_{t\to 2^-} \tfrac{5}{4}(t-2)^{4/5} - \tfrac{5}{4} + \lim_{s\to 2^+} \tfrac{5}{4}(2)^{4/5} - \tfrac{5}{4}(s-2)^{4/5} \\
&= -\tfrac{5}{4} + \tfrac{5}{4}(2)^{4/5} \\
&= \tfrac{5}{4}\left(2^{4/5} - 1\right)\,.
\end{aligned}$$

Assim, a integral converge e seu valor é $\frac{5}{4}(2^{4/5} - 1)$.

Exercício 3: Usando critérios de convergências determine a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+x^2+1}\ dx$

b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^7+x}}\ dx$

Solução:

a) Nós sabemos que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente para todo $p > 1$ sendo a uma constante positiva. Também $x^6+x^2+1 \geq x^6$. Logo, $\frac{1}{x^6+x^2+1} \leq \frac{1}{x^6}$. Assim, multiplicando esta última desigualdade por x^2 tem-se $\frac{x^2}{x^6+x^2+1} \leq \frac{x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4}$.

Assim, pelo critério de comparação aplicada a $f(x) = \frac{x^2}{x^6+x^2+1}$ e $g(x) = \frac{1}{x^4}$ como $f(x) \leq g(x)$ e $\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{g(x)}\,dx$ é convergente logo $\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2}{x^6+x^2+1}}_{f(x)}\,dx$ também é convergente.

b) Tem-se que $x^7+x^2 \geq x^7$. Logo, $\sqrt[3]{x^7+x^2} \geq \sqrt[3]{x^7} = x^{7/3}$ (pois a função $\sqrt[3]{x}$ é crescente). Logo $\frac{1}{\sqrt[3]{x^7+x^2}} \leq \frac{1}{x^{7/3}}$. Também, como $x \geq 2$ logo $x+2 \leq x+x = 2x$. Assim, destas duas últimas desigualdades tem-se:

$$\underbrace{\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^7+x^2}}}_{f(x)} \leq \frac{2x}{x^{7/3}} = 2\underbrace{\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right)}_{g(x)}.$$

Logo, pelo critério da comparação, como $\int_2^{+\infty} \underbrace{2\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right)}_{g(x)}\,dx = 2\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{4/3}}\,dx$ é convergente, então

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^7+x^2}}}_{f(x)}\,dx$ também é convergente.