Capítulo 3

Transformações Lineares

1. Introdução

■ DEFINIÇÃO 3.1 . Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma transformação linear de V em W é uma função $T: V \to W$ que cumpre as seguintes condições:

(i) $T(v + w) = T(v) + T(w)$, para todo v e w em V,

(ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, para todo v em V e α em $\mathbb{F}$.

Notamos também que as condições (i) e (ii) podem ser resumidas, de maneira equivalente, em apenas uma condição, dada por:

$$T(\alpha v + w) = \alpha T(v) + T(w), \text{ para todo } v, w \text{ em } V \text{ e } \alpha \text{ em } \mathbb{F}.$$

EXEMPLO 1: Seja V um espaço vetorial qualquer. A transformação identidade sobre V é a função $I: V \to V$ definida por $I(v) = v$, para todo $v \in V$. Como $I(\alpha v + w) = \alpha v + w = \alpha I(v) + I(w)$, então a transformação identidade é uma transformação linear. A transformação nula sobre V, denotada por $O: V \to V$, é a função que transforma qualquer vetor em V no vetor nulo de V, ou seja, $O(v) = 0$ para todo $v \in V$. Porque $O(\alpha v + w) = 0 = \alpha O(v) + O(w)$, então a transformação nula é uma transformação linear de V em V.

EXEMPLO 2: Seja $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções polinomiais sobre $\mathbb{R}$ de grau $\leq n$. Então, a função $D: \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, que associa cada polinômio

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$$

em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ a um polinômio Df em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ definido por

$$(Df)(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + \cdots + n\alpha_n t^{n-1},$$

chamada a transformação derivação, é uma transformação linear. De fato, pelas propriedades de derivação sabemos que $D(\alpha f + g) = \alpha Df + Dg$.

EXEMPLO 3: Seja $\mathbb{F}$ um corpo e A uma matriz fixada em $\mathbb{F}^{m\times n}$. A função T de $\mathbb{F}^{n\times 1}$ em $\mathbb{F}^{m\times 1}$,

$$T: \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{m\times 1}$$

definida por

$$T(X) = AX, \ \forall \, X \in \mathbb{F}^{n \times 1},$$

é uma transformação linear. Basta notar que $T(\alpha X + Y) = A(\alpha X + Y) = \alpha AX + AY = \alpha T(X) + T(Y)$. De forma semelhante, pode-se ver que a função

$$L: \mathbb{F}^{1\times m} \to \mathbb{F}^{1\times n} \, ,$$

definida por

$$L(v) = vA, \ \forall \, v \in \mathbb{F}^{1\times m},$$

é também uma transformação linear.

EXEMPLO 4 : Seja $C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas em $\mathbb{R}$. A função $T: C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, definida por

$$T(f)(x) = \int_0^x f(s)ds, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \, ,$$

é uma transformação linear de $C(\mathbb{R})$ em $C(\mathbb{R})$. De fato, pelas propriedades de integração, temos que

$$T(\alpha f + g)(x) = \int_0^x (\alpha f + g)(s)ds = \alpha \int_0^x f(s)ds + \int_0^x g(s)ds = \alpha \, T(f)(s) + T(g)(x) \, .$$

Esta transformação linear é chamada de integração.

Transformações do Plano no Plano

Veremos agora uma série de funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que evidenciam aspectos geométricos das transformações lineares e abordam conceitos do mundo físico.

Como o espaço $\mathbb{R}^2$ é um plano do espaço euclidiano equipado com um sistema de coordenadas cartesianos, tais funções são chamadas de transformações do plano no plano.

EXEMPLO 5: Alongamentos ou Contrações Uniformes

Seja $\lambda > 0$ um número fixado em $\mathbb{R}$. A função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \, ,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é uma transformação linear do plano no plano. Para provar isto, sejam $v = (x_1, y_1)$ e $w = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e α em escalar em $\mathbb{R}$. Então,

$$T(\alpha v + w) = T(\alpha x_1 + x_2, \ \alpha y_1 + y_2) = \lambda(\alpha x_1 + x_2, \ \alpha y_1 + y_2) \, ,$$

ou seja,

$$T(\alpha v + w) = \alpha\big(\lambda(x_1, y_1)\big) + \big(\lambda(x_2, y_2)\big) = \alpha T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \, .$$

Assim, provamos que T é uma transformação linear. Se $\lambda > 1$ esta transformação linear realiza um alongamento do vetor $v \in \mathbb{R}^2$ por um fator λ . A Fig. 3.1 mostra o alongamento de um vetor ϑ e de uma região plana em torno dele. Por outro lado, se $0 < \lambda < 1$, então esta transformação linear provoca uma contração de v por um fator λ.

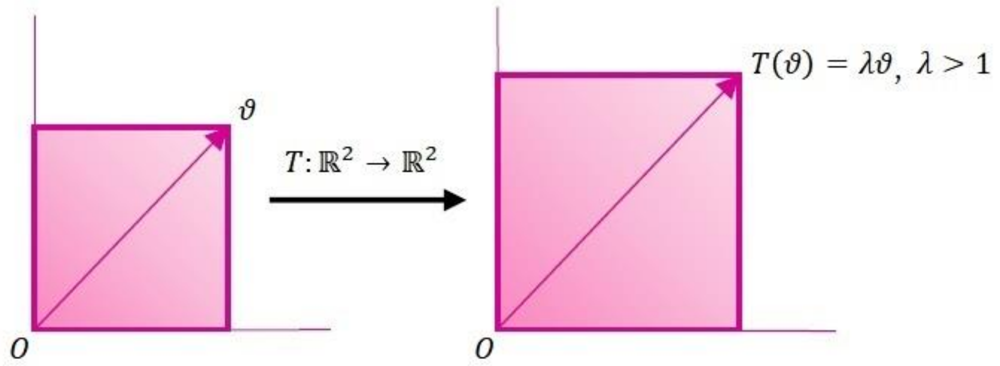

Fig. 3.1.

EXEMPLO 6: Alongamentos ou Contrações Não-Uniformes

Sejam $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ dois números distintos fixados em $\mathbb{R}$. De forma análoga, pode-se ver que a função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y) \ ,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é uma transformação linear do plano no plano. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então esta transformação provoca alongamentos e/ou contrações que são não-uniformes em relação às diferentes direções dos eixos coordenados. A Fig. 3.2 ilustra a transformação de uma figura plana pela função $T(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$, onde $\lambda_1 = 1/3$ e $\lambda_2 = 2$. Neste caso, ocorrem contrações de um fator de $1/3$ na direção do eixo x e alongamentos de um fator de 2 na direção do eixo y.

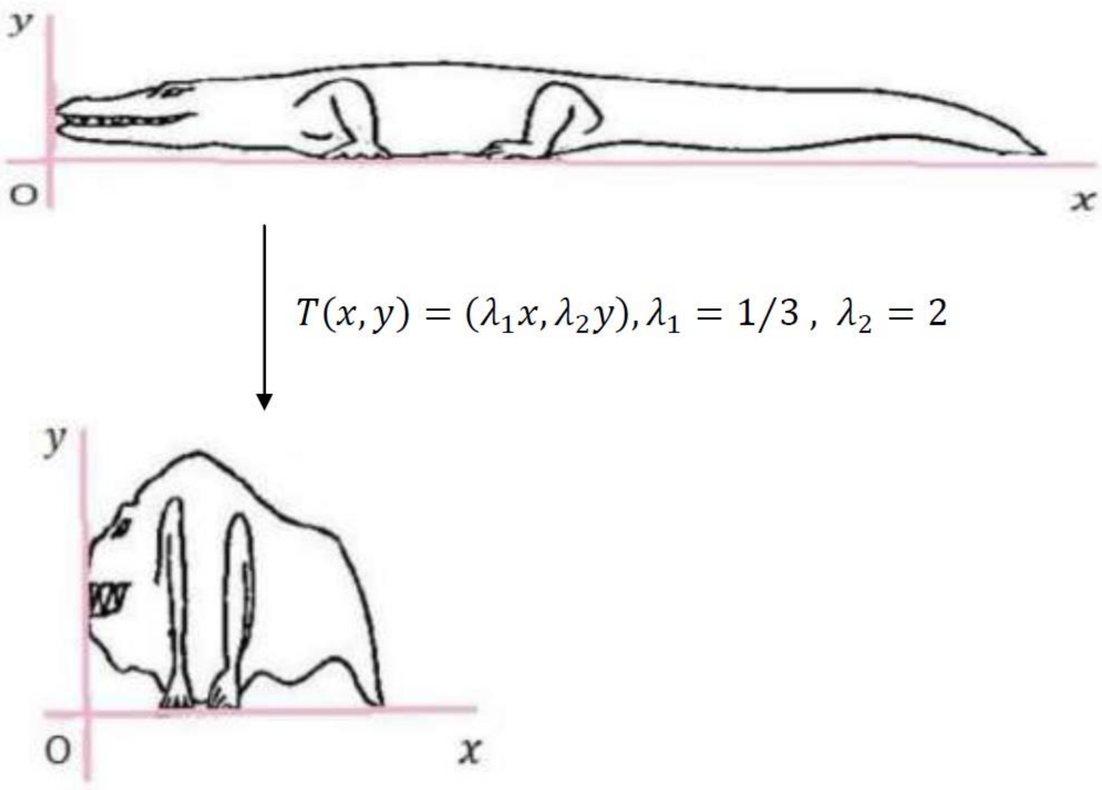

Fig. 3.2.

EXEMPLO 7: Reflexão em Torno do Eixo x

A função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x, -y) ,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é a transformação linear do plano no plano que realiza uma reflexão de $\vartheta = (x, y)$ em torno do eixo x, Fig. 3.3.

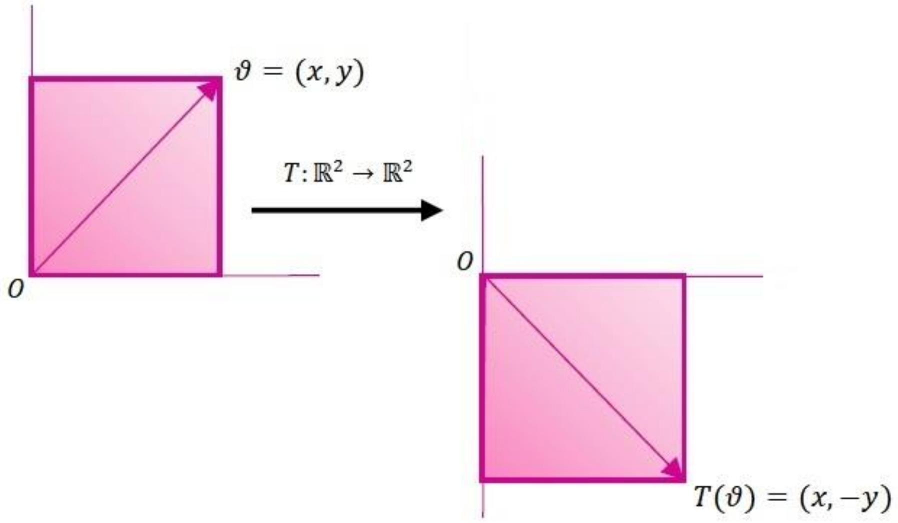

Fig. 3.3.

EXEMPLO 8: Reflexão em Torno da Origem

A transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (-x, -y) ,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, realiza uma reflexão de $\vartheta = (x, y)$ em torno da origem, Fig. 3.4.

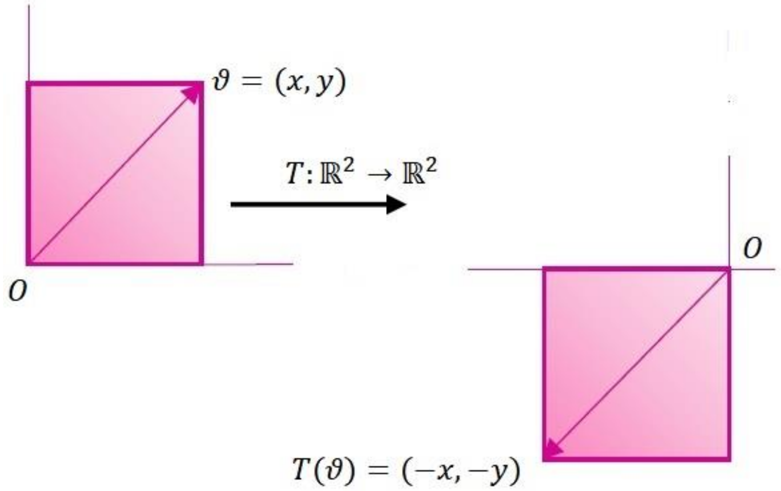

Fig. 3.4.

EXEMPLO 9: Cisalhamento Horizontal

A função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x + \lambda y, y) ,$$

onde $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, é uma transformação linear do plano no plano que causa uma deformação tangencial conhecida como cisalhamento. No presente caso, este cisalhamento é dito horizontal, pois se dá na direção do eixo x (Fig.3.5).

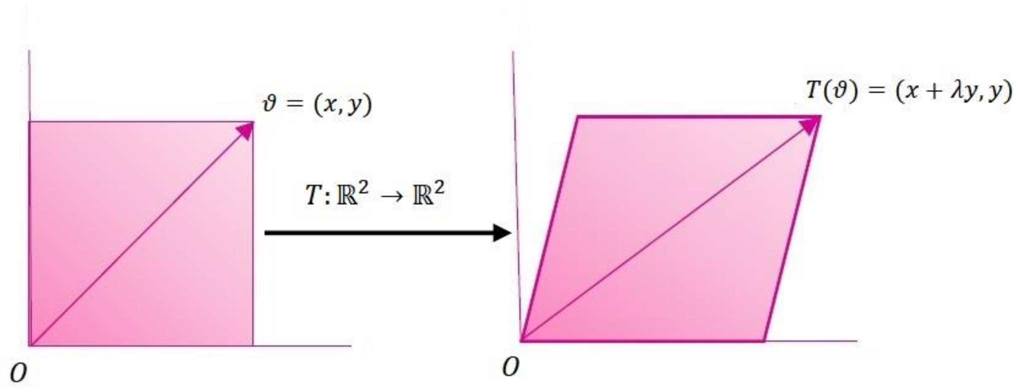

Fig. 3.5.

EXEMPLO 10: Projeção Horizontal

A função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x, 0) ,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é uma transformação linear do plano no plano. Esta transformação T realiza uma projeção sobre o eixo x, como mostrado na Fig. 3.6.

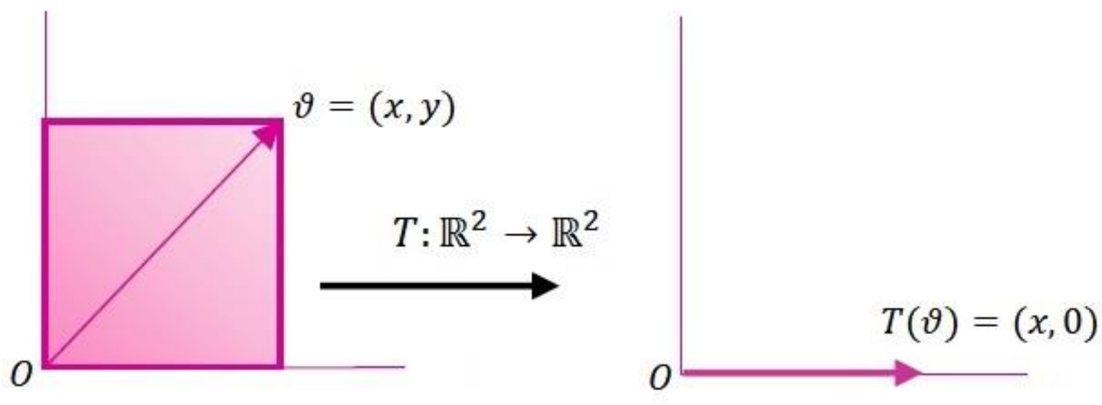

Fig. 3.6.

EXEMPLO 11: Rotação por um Ângulo θ em Torno da Origem

Neste exemplo, procuraremos determinar a função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ do plano no plano que, para todo $\vartheta \in \mathbb{R}^2$, realiza uma rotação de $\vartheta = (x, y)$ por um ângulo θ em torno da origem O, no sentido anti-horário, Fig. 3.7.

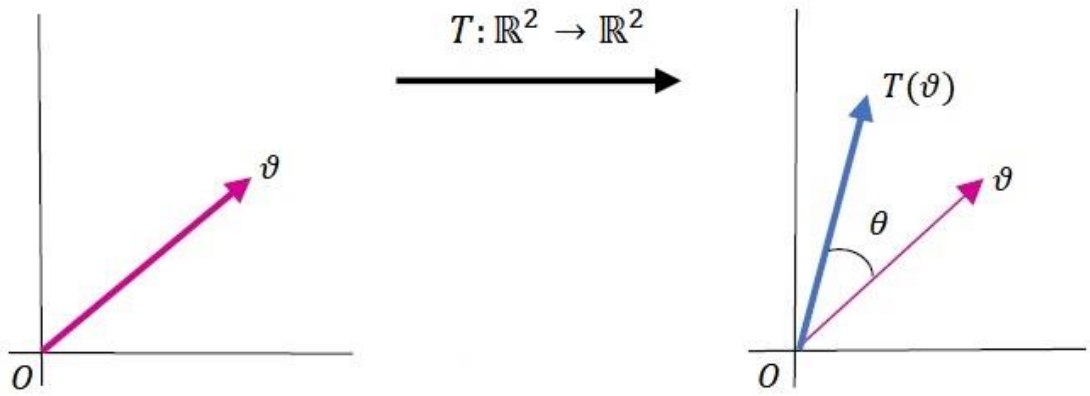

Fig. 3.7.

Para isto, consideraremos a Fig. 3.8. Nesta figura, o vetor ϑ é representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{OA}$, cuja extremidade é o ponto $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, e o vetor $T(\vartheta)$ é representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{OB}$ com extremidade no ponto $B = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Na Fig. 3.8, também denotamos por ϕ o ângulo que o segmento orientado $\overrightarrow{OA}$ forma com o eixo x. Como $T(\vartheta)$ é o resultado de uma rotação de ϑ, não havendo qualquer outro tipo de deformação, então observamos que os segmentos orientados $\vartheta = \overrightarrow{OA}$ e $T(\vartheta) = \overrightarrow{OB}$ possuem o mesmo comprimento, ou seja,

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| .$$

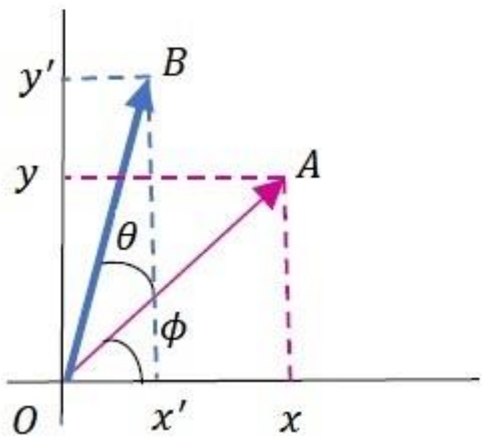

Fig.3.8.

Do triângulo OBx' da Fig.3.8, temos que $\cos(\theta + \phi) = \frac{x'}{\|\overrightarrow{OB}\|}$. Assim, usando a identidade associada com o cosseno da soma de dois ângulos, podemos escrever

$$\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{x'}{\|\overrightarrow{OB}\|}.$$

Por outro lado, do triângulo OAx da Fig. 3.8, temos que $\cos\phi = x/\|\overrightarrow{OA}\|$ e $\operatorname{sen}\phi = y/\|\overrightarrow{OA}\|$. Assim, substituindo estes valores, a última equação pode ser escrita como

$$\cos\theta\frac{x}{\|\overrightarrow{OA}\|} - \operatorname{sen}\theta\frac{y}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{x'}{\|\overrightarrow{OB}\|}.$$

Como $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\|$, obtemos a relação

$$x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta\,.$$

A partir do triângulo OBx' temos também que

$$\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}(\theta+\phi) = \frac{y'}{\|\overrightarrow{OB}\|}.$$

Assim, de forma análoga ao que foi feito antes, esta equação pode ser reescrita como

$$y' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta\,.$$

Portanto, a função que rotaciona um vetor em $\mathbb{R}^2$ de um ângulo θ em torno da origem, no sentido anti-horário, é dada por:

$$T(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta\,, x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)\,.$$

Pode-se mostrar que esta função é uma transformação linear do plano no plano.

EXEMPLO 12: Projeção Ortogonal sobre uma Reta Passando pela Origem

Consideraremos o problema associado com a determinação da função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ do plano no plano que transforma um vetor $\vartheta = (x,y)$ no vetor $T(\vartheta) = (x',y')$, tal que $T(\vartheta)$ é a projeção ortogonal de ϑ sobre a reta L que passa pela origem O e forma o ângulo θ com o eixo x, conforme ilustrado na Fig. 3.9, onde aqui $\theta \geq 0$.

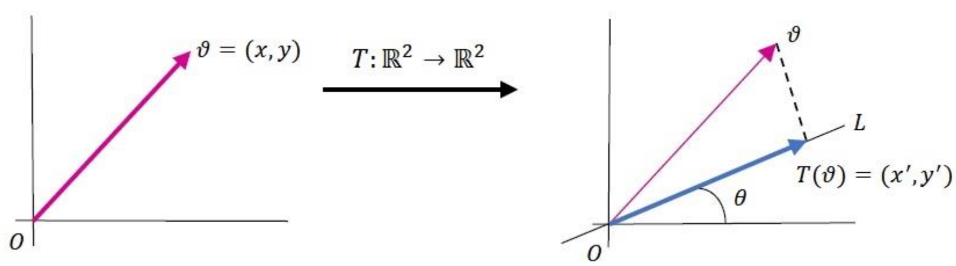

Fig. 3.9.

Para isto, inicialmente consideraremos a primeira parte da Fig. 3.10, ou seja, a Fig. 3.10-a. Nesta figura, mostramos as coordenadas (x,y) do vetor ϑ na base canônica $\mathfrak{B} = \{(1,0),\ (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e as coordenadas $(\hat{x},\hat{y})$ do mesmo vetor ϑ na base ordenada $\widehat{\mathfrak{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ que foi obtida pela rotação dos vetores de $\mathfrak{B}$ por um ângulo θ, no sentido anti-horário. Como é evidenciado na Fig. 3.10-a, as coordenadas do vetor $T(\vartheta)$ na base $\widehat{\mathfrak{B}}$ são dadas por

$$[T(\vartheta)]_{\widehat{\mathfrak{B}}} = \begin{bmatrix}\hat{x}\\0\end{bmatrix}.$$

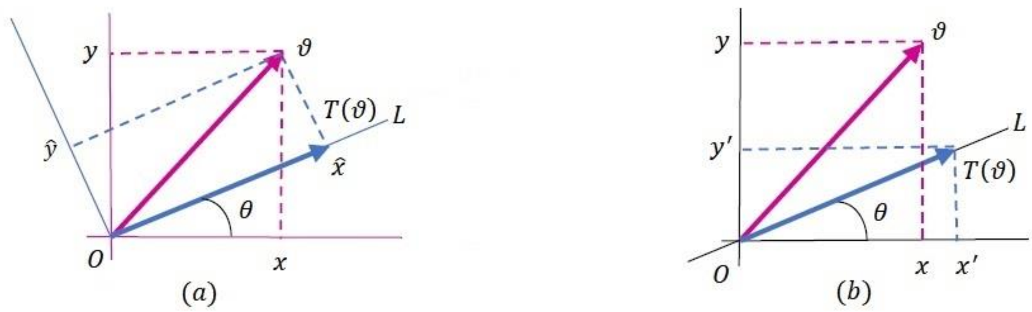

Fig. 3.10.

Como mostrado em detalhes no exemplo 32 do capítulo 2 , a relação entre as coordenadas de ϑ nas bases $\hat{\mathfrak{B}}$ e $\mathfrak{B}$ é estabelecida pela equação

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix},$$

onde

$$[M]_{\mathfrak{B}}^{\hat{\mathfrak{B}}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é a matriz de mudança da base $\hat{\mathfrak{B}}$ para a base $\mathfrak{B}$. A inversa de $[M]_{\mathfrak{B}}^{\hat{\mathfrak{B}}}$ é a matriz de mudança da base $\mathfrak{B}$ para a base $\hat{\mathfrak{B}}$, dada por

$$[M]_{\hat{\mathfrak{B}}}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Daí segue que $\hat{x} = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$. Logo, podemos escrever

$$[T(\vartheta)]_{\hat{\mathfrak{B}}} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para obter as coordenadas do vetor $T(\vartheta)$ na base canônica em função das coordenadas de ϑ nesta mesma base (vide Fig. 3.10-b), usaremos novamente a matriz $[M]_{\mathfrak{B}}^{\hat{\mathfrak{B}}}$ de mudança da base $\hat{\mathfrak{B}}$ para a base $\mathfrak{B}$ e a relação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} [T(\vartheta)]_{\hat{\mathfrak{B}}}.$$

Assim, combinando as últimas equações, obtemos as coordenadas desejadas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos^2\theta + y\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y\operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}.$$

Portanto, a função que transforma o vetor $\vartheta = (x, y)$ no vetor $T(\vartheta) = (x', y')$, onde $T(\vartheta)$ é a projeção ortogonal de ϑ sobre a reta L que passa pela origem e forma o ângulo θ com o eixo x, é dada por

$$T(x, y) = (x\cos^2\theta + y\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,,\; x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y\operatorname{sen}^2\theta).$$

Pode-se ver que esta função é uma transformação linear, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$.

Transformações do Espaço no Espaço

A seguir veremos dois exemplos de funções de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, que mostram alguns aspectos geométricos das transformações lineares do espaço no espaço.

EXEMPLO 13: Projeção Ortogonal sobre o Plano xy

A função $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, para todo (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$, é uma transformação linear do espaço no espaço, que leva um vetor $\vartheta = (x, y, z)$ na sua projeção ortogonal $T(\vartheta) = (x, y, 0)$ no plano xy, veja a Fig. 3.11.

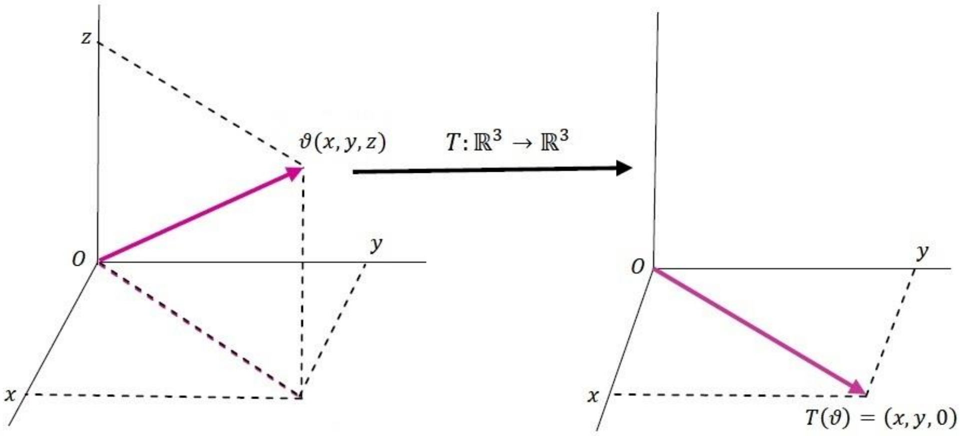

Fig. 3.11.

EXEMPLO 14: Rotação em Torno do Eixo z por um Ângulo θ

A Fig. 3.12 ilustra a função que aplica um vetor $\vartheta = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ sobre o vetor $T(x, y, z) = (x', y', z)$ em $\mathbb{R}^3$, resultante da rotação de ϑ em torno do eixo z por um ângulo θ no sentido anti-horário. Olhando para o plano xy da Fig. 3.12, podemos notar que (a partir do resultado desenvolvido no exemplo 11): $x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta$ e $y' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$. Portanto, a função ilustrada na Fig. 3.12 é definida por

$$T(x, y, z) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta\, , x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta\, , z)\, .$$

Esta função é uma transformação linear do espaço no espaço.

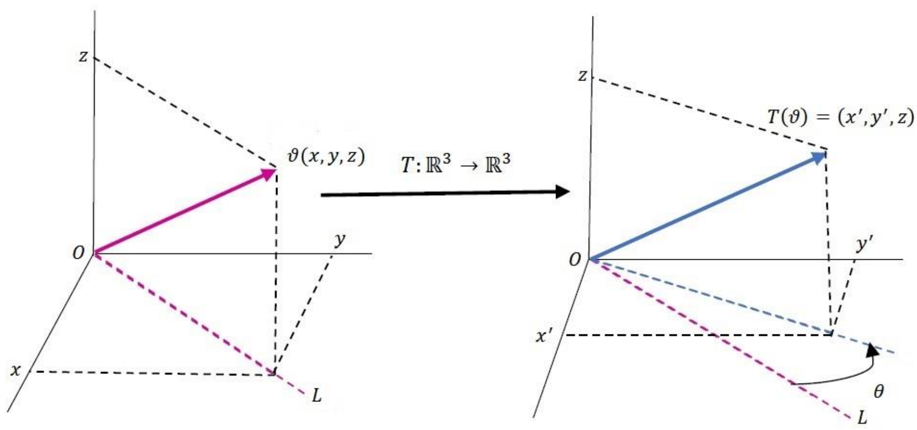

Fig. 3.12.

Transformações Lineares Preservam Combinações Lineares

Uma transformação linear leva combinação linear em combinação linear. Para entender esta afirmação, suponha que $T: V \to W$ é uma transformação linear do espaço vetorial V no espaço vetorial W, ambos sobre o corpo $\mathbb{F}$. Sejam $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ vetores em V e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ escalares em $\mathbb{F}$. Então,

$$T(\alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n) = T(\alpha_1\vartheta_1) + \cdots + T(\alpha_n\vartheta_n) = \alpha_1 T(\vartheta_1) + \cdots + \alpha_n T(\vartheta_n) .$$

Em consequência dessa propriedade, costuma-se dizer que uma transformação linear preserva combinações lineares.

Considerando nesta equação $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, se obtém

$$T(0) = 0 ,$$

ou seja, toda transformação linear $T: V \to W$ transforma o vetor nulo de V no vetor nulo de W.

Transformações Lineares Determinadas Sobre Bases

O próximo resultado mostra que uma transformação linear é completamente e unicamente determinada por sua ação sobre uma dada base.

TEOREMA 3.1: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e seja $\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ uma base ordenada de V. Considere W um espaço vetorial sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$ e $w_1, \dots, w_n$ vetores em W. Então, existe exatamente uma transformação linear $T: V \to W$ tal que, para cada elemento da base $\mathfrak{B}$, ocorre

$$T(\vartheta_j) = w_j, \; j = 1, \dots, n .$$

Prova: Para construir a transformação desejada, seja ϑ um vetor arbitrário em V. Como $\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ é uma base ordenada de V, então existe uma única n-lista ordenada $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que

$$\vartheta = \alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n ,$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são escalares em $\mathbb{F}$. Dados os vetores $w_1, \dots, w_n$ no espaço vetorial W, consideraremos

$$w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n .$$

Seja $T: V \to W$ a função que aplica ϑ em w:

$$T(\vartheta) = w ,$$

isto é,

$$T(\alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n .$$

Tomando $\vartheta = \vartheta_i$, ou seja, fazendo $\alpha_i = 1$ e $\alpha_j = 0, \forall\, j \neq i$ obtemos

$$T(\vartheta_i) = w_i, \; i = 1,2, \dots, n .$$

Assim, a função $T: V \to W$ considerada transforma o vetor ϑ_i da base ordenada $\mathfrak{B}$ de V no vetor w_i em W, para cada $i = 1,2,\dots,n$. A seguir, mostremos que esta função é uma transformação linear. Para isto, tomando

$$\upsilon = \beta_1\vartheta_1 + \cdots + \beta_n\vartheta_n$$

um vetor em V e λ um escalar arbitrário em $\mathbb{F}$ temos

$$\lambda\vartheta + \upsilon = (\lambda\alpha_1 + \beta_1)\vartheta_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \beta_n)\vartheta_n\,.$$

Logo, pela definição da função $T: V \to W$, temos

$$T(\lambda\vartheta + \upsilon) = (\lambda\alpha_1 + \beta_1)w_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \beta_n)w_n\,.$$

Por outro lado,

$$\lambda T(\vartheta) + T(\upsilon) = \lambda(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) + (\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n)\,,$$

ou seja,

$$\lambda T(\vartheta) + T(\upsilon) = (\lambda\alpha_1 + \beta_1)w_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \beta_n)w_n\,.$$

Logo,

$$T(\lambda\vartheta + \upsilon) = \lambda T(\vartheta) + T(\upsilon)\,.$$

Portanto, a função T é uma transformação linear. Resta-nos provar que toda transformação linear $L: V \to W$ que aplica ϑ_i em w_i $(i = 1,\dots,n)$ coincide com $T: V \to W$. Para isto, suponha que exista uma transformação linear $L: V \to W$ tal que

$$L(\vartheta_i) = w_i,\ i = 1,2,\dots,n.$$

Assim, se $\vartheta = \alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n$ é um vetor arbitrário em V, então

$$L(\vartheta) = L(\alpha_1\vartheta_1 + \cdots + \alpha_n\vartheta_n) = \alpha_1 L(\vartheta_1) + \cdots + \alpha_n L(\vartheta_n) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = T(\vartheta),$$

isto é, $L = T$. Com isto concluímos a demonstração. ▌

EXEMPLO 15: Os vetores $\vartheta_1 = (1,2)$ e $\vartheta_2 = (3,,4)$ são linearmente independentes e, portanto, formam uma base ordenada $\mathfrak{B} = \{\ (1,2),\ (3,4)\ \}$ de $\mathbb{R}^2$. Dados os vetores $w_1 = (3,2,1)$ e $w_2 = (6,5,4)$ em $\mathbb{R}^3$, pelo teorema 3.1 existe uma única transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,2) = (3,2,1),$$

e

$$T(3,4) = (6,5,4)\,.$$

Posto isto, calcular $T(1,0)$.

» SOLUÇÃO: Com relação a base ordenada $\mathfrak{B} = \{\ (1,2),\ (3,4)\ \}$, existem escalares (reais) α_1 e α_2 tais que $(1,0) = \alpha_1\,(1,2) + \alpha_2\,(3,4)$. Isto nos conduz ao seguinte sistema linear nas variáveis α_1 e α_2,

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1$$

$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0$$

Daí, obtemos: $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = 1$. Logo, $(1,0) = -2\,(1,2) + (3,4)$ e, portanto, $T(1,0) = -2\,T(1,2) + T(3,4) = -2\,(3,2,1) + (6,5,4) = (0,1,2)$.

Exercícios

1. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $u \neq 0$ um vetor não-nulo fixado em V. A função $T: V \to V$ definida por $T(\vartheta) = \vartheta + u$, para todo ϑ em V, é chamada uma translação. Mostrar que uma translação não é uma transformação linear. Ilustrar geometricamente o efeito de uma translação do plano no plano.
2. Quais das funções $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são transformações lineares? (a) $T(x,y) = (1+x, y)$, (b) $T(x,y) = (x^2, y)$, (c) $T(x,y) = (x-y, 0)$, (d) $T(x,y) = (\cos x, y)$, (e) $T(x,y) = (x,x)$, (f) $T(x,y) = (3x+y, 5y)$.
3. Mostrar que a função do plano no plano que realiza uma rotação de um ângulo θ em torno da origem, no sentido anti-horário, é uma transformação linear.
4. Mostrar que a função que leva um vetor do plano sobre o vetor do plano que está sobre a reta que passa pela origem e forma um ângulo θ com o eixo x é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.
5. Quais das seguintes funções $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são transformações lineares? (a) $T(x,y,z) = (x,y,1)$, (b) $T(x,y,z) = (x,y,x+2y)$, (c) $T(x,y,z) = (x,0,0)$, (d) $T(x,y,z) = (x,y,x^2+y^2)$, (e) $T(x,y,z) = (x-y+z, 2y-x-z, 4x+z)$.
6. Mostrar que $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por $T\big(p(x)\big) = 2\frac{dp(x)}{dx} + \int_0^x 3p(s)ds$ é uma transformação linear de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
7. Mostrar que a função $T: \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por $T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^{2\times 3}$ em $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
8. Quais das seguintes funções $L: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ são transformações lineares? (a) $L(A) = 2A$, (b) $L(A) = A^T$, (c) $L(A) = A + I$, (d) $L(A) = A - A^T$.
9. Seja $\mathbb{F}^{n\times n}$ o espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$. Seja B uma matriz $n \times n$ fixada em $\mathbb{F}^{n\times n}$. Mostrar que a função $T: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$, definida por $T(A) = AB - BA$, $\forall\, A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, é uma transformação linear.
10. Seja A uma matriz $m \times n$ fixada sobre um corpo $\mathbb{F}$. Mostrar que a transformação linear $T: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ definida por $T(X) = AX$, $\forall\, X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, é a transformação linear nula se, e somente se, A é a matriz nula.
11. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Se $T(1,2) = (-2,3)$ e $T(1,-1) = (5,2)$, determinar o valor de $T(7,5)$.
12. Existe uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1,1) = (1,0)$ e $T(1,1,1) = (0,1)$?
13. Dados os vetores $\vartheta_1 = (1,-1)$, $\vartheta_2 = (2,-1)$, $\vartheta_3 = (-3,2)$, $w_1 = (1,0)$, $w_2 = (0,1)$, $w_3 = (1,1)$, existe uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\vartheta_i) = w_i$, para $i = 1,2,3$?
14. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Encontrar a transformação linear $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ tal que, para todo $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, ocorre: (a) $T(p(x)) = p(-x)$, (b) $T(p(x)) = p(x+1)$.
15. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\vartheta \neq 0$ um vetor não-nulo fixado em V. Se $W = [\vartheta]$ é o subespaço de V gerado por ϑ, mostrar que qualquer transformação linear $T: W \to W$ sobre W é uma função que satisfaz $T(\vartheta) = \alpha\vartheta$, para algum $\alpha \in \mathbb{F}$.

2. Matriz de uma Transformação Linear

Nesta seção, veremos como se representa uma transformação linear em termos de uma matriz cujos elementos são escalares em um corpo $\mathbb{F}$.

> TEOREMA 3.2: Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre o corpo $\mathbb{F}$ e W um espaço vetorial m-dimensional sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Seja $\mathfrak{B}$ uma base ordenada de V e $\mathfrak{B}'$ uma base ordenada de W. Fixadas estas bases, para cada transformação linear $T: V \to W$ existe uma única matriz $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ $m \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tal que
>
> $$[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = \Lambda\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}\,,$$
>
> para todo vetor $\vartheta \in V$.

Prova: Seja $\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ uma base ordenada de V e $\mathfrak{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ uma base ordenada de W. Considere $T: V \to W$ uma transformação linear arbitrária de V em W. Como $T(\vartheta_j) \in W$, então cada $T(\vartheta_j)$ pode ser escrito de forma única como uma combinação linear dos vetores da base $\mathfrak{B}'$ de W, ou seja, existem escalares $\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{mj}$ bem definidos em $\mathbb{F}$ tais que

$$T(\vartheta_j) = \lambda_{1j}w_1 + \lambda_{2j}w_2 + \cdots + \lambda_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}w_i, \forall\, j = 1, \dots, n\,.$$

Seja $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ a única matriz $m \times n$ definida por estes escalares. Em seguida, tome

$$\vartheta = x_1\vartheta_1 + \cdots + x_n\vartheta_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\vartheta_j$$

um vetor qualquer em V, tal que a matriz-coluna em $\mathbb{F}^{n\times 1}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é a matriz das coordenadas deste vetor ϑ na base $\mathfrak{B}$, ou seja,

$$X = [\vartheta]_{\mathfrak{B}}\,.$$

Então

$$T(\vartheta) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vartheta_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(\vartheta_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}w_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, x_j\right)w_i\,.$$

Visto que o escalar

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, x_j$$

é o i-ésimo elemento da matriz-coluna ΛX, então esta matriz-coluna $\Lambda X = \Lambda\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$ é a matriz das coordenadas do vetor $T(\vartheta)$ na base $\mathfrak{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$. Portanto,

$$[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = \Lambda\, [\vartheta]_{\mathfrak{B}}\,.$$

Isto conclui a demonstração. ▌

■ DEFINIÇÃO 3.2. A matriz $\Lambda \in \mathbb{F}^{m\times n}$ referida no teorema 3.2, a qual satisfaz $[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = \Lambda\, [\vartheta]_{\mathfrak{B}}$, para todo $\vartheta \in V$, é denominada de matriz da transformação linear $T: V \to W$ em relação às bases ordenadas $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$.

Como $T(\vartheta_j) = \lambda_{1j}w_1 + \lambda_{2j}w_2 + \cdots + \lambda_{mj}w_m$, então o j-ésimo vetor-coluna da matriz $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ da transformação linear T, em relação às bases ordenadas $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$, é a matriz-coluna das coordenadas do $T(\vartheta_j)$ na base $\mathfrak{B}'$, ou seja,

$$\boldsymbol{\lambda}_{:j} = [T(\vartheta_j)]_{\mathfrak{B}'}\,.$$

EXEMPLO 16: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z) = (\,x - y - z, x + y + z\,), \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinar a matriz da transformação linear T em relação às bases ordenadas $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$, onde $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e

(a) $\mathfrak{B}' = \{(1,1),(-1,1)\}$,

(b) $\mathfrak{B}' = \{(1,0),(0,1)\}$.

» SOLUÇÃO: Primeiro note que

$$T(1,0,0) = (1,1)\,,$$

$$T(0,1,0) = (-1,1)\,,$$

$$T(0,0,1) = (-1,1)\,.$$

(a) Considerando a base $\mathfrak{B}' = \{(1,1),(-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, podemos escrever

$$T(1,0,0) = (1,1) = 1\,(1,1) + 0\,(-1,1)\,,$$

$$T(0,1,0) = (-1,1) = 0\,(1,1) + 1\,(-1,1)\,,$$

$$T(0,0,1) = (-1,1) = 0\,(1,1) + 1\,(-1,1)\,.$$

Visto que

$$\boldsymbol{\lambda}_{:1} = [T(1,0,1)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{:2} = [T(0,1,0)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{:3} = [T(0,0,1)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

então

$$\Lambda = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(b) Por outro lado, considerando a base $\mathfrak{B}' = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, podemos escrever

$$T(1,0,0) = (1,1) = 1\,(1,0) + 1\,(0,1)\,,$$

$$T(0,1,0) = (-1,1) = -1\,(1,0) + 1\,(0,1)\,,$$
$$T(0,0,1) = (-1,1) = -1\,(1,0) + 1\,(0,1)\,.$$

Então, neste caso, temos

$$\boldsymbol{\lambda}_{:1} = [T(1{,}0{,}1)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{:2} = [T(0{,}1{,}0)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{:3} = [T(0{,}0{,}1)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

Logo

$$\Lambda = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

O exemplo 16 deixa claro que a matriz de uma transformação linear $T\colon V \to W$ muda, quando se muda as bases escolhidas em V e W. No entanto, dada uma transformação linear $T\colon V \to W$, onde $\dim V = n$ e $\dim W = m$, o teorema 2 garante que, fixadas duas bases ordenadas, $\mathfrak{B}$ em V e $\mathfrak{B}'$ em W, a transformação linear T está associada com uma única matriz A $m \times n$.

Como a matriz A de uma transformação linear $T\colon V \to W$ depende das duas bases ordenadas escolhidas, $\mathfrak{B}$ em V e $\mathfrak{B}'$ em W, para não esquecermos essa dependência, usaremos a notação:

$$\Lambda = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}\,,$$

para representar a matriz da transformação linear T em relação, respectivamente, às bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$. Posto que $[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = \Lambda\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$, com esta nova notação, daqui em diante escreveremos:

$$\boxed{[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}}$$

A Correspondência Bijetora $T \rightleftarrows [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$

■ DEFINIÇÃO 3.3. Dados dois espaços vetoriais V e W, diremos que $\mathcal{L}(V,W)$ é o conjunto de todas as transformações lineares de V em W. Se $V = W$, escreveremos $\mathcal{L}(V)$ em vez de $\mathcal{L}(V,V)$.

TEOREMA 3.4: Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$. Se V e W são de dimensão finita, com $\dim V = n$ e $\dim W = m$, fixadas as bases ordenadas $\mathfrak{B}$ em V e $\mathfrak{B}'$ em W, existe uma função bijetora

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}\colon \mathcal{L}(V,W) &\longrightarrow \mathbb{F}^{m\times n}\\ T &\longmapsto [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}\end{aligned}$$

que associa a cada transformação linear T em $\mathcal{L}(V,W)$ uma única matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ em $\mathbb{F}^{m\times n}$.

Prova: Nestas condições, para cada transformação linear $T: V \to W$, o teorema 3.2 garante que existe uma e apenas uma matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ $m \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tal que $[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}}$, para todo $\vartheta \in V$. Isto defini uma função $T \longmapsto [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ do conjunto $\mathcal{L}(V, W)$ sobre o espaço $\mathbb{F}^{m\times n}$. Resta-nos mostrar que esta função $\mathfrak{I}: \mathcal{L}(V, W) \longmapsto \mathbb{F}^{m\times n}$, assim definida, é bijetora, isto é, $\mathfrak{I}$ é simultaneamente injetora e sobrejetora. Para mostrar que $\mathfrak{I}$ é injetora, considere duas matrizes A e B em $\mathbb{F}^{m\times n}$ e, em seguida, suponha que $\mathfrak{I}(T) = A$ e $\mathfrak{I}(T) = B$ para uma mesma transformação linear $T \in \mathcal{L}(V, W)$, ou seja, $[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = A\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$ e $[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = B\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$, para todo $\vartheta \in V$. Mas, pelo teorema 3.2, existe uma única matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tal que $[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}}$, para todo ϑ em V. Logo $A = B = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ e, portanto, a função $\mathfrak{I}: \mathcal{L}(V, W) \longmapsto \mathbb{F}^{m\times n}$ é injetora. Para mostra que $\mathfrak{I}$ é sobrejetora, seja A uma matriz $m \times n$ qualquer em $\mathbb{F}^{m\times n}$. Feito isto, para todo $\vartheta \in V$, seja a função $T(\vartheta) = w$ de V em W, onde w é definido como o vetor em W cujas coordenadas na base $\mathfrak{B}'$ satisfazem a relação $[w]_{\mathfrak{B}'} = A\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$. De acordo com o exemplo 3, esta função é uma transformação linear. Além disso, como $T(\vartheta) = w$, então $[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = A\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$ e, consequentemente, $A = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$. Logo, para cada $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $T \longmapsto A = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$, ou seja, a função $\mathfrak{I}: \mathcal{L}(V, W) \longmapsto \mathbb{F}^{m\times n}$ é sobrejetora. Isto conclui a demonstração. ∎

Usaremos a notação $T \rightleftarrows [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ para indicar que T e $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ participam da relação bijetora $\mathfrak{I}(T) = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ existente entre o conjunto $\mathcal{L}(V, W)$ e o espaço $\mathbb{F}^{m\times n}$, de modo que, fixadas as bases $\mathfrak{B}$ em V e $\mathfrak{B}'$ em W, cada transformação linear T em $\mathcal{L}(V, W)$ corresponde uma única matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ em $\mathbb{F}^{m\times n}$ e vice-versa.

EXEMPLO 17: Seja $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções polinomiais sobre $\mathbb{R}$ de grau ≤ 3, ou seja, as funções da forma

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3\,,$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são números reais. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções polinomiais sobre $\mathbb{R}$ de grau ≤ 2. Considere a transformação linear derivação

$$D: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\,,$$

que associa a cada polinômio $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$ o polinômio de grau menor

$$(Df)(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2\,.$$

Seja $\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathfrak{B}' = \{1, (1-t), (1-t)^2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determinar a matriz $[D]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ da transformação linear D em relação às bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ tal que $D \rightleftarrows [D]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$.

» SOLUÇÃO: Denotaremos por $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^2$ e $f_4(t) = t^3$ os vetores da base $\mathfrak{B}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e por $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1 - t$ e $p_3(t) = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2$ os vetores da base $\mathfrak{B}'$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Então, temos

$$(Df_1)(t) = 0 = 0\,p_1(t) + 0\,p_2(t) + 0\,p_3(t) \Rightarrow [Df_1]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,;$$

$$(Df_2)(t) = 1 = 1\,p_1(t) + 0\,p_2(t) + 0\,p_3(t) \Rightarrow [Df_2]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,;$$

$$(Df_3)(t) = 2t = 2\,p_1(t) - 2\,p_2(t) + 0\,p_3(t) \Rightarrow [Df_3]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$(Df_4)(t) = 3t^2 = 3\,p_1(t) - 6\,p_2(t) + 3\,p_3(t) \;\Rightarrow [Df_4]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[D]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Operadores Lineares

■ DEFINIÇÃO 3.4. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um operador linear sobre V é uma transformação linear $T\colon V \to V$ de V em V.

Se V é um espaço de dimensão finita e $T\colon V \to V$ é um operador linear sobre V, então podemos fixar apenas uma base ordenada $\mathfrak{B}$ em V e determinar a matriz do operador linear T em relação à base $\mathfrak{B}$. Deste modo, o próximo resultado é apenas um caso particular do teorema 3.2.

COROLÁRIO 3.3: Seja V é um espaço n-dimensional sobre o corpo $\mathbb{F}$ e seja $T\colon V \to V$ um operador linear arbitrário sobre V. Fixada uma base ordenada $\mathfrak{B}$ em V, existe uma única matriz Λ quadrada de dimensão n tal que

$$[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}} = \Lambda\,[\vartheta]_{\mathfrak{B}}\text{ , para todo } \vartheta \in V.$$

A matriz Λ $n \times n$, indicada no corolário 3.3, é chamada de matriz do operador linear $T\colon V \to V$ em relação à base $\mathfrak{B}$ e, aqui, é denotada por $[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$. Assim, para um operador linear, escreveremos:

$$\boxed{[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}} = [T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}[\vartheta]_{\mathfrak{B}}\text{ , para todo } \vartheta \in V}$$

COROLÁRIO 3.4: Seja V um espaço n-dimensional sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se $\mathcal{L}(V)$ é o conjunto de todos os operadores lineares $T\colon V \to V$ sobre V, fixada uma base ordenada $\mathfrak{B}$ em V, então existe uma função bijetora $T \rightleftarrows [T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$ de $\mathcal{L}(V)$ no espaço $\mathbb{F}^{n\times n}$ das matrizes quadradas $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$.

EXEMPLO 18: Calcular a matriz do operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que descreve a rotação no sentido anti-horário em torno do eixo z por um ângulo θ, em relação à base ordenada canônica $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

» SOLUÇÃO: A partir do exemplo 14, sabemos que o operador linear em questão é dado por $T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta\,, x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta\,, z)$. Assim, temos

$$T(1{,}0{,}0) = (\cos\theta,\ \cos\theta,\ 0) = \cos\theta\,(1,0,0) + \cos\theta\,\ (0,1,0) + 0\,(0,0,1)\,,$$

$$T(0{,}1{,}0) = (-\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta, 0) = -\mathrm{sen}\,\theta\,(1,0,0) + \mathrm{sen}\,\theta\,\ (0,1,0) + 0\,(0,0,1)\,,$$

$$T(0{,}0{,}1) = (0,0,1) = 0\,(1,0,0) + 0\,(0,1,0) + 1\,(0,0,1)\,.$$

Então

$$[T(1{,}0{,}0)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(0{,}1{,}0)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(0{,}0{,}1)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

1. Obter, na base ordenada canônica de $\mathbb{R}^3$, a matriz do operador do espaço no espaço que realiza a projeção dos vetores de $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy.
2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por
$$T(x,y,z) = (x+y, 2z-x).$$
Determinar a matriz de T em relação às bases ordenadas $\mathfrak{B} = \{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ e $\mathfrak{B}' = \{(0,1),(1,0)\}$.
3. Seja $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o operador linear sobre $\mathbb{C}^2$ definido por $T(z_1,z_2) = (z_1,0)$. Sejam $\mathfrak{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathfrak{B}' = \{(1,i),(-i,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{C}^2$. Determinar a matriz de T em relação: (a) ao par de bases $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$; (b) ao par de bases $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}$; (c) à base $\mathfrak{B}$; (d) à base $\mathfrak{B}'$.
4. Seja $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a transformação linear $T(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A + A \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $\forall\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sejam as duas bases ordenadas distintas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:
$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathfrak{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.
Determinar a matriz de T em relação: (a) ao par de bases $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$; (b) ao par de bases $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}$; (c) à base $\mathfrak{B}$; (d) à base $\mathfrak{B}'$.
5. Seja $T: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por
$$T\big(p(x)\big) = dp(x)/dx + p(0).$$
Determinar a matriz de T em relação às bases ordenadas $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$ e $\mathfrak{B}' = \{2,\ 1-x\}$.
6. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases ordenadas $\mathfrak{A} = \{(1,2,5),(2,2,6),(1,2,9)\}$ e $\mathfrak{A}' = \{(-1,1),(2,0)\}$ é
$$[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$
Determinar a matriz de T em relação às bases ordenadas
$$\mathfrak{B} = \{(2,1,3),(4,2,1),(6,-3,4)\} \ \text{ e } \mathfrak{B}' = \{(1,1),(0,1)\}.$$
7. Seja $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o operador linear cuja representação matricial na base ordenada canônica $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$ é dada pela matriz
$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Encontrar a representação matricial deste operador na base ordenada
$$\mathfrak{B}' = \{3x^2 + 2x, 5x^2 + 3x + 1, 7x^2 + 5t + 3\}.$$

A Matriz de Mudança de Base e o Operador Identidade

TEOREMA 3.5: Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $I: V \to V$ a função definida por $I(\vartheta) = \vartheta$, para todo $\vartheta \in V$, isto é, o operador linear identidade sobre V. Sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ duas bases ordenadas de V. Então a matriz do operador identidade I em relação às bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ é igual a matriz de mudança da base ordenada $\mathfrak{B}$ para a base ordenada $\mathfrak{B}'$, ou seja,

$$[I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} .$$

Prova: Posto que $I: V \to V$ é uma transformação linear, então

$$[I(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}} ,$$

onde $[I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ é a matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ que representa o operador identidade em relação às bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$. Como $I(\vartheta) = \vartheta$, então podemos escrever esta equação na forma equivalente

$$[\vartheta]_{\mathfrak{B}'} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}} .$$

Mas, a partir do teorema 2.29, sabemos que existe uma única matriz A $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tal que $[\vartheta]_{\mathfrak{B}'} = A^{-1}[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$. Como estudado no capítulo 2, esta matriz inversa A^{-1}, denotada por $A^{-1} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$, é a matriz de mudança da base $\mathfrak{B}$ para a base $\mathfrak{B}'$ tal que

$$[\vartheta]_{\mathfrak{B}'} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}} .$$

Portanto, pela unicidade da matriz de mudança da base $\mathfrak{B}$ para a base $\mathfrak{B}'$, ao compararmos as equações $[\vartheta]_{\mathfrak{B}'} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}}$ e $[\vartheta]_{\mathfrak{B}'} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}}$, concluímos que

$$[I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} .$$

Assim, a demonstração é finalizada. ▌

EXEMPLO 19 : Sejam $\mathfrak{B} = \{ (1,0), (0,1) \}$ e $\mathfrak{B}^1 = \{ (1,-1), (-2,3) \}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Verificar a igualdade $[I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$, onde $I: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é o operador identidade sobre $\mathbb{R}^2$.

» SOLUÇÃO: Note que

$$I(1,0) = (1,0) = 3\,(1,-1) + 1\,(-2,3),$$
$$I(0,1) = (0,1) = 2\,(1,-1) + 1\,(-2,3) .$$

Então

$$[I(1,0)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I(0,1)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, na solução do exemplo 30 do capítulo 2, vimos que

$$[M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, verificamos que $[I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = [M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$.

OBSERVAÇÃO: Tendo em vista o resultado do teorema 3.5, daqui em diante usaremos a notação $[I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$, em vez de $[M]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$, para descrever a matriz de mudança da base $\mathfrak{B}$ para a $\mathfrak{B}'$ de um espaço vetorial V de dimensão finita.

Relações Entre Matrizes de uma Transformação Linear

O próximo resultado mostra que ao se trocar as bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$, respectivamente, de V e W para outras duas bases, $\mathfrak{A}$ de V e $\mathfrak{A}'$ de W, a matriz de qualquer transformação linear $T: V \rightarrow W$ de V em W também muda, no entanto existe uma relação entre $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ e $[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}$.

TEOREMA 3.6: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, com $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Escolhidas duas bases ordenadas $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{A}$ de V e duas bases ordenadas $\mathfrak{B}'$ e $\mathfrak{A}'$ de W, existem duas matrizes quadradas, P $m \times m$ e S $n \times n$, ambas inversíveis tais que, para toda transformação linear $T: V \rightarrow W$, ocorre

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = P^{-1} \, [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} \, S \,,$$

onde $S = [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$ e $P = [I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}$.

Prova: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear arbitrária de V em W. Então, para todo ϑ em V, a matriz de T em relação às bases ordenadas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ obedece a relação

$$[T(\vartheta)]_{\mathfrak{A}'} = [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} [\vartheta]_{\mathfrak{A}} \,.$$

Pela matriz de mudança da base $\mathfrak{B}$ para a base $\mathfrak{A}$ (ambas de V), temos

$$[\vartheta]_{\mathfrak{A}} = [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}} \,.$$

Substituindo esta equação no lado direito da equação anterior, obtemos

$$[T(\vartheta)]_{\mathfrak{A}'} = [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}} \,.$$

Por outro lado, a partir da matriz de mudança da base $\mathfrak{B}'$ para a base $\mathfrak{A}'$ (ambas de W), sabemos que as coordenadas do vetor $T(\vartheta)$ na base $\mathfrak{A}'$ cumprem a relação

$$[T(\vartheta)]_{\mathfrak{A}'} = [I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'} [T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'}.$$

Igualando as duas últimas equações, temos

$$[I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'} [T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}} \,.$$

Visto que toda matriz de mudança de base é inversível, então multiplicando ambos os lados desta equação pela matriz inversa $\left([I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1}$, obtemos

$$[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = \left([I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1} [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} [\vartheta]_{\mathfrak{B}} \,.$$

Mas, a partir do teorema 3.2, conhecemos que existe uma única matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ tal que

$$[T(\vartheta)]_{\mathfrak{B}'} = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}\, [\vartheta]_{\mathfrak{B}} \,.$$

Portanto, comparando as duas últimas equações, chegamos à equação

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \left([I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1} [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\, [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} \,.$$

Fazendo $P = [I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}$ e $S = [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$, obtemos a relação procurada existente entre as matrizes de uma mesma transformação linear, em relação a dois pares de bases ordenadas:

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = P^{-1}\, [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\, S \,,$$

onde deve-se observar que a matriz inversível P é $m \times m$ e a matriz S (também inversível) é $n \times n$. ▌

Posto que $\left([I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}$, o resultado do teorema 3.6 pode ser reescrito como

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}\, [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\, [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}.$$

Esta fórmula é facilmente memorizada com a ajuda do diagrama mostrado na Fig. 3.13.

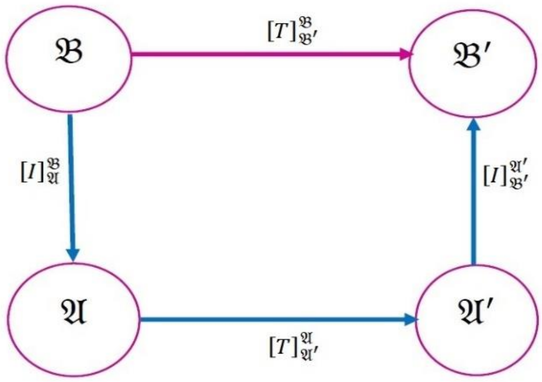

Fig. 3.13

EXEMPLO 20: Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (2x + 5y - 3z,\;\; x - 4y + 7z)\,.$$

Sejam $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathfrak{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{B}' = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathfrak{A}' = \{(1,3),(2,5)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Determinar $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ e $[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}$ as matrizes da transformação linear T em relação aos pares de bases $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ e $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, respectivamente. Determinar as duas matrizes inversíveis $S = [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $P = [I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e, finalmente, verificar que

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = P^{-1}\, [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\, S\,.$$

» SOLUÇÃO: Inicialmente, determinaremos $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$. Para isto, considerando as bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$, notamos que

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,\ 1) &&= \ \ 2\,(1,0) + 1\,(0,1)\,, \\ T(0,1,0) &= (5,-4) &&= \ \ 5\,(1,0) - 4\,(0,1)\,, \\ T(0,0,1) &= (-3,7) &&= -3\,(1,0) + 7\,(0,1)\,. \end{aligned}$$

Assim, $[T(1,0,0)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[T(0,1,0)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$, $[T(0,0,1)]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Para construir $[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}$, usaremos as bases $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$. Assim

$$T(1,1,1) = (4,\ 4) = -12\,(1,3) + 8\,(2,5)\,,$$

$$T(1,1,0) = (7,-3) = -41\,(1,3) + 24\,(2,5)\,,$$

$$T(1,0,0) = (2,\ 1) = -8\,(1,3) + 5\,(2,5)\,.$$

Logo, $[T(1,1,1)]_{\mathfrak{A}'} = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \end{bmatrix}$, $[T(1,1,0)]_{\mathfrak{A}'} = \begin{bmatrix} -41 \\ 24 \end{bmatrix}$, $[T(1,0,0)]_{\mathfrak{A}'} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \end{bmatrix}$. Então

$$[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} = \begin{bmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{bmatrix}.$$

A seguir, obteremos a matriz $S = [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$. Empregando as bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{A}$, notamos que

$$I(1,0,0) = (1,0,0) = 0\,(1,1,1) + 0\,(1,1,0) + 1\,(1,0,0)\,,$$

$$I(0,1,0) = (0,1,0) = 0\,(1,1,1) + 1\,(1,1,0) - 1\,(1,0,0)\,,$$

$$I(0,0,1) = (0,0,1) = 1\,(1,1,1) - 1\,(1,1,0) + 0\,(1,0,0)\,.$$

Portanto

$$S = [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para obter a matriz P^{-1}, primeiro notamos que $P^{-1} = \left([I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}$. Em seguida, usando as bases $\mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B}'$, temos

$$I(1,3) = (1,3) = 1\,(1,0) + 3\,(0,1)\,,$$

$$I(2,5) = (2,5) = 2\,(1,0) + 5\,(0,1)\,.$$

Assim,

$$P^{-1} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Agora, calculando o seguinte produto de matrizes, obtemos

$$P^{-1}\,[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\,S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Portanto, concluímos que

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} = P^{-1}\,[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\,S\,.$$

EXEMPLO 21: Suponha que a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é representada, em relação às bases ordenadas $\mathfrak{A} = \{(1,0,-1), (0,2,0), (1,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{A}' = \{(-1,1), (2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$, pela matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são as bases ordenadas canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, obter a matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$.

» SOLUÇÃO: A matriz da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, em relação as bases ordenadas $\mathfrak{A} = \{(1,0,-1),(0,2,0),(1,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{A}' = \{(-1,1),(2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$, é

$$[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para determinar a matriz desta transformação linear em relação as bases ordenadas $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{B}' = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, usaremos a fórmula

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = P^{-1}[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\, S\,.$$

Para isto, necessitamos calcular as matrizes $P^{-1} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}$ e $S = [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$. Para calcular P^{-1}, notamos que

$$I(-1,1) = -1\,(1,0) + 1\,(0,1)\,,$$

$$I(\,2,\ 0) = \ 2\,(1,0) + 0\,(0,1)\,.$$

Assim,

$$P^{-1} = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, para determinar a matriz S, devemos efetuar cálculos para expressar cada vetor da base $\mathfrak{B}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathfrak{A}$. Feito isto, obtemos

$$I(1,0,0) = (1,0,0) = \tfrac{3}{4}\,(1,0,-1) - \tfrac{1}{4}\,(0,2,0) + \tfrac{1}{4}\,(1,2,3)\,,$$

$$I(0,1,0) = (0,1,0) = 0\,(1,0,-1) + \tfrac{1}{2}\,(0,2,0) + 0\,(1,2,3)\,,$$

$$I(0,0,1) = (0,0,1) = -\tfrac{1}{4}\,(1,0,-1) - \tfrac{1}{4}\,(0,2,0) + \tfrac{1}{4}\,(1,2,3)\,.$$

Logo,

$$S = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = P^{-1}[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\, S = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 22: Como pode-se ver nos exemplos anteriores, a determinação da matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, em relação as bases ordenadas $\mathfrak{B} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, exige cálculos para obtenções dos escalares envolvidos na equação que, para cada ϑ_j em $\mathfrak{B}$, descreve o vetor resultante $T(\vartheta_j)$ como combinação linear dos vetores $w_1, \dots, w_m$ da base $\mathfrak{B}'$, ou seja, as coordenadas do vetor $T(\vartheta_j)$ na base $\mathfrak{B}'$. Apesar do problema da determinação de escalares que participam de uma combinação linear (que resulta em um certo vetor) não ser uma novidade, pois é parte das questões estudadas no capítulo 2, no presente exemplo descreveremos uma estratégia prática para abordar esse problema. Para facilitar nossa explanação, suponha que $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R}^2$. Assim, sejam $\mathfrak{B} = \{(1,2,3),(-1,1,1),(1,2,1)\}$ e $\mathfrak{B}' = \{(5,-6,),(-2,-1)\}$ bases ordenadas de V e W, respectivamente, e $T: V \to W$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z) = (x+y, 2y-z).$$

Neste caso, a matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ é da forma

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix},$$

onde os escalares α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 e γ_2 são aqueles que satisfazem as equações:

$$\begin{aligned} T(1,2,3) &= (3,1) = \alpha_1\,(5,-6) + \alpha_2\,(-2,-1), \\ T(-1,1,1) &= (0,1) = \beta_1\,(5,-6) + \beta_2\,(-2,-1), \\ T(1,2,1) &= (1,3) = \gamma_1\,(5,-6) + \gamma_2\,(-2,-1). \end{aligned}$$

Em seguida, note que cada uma das equações vetoriais acima corresponde a um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A abordagem prática considerada aqui parte da observação de que estes sistemas lineares possuem a mesma matriz dos coeficientes, cujas linhas são os vetores da base $\mathfrak{B}'$. Portanto, para determinar os escalares α_i, β_i, γ_i, estes sistemas podem ser resolvidos de forma simultânea. Para tal, consideraremos a seguinte matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 5 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

De um lado desta matriz ampliada se encontra a matriz dos coeficientes, comum a cada sistema linear. Do outro lado, estão as colunas relativas a cada termo independente dos referidos sistemas lineares. Usando operações elementares sobre linhas, podemos reduzir a matriz ampliada a uma matriz escalonada reduzida por linhas:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 5 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -6 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{17}{5} & \frac{23}{5} & 1 & \frac{21}{5} \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{17} & -\frac{5}{17} & -\frac{21}{17} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{17} & -\frac{2}{17} & -\frac{5}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{17} & -\frac{5}{17} & -\frac{21}{17} \end{array}\right).$$

Como os vetores de $\mathfrak{B}'$ são linearmente independentes, pois $\mathfrak{B}'$ é uma base, era de se esperar que a matriz dos coeficientes, comum a cada sistema linear, se transformasse na matriz identidade, como mostrado no lado esquerdo da matriz ampliada escalonada. Consequentemente, as colunas que aparecem no lado direito da matriz ampliada escalonada são as soluções dos referidos sistemas lineares. Portanto, no lado direito da matriz ampliada resultante do processo de escalonamento se encontra a matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ procurada, ou seja,

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -23 & -5 & -21 \end{bmatrix}.$$

Se $T: V \to V$ é um operador linear sobre o espaço de dimensão finita V, então ao fixarmos duas bases ordenadas em V, obtemos o caso particular do teorema 3.6.

COROLÁRIO 3.7: Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre o corpo $\mathbb{F}$. Fixadas duas bases ordenadas $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ de V, existe uma matriz S quadrada inversível de dimensão n tal que, para todo operador linear $T: V \to V$ sobre V, ocorre

$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = S^{-1}[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}\, S\,,$$

onde $S = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$.

Prova: Seguindo o teorema 3.6, mas com as substituições $\mathfrak{B}' \leftarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \leftarrow \mathfrak{B}'$ e $\mathfrak{A}' \leftarrow \mathfrak{B}'$, podemos escrever (veja Fig. 3.14):

$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = [I]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}\ [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}\ [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}.$$

Como $[I]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'} = \left([I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}\right)^{-1}$, fazendo $S = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ obtemos

$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = S^{-1}\ [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}\ S.$$

Isto conclui a demonstração. ▌

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B} \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "{[I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}}"'] & \mathfrak{B} \\
\mathfrak{B}' \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}}"'] & \mathfrak{B}' \arrow[u, "{[I]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}}"']
\end{tikzcd}$$

Fig. 3.14.

EXEMPLO 23: Seja o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (y,-x,z)$. Usar o corolário 3.7 para obter $[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$, sabendo que

$$S = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $\mathfrak{B}' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$.

» SOLUÇÃO: Usaremos a fórmula

$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = S^{-1}\ [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}\ S.$$

Para determinar $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}$, a partir da base $\mathfrak{B}'$ notamos que

$$T(1,1,0) = (1,-1,0)\,,$$

$$T(0,1,1) = (1,\ \ 0,1)\,,$$

$$T(1,0,1) = (0,-1,\ 1)\,.$$

Assim, seguindo o procedimento descrito no exemplo 22, a matriz $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}$ resulta do seguinte escalonamento

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\1&1&0&-1&0&-1\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\0&1&-1&-2&-1&-1\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\0&1&-1&-2&-1&-1\\0&0&2&2&2&2\end{array}\right)\to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\0&1&-1&-2&-1&-1\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&-1&0&0\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right),$$

ou seja,

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Invertendo a matriz $S=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ encontramos

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

Assim, obteremos a matriz $[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$ efetuando o seguinte produto

$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}=S^{-1}\,[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}\,S=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

que resulta em

$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\2&1&0\\2&1&1\end{bmatrix}.$$

A seguir, estabeleceremos a recíproca do teorema 3.6.

TEOREMA 3.8: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, com $\dim V=n$ e $\dim W=m$. Seja $\mathfrak{B}$ uma base ordenada de V e $\mathfrak{B}'$ uma base ordenada de W. Suponha que A e B são matrizes em $\mathbb{F}^{m\times n}$ tais que existem matrizes quadradas inversíveis $P\in\mathbb{F}^{m\times m}$ e $S\in\mathbb{F}^{n\times n}$ que cumprem a condição

$$A=P^{-1}B\,S\,.$$

Então existem duas bases ordenadas, $\mathfrak{A}$ de V e $\mathfrak{A}'$ de W, e uma transformação linear $T:V\to W$ tais que

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}=A\,,$$

$$[T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}=B\,,$$

$$[I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}=S\quad\text{e}\quad[I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}=P\,.$$

Prova: Dadas as matrizes inversíveis $P=[p_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $S=[s_{ij}]\in\mathbb{F}^{n\times n}$, as bases ordenadas $\mathfrak{B}=\{\vartheta_1,\dots,\vartheta_n\}$ de V e $\mathfrak{B}'=\{\vartheta_1',\dots,\vartheta_m'\}$ de W, definiremos os vetores:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\vartheta_j \text{ , } \forall\ i = 1, \dots, n \text{ ,}$$

$$u_i' = \sum_{j=1}^{m} p_{ji}\vartheta_j' \text{ , } \forall\ i = 1, \dots, m \text{ .}$$

Os vetores $u_1, \dots, u_n$, assim definidos, são linearmente independentes. De fato, se $x_1, \dots, x_n$ são escalares em $\mathbb{F}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = 0 \text{ ,}$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\vartheta_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_{ji}x_i \right) \vartheta_j = 0 \text{ .}$$

Como $\mathfrak{B}$ é uma base, os vetores ϑ_j são linearmente independentes e, portanto, segue a relação

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ji}x_i = 0, \qquad \text{para todo } \ j = 1, \dots, n \text{ .}$$

Em outras palavras,

$$SX = 0 \text{ ,}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Como a matriz S inversível, isto implica em

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \text{ ,}$$

ou seja, os vetores $u_1, \dots, u_n$ são linearmente independentes e, consequentemente, o conjunto definido por

$$\mathfrak{A} = \{u_1, \dots, u_n\}$$

é uma base ordenada do espaço vetorial V de dimensão n. De forma inteiramente análoga, usando o fato de P ser inversível, podemos mostrar que o conjunto

$$\mathfrak{A}' = \{u_1', \dots, u_m'\}$$

é uma base ordenada de W. Em seguida, denotaremos por $I_V: V \to V$ o operador identidade sobre V e por $I_W: W \to W$ o operador identidade sobre W. Assim, a partir das equações que definem os vetores u_i e u_i', podemos escrever

$$I_V(u_i) = u_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\vartheta_j \,, \forall\, i = 1, \dots, n \,,$$

$$I_W(u_i') = u_i' = \sum_{j=1}^{m} p_{ji}\vartheta_j' \,, \forall\, i = 1, \dots, m \,.$$

Devido à unicidade de uma matriz de mudança de base, estas equações garantem que

$$S = [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} \,,$$

$$P = [I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'} \,.$$

Por outro lado, por hipótese, existem duas matrizes A e B em $\mathbb{F}^{m\times n}$ tais que

$$A = P^{-1} B\, S \,.$$

Então,

$$A = \left([I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1} B\, [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} \,.$$

Fixadas as bases $\mathfrak{B}$ em V e $\mathfrak{B}'$ em W, a partir do teorema 3.2, sabemos que há uma relação bijetora entre $\mathcal{L}(V, W)$ e $\mathbb{F}^{m\times n}$. Assim, considerando a matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, existe uma única transformação linear $T: V \to W$ em $\mathcal{L}(V, W)$ tal que $T \rightleftarrows A$ e, da prova do teorema 3.2, sague que

$$A = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} \,.$$

Logo, podemos escrever

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \left([I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1} B\, [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} \,.$$

Mas a partir do teorema 3.6, sabemos que

$$[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = \left([I]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}'}\right)^{-1} [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}\ [I]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} \,.$$

Portanto,

$$B = [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} \,.$$

Resumindo, mostramos que $A = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ e $B = [T]_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}$, o que conclui a prova. ▌

O corolário seguinte descreve um caso particular do teorema 3.8, direcionado para operadores lineares, cuja demonstração se faz de forma análoga a prova do teorema anterior.

COROLÁRIO 3.9: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, com $\dim V = n$. Seja $\mathfrak{B}$ uma base ordenada de V. Suponha que A e B são matrizes quadradas em $\mathbb{F}^{n\times n}$ tais que existe uma matriz inversível $S \in \mathbb{F}^{n\times n}$ que satisfaz

$$A = S^{-1} B\, S \,.$$

Então há uma base ordenada $\mathfrak{B}'$ de V e um operador linear $T: V \to V$ tais que

$$[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = A \,, \quad [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'} = B \quad \text{e} \quad [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = S \,.$$

Semelhança de Matrizes

■ DEFINIÇÃO 3.5. Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$. Diz-se que A é semelhante a B sobre $\mathbb{F}$ se existe uma matriz inversível S sobre o corpo $\mathbb{F}$ tal que

$$A = S^{-1} B\, S\,.$$

Agora, a partir do corolário 3.7, podemos afirmar o seguinte: se V é um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{F}$ e $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são duas bases ordenadas de V, então, para cada operador linear $T: V \to V$ sobre V a matriz $A = [T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$ é semelhante à matriz $B = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}$. De acordo com o corolário 3.9, este argumento também vale no outro sentido. Suponha que A e B são duas matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$. Seja V um espaço vetorial n-dimensional arbitrário sobre $\mathbb{F}$ e seja $\mathfrak{B}$ uma base ordenada de V. Se A é semelhante a B, então há uma base ordenada $\mathfrak{B}'$ de V e um operador linear $T: V \to V$ tais que $[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = A$ e $[T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'} = B$. Em outras palavras, a afirmação de que A é semelhante a B significa que A e B representam o mesmo operador linear em relação a duas bases ordenadas (possivelmente) distintas.

EXEMPLO 24 : Seja $\mathfrak{B} = \{(1{,}0{,}0{,}0), (0{,}1{,}0{,}0), (0{,}0{,}1{,}0), (0{,}0{,}0{,}1)\}$ a base ordenada canônica de $\mathbb{R}^4$. Determinar o operador linear $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = A$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinar $B = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}$ sabendo que $\mathfrak{B}' = \{(1{,}0{,}0{,}2), (1{,}1{,}1{,}3), (1{,}0{,}0{,}4), (1{,}1,-1{,}1)\}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^4$. Encontrar $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $A = S^{-1} B\, S$. Concluir que as matrizes A e B são semelhantes.

» SOLUÇÃO: Posto que $A = [T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$ é a matriz do operador linear T em relação à base ordenada $\mathfrak{B}$, então podemos avaliar T em cada vetor desta base, como segue:

$$T(1{,}0{,}0{,}0) = 2(1{,}0{,}0{,}0) + 0(0{,}1{,}0{,}0) + 0(0{,}0{,}1{,}0) + 0(0{,}0{,}0{,}1) = (2{,}0{,}0{,}0)\,,$$

$$T(0{,}1{,}0{,}0) = 1(1{,}0{,}0{,}0) + 2(0{,}1{,}0{,}0) + 0(0{,}0{,}1{,}0) + 0(0{,}0{,}0{,}1) = (1{,}2{,}0{,}0)\,,$$

$$T(0{,}0{,}1{,}0) = 0(1{,}0{,}0{,}0) + 1(0{,}1{,}0{,}0) + 2(0{,}0{,}1{,}0) + 0(0{,}0{,}0{,}1) = (0{,}1{,}2{,}0)\,,$$

$$T(0{,}0{,}0{,}1) = 0(1{,}0{,}0{,}0) + 0(0{,}1{,}0{,}0) + 0(0{,}0{,}1{,}0) + 0(0{,}0{,}0{,}1) = (0{,}0{,}0{,}0)\,.$$

Isto determina T. De fato, se (x, y, z, w) é um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^4$, então

$$(x, y, z, w) = x(1{,}0{,}0{,}0) + y(0{,}1{,}0{,}0) + z(0{,}0{,}1{,}0) + w(0{,}0{,}0{,}1)$$

e, portanto, obtemos

$$\begin{aligned} T(x, y, z, w) &= x\,T(1{,}0{,}0{,}0) + y\,T(0{,}1{,}0{,}0) + z\,T(0{,}0{,}1{,}0) + w\,T(0{,}0{,}0{,}1) \\ &= x(2{,}0{,}0{,}0) + y(1{,}2{,}0{,}0) + z(0{,}1{,}2{,}0) + w(0{,}0{,}0{,}0) \\ &= (2x + y, 2y + z, 2z, 0). \end{aligned}$$

Agora, podemos avaliar T em cada elemento da base $\mathfrak{B}'$:

$$T(1{,}0{,}0{,}2) = (2{,}0{,}0{,}0)\,,$$

$$T(1,1,1,3) = (3,3,2,0)\,,$$

$$T(1,0,0,4) = (2,0,0,0)\,,$$

$$T(1,1,-1,1) = (3,1,-2,0)\,.$$

Para determinar $B = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}$, devemos resolver quatro sistemas lineares que possuem a mesma matriz dos coeficientes, cujas colunas são os vetores da base $\mathfrak{B}'$. Seguindo a metodologia descrita no exemplo 22, isto pode ser feito simultaneamente por meio do escalonamento de uma matriz ampliada. Dessa maneira, obtemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \end{array}\right)$$

e, portanto, como explicado no exemplo 22, temos que

$$B = [T]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Feito isto, sabemos que $A = S^{-1}B\,S$, onde $S = [I]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$. Como $\mathfrak{B}$ é a base canônica, então é mais fácil determinar $S^{-1} = [I]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$:

$$I(1,0,0,2) = (1,0,0,2) = 1(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1)\,,$$

$$I(1,1,1,3) = (1,1,1,3) = 1(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 3(0,0,0,1)\,,$$

$$I(1,0,0,4) = (1,0,0,4) = 1(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 4(0,0,0,1)\,,$$

$$I(1,1,-1,1) = (1,1,-1,1) = 1(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) - 1(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1)\,.$$

Logo,

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Invertendo esta matriz, obtemos

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{S}.$$

Assim, concluímos que as matrizes A e B são semelhantes.

Exercícios

1. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base ordenada canônica $\mathfrak{B}' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Seja $\mathfrak{B} = \{(1,-2,1),(3,-1,2),(2,1,2)\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Encontrar a matriz de mudanças da base $\mathfrak{B}$ para a base $\mathfrak{B}'$. Usar esta matriz para obter a representação matricial de T na base $\mathfrak{B}$.
2. Seja $T: \mathcal{P}(\mathbb{R})_2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R})_2$ o operador linear definido por
$$T\big(p(x)\big) = x\frac{dp(x)}{dx} + \frac{d^2p(x)}{dx^2}.$$
(a) Encontrar a matriz A que representa T na base ordenada $\{1, x, 1+x^2\}$.
(b) Encontrar a matriz B que representa T na base ordenada $\{1, x, x^2\}$.
(c) Encontrar a matriz S tal que $A = S^{-1}B\,S$.
3. Seja $C[a,b]$ o espaço vetorial das funções reais contínuas no intervalo $[a,b]$. Seja V o subespaço de $C[a,b]$ gerado pelos vetores 1, e^x, e^{-x} e $D: V \to V$ o operador derivação sobre V.
(a) Encontrar a matriz S de mudança da base ordenada $\mathfrak{B} = \{1,\ e^x,\ e^{-x}\}$ para a base ordenada $\mathfrak{B}' = \left\{1, \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right\}$.
(b) Encontrar a matriz A que reprenta D em ralação à base $\mathfrak{B}$
(c) Encontrar a matriz B que representa D em relação à base $\mathfrak{B}'$.
(d) Verificar que $A = S^{-1}B\,S$.
4. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja representação na base ordenada $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a matriz B. Seja S a seguinte matriz inversível
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determinar uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ na qual a representação matricial de T é $S^{-1}BS$.
5. Se as matrizes A e B são semelhantes, mostrar que A^2 e B^2 são semelhantes.
6. Se as matrizes A e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são semelhantes, A^T e B^T são semelhantes?
7. Sejam $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ matrizes quadradas sobre o corpo $\mathbb{F}$. Se $S \in \mathbb{F}^{n\times n}$ é uma matriz inversível tal que $A = S^{-1}B\,S$, mostrar que:
(a) A matriz A é equivalente por linha a BS e, logo, $\text{Posto}(A) = \text{Posto}(BS)$.
(b) Os sistemas $BX = 0$ e $BSX = 0$ têm o mesmo espaço-solução e, portanto, $\text{Nulidade}(B) = \text{Nulidade}(BS)$.
8. Usar os resultados do exercício 7 para provar o seguinte teorema:
Se as matrizes A e $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ são semelhantes, então $\text{Posto}(A) = \text{Posto}(B)$.
9. Se as matrizes A e B $n \times n$ são semelhantes e A é inversível, mostrar que B é inversível e A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.
10. Seja $I \in \mathbb{F}^{n\times n}$ a matriz identidade de ordem n sobre o corpo $\mathbb{F}$ e α um escalar em $\mathbb{F}$. Mostra que a matriz αI é semelhante somente a si própria.
11. Generalizando o resultado do exercício 5, se existir uma matriz inversível S tal que $A = S^{-1}B\,S$, mostrar que $A^k = S^{-1}B^k\,S$ para todo inteiro $k \geq 0$.