4. Base e Dimensão

A seguir, o conceito de dependência linear é associado a um subconjunto qualquer de um espaço vetorial, não necessariamente finito.

■ DEFINIÇÃO 2.7: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subconjunto S de V é dito linearmente dependente se existem vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ em S e escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\mathbb{F}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n = 0.$$

Um conjunto que não é linearmente dependente é dito linearmente independente.

Esta definição fornece as seguintes consequências imediatas.

COROLÁRIO 2.10: (1) Todo conjunto que contém um subconjunto linearmente dependente é linearmente dependente. (2) Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente. (3) Todo conjunto de vetores de um espaço vetorial V que contém o vetor nulo de V é linearmente dependente. (4) Um subconjunto S de vetores de um espaço vetorial é linearmente independente se, e somente se, $\alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n = 0$ (para quaisquer vetores distintos $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ em S) implica em $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

■ DEFINIÇÃO 2.8: Um subconjunto $B \subset V$ é dito uma base do espaço vetorial V se, simultaneamente, ocorrem:

(i) B é linearmente independente,

(ii) $[\,B\,] = V$, ou seja, B gera V.

O espaço vetorial V é de dimensão finita se possui uma base B constituída de um número finito de vetores. Caso contrário, V é de dimensão infinita

EXEMPLO 15: Dado um corpo arbitrário $\mathbb{F}$, seja $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o subconjunto do espaço vetorial F^n constituído pelos vetores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\dots,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\dots,0) \\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ e_n &= (0,0,0,\dots,1) \end{aligned}$$

Tomando n escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ quaisquer em $\mathbb{F}$, seja o vetor ϑ definido pela combinação linear

$$\vartheta = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Então $\vartheta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Isto prova que $[\,B\,] = \mathbb{F}^n$, ou seja, B gera F^n. Como $\vartheta = 0$ se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, então os vetores $e_1, e_2, \dots, e_n$ são linearmente independentes. Portanto, o subconjunto $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base de $\mathbb{F}^n$. Esta base é comumente denominada de *base canônica* (ou padrão) do espaço vetorial $\mathbb{F}^n$.

Espaço Coluna

■ DEFINIÇÃO 2.9: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Os vetores-colunas de A são os n vetores em $\mathbb{F}^{m\times 1}$ dados por $\boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{j}} = [a_{1j}, \dots, a_{mj}]^T$, $i = 1, \dots, n$. O espaço-coluna de $A = [a_{ij}]$, denotado por $[\boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{1}}, \dots, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{n}}]$, é o subespaço de $\mathbb{F}^{m\times 1}$ gerado pelos vetores-colunas de A.

EXEMPLO 16: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se A é inversível, então os vetores-colunas $\boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{2}}, \dots, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{n}}$ de A formam uma base do espaço vetorial $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Primeiro, verificaremos se o subconjunto $B = \{\boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{2}}, \dots, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{n}}\}$ de $\mathbb{F}^{n\times 1}$ é linearmente independente. Para isto, considere a combinação linear

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{1}} + \alpha_2 \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{2}} + \dots + \alpha_n \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{n}} = 0,$$

sendo $0 = [0, \dots, 0]^T$ o vetor nulo de $\mathbb{F}^{n\times 1}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são n escalares em $\mathbb{F}$. É fácil ver que esta equação pode ser reescrita na seguinte forma matricial equivalente:

$$A\alpha = 0,$$

com $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Como a matriz A é inversível, este sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial $\alpha = [0, \dots, 0]^T$. Portanto, o conjunto $B = \{\boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{2}}, \dots, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{n}}\}$ é linearmente independente. Em seguida, mostraremos que $[\boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{1}}, \dots, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{n}}] = \mathbb{F}^{n\times 1}$. Seja $b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ uma matriz-coluna qualquer em $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Como A é inversível, podemos tomar a matriz $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ definida por $\alpha = A^{-1}b$. Então $A\alpha = b$, isto é,

$$b = \alpha_1 \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{1}} + \alpha_2 \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{2}} + \dots + \alpha_n \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{n}}.$$

Logo, $B = \{\boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{2}}, \dots, \boldsymbol{a}_{:\boldsymbol{n}}\}$ gera o espaço $\mathbb{F}^{n\times 1}$ das matrizes-colunas $n \times 1$ sobre $\mathbb{F}$.

Portanto, se a matriz A $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$ é inversível, concluímos que os vetores-colunas de A formam uma base do espaço vetorial $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

EXEMPLO 17: Agora, será dado um exemplo de uma base infinita. Para isto, seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiais sobre $\mathbb{R}$, do tipo

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n; \; n = 0,1,2, \dots$$

sendo cada α_i um número real. Seja o conjunto infinito $B = \{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ das funções polinomiais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ da forma

$$f_k(x) = x^k, \; k = 0,1,2 \dots$$

Como notamos no exemplo 14, $[\,B\,] = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Para verificar se o conjunto infinito B é linearmente independente, basta mostra que qualquer um de seus subconjuntos finitos é linearmente independente (item (2) do corolário 2.10). Isto pode ser feito provando que para cada n o conjunto $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ é linearmente independente. Assim, suponha que

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1, \dots + \alpha_n f_n = 0,$$

ou seja,

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

A última equação expressa o fato de que todo número real é uma raiz do polinômio $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0$. Em vista de um dos resultados fundamentais da álgebra, o qual garante que um polinômio real de grau n possui no máximo n raízes reais, segue que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n$.

Espaço de Dimensão Finita

TEOREMA 2.11: Seja $V = [\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m]$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ gerado por um número finito de m vetores. Então todo conjunto linearmente independente de vetores de V é finito e contém no máximo m elementos.

Prova: Basta mostrar que qualquer subconjunto S do espaço V que contém mais de m vetores é linearmente dependente. Se S é um tal conjunto, então em S existem n vetores distintos $w_1, w_2, \dots, w_n$ com $n > m$. Como $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ geram V e $S \subset V$, então existem escalares $a_{ij} \in \mathbb{F}$ tais que

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vartheta_i, \ \ j = 1, \dots, n.$$

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ são n escalares arbitrários, considere a combinação linear:

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j.$$

Esta equação pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vartheta_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} \alpha_j) \vartheta_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j \right) \vartheta_i.$$

Agora, observe que a última equação pode ser posta na forma vetorial:

$$w^T \alpha = \vartheta^T (A\alpha),$$

sendo: $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$, $\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Como $m < n$, pelo teorema 1.18, sabemos que o sistema linear homogêneo $A\alpha = 0$ possui uma solução não-trivial. Portanto, existe $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T \neq 0 \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ tal que

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = 0.$$

Isto mostra que S é um conjunto linearmente dependente. ▌

COROLÁRIO 2.12: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.

Prova: Como V é um espaço vetorial de dimensão finita, sejam $B_1 = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ duas bases de V, cada uma com um número finito de elementos. Pelo teorema 2.11 tem-se que $m \leq n$ e $n \leq m$. Portanto, $m = n$. ▌

■ DEFINIÇÃO 2.10: A dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V, denotada por $\dim V$, é o número de elementos em uma base qualquer de V.

EXEMPLO 18: Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Como vimos no exemplo 15, a base canônica (ou padrão) do espaço vetorial $\mathbb{F}^n$ possui n vetores. Logo $\dim \mathbb{F}^n = n$. Assim, por exemplo, podemos afirmar que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ etc. Por analogia, pode-se ver que as mn matrizes do espaço vetorial $\mathbb{F}^{m\times n}$ que têm 1 na posição i, j e zero nas demais formam uma base de $\mathbb{F}^{m\times n}$. Logo, $\dim \mathbb{F}^{m\times n} = mn$. Em particular, o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base do espaço vetorial $\mathbb{F}^{2\times 2}$ das matrizes 2×2 sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\dim \mathbb{F}^{2\times 2} = 4$.

Se V é um espaço vetorial arbitrário, o subespaço vetorial nulo de V, denotado por $\{0\}$, é gerado pelo vetor nulo. Mas $\{0\}$ é um conjunto linearmente dependente. Assim, por convenção, considera-se que $\dim\{0\} = 0$.

COROLÁRIO 2.13: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita com $\dim V = n$, então:

(a) todo subconjunto de V que contém mais de n vetores é linearmente dependente;

(b) nenhum subconjunto de V com menos de n vetores pode gerar V.

Prova: Como $\dim V = n$, então existe um subconjunto de V linearmente independente $B = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$, com n vetores, tal que $[\,B\,] = V$. (a) Pelo teorema 2.11, qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é linearmente dependente. (b) Suponha que exista um subconjunto de V possuindo m vetores $B_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, com $m < n$, tal que $[\,B_1\,] = V$. Se B_1 é linearmente independente, então B_1 é uma base de V e pelo corolário 2.12 segue que $m = n$, o que é uma contradição. Logo B_1 é linearmente dependente. Mas, como B_1 gera V, retirando-se os vetores linearmente dependentes de B_1, é possível selecionar um subconjunto $B_2 \subset B_1$ possuindo, digamos, k elementos, com $k < m < n$, tal que B_2 é uma base de V. Novamente, pelo corolário 2.12 temos o seguinte absurdo $k = n$. Portanto, concluímos que um conjunto com menos de n vetores não pode gerar V. ▌

TEOREMA 2.14: Seja S um subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V. Suponha que w seja um vetor em V tal que $w \notin [\,S\,]$. Então o subconjunto de V dado por $S \cup \{w\}$ é linearmente independente.

Prova: Sejam $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ vetores distintos e arbitrários em S e suponha que

$$\alpha_1\vartheta_1 + \alpha_2\vartheta_2 + \cdots + \alpha_m\vartheta_m + \beta w = 0.$$

Então $\beta = 0$, caso contrário

$$w = \frac{\alpha_1}{\beta}\vartheta_1 + \frac{\alpha_2}{\beta}\vartheta_2 + \cdots + \frac{\alpha_m}{\beta}\vartheta_m$$

e w estaria no subespaço gerado por S. Assim, $\alpha_1\vartheta_1 + \alpha_2\vartheta_2 + \cdots + \alpha_m\vartheta_m = 0$, e como S é um conjunto linearmente independente, tem-se que cada α_i é zero. Portanto, conclui-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \beta = 0$, logo $S \cup \{w\}$ é linearmente independente. ▌

Teorema 2.15: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $W \subset V$ um subespaço de V. Então qualquer subconjunto $S \subset W$ do subespaço W que é linearmente independente é finito e, além disto, é parte de uma base (finita) de W.

Prova: Sejam V um espaço de dimensão finita e $n = \dim V$. Então, como já vimos, todo subconjunto de V que contém mais de n vetores é linearmente dependente. Portanto, se W é um subespaço de V e S é um subconjunto de W, que é linearmente independente (Fig. 2.2.), então S é finito e possui no máximo n elementos. Podemos estender S até obtermos uma base de W. Se $[\,S\,] = W$, então é claro que S é uma base de W. Caso contrário, se S não gera W, então existe $w_1 \in W$ tal que $w_1 \notin [\,S\,]$. Neste caso, podemos usar o resultado do teorema 2.14 para afirmar que o subconjunto $S_1 = S \cup \{w_1\}$ é linearmente independente. Se $[\,S_1\,] = W$ a prova está terminada. Se não, aplicando novamente o teorema 2.14, obtemos um vetor $w_2 \in W$ tal que $w_2 \notin [\,S\,]$, de modo que o conjunto $S_2 = S_1 \cup \{w_2\} = S \cup \{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Se $[\,S_2\,] = W$, ótimo. Assim, S_2 é uma base de W. Caso contrário, podemos continuar dessa maneira até obter um conjunto linearmente independente $S_m = S \cup \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ que é uma base de W. ▌

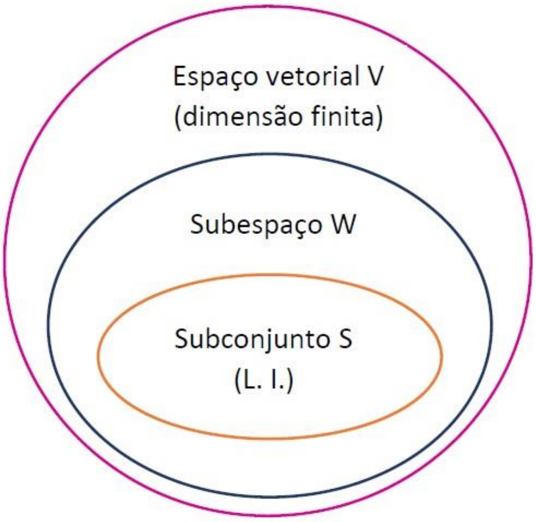

Fig. 2.2.

COROLÁRIO 2.16: Em um espaço vetorial V de dimensão finita todo conjunto não-vazio de vetores linearmente independentes é uma base ou é parte de uma base de V.

Prova: Sejam V um espaço de dimensão finita e $n = \dim V$. Suponha que $\emptyset \neq S \subset V$ é um subconjunto linearmente independente de V. Se $[\,S\,] = V$, então S é uma base de V. Caso contrário, pela prova do teorema 2.15, pode-se selecionar um número finito de vetores $w_1, \dots, w_m$ em V tal que $S \cup \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ é uma base de V. ▌

COROLÁRIO 2.17: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita com $\dim V = n$, então todo subconjunto de V linearmente independente contendo exatamente n vetores é uma base de V.

Prova: Seja B um subconjunto de V que é linearmente independente e contém $n = \dim V$ vetores. Afirmamos que B é uma base de V. De fato, caso contrário, pelo corolário 2.16 e pela prova desse corolário, o conjunto B seria parte de uma base de V possuindo, digamos, $m + n$ vetores. Isto implicaria em $\dim V = m + n > n$, o que é uma contradição. Logo, B é uma base de V. ▌

EXEMPLO 19: O conjunto $B = \{ (1,2,3,4), (0,2,3,4), (0,0,3,4), (0,0,0,4) \}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$?

» SOLUÇÃO: Observamos no exemplo 18 que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Por outro lado, vimos no exemplo 13 que esse subconjunto B com quatro vetores de $\mathbb{R}^4$ é linearmente independente. Logo, segue do corolário 2.17 que B é uma base de $\mathbb{R}^4$.

TEOREMA 2.18: Se W_1 e W_2 são subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V, então $W_1 + W_2$ é de dimensão finita e

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

Prova: Como $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ são subespaços do espaço de dimensão finita V, então estes subespaços são ambos de dimensão finita. Assim, considere uma base (finita) de $W_1 \cap W_2$ denotada por $B = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k\}$. Como $W_1 \cap W_2 \subset W_1$ e $W_1 \cap W_2 \subset W_2$ então esta base é parte de uma base de W_1 dada por

$$B_1 = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_k, w_1, \dots, w_m\}$$

e é parte de uma base de W_2 dada por

$$B_2 = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_k, v_1, \dots, v_n\}.$$

Assim, o subespaço $W_1 + W_2$ é gerado pelos vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k, w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_n$, ou seja

$$W_1 + W_2 = [\, \vartheta_1, \dots, \vartheta_k, w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_n \,]$$

Pode-se ver que estes vetores são linearmente independentes. De fato, suponha que

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vartheta_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j + \sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r = 0.$$

Então

$$-\textstyle\sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vartheta_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j.$$

Esta equação mostra que o vetor $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r$ pertence a W_1, pois é uma combinação linear dos vetores da base B_1. Como $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r = \sum_{i=1}^{k} (0.\vartheta_i) + \sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r$ então é claro que $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r$ é também uma combinação linear dos vetores da base B_2, logo $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r$ pertence também a W_2. Então $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r \in W_1 \cap W_2$. Assim, $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base $B = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k\}$ de $W_1 \cap W_2$:

$$\textstyle\sum_{r=1}^{n} \gamma_r v_r = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \vartheta_i,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k}(-\rho_i)\vartheta_i + \sum_{r=1}^{n}\gamma_r v_r = 0.$$

Como os vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k, v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes, então

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = \rho_1 = \cdots = \rho_r = 0.$$

Consequentemente, da equação $-\sum_{r=1}^{n}\gamma_r v_r = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vartheta_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j w_j$, segue que

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vartheta_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j w_j = 0.$$

Como os vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k, w_1, \dots, w_m$ são linearmente independentes, então

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0.$$

Desse modo, só ocorre $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vartheta_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j w_j + \sum_{r=1}^{n}\gamma_r v_r = 0$ se

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_m = \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0.$$

Portanto, o conjunto $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_k, w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente, sendo dessa forma uma base de $W_1 + W_2$. Finalmente, nota-se que

$$\dim W_1 + \dim W_2 = (k+m) + (k+n) = k + (k+m+n) = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2). \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 20: Sejam o espaço vetorial $V = \mathbb{F}^{2\times 2}$ das matrizes 2×2 sobre o corpo $\mathbb{F}$ e os seguintes subespaços W_1 e W_2 de V:

$$W_1 = \left\{\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & 0\end{bmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{F}\right\} \text{ e } W_2 = \left\{\begin{bmatrix}0 & 0 \\ \gamma & \lambda\end{bmatrix}; \lambda, \gamma \in \mathbb{F}\right\}.$$

Determinar $\dim(W_1 + W_2)$: (a) usando a fórmula mostrada no teorema 2.18, (b) a partir da identificação de que $W_1 + W_2 = V$.

» SOLUÇÃO: (a) O conjunto

$$B_1 = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de W_1. Logo, $\dim W_1 = 2$. Por outro lado, observa-se que o conjunto

$$B_2 = \left\{\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de W_2. Assim, $\dim W_2 = 2$. Como

$$W_1 \cap W_2 = \left\{\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\},$$

então $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. Portanto

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

(b) Neste exemplo, o subespaço soma $W_1 + W_2$ é o próprio espaço vetorial $\mathbb{F}^{2\times 2}$:

$$W_1 + W_2 = \left\{\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \lambda & \gamma\end{bmatrix}; \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{F}\right\} = \mathbb{F}^{2\times 2}.$$

Logo, $\dim(W_1 + W_2) = \dim \mathbb{F}^{2\times 2} = 2.2 = 4$.

Exercícios

1. Mostrar que os vetores $(1,\ 0,\ -1)$, $(1,\ 2, 1)$ e $(0,\ -3,\ 2)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Escrever o vetor $(1, 0, 0)$ como combinação linear dos vetores desta base.
2. Dado um corpo $\mathbb{F}$, sejam os seguintes subconjuntos de $\mathbb{F}^{2\times 2}$:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}; x, y, z \in \mathbb{F} \right\} \text{ e } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \lambda \end{bmatrix};\ \alpha, \beta, \lambda, \in \mathbb{F} \right\}.$$

   (a) Demostrar que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{F}^{2\times 2}$.

   (b) Determinar as dimensões de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

3. Obter uma base $\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$ para $\mathbb{F}^{2\times 2}$ tal que $A_j^2 = A_j$ para cada A_j.
4. Seja $W = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & -z_1 \end{bmatrix}; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$. Demostrar que W é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Determinar uma base de W.
5. Encontrar duas bases diferentes de $\mathbb{R}^4$ que têm em comum os vetores $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 1)$.
6. Estender o seguinte conjunto de vetores de modo a se obter uma base de $\mathbb{R}^6$: $(0, 0, 0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 0, -3, 0, 1)$, $(0, 0, 2, 0, 0, 1)$, $(0, -1, 0, 0, 0, 1)$,

Equivalência por Linhas e Cálculos Relativos a Subespaços

TEOREMA 2.19: Matrizes equivalentes por linhas possuem o mesmo espaço-linha.

Prova: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$. Suponha que a matriz $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ é equivalente por linha a A. Então existe uma sequência finita de matrizes elementares $E_1, \dots, E_k$ tal que

$$B = E_k \dots E_1 A,$$

sendo cada E_i uma matriz $m \times m$ inversível. Fazendo $P = E_k \dots E_1$, podemos escrever

$$B = PA,$$

sendo $P = [p_{ij}]$ a matriz $m \times m$ inversível tal $P^{-1} = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$. Denotando o i-ésimo vetor-linha de A por

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}:} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

e o i-ésimo vetor-linha de B por

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i}:} = (b_{i1}, \dots, b_{in}),$$

a chave desta prova é observar que a equação $B = PA$ pode ser reescrita na forma equivalente:

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i}:} = p_{i1}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1}:} + p_{i2}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{2}:} + \cdots + p_{im}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}:}\text{ , para todo } i = 1, \dots, m.$$

Esta equação mostra que cada vetor-linha de B é uma combinação linear dos vetores-linhas de A. Logo, o espaço-linha de B é um subespaço do espaço-linha de A. Como P é inversível, da equação $B = PA$ segue que $A = P^{-1}B$. Fazendo $P^{-1} = [q_{ij}]$, uma análise semelhante mostra que

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}:} = q_{i1}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{1}:} + q_{i2}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{2}:} + \cdots + q_{im}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{m}:}\text{ , para todo } i = 1, \dots, m.$$

Assim, o espaço-linha de A é um subespaço do espaço-linha de B. Resumindo: o espaço-linha de B está contido no espaço-linha de A e o espaço-linha de A está contido no espaço-linha B. Portanto, o espaço-linha de A é igual ao espaço-linha de B. ▌

O resultado do próximo teorema constitui uma importante ferramenta para se obter uma base de um espaço vetorial de dimensão finita a partir de um subconjunto finito de vetores. Tal ferramenta usa o processo de escalonamento por linhas.

TEOREMA 2.20: Seja A uma matriz não-nula $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se U é uma matriz escalonada reduzida por linhas equivalente por linhas a A, então os vetores-linhas não-nulos de U formam uma base do espaço-linha de A.

Prova: Seja U uma matriz escalonada reduzida por linhas equivalente por linhas a A. Então, pelo teorema 2.19, U e A possuem o mesmo espaço-linha. Portanto, basta mostrar que os vetores-linhas não-nulos de U formam uma base do espaço-linha de U. Para isto, suponha que U possui r vetores-linhas não nulos, dados por:

$$\boldsymbol{u}_{i:} = (u_{i1}, \ldots, u_{in}),\ i = 1, \ldots, r,$$

Como vetores nulos não contribuem para gerar um subespaço, então é claro que estes r vetores-linhas não-nulos geram o espaço-linha de U. Assim, só falta mostrar que tais vetores-linhas não-nulos são linearmente independentes. Como $U = [u_{ij}]$ está na forma escalonada reduzida por linhas, então, de acordo com a definição 1.10, toda linha nula de U ocorre abaixo de todas as linhas não-nulas e existem inteiros $k_1 < \cdots < k_r$ (k_i é a coluna onde se encontra o primeiro elemento não-nulo da linha $i = 1, \ldots, r$) tais que:

$$u_{ik_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq 0 \end{cases}, \text{ para todo } i, j = 1, \ldots, r.$$

Estas condições garantem que o primeiro elemento não nulo em cada linha não-nula é igual a 1 e cada coluna que contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos. Assim, suponha que $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) \in \mathbb{F}^n$ é um vetor arbitrário do espaço-linha de U. Então, ϑ é uma combinação linear dos r vetores-linhas não-nulos de U:

$$\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) = \alpha_1 \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{1}:} + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}:},$$

sendo cada α_i um escalar em $\mathbb{F}$. A partir desta equação, afirmamos que $\vartheta_{k_j} = \alpha_j$. De fato, primeiro note que, da equação vetorial $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) = \alpha_1 \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{1}:} + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}:}$ e considerando os elementos destes vetores que ocupam a coluna k_j, podemos escrever:

$$\vartheta_{k_j} = \textstyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, u_{ik_j}, \text{ para todo } j = 1, \ldots, r.$$

Em seguida, usando a relação $u_{ik_j} = \delta_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, r$, obtemos o resultado procurado:

$$\vartheta_{k_j} = \textstyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, u_{ik_j} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, \delta_{ij} = \alpha_j, \text{ para todo } j = 1, \ldots, r.$$

Assim, em particular, escolhendo $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^n$, ou seja, fazendo

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{1}:} + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}:} = 0,$$

segue que $\alpha_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, r$. Portanto, os vetores-linhas $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{1}:}, \ldots, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}:}$ são linearmente independentes. ▌

OBSERVAÇÃO: Como o espaço-linha de uma matriz A $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{F}^n$ e posto que $\dim \mathbb{F}^n = n$, então toda base do espaço linha de A é uma base ou parte de uma base de $\mathbb{F}^n$ e, portanto, a dimensão do espaço-linha de A é menor ou no máximo igual a n. Assim, se U é uma matriz escalonada reduzida por linhas que é equivalente por linhas a A, então, de acordo com o teorema 2.20, o número de linhas não-nulas de U é menor ou igual a n. Em outras palavras, o número de linhas não-nulas da matriz escalonada U não pode superar o número de colunas de A.

EXEMPLO 21: Determinar uma base e a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores: $(1, 2, 0, 3, 0)$, $(1, 2, -1, -1, 0)$, $(0, 0, 1, 4, 0)$, $(2, 4, 1, 10, 1)$, $(0, 0, 0, 0, 1)$.

» SOLUÇÃO: Usando a ferramenta desenvolvida no teorema 2.20, procuraremos uma base para o espaço-linha da matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto será feito transformando A em uma matriz U com a forma escalonada reduzida por linhas, como mostrado a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Notamos que a matriz U escalonada reduzida por linhas possui 3 vetores-linhas não-nulos. Então, pelo teorema 2.20, estes três vetores formam uma base do espaço linha de A. Logo, podemos afirmar que o conjunto

$$B = \{\, (1,2,0,3,0), (0,0,1,4,0), (0,0,0,0,1) \,\}$$

é uma base do subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos 5 vetores dados: $(1,2,0,3,0)$, $(1,2,-1,-1,0)$, $(0,0,1,4,0)$, $(2,4,1,10,1)$, $(0,0,0,0,1)$. Concluindo, notamos que o subespaço gerado por estes 5 vetores tem dimensão 3, pois a sua base B é constituída de 3 vetores.

É importante observar alguns aspectos instrutivos do exemplo 21. Primeiro, note que o fato do subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos 5 vetores dados possuir apenas dimensão 3 significa que estes 5 vetores não são linearmente independentes. Mais ainda, 2 quaisquer deles podem ser escritos como combinações lineares dos outros 3. Observe também que, efetivamente, o processo de escalonamento usado tem como objetivo desfazer a combinação linear existente entre eles, exibindo vetores não-nulos linearmente independentes que geram o referido subespaço. Este último ponto pode ser melhor entendido efetuando-se sobre U uma sequência finita de operações elementares inversas (que desfazem as anteriormente feitas), chegando-se novamente à matriz A. Assim, pode-se ver que os vetores-linhas de A (os quais são linearmente dependentes) são combinações lineares de 5 vetores: os 3 vetores linearmente independentes que aparecem nas três primeiras linhas de U mais os 2 vetores nulos (logo linearmente dependentes) que se encontram nas duas últimas linhas de U.

EXEMPLO 22: Sejam os dois subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ dados a seguir:

$$S = \{\, (1,2,-1,3),\ (2,4,1,-2),\ (3,6,3,-7) \,\};$$
$$Q = \{\, (1,2,-4,11),\ (2,4,-5,14) \,\}.$$

Usando o teorema 2.20, mostrar que $[\,S\,] = [\,Q\,]$.

» SOLUÇÃO: Formaremos as matrizes M e N, com os vetores de S sendo os vetores-linhas de M e os vetores de Q sendo os vetores-linhas de N:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{bmatrix}.$$

Ambas as matrizes são reduzidas à forma escalonada, como mostrado a seguir:

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & 1 & -2\\ 3 & 6 & 3 & -7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -8\\ 0 & 0 & 6 & -16\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3}\\ 0 & 0 & 6 & -16\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=U_1;$$

$$N=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4 & 11\\ 2 & 4 & -5 & 14\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -4 & 11\\ 0 & 0 & 3 & -8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -4 & 11\\ 0 & 0 & 1 & -8/3\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & -8/3\end{bmatrix}=U_2.$$

Portanto, temos que $[\,S\,]=[\,(1,2,0,1/3),\ (0,0,1,-8/3\,)\,]=[\,Q\,]$.

Exercício

1. Determinar a dimensão e encontrar uma base para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos seguintes vetores: $(1,2,2,-1)$, $(2,3,2,5)$ e $(-1,4,3,-1)$.
2. Determinar a dimensão e encontrar uma base para o espaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos seguintes vetores: $(-3,1,5,3,2)$, $(2,3,0,1,0)$, $(1,2,3,2,1)$, $(3,-5,-1,-3,-1)$ e $(3,0,1,0,0)$.
3. Encontrar uma base do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1,5,3)$, $(2,7,3)$ e $(-8,-16,0)$. O vetor $(1,2,3)$ pertence a este subespaço?
4. Seja W_1 o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,2,1,1)$, $(2,3,1,0)$ e $(3,1,1,-2)$, e seja W_2 o subespaço gerado pelos vetores $(0,4,1,3)$, $(1,0,-2,-6)$ e $(1,0,3,5)$.
   (a) Determinar a dimensão de W_1;
   (b) Determinar a dimensão de W_2;
   (c) Determinar uma base do subespaço W_1+W_2;
   (d) Determinar a dimensão do subespaço $W_1\cap W_2$;
   (e) Determinar uma base do subespaço $W_1\cap W_2$.

TEOREMA 2.21: Sejam A e B matrizes $m\times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se B é equivalente por linhas a A, então os sistemas homogêneos $AX=0$ e $BX=0$ possuem o mesmo espaço-solução.

Prova: Dada uma matriz A $m\times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$, vimos no exemplo 8 que o conjunto de todas as matrizes-colunas X $n\times 1$ sobre $\mathbb{F}$ tais que $AX=0$ é um subespaço de $\mathbb{F}^{n\times 1}$, chamado de espaço-solução do sistema linear homogêneo $AX=0$. Se B é uma matriz $m\times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$ que é equivalente por linhas a A, a partir do teorema 1.15 podemos afirmar que os sistemas homogêneos $AX=0$ e $BX=0$ possuem exatamente as mesmas soluções. Portanto, tais sistemas têm o mesmo espaço-solução. ▌

TEOREMA 2.22: Sejam A uma matriz não-nula $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ e S o espaço solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$. Suponha que U é uma matriz escalonada reduzida por linhas equivalente por linhas a A tal que:

(a) U possui r linhas não nulas;

(b) k_i é a coluna onde se encontra o primeiro elemento não-nulo da linha $i = 1, \dots, r$, tal que $k_1 < \cdots < k_r$.

Seja $J = \{1, \dots, n\} - \{k_1, \dots, k_r\}$ o conjunto dos índices distintos de $k_1, \dots, k_r$. Então, existem $n - r$ matrizes-colunas $X_j \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ do tipo

$$X_j = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

onde $x_j = 1$ e $x_i = 0$ para todos os demais i em J, tais que $AX_j = 0$, para todo $j \in J$. Além disto, estes $n - r$ vetores X_j, com $j \in J$, formam uma base do espaço-solução S do sistema linear homogêneo $AX = 0$, de modo que $\dim S = n - r$.

Prova: Visto que A é uma matriz não-nula, então é claro que $r > 0$. Como observado antes, o número de linhas não-nulas de U não pode superar o número de colunas de A. Logo $r \leq n$ e, portanto, $n - r \geq 0$. Porque $U = [u_{ij}]$ é uma matriz escalonada reduzida por linhas, o sistema linear homogêneo equivalente $UX = 0$ tem a forma

$$\begin{gathered} x_{k_1} + \sum_J u_{1j} x_j = 0 \\ \vdots \\ x_{k_r} + \sum_J u_{rj} x_j = 0 \end{gathered}$$

Todas as soluções do sistema $UX = 0$ são obtidas atribuindo valores arbitrários aos x_j com j em J e calculando os valores correspondentes de $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$. Assim, podemos construir as seguinte soluções particulares: para cada j em J seja a matriz-coluna $X_j = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ obtida colocando $x_j = 1$ e $x_i = 0$ para todos os demais i em J. Como os sistemas $AX = 0$ e $UX = 0$ possuem as mesmas soluções, então cada um destes X_j é também uma solução do sistema original $AX = 0$. Em seguida, afirmamos que os $n - r$ vetores X_j de $\mathbb{F}^{n\times 1}$, com j em J, assim construídos, constituem uma base do espaço solução do sistema $AX = 0$. Como a matriz-coluna X_j possui 1 na linha j e zeros nas linhas indexadas por outros índices de J, então uma análise inteiramente semelhante àquela feita no exemplo 15 mostra que o conjunto destes vetores é linearmente independente. Resta-nos mostrar que este conjunto gera o espaço solução. Para isto, considere uma matriz-coluna $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ arbitrária tal que $AY = 0$, ou seja, considere Y no espaço-solução, e seja $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ a matriz coluna definida por

$$Z = \sum_j y_j X_j$$

Assim, notamos que

$$AZ = A\left(\sum_j y_j X_j\right) = \sum_j y_j \underbrace{(AX_j)}_{0} = 0$$

Logo, a matriz-coluna Z também está no espaço-solução e, da sua definição, segue que $z_j = y_j$ para todo j em J. Pelo processo de construção tem-se que a solução com essa propriedade é única. Então $Z = Y$, ou seja,

$$Y = \sum_j y_j X_j$$

Assim, qualquer solução arbitrária do sistema homogêneo $AX = 0$ é uma combinação linear dos vetores X_j. Portanto, tais vetores geram o espaço solução de $AX = 0$. ▌

EXEMPLO 23: Determinar uma base e a dimensão do espaço-solução do seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad 3x_4 \quad &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \quad &= 0 \\ x_3 + 4x_4 \quad &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 10x_4 + x_5 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

» SOLUÇÃO: Este sistema homogêneo pode ser escrito na forma $AX = 0$, sendo a matriz dos coeficientes dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como mostrado em detalhes no exemplo 21, a matriz escalonada reduzida por linhas

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente por linhas a A. Considerando que n é o número de colunas e r é o número de linhas não-nulas de U, temos: $n = 5$ e $r = 3$. Então, de acordo com o teorema 2.22, a dimensão do espaço-solução do sistema $AX = 0$ é $n - r = 5 - 3 = 2$. Assim, em qualquer base desse espaço-solução há somente 2 vetores. Para construir esta base, note que o sistema equivalente $UX = 0$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$x_1 = -2x_2 - 3x_4$$

$$x_3 = -4x_4$$

$$x_5 = 0$$

Assim, seguindo o que foi estabelecido no teorema 2.22 e na prova desse teorema, fazendo $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$ obtemos a solução particular

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, tomando $x_2 = 0$ e $x_4 = 1$ obtemos outra solução particular

$$X_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o conjunto formado por estas duas matrizes-colunas $\{X_1, X_2\}$ constitui uma base do espaço-solução do dado sistema linear homogêneo.

Exercício

1. Determinar uma base e a dimensão do espaço-solução dos seguintes sistemas homogêneos:

   (a) $$\begin{aligned} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 &= 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 &= 0 \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   (d) $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Posto e Nulidade

■ DEFINIÇÃO 2.11: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. O posto de A, denotado por Posto(A), é a dimensão do espaço-linha da matriz A.

COROLÁRIO 2.23: Matrizes equivalentes por linhas possuem o mesmo posto.

Prova: Dada a matriz A, seja B uma matriz equivalente por linhas a A. Então, pelo teorema 2.19, sabemos que A e B possuem o mesmo espaço-linha. Consequentemente, $\text{Posto}(A) = \text{Posto}(B)$. ▌

CROLÁRIO 2.24: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se U é uma matriz escalonada reduzida por linhas equivalente por linhas a matriz A, então o posto de A é igual ao número de vetores-linhas não-nulos de U.

Prova: Seja U uma matriz escalonada reduzida por linhas equivalente por linhas a matriz A. Então, pelo teorema 2.20, os vetores-linhas não-nulos de U formam uma base do espaço-linha de A. Logo, $\text{Posto}(A) = r$, sendo r é número de vetores-linhas não-nulos de U. ▌

EXEMPLO 24: Calcule o posto da matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

» SOLUÇÃO: Vimos no exemplo 21 que esta matriz A é equivalente por linhas a seguinte matriz escalonada reduzida por linhas:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o número de vetores-linhas não-nulos de U é igual a 3, então, pelo corolário 2.23, $\text{Posto}(A) = \text{Posto}(U) = 3$.

■ DEFINIÇÃO 2.12: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. A nulidade de A, denotada por $\text{Nulidade}(A)$, é a dimensão do espaço-solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$.

COROLÁRIO 2.25: Matrizes equivalentes por linhas possuem a mesma nulidade.

Prova: Sejam A e B matrizes $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se B é equivalente por linhas a A, então pelo teorema 2.21 os sistemas homogêneos $AX = 0$ e $BX = 0$ possuem o mesmo espaço-solução. Portanto, $\text{Nulidade}(A) = \text{Nulidade}(B)$. ▌

EXEMPLO 25: Calcular a nulidade da matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$ mostrada no exemplo 23.
» SOLUÇÃO: Seja $AX = 0$ o sistema linear homogêneo associado a essa matriz. No exemplo 23 foi mostrado, em detalhes, que a dimensão do espaço-solução desse sistema $AX = 0$ é 2. Assim, $\text{Nulidade}(A) = 2$.

TEOREMA 2.26: Se A é uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, então
$$\text{Posto}(A) + \text{Nulidade}(A) = n.$$

Prova: Inicialmente, suponha que A é a matriz nula. Então $AX = 0$ para todo $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ e, desse modo, o espaço-solução do sistema $AX = 0$ é o próprio espaço $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Assim, temos que $\text{Nulidade}(A) = \dim\, \mathbb{F}^{n\times 1} = n$. Além disto, uma vez que todos os vetores-linhas de A são nulos, notamos que o espaço-linhas de A é gerado pelo vetor nulo de $\mathbb{F}^n$. Então, $\text{Posto}(A) = 0$. Logo, se $A = 0$, temos que $\text{Posto}(A) + \text{Nulidade}(A) = n + 0 = n$. Em seguida, suponha que $A \neq 0$. Neste caso, seja U uma matriz $m \times n$ escalonada reduzida por linhas com r $(r \neq 0)$ linhas não-nulas, que é equivalente por linhas a A Então, do teorema 2.20, temos que $\text{Posto}(A) = r$ e, pelo teorema 2.22, sabemos que $\text{Nulidade}(A) = n - r$. Logo, notamos que $\text{Posto}(A) + \text{Nulidade}(A) = r + (n - r) = n$. ▌

COROLÁRIO 2.27: Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então A é inversível se, e somente se, $\text{Posto}(A) = n$.

Prova: Sejam A uma matriz quadrada de dimensão n e S o espaço-solução do sistema homogêneo $AX = 0$. Então, a partir do teorema 1.19, sabemos que A é inversível se, e somente se, $S = \{0\}$, sendo $0 \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ a solução trivial de $AX = 0$. Como $S = \{0\}$ se, e somente se, $\text{Nulidade}(A) = 0$ e como (pelo teorema 2.26) $\text{Nulidade}(A) = 0$ se, e somente se, $\text{Posto}(A) = n$, então A é inversível se, e somente se, $\text{Posto}(A) = n$. ▌

■ DEFINIÇÃO 2.13: Seja A uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. O posto-coluna de A, denotado por Posto-coluna(A), é a dimensão do espaço-coluna de A, ou seja, é a dimensão do subespaço de $\mathbb{F}^{m\times 1}$ gerado pelos vetores-colunas de A.

O próximo teorema destaca uma importante propriedade da teoria das matrizes: a dimensão do espaço-linha de uma matriz é igual à dimensão do seu espaço-coluna.

TEOREMA 2.28: Se A é uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, então
$$\text{Posto}(A) = \text{Posto-coluna}(A).$$

Prova: Se A é a matriz nula, este resultado é óbvio. Assim, suporemos que a matriz A $m \times n$ é não-nula. Feito isto, seja $U = [u_{ij}]$ uma matriz escalonada reduzida por linhas, que é equivalente por linhas a A. Então, U possui, digamos, r linhas não-nulas. Seja k_i a coluna onde se encontra o primeiro elemento não-nulo da linha $i = 1, \dots, r$, tal que $k_1 < \cdots < k_r$. O fato de U estar na forma escalonada reduzida por linhas implica que o primeiro elemento não nulo em cada linha não-nula de U é igual a 1, e cada coluna que contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos. Então, os vetores-colunas de U referentes as colunas k_j, denotados por
$$\boldsymbol{u}_{:k_j} = \begin{bmatrix} u_{1k_j} \\ \vdots \\ u_{mk_j} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times 1},$$
são tais que seus elementos estão definidos por

$$u_{ik_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Logo, usando um argumento semelhante àquele empregado no exemplo 15, podemos ver que os r vetores-colunas $\boldsymbol{u}_{:k_1}, \dots, \boldsymbol{u}_{:k_r}$ são linearmente independentes. Em seguida, considerando o conjunto dos índices distintos de $k_1, \dots, k_r$,

$$J = \{1, \dots, n\} - \{k_1, \dots, k_r\},$$

construa a matriz $U_D \in \mathbb{F}^{m \times r}$ obtida a partir de U, retirando de U as colunas $j \in J$. De maneira semelhante, construa a matriz $A_D \in \mathbb{F}^{m \times r}$ obtida a partir de A, retirando de A as colunas $j \in J$. É claro que U_D e A_D são equivalentes por linhas e, portanto, possuem o mesmo espaço-solução. Seja a matriz-coluna $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{r \times 1}$ tal que

$$y_1 \boldsymbol{a}_{:k_1} + \cdots + y_r \boldsymbol{a}_{:k_r} = A_D Y = 0.$$

Como U_D e A_D possuem o mesmo espaço-solução, então

$$y_1 \boldsymbol{u}_{:k_1} + \cdots + y_r \boldsymbol{u}_{:k_r} = U_D Y = 0.$$

Mas, como os vetores-colunas $\boldsymbol{u}_{:k_1}, \dots, \boldsymbol{u}_{:k_r}$ são linearmente independentes, então

$$y_1 = \cdots = y_r = 0.$$

Isto mostra que os r vetores-colunas de A, dados por $\boldsymbol{a}_{:k_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{:k_r}$, são linearmente independentes. Assim,

$$\text{Posto-coluna}(A) \geq r.$$

Como r é o número de linhas não-nulas de U e A é equivalente por linhas a U, então

$$r = \text{Posto}(A).$$

Assim, mostramos que

$$\text{Posto-coluna}(A) \geq \text{Posto}(A).$$

Finalmente, aplicando este resultado para a matriz transposta A^T, obtemos:

$$\text{Posto}(A) = \text{Posto-coluna}(A^T) \geq \text{Posto}(A^T) = \text{Posto-coluna}(A).$$

Logo, provamos que Posto-coluna $(A) \geq \text{Posto}(A)$ e $\text{Posto}(A) \geq$ Posto-coluna (A). Portanto, podemos concluir que $\text{Posto}(A) = \text{Posto-coluna}(A)$. ▌

Exercícios

1. Determinar o Posto e a Nulidade das seguintes matrizes complexas:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1+i & 1-i & 2+3i \\ 0+i & 1+0i & 2+0i \\ 1-i & -1-i & 3-2i \\ 4+0i & -4i+0 & 10+2i \end{bmatrix}$

5. Coordenadas

Dada uma base qualquer de um espaço vetorial de dimensão finita, até aqui não houve a necessidade de se impor uma ordem aos vetores da base. Agora, para equipar um espaço de dimensão finita com coordenadas, é preciso se introduzir uma ordem, de modo que se tenha uma regra para determinar qual é o primeiro vetor da base, qual é o segundo e assim por diante. Deste modo, como veremos, coordenadas são introduzidas relativamente a sequências de vetores e não em relação a conjuntos de vetores.

■ DEFINIÇÃO 2.14 : Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, uma base ordenada de V é uma sequência finita de vetores linearmente independentes que gera V.

Assim, se a sequência de vetores $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ é uma base ordenada de V, sendo ϑ_i o i-ésimo vetor desta base ordenada, é claro que o conjunto $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ é uma base de V. Portanto, a base ordenada é o conjunto juntamente com uma ordem especificada que mostra qual é o primeiro vetor da base, qual é o segundo e assim por diante. Por simplicidade, descreveremos tudo isto dizendo que

$$\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$$

é uma base ordenada de V.

Suponha que V seja um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ e que $\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ é uma base ordenada de V. Dado um vetor ϑ em V, existe uma n-lista de escalares $(x_1, \dots, x_n)$, com $x_i \in \mathbb{F}$, tal que

$$\vartheta = x_1\vartheta_1 + \cdots + x_n\vartheta_n.$$

Esta n-lista de escalares é única. De fato, se tivéssemos

$$\vartheta = \omega_1\vartheta_1 + \cdots + \omega_n\vartheta_n,$$

então é fácil ver que

$$(x_1 + \omega_1)\vartheta_1 + \cdots + (x_n + \omega_n)\vartheta_n = 0.$$

Assim, a independência linear dos vetores ϑ_i nos daria $x_i = \omega_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

O escalar x_i é chamado a i-ésima coordenada do vetor ϑ em relação à base ordenada $\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$.

Se o vetor w em V é tal que

$$w = y_1\vartheta_1 + \cdots + y_n\vartheta_n,$$

então o vetor soma $\vartheta + w$ tem a representação

$$\vartheta + w = (x_1 + y_1)\vartheta_1 + \cdots + (x_n + y_n)\vartheta_n,$$

de modo que a i-ésima coordenada do vetor soma $\vartheta + w$ em relação a esta base ordenada é a soma $x_i + y_i$ das respectivas i-ésimas coordenadas dos vetores ϑ e w.

De maneira análoga, se $\alpha \in \mathbb{F}$, a i-ésima coordenada do vetor produto por escalar

$$\alpha\vartheta = \alpha x_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha x_n\vartheta_n$$

é dada por αx_i.

Por outro lado, deve-se observar que uma n-lista arbitrária $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ é a n-lista das coordenadas de algum vetor de V, a saber, o vetor

$$x_1\vartheta_1 + \cdots + x_n\vartheta_n.$$

Portanto, cada base ordenada $\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ de um espaço de dimensão finita V sobre um corpo $\mathbb{F}$ determina uma função bijetora

$$\mathcal{g}: V \longrightarrow \mathbb{F}^n,$$

que associa a cada vetor ϑ em V uma única n-lista $(x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{F}^n$ e vice-versa:

$$\vartheta \rightleftarrows (x_1, \dots, x_n)$$

Resumindo: a menos da sua natureza, um vetor ϑ arbitrário de um espaço vetorial V qualquer de dimensão finita $(\dim V = n)$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ pode ser tratado como um vetor em $\mathbb{F}^n$.

EXEMPLO 26: Considere $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ o espaço vetorial de todos os polinômios sobre $\mathbb{F}$ de grau $\leq n$. Um elemento de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ é um vetor da forma

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n;\ \alpha_i \in \mathbb{F}.$$

Sejam os vetores de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ definidos por

$$p_k(t) = t^k;\ k = 0,1, \dots, n,$$

ou seja,

$$p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t,\ p_2(t) = t^2, \dots,\ p_n(t) = t^n.$$

Assim, não é difícil ver que

$$\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

é uma base (ordenada) de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. As coordenadas de um vetor arbitrário $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ em $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ em relação a esta base $\mathfrak{B}$ é o vetor em $\mathbb{F}^{n+1}$ dado por

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Assim, vê-se que existe uma bijeção $\mathcal{g}$: $\mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}^{n+1}$ tal que

$$p(t) \rightleftarrows (\alpha_0, \alpha_1 \dots, \alpha_n)$$

e, portanto, $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) = n + 1$.

EXEMPLO 27: Determinar uma base e a dimensão do subespaço $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gerado pelos vetores $h(t) = 2 + t$, $p(t) = 1 + t + t^2$ e $q(t) = -1 + t^2$.

» SOLUÇÃO: Devido a bijeção $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightleftarrows \mathbb{R}^3$ existente entre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$, consideraremos a base canônica ordenada de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sendo

$$\mathfrak{B} = \{1, t, t^2\}.$$

Feito isto, trataremos $h(t)$, $p(t)$ e $q(t)$ como sendo os seguintes vetores em $\mathbb{R}^3$: $h = (2, 1, 0)$, $p = (1, 1, 1)$ e $q = (-1,\ 0, 1)$, correspondentes as suas coordenadas na base $\mathfrak{B}$.

Para obter uma base do espaço $[h, p, g]$, ou seja, do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores h, p e g, usaremos aqui a metodologia resumida no teorema 2.20. Para isto, seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz real cujos vetores-linhas são os vetores h, p e g:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As etapas do processo de redução a uma matriz escalonada reduzida por linhas são descritas a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

De acordo com o teorema 2.20, uma base do espaço gerado $[h, p, g]$ é constituída pelos vetores-linhas não nulos da matriz escalonada U:

$$\{\,(1, 0, -1), (0\,, 1, 2)\,\}.$$

Consequentemente, retornando à forma original, uma base do subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $h(t) = 2 + t$, $p(t) = 1 + t + t^2$ e $q(t) = -1 + t^2$ é

$$\{\,1 - t^2,\ t + 2t^2\,\}.$$

Para concluir, observamos que o subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $h(t)$, $p(t)$ e $q(t)$ tem dimensão 2.

A Relação entre $\mathbb{V}^3$ e $\mathbb{R}^3$

Agora estamos em condições de mostrar a relação existente entre $\mathbb{V}^3$, o conjunto das flechas no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{E}$, e o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Como o espaço euclidiano $\mathbb{E}$ é essencialmente um espaço de pontos, selecionaremos em $\mathbb{E}$ um ponto arbitrário O que chamaremos de origem. Feito isto, dado qualquer ponto M em $\mathbb{E}$, podemos construir o segmento orientado $\overrightarrow{OM}$, cuja origem é o ponto O e a extremidade é M (Fig. 2.3).

Fig. 2.3.

O vetor $\overrightarrow{OM}$ é denominado de raio vetor (ou vetor-posição) do ponto M em relação à origem O e representa uma classe de segmentos orientados, onde cada elemento dessa classe possui a mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento de $\overrightarrow{OM}$.

Qualquer vetor $\boldsymbol{m}$ em $\mathbb{V}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear $\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ de três outros vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ não-coplanares em $\mathbb{V}^3$. De fato, dados três vetores arbitrários em $\mathbb{V}^3$ não-coplanares, então dois quaisquer destes vetores são não-colineares. No entanto, como tais vetores estão no espaço euclidiano tridimensional, quaisquer dois deles são coplanares entre si. Assim, dado $\boldsymbol{m}$ e três vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ não-coplanares, existem duas possibilidades: (i) $\boldsymbol{m}$ é colinear a um deles, digamos a $\boldsymbol{a}$, então $\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + 0.\boldsymbol{b} + 0.\boldsymbol{c}$, (ii) $\boldsymbol{m}$ é coplanar a dois deles, digamos a $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, então $\boldsymbol{m} = xa + y\boldsymbol{b} + 0.\boldsymbol{c}$. Isto demonstra que $\boldsymbol{m}$ é uma combinação dos três vetores não-coplanares. Logo, três vetores não-coplanares geram o espaço $\mathbb{V}^3$. Estes três vetores não-coplanares são também linearmente independentes. Com efeito, suponha que eles fossem linearmente dependentes. Então um deles poderia ser escrito como a combinação linear dos outros dois. Deste modo, pela proposição 2.2, estes três vetores seriam coplanares, o que é uma contradição. Logo, três vetores não-coplanares constituem uma base do espaço $\mathbb{V}^3$ e, portanto, $\dim \mathbb{V}^3 = 3$.

Dados três vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ não-coplanares em $\mathbb{V}^3$, seja $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ uma base ordenada de $\mathbb{V}^3$. Retornando ao vetor $\overrightarrow{OM}$ descrito na Fig. 2.3, agora sabemos que existem três números reais x, y e z tais que

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}.$$

Assim, em relação a base ordenada, as coordenadas do vetor-posição de qualquer ponto M em $\mathbb{E}$ é uma lista ordenada com três números reais (x, y, z). Portanto, existe uma relação bijetora que a cada vetor-posição $\overrightarrow{OM}$ associa um vetor em $\mathbb{R}^3$ e vice-versa, ou seja, $\overrightarrow{OM} \rightleftarrows (x, y, z)$. Como cada vetor em $\mathbb{V}^3$ admite uma representação na forma de um vetor posição com origem no ponto O, então fica claro que existe uma relação bijetora natural entre $\mathbb{V}^3$ (equipado com uma origem e uma base ordenada) e o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto constituído por uma origem O e uma base ordenada $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ em $\mathbb{V}^3$ é denominado de um sistema de coordenadas cartesianas em $\mathbb{V}^3$. Este sistema de coordenadas cartesianas é chamado ortogonal, se os segmentos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são mutualmente ortogonais. Aqui, entende-se por segmentos ortogonais aqueles cujas retas suportes são ortogonais. Se, além disto, ocorrer $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{c}\| = 1$, o sistema de coordenadas cartesianas é dito ortonormal (Fig. 2.4).

A introdução de um sistema de coordenadas cartesianas (ortornormal) em $\mathbb{V}^3$ permite tratar um vetor (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ como uma flecha $\overrightarrow{OM}$, que possui sua origem em O e extremidade no ponto M, cujas coordenadas são (x, y, z), e vice-versa. Neste contexto, as coordenadas do ponto O (e da flecha $\overrightarrow{OO}$) são (0,0,0). Em outras palavras, o espaço $\mathbb{V}^3$ equipado com um sistema de coordenadas cartesianas (o qual inclui uma origem) é, essencialmente, o $\mathbb{R}^3$.

Esta imagem é comum na chamada geometria analítica, pois é o que permite o tratamento analítico da geometria de Euclides. Desse modo, usando formulações analíticas, podem-se definir equações que descrevem retas, planos e outros objetos geométricos que, originalmente, residem em $\mathbb{E}$.

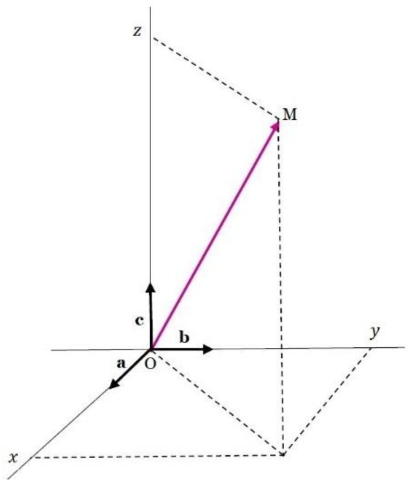

Fig. 2.4.

EXEMPLO 28: A Fig. 2.5 esboça um plano P em $\mathbb{R}^3$ gerado por dois vetores v e u, ou seja, $P = [v, u]$. Como é enfatizado nesta ilustração, o plano P não passa pela origem O. Posto que o conjunto de todos os segmentos orientados representados em um plano em $\mathbb{V}^3$ é um subespaço de $\mathbb{V}^3$, perguntamos: o plano P da Fig. 2.5 é um subespaço de $\mathbb{R}^3$?

» SOLUÇÃO: Como $O = (0,0,0)$, então a origem é o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$. Portanto, P não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, porque, como descrito no axioma (iii)-c da definição 2.1, todo espaço vetorial (e, por conseguinte, qualquer subespaço) deve conter o vetor nulo. Este fato, no mínimo inusitado, é o custo de se introduzir uma origem em $\mathbb{V}^3$.

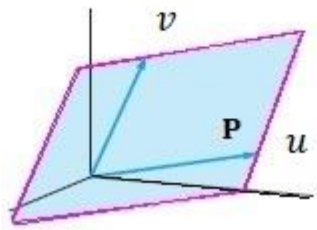

Fig. 2.5.

EXEMPLO 29: Mostrar que qualquer plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem O é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

» SOLUÇÃO: Um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem é descrito por uma equação da forma $ax + by + cz = 0$, sendo a, b e c números reais não simultaneamente nulos. Suponha, sem perdas de generalidade, que $c \neq 0$. Assim, um tal plano é representado pelo seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$Q = \left\{ \left(x,\ y,\ -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \right) \in \mathbb{R}^3;\ x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dados v e u em Q e λ em $\mathbb{R}$, necessitamos mostrar que: (i) $(v + u) \in Q$ e (ii) $\lambda v \in Q$. Para isto, sejam $v = \left(\alpha,\ \beta,\ -\frac{a}{c}\alpha - \frac{b}{c}\beta\right)$ e $u = \left(\gamma,\ \mu,\ -\frac{a}{c}\gamma - \frac{b}{c}\mu\right)$, com $\alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$. Então, podemos notar que $(v + u) = \left((\alpha + \gamma),\ (\beta + \mu),\ -\frac{a}{c}(\alpha + \gamma) - \frac{b}{c}(\beta + \mu) \right)$ e $\lambda v = \left((\lambda\alpha),\ (\lambda\beta),\ -\frac{a}{c}(\lambda\alpha) - \frac{b}{c}(\lambda\beta) \right)$. Portanto, pelas formas de $(v + u)$ e λv, observamos que os vetores $(v+u)$ e λv estão no plano Q. Logo o plano Q que passa pela origem é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Introduzindo um sistema de coordenadas em $\mathbb{V}^3$, vimos que $\mathbb{V}^3 \rightleftarrows \mathbb{R}^3$ e, assim, foi possível tratar uma lista $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n$ como um vetor posição $\overrightarrow{OM}$ e vice-versa (vide Fig. 2.4). De forma inteiramente análoga, podemos associar o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ a um conjunto de segmentos orientados coplanares no espaço euclidiano. De fato, sejam dois segmentos orientados coplanares, mas não-colineares, dados por $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Então, o subespaço gerado por estes vetores, denotado por $[\,\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,]$, é o plano que contém os dois segmentos orientados $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Logo, ao se introduzir neste plano $[\,\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,]$ uma origem O, qualquer segmento orientado $\overrightarrow{OM} \in [\,\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,]$ pode ser escrito de forma única como uma combinação linear de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, isto é, $\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$, sendo x e y números reais. Assim, $\overrightarrow{OM} \rightleftarrows (x, y)$, ou seja, existe uma relação bijetora entre o plano $[\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,]$ equipado com um sistema de coordenadas cartesianas e o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, sendo a origem O juntamente com a base ordenada $\{\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\}$ o referido sistema de coordenadas cartesianas para o plano. Esta base é ortogonal, se os segmentos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são ortogonais (Fig.2.6). Em geral, emprega-se um sistema de coordenadas cartesianas ortonormais, onde, além de ortogonais, os segmentos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são unitários, ou seja, $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 1$.

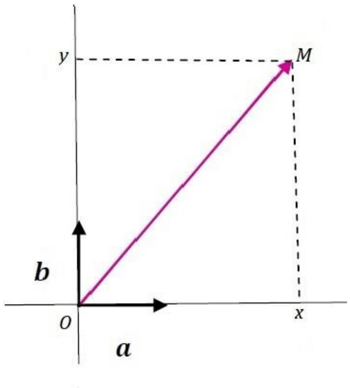

Fig. 2.6.

Mudança de Base

Seja a n-lista $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ o vetor das coordenadas de $\vartheta \in V$ em relação à base ordenada $\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$. A seguir, para adequar questões de natureza notacional, este vetor das coordenadas será tratado como uma matriz-coluna das coordenadas de ϑ em relação à base $\mathfrak{B}$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times 1}.$$

Do ponto de vista conceitual não há problema com isto, pois (como observamos antes) a introdução de uma base ordenada define uma relação bijetora entre $\mathbb{F}^n$ e $\mathbb{F}^{n\times 1}$, ou seja, existe uma relação da forma $\mathbb{F}^n \rightleftarrows \mathbb{F}^{n\times 1}$ que nos permite esta identificação. Além disso, para enfatizar que as coordenadas de $\vartheta \in V$ utilizadas são àquelas relacionadas à base ordenada $\mathfrak{B}$, empregaremos também a notação

$$X = [\vartheta]_{\mathfrak{B}}$$

para descrever $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$, a matriz-coluna das coordenadas de ϑ em relação a $\mathfrak{B}$.

Supondo que o espaço vetorial V é de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, considere duas bases ordenadas de V, dada por:

$$\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\} \text{ e } \mathfrak{B}' = \{\vartheta_1', \dots, \vartheta_n'\}.$$

Qualquer vetor de $\mathfrak{B}'$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base $\mathfrak{B}$, ou seja, existem escalares $a_{ij} \in \mathbb{F}$ tais que

$$\vartheta_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vartheta_i, \forall\, j = 1, \dots, n.$$

Se $x_1, \dots, x_n$ são as coordenadas de um vetor arbitrário ϑ em V em relação à base ordenada $\mathfrak{B}$, então:

$$\vartheta = x_1\vartheta_1 + \cdots + x_n\vartheta_n.$$

Por outro lado, se $x_1', \dots, x_n'$ são as coordenadas do mesmo vetor ϑ em relação à base ordenada $\mathfrak{B}'$, então,

$$\vartheta = \sum_{j=1}^{n} x_j'\vartheta_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vartheta_i\right)}_{\vartheta_j'} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (a_{ij}x_j')\vartheta_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j'\right)\vartheta_i.$$

A última equação mostra que as coordenadas de ϑ em relação a base ordenada $\mathfrak{B}$ são da forma $(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j')$, $i = 1, \dots, n$. Como as coordenadas $x_1, \dots, x_n$ de ϑ em relação a base ordenada $\mathfrak{B}$ são determinadas de forma única, então é claro que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j', \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz quadrada $n \times n$ cuja entrada i, j é o escalar $a_{ij} \in \mathbb{F}$, que aparece na última equação, e sejam X e $X' \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ as matrizes-colunas das coordenadas do vetor ϑ em relação, respectivamente, às bases ordenadas $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$. Assim, a última equação pode ser reescrita na forma matricial equivalente:

$$X = AX'.$$

Como $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são conjuntos linearmente independentes, então $X = 0$ se, e somente se, $X' = 0$. Isto implica que o espaço-solução da matriz A é constituído apenas pela matriz nula de $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Logo, $\text{Nulidade}(A) = 0$ e, pelo teorema 2.26, ocorre $\text{Posto}(A) = n$. Consequentemente, a partir do corolário 2.27, segue que a matriz A é inversível. Logo,

$$X' = A^{-1}X.$$

Usando a outra notação para X introduzida anteriormente, acabamos de deduzir o seguinte teorema.

TEOREMA 2.29: Seja V um espaço n-dimensional sobre o corpo $\mathbb{F}$ e sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ duas bases ordenadas de V. Então existe uma única matriz A inversível $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tal que para todo vetor $\vartheta \in V$:

(i) $[\vartheta]_{\mathfrak{B}} = A\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}'}$;

(ii) $[\vartheta]_{\mathfrak{B}'} = A^{-1}\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$.

OBSERVAÇÃO: A matriz A é chamada de matriz de mudança da base $\mathfrak{B}'$ para a base $\mathfrak{B}$. Para futuras construções da matriz de mudança de base, é importante lembrar que a equação

$$\vartheta_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vartheta_i\,, \forall\, j = 1, \dots, n$$

informa que o j-ésimo vetor-coluna de A é constituído pelas coordenadas do j-ésimo vetor da base $\mathfrak{B}'$, em relação à base $\mathfrak{B}$, ou seja,

$$\boldsymbol{a}_{:j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = [\vartheta_j']_{\mathfrak{B}}$$

Aqui, a matriz A de mudança da base $\mathfrak{B}'$ para a base $\mathfrak{B}$ será denotada por $[M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$, isto é,

$$A = [M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}.$$

Como os vetores $[\vartheta_j']_{\mathfrak{B}}$ são as colunas de $[M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$, podemos escrever:

$$[M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'} = [\,[\vartheta_1']_{\mathfrak{B}} \quad [\vartheta_2']_{\mathfrak{B}} \quad \cdots \quad [\vartheta_n']_{\mathfrak{B}}\,].$$

A inversa de $[M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$, ou seja, a matriz A^{-1} de mudança da base $\mathfrak{B}$ para a base $\mathfrak{B}'$ será denotada por $[M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$, ou seja,

$$A^{-1} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}.$$

Assim, com estas notações mais sugestivas, escreveremos:

$$[\vartheta]_{\mathfrak{B}} = [M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}'}$$

$$[\vartheta]_{\mathfrak{B}'} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}[\vartheta]_{\mathfrak{B}}.$$

EXEMPLO 30: Mostrar que os vetores $(1, -1)$ e $(-2,\ 3)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Encontrar a matriz de mudança da base ordenada (canônica) $\mathfrak{B} = \{\,(1,\ 0), (0,\ 1)\,\}$ para a base ordenada $\mathfrak{B}' = \{\,(1, -1), (-2,\ 3)\,\}$.

» SOLUÇÃO: Inicialmente, vamos verificar a dependência ou independência linear dos vetores $(1,-1)$ e $(-2,3)$. Para isto, considerando a matriz N cujas linhas são estes vetores e, em seguida, reduzindo N a uma matriz escalonada por linha, obtemos:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Como N é equivalente por linhas a matriz identidade, então N é inversível e, pelo teorema 2.8, os vetores $(1,-1)$ e $(-2,3)$ são linearmente independentes. Logo, pelo corolário 2.17, estes dois vetores geram $\mathbb{R}^2$. Assim, $\mathfrak{B}' = \{ (1,-1), (-2,\ 3) \}$ é, de fato, uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Como $\mathfrak{B} = \{ (1,\ 0), (0,\ 1) \}$ é a base canônica, então é imediato encontrar a matriz-coluna das coordenadas na base $\mathfrak{B}$ de cada um dos vetores da base $\mathfrak{B}'$:

$$[(1,-1)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } [(-2,3)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Feito isto, para obter $[M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$, basta encontrar a inversa de $[M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$. Este último cálculo é mostrado a seguir:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Portanto,

$$[M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

PROPOSIÇÃO 2.30: Se $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{B}'$ são três bases ordenadas de um espaço vetorial de dimensão finita V, então.

$$[M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \left([M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'} \right)^{-1} [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}$$

Prova: Seja ϑ um vetor em V. Então

$$[\vartheta]_{\mathfrak{C}} = [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'} [\vartheta]_{\mathfrak{B}'};$$

$$[\vartheta]_{\mathfrak{B}'} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}}.$$

Combinando estas equações, se chega à relação

$$[\vartheta]_{\mathfrak{C}} = [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'} [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}}.$$

Mas, por outro lado:

$$[\vartheta]_{\mathfrak{C}} = [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}}.$$

Como a matriz de mudança da base $\mathfrak{B}$ para a base $\mathfrak{C}$ é única, então as duas últimas equações garantem que

$$[M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'} [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}.$$

Multiplicando esta equação por $\left([M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1}$, se obtém $[M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \left([M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'} \right)^{-1} [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}$. ▌

EXEMPLO 31: Encontrar a matriz de mudança da base ordenada $\mathfrak{B} = \{ (5,\ 2), (7,\ 3) \}$ para a base ordenada $\mathfrak{B}' = \{ (2,\ 3), (1,\ 1) \}$, ambas de $\mathbb{R}^2$.

» SOLUÇÃO: Denote por $\mathfrak{C} = \{(1,0), (0,1)\}$ a base ordenada canônica de $\mathbb{R}^2$. Então, $[M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $[M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Após cálculos, obtemos $\left([M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Portanto a matriz de mudança da base $\mathfrak{B}$ para a base $\mathfrak{B}'$ é dada por

$$[M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \left([M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}'} \right)^{-1} [M]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 32: A Fig. 2.7 mostra um plano no espaço euclidiano, com uma origem O, que é gerado pelos segmentos ortogonais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, os quais, por hipótese, são unitários. Assim, o referido plano encontra-se equipado com um sistema de coordenadas cartesianas, constituído pela origem O e pela base ordenada ortonormal $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ e, portanto, pode ser tratado como o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Fixado θ em $\mathbb{R}$, suponha que esses segmentos orientados foram submetidos a uma rotação, no sentido anti-horário, de um ângulo θ em relação à direção definida por $\boldsymbol{a}$. Tal rotação dá origem a uma nova base ordenada $\mathfrak{B}' = \{\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'\}$, onde $\boldsymbol{a}'$ e $\boldsymbol{b}'$ são, respectivamente, os vetores resultantes da rotação dos segmentos orientados $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Dado $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OM}$, o vetor posição de um ponto arbitrário M, expressar $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$ em função de $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}'}$ e do ângulo de rotação θ.

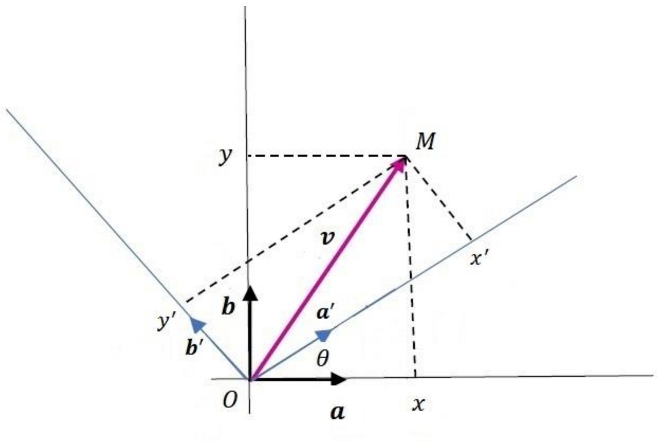

Fig. 2.7

» SOLUÇÃO: Como $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são unitários, a partir da Fig. 2.7 podemos ver que

$$\boldsymbol{a}' = \cos\theta\, \boldsymbol{a} + \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{b}' = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \boldsymbol{a} + \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \boldsymbol{b} = -\operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{a} + \cos\theta\, \boldsymbol{b}.$$

Em outras palavras:

$$[\boldsymbol{a}']_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{b}']_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de mudança da base $\mathfrak{B}'$ para a base $\mathfrak{B}$ é dada por

$$[M]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Logo, para qualquer segmento orientado $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OM}$ temos que

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} [\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}'}.$$

Usando a notação que aparece na Fig. 2.27, esta equação pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Exercícios

1. Mostrar que os vetores $\vartheta_1 = (1,1,0,0)$, $\vartheta_2 = (0,0,1,1)$, $\vartheta_3 = (1,0,0,4)$, $\vartheta_4 = (0,0,0,2)$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$. Determinar as coordenadas de cada um dos vetores da base canônica em relação à base ordenada $\{\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3,\ \vartheta_4\}$.
2. Determinar as coordenadas do vetor $(1,0,1)$ em relação à base ordenada de $\mathbb{C}^3$ dada por $\mathfrak{B} = \{\,(2i,1,0),(2,-1,1),(0,1+i,-i)\,\}$.
3. Seja a base ordenada de $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathfrak{B} = \{\,(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\,\}$. Quais são as coordenadas do vetor $v = (a,\ b,c)$ em relação a esta base $\mathfrak{B}$.
4. Seja $W = [w_1, w_2]$ o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $w_1 = (1,0,i)$ e $w_2 = (1+i,1,-1)$.
   (a) Mostrar que w_1 e w_2 formam uma base de W.
   (b) Mostrar que os vetores $u_1 = (1,1,0)$ e $u_2 = (1,\ i,\ 1+i)$ estão em W e formam uma base de W.
   (c) Determinar as coordenadas dos vetores w_1 e w_2 em relação à base ordenada $\mathfrak{B} = \{\,u_1,\ u_2\,\}$.
5. Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ dois vetores em $\mathbb{R}^2$ tais que $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ e $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$. Demostrar que $\mathfrak{B} = \{v_1,\ v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Determinar as coordenadas do vetor $\vartheta = (a,\ b)$ em relação à base ordenada $\mathfrak{B} = \{v_1,\ v_2\}$.
6. Verificar se o conjunto de polinômios $\{t^5 + t^4,\ t^5 - 3t^3,\ t^5 + 2t^2,\ t^5 - t\}$ em $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ é linearmente independente. Estender este conjunto a fim de se obter uma base de $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$.
7. Mostrar que o conjunto $\{\,1,\ 2t,\ 4t^2 - 2\,\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Encontrar a matriz de mudança de base da base ordenada $\mathfrak{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ para a base ordenada $\mathfrak{B}' = \{\,1,\ 2t,\ 4t^2 - 2\,\}$. Determinar as coordenadas do vetor $p(t) = a + bt + ct^2$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ em relação à base ordenada $\mathfrak{B}' = \{\,1,\ 2t,\ 4t^2 - 2\,\}$.
8. Mostrar que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ constituem uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Encontrar a matriz de mudança de base da base ordenada $\mathfrak{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ para a base ordenada $\mathfrak{B}' = \{A,\ B,\ C,\ D\}$. Determinar as coordenadas do vetor $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ em relação à base ordenada $\mathfrak{B}' = \{A,\ B,\ C,\ D\}$.