Usando as definições dadas no livro James vol. 2 em exemplos – Sequência seção 11.1

1 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

EXEMPLO 2 Determine se a seqüência é convergente ou divergente:

$$\left\{\frac{4n^2}{2n^2+1}\right\}$$

Solução Queremos determinar se $\lim_{n\to+\infty} 4n^2/(2n^2+1)$ existe. Seja, então, $f(x) = 4x^2/(2x^2+1)$ e vamos estudar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= 2$$

Assim sendo, pelo Teorema 12.1.3, $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 2$. Dessa forma, a seqüência dada é convergente e $4n^2/(2n^2+1)$ converge para 2.

EXEMPLO 5 Determine se a seqüência é convergente ou divergente:

$$\left\{n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right\}$$

Solução Queremos determinar se o $\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}(\pi/n)$ existe. Seja $f(x) = x \operatorname{sen}(\pi/x)$ e vamos estudar o $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Uma vez que $f(x)$ pode ser escrita na forma $[\operatorname{sen}(\pi/x)]/(1/x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(\pi/x) = 0$, bem como $\lim_{x\to+\infty} (1/x) = 0$, a regra de L'Hôpital pode ser aplicada para obtermos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{\pi}{x^2}\cos\dfrac{\pi}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \pi \cos\frac{\pi}{x}$$

$$= \pi$$

Logo, $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \pi$, se n for inteiro positivo. Dessa forma, a seqüência dada é convergente e $n \operatorname{sen}(\pi/n)$ converge para π.

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Usando as definições dadas no livro James vol. 2 em exemplos – Sequência seção 11.1

EXEMPLO 6 Use o Teorema 12.1.5 para provar que a seqüência

$$\left\{\frac{n^2}{2n+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right\}$$

é convergente e ache o seu limite.

Solução

$$\frac{n^2}{2n+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2n+1}\cdot n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

No Exemplo 1 comprovamos que a seqüência $\{n/(2n+1)\}$ é convergente e que $\lim\limits_{n\to+\infty}[n/(2n+1)] = \frac{1}{2}$. No Exemplo 5 ficou provado que a seqüência $\{n\operatorname{sen}(\pi/n)\}$ é convergente e que $\lim\limits_{n\to+\infty}[n\operatorname{sen}(\pi/n)] = \pi$. Assim sendo, pelo Teorema 12.1.5 (iv),

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{2n+1}\cdot n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\pi$$

Logo, a seqüência dada é convergente e seu limite é $\frac{1}{2}\pi$.

Nos exercícios a seguir, escreva os 4 primeiros elementos da sequência e determine se ela é convergente ou divergente. Caso seja convergente, ache o seu limite:

1. $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}$ **2.** $\left\{\dfrac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}$ **3.** $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$

4. $\left\{\dfrac{3n^3+1}{2n^2+n}\right\}$ **5.** $\left\{\dfrac{3-2n^2}{n^2-1}\right\}$ **6.** $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$

$\boxed{10}$ **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

EXEMPLO 1 Determine se as seguintes seqüências são crescentes, decrescentes ou não-monótonas: (a) $\{n/(2n+1)\}$; (b) $\{1/n\}$; (c) $\{(-1)^{n+1}/n\}$.

Solução

(a) Os elementos da seqüência podem ser escritos como

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \ldots$$

Observe que obtemos a_{n+1} de a_n, substituindo n por $n + 1$. Logo, como $a_n = n/(2n + 1)$,

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Observando os quatro primeiros elementos da seqüência, vemos que eles crescem quando n cresce. Assim, suspeitamos que em geral

$$\frac{n}{2n+1} \leqslant \frac{n+1}{2n+3} \tag{1}$$

A desigualdade (1) pode ser comprovada se encontrarmos uma desigualdade equivalente que sabemos ser válida. Multiplicando cada membro de (1) por $(2n + 1)(2n + 3)$, obtemos as desigualdades equivalentes:

$$n(2n+3) \leqslant (n+1)(2n+1)$$

$$2n^2 + 3n \leqslant 2n^2 + 3n + 1 \tag{2}$$

A desigualdade (2) é, obviamente, verdadeira, pois o segundo membro é 1 maior do que o primeiro. Logo, a desigualdade (1) é verificada e, portanto, a seqüência dada é crescente.

(b) Os elementos da seqüência podem ser escritos como:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Como

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

para todo n, a seqüência é decrescente.

(c) Os elementos da seqüência são

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \ldots$$

Como $a_1 = 1$ e $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 > a_2$. Porém $a_3 = \frac{1}{3}$; assim $a_2 < a_3$. Em geral, consideramos três elementos consecutivos da seqüência:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \qquad a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}$$

Se n for ímpar, $a_n > a_{n+1}$ e $a_{n+1} < a_{n+2}$; por exemplo, $a_1 > a_2$ e $a_2 < a_3$. Se n for par, $a_n < a_{n+1}$ e $a_{n+1} > a_{n+2}$; por exemplo, $a_2 < a_3$ e $a_3 > a_4$. Dessa forma, a seqüência não é nem crescente, nem decrescente e, assim sendo, não é monótona.

11 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

12 Teorema da Sequência Monótona Toda sequência monótona limitada é convergente.

Usando as definições dadas no livro James vol. 2 em exemplos – Sequência seção 11.1

EXEMPLO 2 Use o Teorema 12 para provar que a seqüência é convergente:

$$\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$$

Solução Os elementos da seqüência dada são

$$\frac{2^1}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots$$

$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24$. Assim sendo, os elementos da seqüência podem ser escritos como

$$2,\ 2,\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots$$

Então $a_1 = a_2 > a_3 > a_4$; logo, a seqüência dada pode ser decrescente. Precisamos verificar se $a_n \geqslant a_{n+1}$; isto é, precisamos determinar se

$$\frac{2^n}{n!} \geqslant \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n(n+1)! \geqslant 2^{n+1}n!$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n n!(n+1) \geqslant 2 \cdot 2^n n!$$

$$\Leftrightarrow \quad n+1 \geqslant 2 \tag{6}$$

Quando $n = 1$, a desigualdade (6) torna-se $2 = 2$ e (6) é, obviamente, verdadeira quando $n > 2$. Como a desigualdade (5) é equivalente a (6), segue que a seqüência dada é decrescente e, portanto, monótona. Um limitante superior para a seqüência dada é 2, e um limitante inferior é 0. Assim sendo, a seqüência é limitada.

A seqüência $\{2^n/n!\}$ é, então, uma seqüência monótona limitada e, pelo Teorema 12.2.6, ela é convergente.

O Teorema 12. estabelece que uma condição suficiente para uma seqüência monótona ser convergente é que ela seja limitada. Esta também é uma condição necessária e será dada no teorema a seguir.