Instituto Politécnico

Conjuntos

IPRJ01-10762

Matemática Discreta II

Gustavo Barbosa Libotte

Aula 3

Notação

- Usaremos letras maiúsculas para denotar conjuntos e o símbolo $\in$ para denotar pertinência em um conjunto.
- Assim, $a \in A$ significa que a pertence a A, ou é um elemento do conjunto A, e $b \notin A$ significa que b não pertence ao conjunto A.
- Usamos chaves para indicar um conjunto.

Exemplo

Se $A = \{\text{violeta, verde, castanho}\}$, então verde $\in A$ e magenta $\notin A$.

- Os elementos em um conjunto não têm nenhuma ordem, de modo que {violeta, verde, castanho} é o mesmo que {verde, castanho, violeta}.
- Além disso, cada elemento do conjunto é listado apenas uma vez; é redundante listá-lo de novo.

Notação

- Dois conjuntos são iguais se contiverem os mesmos elementos (aqui, "se" significa, realmente, "se e somente se"); logo, dois conjuntos são iguais se e somente se contiverem os mesmos elementos.
- Usando a notação da lógica de predicados, temos
$$A = B \text{ significa } (\forall x)[(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)]$$
- Ao descrever um conjunto particular, temos que identificar seus elementos. Para um conjunto finito (um com n elementos para algum inteiro não negativo n), podemos fazer isso simplesmente listando todos os elementos.
- Embora seja impossível listar todos os elementos de um conjunto infinito (um conjunto que não é finito), para alguns conjuntos infinitos podemos indicar a forma geral listando os primeiros elementos.
- Assim, poderíamos escrever $\{2, 4, 6, \ldots\}$ para expressar o conjunto S de todos os inteiros positivos pares.

Notação

- Embora essa seja uma prática comum, existe o perigo de que o leitor não veja a forma geral que o escritor tem em mente.
- S também pode ser definido por recorrência, explicitando-se um dos elementos de S e descrevendo, depois, os outros elementos de S em termos dos elementos já conhecidos. Por exemplo:
  1. $2 \in S$;
  2. Se $n \in S$, então $(n+2) \in S$.
- Mas a maneira mais clara de se descrever esse conjunto S particular é por meio da propriedade que caracteriza os elementos do conjunto em palavras, ou seja,

$$S = \{x \mid x \text{ é um inteiro positivo par}\}$$

que se lê "o conjunto de todos os x tais que x é um inteiro positivo par".

Notação

- A notação para um conjunto S cujos elementos são caracterizados por uma propriedade P é $\{x \mid P(x)\}$. A propriedade P aqui é um predicado unário[1]. Para qualquer x dado, $P(x)$ ou é verdadeiro ou é falso.

- De fato, a notação para a lógica formal que já aprendemos vem, novamente, nos ajudar a tornar mais claro o que queremos dizer com uma propriedade que caracteriza os elementos de um conjunto:

$$S = \{x \mid P(x)\} \text{ significa } (\forall x)[(x \in S \to (P(x)) \wedge (\mathrm{P}(x) \to x \in S)]$$

  Em palavras, todos os elementos de S têm a propriedade P, e tudo que tem a propriedade P pertence a S.

- Algumas vezes também vamos nos referir ao conjunto que não tem elementos (o conjunto vazio), denotado por $\varnothing$ ou por $\{\}$. Por exemplo, se $S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 0\}$, então $S = \varnothing$. Note que $\varnothing$, o conjunto que não tem elementos, é diferente de $\{\varnothing\}$, que é um conjunto com um único elemento em que esse elemento é o conjunto vazio.

[1] Esse assunto foi abordado no curso de Matemática Discreta I.

Exemplo

- Suponha que um conjunto A é dado por

$$A = \left\{x \mid (\exists y)\left(y \in \{0,1,2\} \text{ e } x = y^3\right)\right\}$$

- Como y não é uma variável livre aqui, esse conjunto ainda é da forma $A = \{x \mid P(x)\}$. Os elementos de A podem ser encontrados atribuindo-se a y cada um dos valores 0,1 e 2 e depois elevando ao cubo cada um desses valores. Portanto, $A = \{0,1,8\}$.

- Para

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y)\}$$

escolhendo $y = 0$, obtemos $x = 0$; escolhendo $y = 1$, obtemos $x = 0$ ou 1; escolhendo $y = 2$, obtemos $x = 0, 1$ ou 2; e assim por diante.

- Em outras palavras, B consiste em todos os inteiros não negativos menores ou iguais a algum inteiro não negativo, o que significa que $B = \mathbb{N}$.

Exemplo (continuação)

- Para o conjunto
$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \mathbb{N} \to x \leq y)\}$$
obtemos $C = \{0\}$, já que 0 é o único inteiro não negativo que é menor ou igual a todos os inteiros não negativos.

- Para $A = \{2, 3, 5, 12\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 9, 12\}$, todo elemento de A é, também, um elemento de B. Quando isso acontece, dizemos que A é um subconjunto de B.
- Se A for um subconjunto de B, escreveremos $A \subseteq B$. Se $A \subseteq B$, mas $A \neq B$ (existe pelo menos um elemento de B que não pertence a A), então A será um subconjunto próprio de B, e escreveremos $A \subset B$.

Exemplo

- Sejam

$$A = \{1, 7, 9, 15\}$$
$$B = \{7, 9\}$$
$$C = \{7, 9, 15, 20\}$$

- Então as seguintes proposições (entre outras) são verdadeiras:

$$\begin{array}{ll} B \subseteq C & 15 \in C \\ B \subseteq A & \{7, 9\} \subseteq B \\ B \subset A & \{7\} \subset A \\ A \not\subset C & \varnothing \subseteq C \end{array}$$

- A última proposição ($\varnothing \subseteq C$) é verdadeira porque a proposição $(\forall x)(x \in \varnothing \rightarrow x \in C)$ é verdadeira, já que $x \in \varnothing$ é sempre falsa.

- **Lembrete**: Certifique-se de que você compreende a diferença entre os símbolos $\in$ (pertence a) e $\subseteq$ (é subconjunto de).
- Suponha que $B = \{x \mid P(x)\}$ e que $A \subseteq B$. Como todo elemento de A também pertence a B e P é uma propriedade que caracteriza os elementos de B, todo elemento de A também tem a propriedade $P(x)$.
- Os elementos de A “herdam” a propriedade P. De fato, para provar que $A \subseteq B$, mostramos que $P(x)$ é válida para qualquer elemento arbitrário $x \in A$.
- Se A for um subconjunto próprio de B, então os elementos de A terão, em geral, alguma propriedade adicional não compartilhada por todos os elementos de B.
- Essa é a mesma noção de “herança” que temos em uma linguagem de programação orientada a objeto para um tipo descendente, ou subtipo, ou tipo derivado.

Instituto Politécnico

Exemplo

- Sejam
$$B = \{x \mid x \text{ é um múltiplo de } 4\} \text{ e}$$
$$A = \{x \mid x \text{ é um múltiplo de } 8\}$$
- Temos, então, $A \subseteq B$.
- Para provar isso, seja $x \in A$; note que x é um elemento completamente arbitrário de A. Precisamos mostrar que x satisfaz a propriedade que caracteriza os elementos de B; isso significa que precisamos mostrar que x é um múltiplo de 4.
- Como $x \in A$, x satisfaz a propriedade que caracteriza os elementos de A; logo, x é um múltiplo de 8, e podemos escrever $x = m \cdot 8$ para algum inteiro m.
- Essa equação pode ser escrita como $x = m \cdot 2 \cdot 4$ ou $x = k \cdot 4$, em que $k = 2m$, de modo que k é um inteiro.

Exemplo (continuação)

- Isso mostra que x é um múltiplo de 4, e, portanto, $x \in B$.
- Existem números (como 12) que são múltiplos de 4, mas não de 8; logo, $A \subset B$.
- Outra maneira de descrever A é

$$A = \{x \mid x = k \cdot 4 \text{ e } k \text{ é um número par}\}$$

- Nessa forma é claro que os elementos de A herdaram a propriedade que caracteriza os elementos de B—ser um múltiplo de 4—, mas existe uma restrição adicional que faz com que A seja menos geral do que B.

- Sabemos que A e B são conjuntos iguais quando eles têm os mesmos elementos. Podemos escrever essa igualdade em termos de subconjuntos: $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Operações binárias e unárias

- Um conjunto por si mesmo não é muito interessante, até fazermos algo com seus elementos. Por exemplo, podemos efetuar diversas operações aritméticas em elementos do conjunto $\mathbb{Z}$.
- Poderíamos subtrair dois inteiros, ou considerar o negativo de um inteiro. A subtração age em dois inteiros; é uma operação binária em $\mathbb{Z}$. A negação age em um inteiro, é uma operação unária em $\mathbb{Z}$.
- Para ver exatamente o que é uma operação binária, vamos considerar a subtração com mais detalhes.
- Um par ordenado é denotado por (x, y), em que x é a primeira componente e y é a segunda.
- A ordem é importante em um par ordenado; assim, os conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{2, 1\}$ são iguais, mas os pares ordenados $(1, 2)$ e $(2, 1)$ não são.
- Você já conhece, provavelmente, a utilização de pares ordenados como coordenadas para se localizar um ponto no plano Euclidiano.

Conjuntos de conjuntos

- Para um conjunto S, podemos formar um novo conjunto cujos elementos são os subconjuntos de S.
- Esse novo conjunto é chamado o **conjunto das partes** de S e denotado por $\&(S)$.
- Por exemplo, para $S = \{0, 1\}, \&(S) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Note que os elementos do conjunto das partes de um conjunto são conjuntos.
- Para encontrar $\&(S)$, comece com $\varnothing$. Depois inclua todos os conjuntos com um único elemento pertencente a S, depois com 2 elementos pertencentes a S, com 3 elementos, e assim por diante.
- Para qualquer conjunto $S, \&(S)$ sempre tem, pelo menos, $\varnothing$ e S como elementos, já que sempre é verdade que $\subseteq S$ e $S \subseteq S$.

- O ponto $(1,2)$ é diferente do ponto $(2,1)$. Dois pares ordenados (x,y) e (u,v) só são iguais quando $x = u$ e $y = v$.
- Vamos generalizar as propriedades de subtração de inteiros para definir uma operação binária $\circ$ em um conjunto S.
- O símbolo $\circ$ marca, simplesmente, o lugar; em qualquer discussão específica, será substituído pelo símbolo apropriado para a operação, como o símbolo para a subtração, por exemplo.

Operação binária

$\circ$ é uma operação binária em um conjunto S se, para todo par ordenado (x,y) de elementos de S, $x \circ y$ existe, é único e pertence a S.

- Em outras palavras, se $\circ$ for uma operação binária em S, então, para dois valores x e y quaisquer em S, $x \circ y$ produz uma única resposta e essa

- Em outras palavras, se $\circ$ for uma operação binária em S, então, para dois valores x e y quaisquer em S, $x \circ y$ produz uma única resposta e essa resposta pertence a S.
- Descrevemos o fato de que $x \circ y$ existe e é único dizendo que a operação binária $\circ$ está **bem definida**.
- A propriedade de que $x \circ y$ sempre pertence a S é descrita dizendo-se que S é **fechado** em relação à operação $\circ$.
- A unicidade não significa que o resultado de uma operação binária ocorre apenas uma vez; significa que, dados x e y, existe apenas um resultado para $x \circ y$.
- Por exemplo, a soma, a subtração e a multiplicação são operações binárias em $\mathbb{Z}$. Ao efetuar a soma em um par de inteiros (x, y), $x + y$ existe e é um único inteiro.
- Por outro lado, a divisão não é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, pois $x \div 0$ não existe.

Exemplo

Defina $x \circ y$ em $\mathbb{N}$ por

$$x \circ y = \begin{cases} 1 \,\text{se}\, x \geq 5 \\ 0 \,\text{se}\, x \leq 5 \end{cases}$$

Então, pela primeira parte da definição de $\circ, 5 \circ 1 = 1$, mas, pela segunda parte, $5 \circ 1 = 0$. Assim, $\circ$ **não está bem definida** em $\mathbb{N}$.

- A maior parte das operações que vimos opera em números, mas também podemos operar em conjuntos.
- Dado um conjunto arbitrário S, podemos definir algumas operações binárias e unárias no conjunto $\&(S)$. Nesse caso, S é chamado de **conjunto universo** ou **universo do discurso**.
- O conjunto universo define o contexto dos objetos em discussão. Se $S = \mathbb{Z}$, por exemplo, então todos os subconjuntos conterão apenas inteiros.

- Uma operação binária em $\&(S)$ tem que agir em dois subconjuntos arbitrários de S para produzir um único subconjunto de S.

Exemplo

- Seja S o conjunto de todos os estudantes da universidade. Então os elementos de $\&(S)$ são conjuntos de estudantes.
- Seja A o conjunto de alunos de engenharia de computação e seja B o conjunto de alunos de engenharia mecânica.
- Tanto A quanto B pertencem a $\&(S)$. Um novo conjunto de estudantes pode ser definido, consistindo em todos que são alunos das engenharia de computação ou mecânica (ou ambos); esse conjunto é a **união** de A e B.
- Outro novo conjunto é o conjunto dos alunos que estudam, ao mesmo tempo, em ambos os cursos. Esse conjunto (que pode ser vazio) é chamado de **interseção** de A e B.

Operações em conjuntos

União e interseção de conjuntos

Sejam $A, B \in \&(S)$. A **união** de A e B, denotada por $A \cup B$, é $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. A **interseção** de A e B, denotada por $A \cap B$, é $\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Exemplo

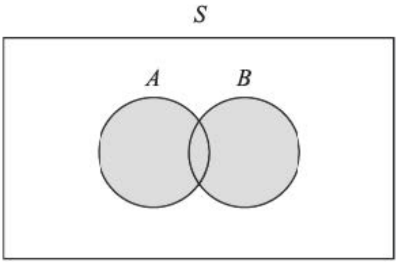
Sejam $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{3, 5, 6, 10, 11\}$. Podemos considerar aqui A e B elementos de $\&(\mathbb{N})$. Então $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ e $A \cap B = \{3, 5\}$. Tanto $A \cup B$ quanto $A \cap B$ são elementos de $\&(\mathbb{N})$.

- Vamos definir agora uma operação unária em $\&(S)$.

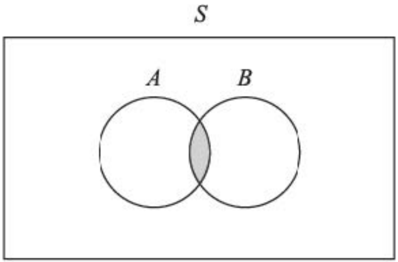
Complemento de um conjunto

Para um conjunto $A \in \&(S)$, o complemento de A, denotado por A', é $\{x \mid x \in S \text{ e } x \notin A\}$.

- Podemos usar diagramas de Venn (assim chamados em honra ao matemático britânico do século XIX John Venn) para visualizar as operações binárias de união e interseção.
- As áreas sombreadas nas figuras abaixo ilustram os conjuntos que resultam dessas operações binárias nos dois conjuntos dados.



$A \cup B$



$A \cap B$

Operações em conjuntos

- Outra operação binária em conjuntos A e B pertencentes a & (S) é a diferença entre conjuntos: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

- Essa operação pode ser reescrita como $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B'\}$ ou como $A - B = A \cap B'$.

- Dois conjuntos A e B tais que $A \cap B = \varnothing$ são ditos **disjuntos**. Então, $A - B$ e $B - A$, por exemplo, são conjuntos disjuntos.

Exemplo

- Sejam

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro por não negativo }\}$$
$$B = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y + 1)\}$$
$$C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 4y)\}$$

subconjuntos de $\mathbb{N}$.

- Como B representa o conjunto dos inteiros ímpares não negativos, A e B são conjuntos disjuntos.

Instituto Politécnico

Exemplo (continuação)

- Além disso, todo inteiro não negativo é par ou ímpar, de modo que $A \cup B = \mathbb{N}$.
- Esses dois fatos também nos dizem que $A' = B$.
- Todo múltiplo de 4 é um número par, logo C é um subconjunto de A e, portanto, $A \cup C = A$.
- C é, de fato, um subconjunto próprio de A e $A - C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 4y + 2)\}$.

- Vamos definir uma última operação usando elementos de $\&(S)$.

Produto cartesiano

Sejam A e B subconjuntos de S. O produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é definido por

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Operações em conjuntos

- Assim, o produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados com primeira componente em A e a segunda em B.
- O produto cartesiano não é uma operação binária em $\&(S)$. Embora ele atue em pares ordenados de elementos de $\&(S)$ e seja único, o resultado não é, em geral, um subconjunto de S.
- Os elementos não pertencem a S, mas são pares ordenados de elementos em S, de modo que o conjunto resultante não pertence a $\&(S)$.
- Como estaremos interessados, muitas vezes, no produto cartesiano de um conjunto consigo mesmo, vamos abreviar $A \times A$ por A^2.
- Em geral, A^n denota o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de elementos de A.

Identidades envolvendo conjuntos

- Existem muitas igualdades entre conjuntos envolvendo as operações de união, interseção, diferença e complemento que são verdadeiras para todos os subconjuntos de um dado conjunto S.
- Como elas são independentes dos subconjuntos particulares utilizados, essas igualdades são chamadas de identidades.
- A seguir listamos algumas identidades básicas envolvendo conjuntos.

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	comutatividade
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	associatividade
3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributividade
4a. $A \cup \varnothing = A$	4b. $A \cap S = A$	existência dos elementos neutros
5a. $A \cup A' = S$	5b. $A \cap A' = \varnothing$	propriedades do complemento

Instituto Politécnico

Exemplo

- Podemos usar as identidades básicas envolvendo conjuntos para provar que

$$[A \cup (B \cap C)] \cap \left([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)'\right) = \varnothing$$

para A, B e C subconjuntos arbitrários de S.

- Na demonstração a seguir, o número à direita denota a identidade básica usada em cada passo.

- O primeiro passo usa a identidade 2b, já que a expressão

$$[A \cup (B \cap C)] \cap \left([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)'\right)$$

é da mesma forma que o termo à direita do sinal de igualdade em 2b, $A \cap (B \cap C)$, com $[A \cup (B \cap C)]$ no lugar de A, $[A' \cup (B \cap C)]$ no lugar de B e $(B \cap C)9$ no lugar de C.

Instituto Politécnico

Exemplo (continuação)

- Portanto, temos que:

$$
\begin{aligned}
&[A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)') \\
&\qquad = ([A \cup (B \cap C)] \cap [A' \cup (B \cap C)]) \cap (B \cap C)' && \text{(2b)} \\
&\qquad = ([(B \cap C) \cup A] \cap [(B \cap C) \cup A']) \cap (B \cap C)' && \text{(1a duas vezes)} \\
&\qquad = [(B \cap C) \cup (A \cap A')] \cap (B \cap C)' && \text{(3a)} \\
&\qquad = [(B \cap C) \cup \varnothing] \cap (B \cap C)' && \text{(5b)} \\
&\qquad = (B \cap C) \cap (B \cap C)' && \text{(4a)} \\
&\qquad = \varnothing && \text{(5b)}
\end{aligned}
$$