Cálculo Numérico - Interpolação polinomial: introdução e forma de Lagrange
Prof^a. Vanessa Rolnik - DCM - FFCLRP/USP

Este material é baseado nas Seções 8.1, 8.2 e 8.3 do livro FRANCO, N. B. Cálculo Numérico. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

Introdução

Dado um conjunto de $n+1$ pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$, queremos encontrar um polinômio de grau menor ou igual a n que passe exatamente por esses nós, ou seja, $f(x) \approx P_n(x)$ tal que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, n. \tag{1}$$

Chamamos:

- $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$: **nós da interpolação**
- P_n é o **polinômio interpolador**

Uma das ideias mais antigas e ainda muito utilizada é encontrar um polinômio para a aproximação de uma função. A razão está no fato de que os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade, entre outras vantagens.

Escrevendo $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$, queremos então determinar os $n+1$ parâmetros, a_0, a_1, ..., a_n. A condição (1) gera um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases} \tag{2}$$

Exemplo 1. Encontre um polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Temos 3 nós de interpolação $(-1, 4)$, $(0, 1)$ e $(2, -1)$, então $n = 2$ e o polinômio interpolador tem grau no máximo 2.

O polinômio procurado é $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Impondo a condição (1),

para o nó de interpolação $(-1, 4)$, $P_2(-1) = a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 4$

para o nó de interpolação $(0, 1)$, $P_2(0) = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 1$

para o nó de interpolação $(2, -1)$, $P_2(2) = a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = -1$

de onde construímos o sistema linear

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 & = 4 \\ a_0 & = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 & = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{7}{3}$ e $a_2 = \frac{2}{3}$. Logo o polinômio interpolador é

$$P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2.$$

O seguinte teorema nos diz que o **polinômio interpolador** existe e é único, na hipótese de que todos dos pontos $x_0, x_1, x_2, ...x_n$, sejam distintos.

Teorema 1. *Dados $n+1$ pontos distintos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ existe um e só um polinômio $P_n(x)$, de grau menor ou igual n que satisfaz a condição $f(x_i) = P_n(x_i), i = 0, 1, ..., n$.*

Demonstração. Escrevendo o sistema (1) na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix},$$

observamos que a matriz dos coeficientes é uma matriz de Vandermonde (mais detalhes em livros de Álgebra Linear), sendo que uma de suas propriedades é o fato de ter determinante diferente de zero sempre que $x_i \neq x_j$, para todo $i \neq j$.

Se $\det(A) \neq 0$, o sistema admite uma única solução $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$. Logo, o polinômio interpolador existe e é unicamente determinado. ■

Aparentemente o problema de interpolação está resolvido. No entanto, podemos reduzir a quantidade de cálculos necessários, melhorar a qualidade da solução e apresentar uma estimativa para o erro de truncamento cometido utilizando métodos numéricos. Veremos dois métodos que não requerem resolução de sistemas lineares

Forma interpoladora de Lagrange

Polinômio de grau 1

Dados 2 nós de interpolação $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0)$$

Aplicando a condição (1)

para $x = x_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \dfrac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$

para $x = x_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$

Logo, o polinômio interpolador fica

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1).$$

Polinômio de grau 2

Dados 3 nós de interpolação $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$

$$f(x) \approx P_2(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) + a_1(x-x_0)(x-x_2) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

Aplicando a condição (1)

para $x = x_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \dfrac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

para $x = x_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

para $x = x_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \dfrac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

Logo, o polinômio interpolador fica

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2).$$

Continuando dessa forma, conseguimos generalizar o método. Dados $n+1$ nós de interpolação $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$,

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x), \tag{3}$$

onde

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}, \quad k = 0, 1, \cdots, n \quad \text{são os polinômios de Lagrange.} \tag{4}$$

Podemos verificar que o polinômio gerado por (3) é de fato um polinômio interpolador, ou seja, satisfaz a condição (1). Também podemos verificar que os polinômios (4) satisfazem $L_i(x_i) = 1$ e $L_i(x_j) = 0$ para $i \neq j$ e com isso formam uma base ortogonal para $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 2. Voltando ao Exemplo 1., encontre um polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela usando a forma interpoladora de Lgrange.

Como temos 3 nós de interpolação $(-1, 4)$, $(0, 1)$ e $(2, -1)$, o polinômio de ordem $n = 2$ procurado é

$$f(x) \approx P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$= 4L_0(x) + L_1(x) - L_2(x).$$

Precisamos calcular os polinômios de Lagrange

$$L_0(x) = \prod_{i=0, i\neq 0}^{2} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right) = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \prod_{i=0, i\neq 1}^{2} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right) = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = -\frac{x^2 - x - 2}{2}$$

$$L_2(x) = \prod_{i=0, i\neq 2}^{2} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) = \frac{(x+1)(x-0)}{(2-0)(2+1)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

Substituindo no polinômio,

$$P_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) - \left(\frac{x^2 - x - 2}{2}\right) - \left(\frac{x^2 + x}{6}\right) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2.$$

Exercícios

1) Determine o polinômio de grau ≤ 2 cujos valores numéricos conhecidos são $f(-1) = 15$, $f(0) = 8$ e $f(3) = -1$

a) usando a definição de intepolação;

b) usando a forma interpoladora de Lagrange;

Solução: $P_2(x) = x^2 - 6x + 8$

2) Considere a tabela

x	1	3	4	5
$f(x)$	0	6	24	60

Determine o polinômio interpolador sobre todos os pontos

a) pela definição;

b) usando a forma interpoladora de Lagrange.

3) Dados 5 pontos (1,2), (4,6), (7,4), (10,8) e (13,10)

a) obter o polinômio interpolador $P_1(x)$ sobre os pontos (1,2) e (13,10); esboçar o gráfico de $P_1(x)$, $x \in [1, 13]$;

b) obter o polinômio interpolador $P_2(x)$ sobre os pontos (1,2), (7,4) e (13,10); esboçar o gráfico de $P_1(x)$, $x \in [1, 13]$;

c) obter o polinômio interpolador $P_3(x)$ sobre os pontos (1,2), (4,6), (7,4) e (13,10); esboçar o gráfico de $P_1(x)$, $x \in [1, 13]$;

d) obter aproximações para $f(5)$ em cada um dos itens acima.

4) Calcular uma aproximação para $e^{3.1}$ usando polinômio interpolador na forma de Langrange sobre 3 pontos da tabela:

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

Escolher 3 pontos da tabela para serem os nós de interpolação de forma que 3.1 esteja no intervalo de interpolação e que sejam mais próximos possíveis de 3.1.

Vamos escolher $(x_0, f(x_0)) = (2.8, 16.44)$, $(x_1, f(x_1)) = (3.0, 20.08)$ e $(x_2, f(x_2)) = (3.2, 24.53)$

Como temos 3 pontos, vamos procurar por

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= 16.44L_0(x) + 20.08L_1(x) + 24.53L_2(x) \end{aligned}$$

$L_0(x) =$
$L_1(x) =$
$L_2(x) =$
$P_2(x) =$
Portanto, $e^{3.1} \approx P_2(3.1) =$

5) Obter uma aproximação para $f(5)$ utilizando todos os 5 pontos $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(7, 4)$, $(10, 8)$ e $(13, 10)$, sem calcular a expressão do pol. interpolador.

Como temos 5 pontos, o polinômio interpolador tem grau menor ou igual a 4. E como

$$f(x) \approx P_4(x) \quad \Rightarrow \quad f(5) \approx P_4(5)$$

E,

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} f(x_k)L_k(x) \quad \Rightarrow \quad P_4(5) = \sum_{k=0}^{4} f(x_k)L_k(5)$$

Vamos calcular $P_4(5)$. Expandindo a soma:
$P_4(5) = f(x_0)L_0(5) + f(x_1)L_1(5) + f(x_2)L_2(5) + f(x_3)L_3(5) + f(x_4)L_4(5)$
Substituindo os valores da f:
$P_4(5) = 2L_0(5) + 6L_1(5) + 4L_2(5) + 8L_3(5) + 10L_4(5)$

Vamos calcular os polinômios de Lagrange

$$L_0(x) = \prod_{i=0, i\neq 0}^{4} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} \quad \Rightarrow \quad L_0(5) = \prod_{i=0, i\neq 0}^{4} \frac{5 - x_i}{x_0 - x_i}$$

$$\begin{aligned} L_0(5) &= \left(\frac{5 - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{5 - x_2}{x_0 - x_2}\right)\left(\frac{5 - x_3}{x_0 - x_3}\right)\left(\frac{5 - x_4}{x_0 - x_4}\right) \\ &= \left(\frac{5 - 4}{1 - 4}\right)\left(\frac{5 - 7}{1 - 7}\right)\left(\frac{5 - 10}{1 - 10}\right)\left(\frac{5 - 13}{1 - 13}\right) = \end{aligned}$$

Repete para $L_2(5)...L_4(5)$, substitui no polinômio

6) Escreva um algoritmo que, dados n nós de interpolação $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \cdots, n$, e um ponto $p \in [x_1, x_n]$, obtém uma aproximação para $f(p)$ por meio do polinômio interpolador de Lagrange sobre todos os pontos.