Tema 7. Multicolinealidad

Gustavo A. García

ggarci24@eafit.edu.co

Econometría para la Toma de Decisiones

Maestría en Economía Aplicada

Escuela de Finanzas, Economía y Gobierno

Universidad EAFIT

Link slides en formato html

Link slides en formato PDF

En este tema

- Naturaleza del problema
- Multicolinealidad perfecta
- Ausencia total de multicolinealidad (ortogonalidad)
- Multicolinealidad imperfecta
- Consecuencias
- Criterios para detectar multicolinealidad
- Medidas correctivas
- Ejercicio aplicado en R

Lecturas

- Wooldridge, Jeffrey (2013). *Introducción a la econometría*. 5a edición, Cengage Learning. Cap. 3.4
- Gujarati, D. y Porter, D. (2010). *Econometría*. 5a edición, Mc Graw Hill. Cap. 10

Naturaleza del problema

- La multicolinealidad es un problema de dependencia lineal entre las variables explicatorias que obstaculizan el poder aislar el efecto de cada una por separado

- Su principal efecto serán varianzas excesivamente grandes para cada estimador, y esto llevará a que cada parámetro pueda estar mal estimado

- No obstante:
    - alta depencencia no necesariamente lleva a molestias
    - en presencia de molestias para cada parámetro, una combinación lineal puede estar bien estimada
    - puede haber una contradicción estadística: por separado ningún parámetro significativo pero de conjunto si lo son

Naturaleza del problema

Lo primero que hay que tener en cuenta es que es un problema muestral, al ser consecuencia de excesiva dependencia entre las X

Se pueden distinguir tres situaciones:

- Multicolinealidad perfecta
- Ausencia total de multicolinealidad (Ortogonalidad)
- multicolinealidad imperfecta

Multicolinealidad perfecta

Representa la violación del supuesto de rango completo de la matriz $\mathbf{X}_{n\text{x}k}$

$$\text{Si } \rho(\mathbf{X}_{n\text{x}k}) < k$$

$$|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 0$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \text{ es matriz singular}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \text{ no existe}$$

$$\widehat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \text{ no se puede calcular}$$

$$Cov(\widehat{\mathbf{B}}) = \widehat{\sigma}_u^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \text{ no se puede calcular}$$

La trampa de las variables binarias es un ejemplo de multicolinealidad perfecta, en este caso por una incorrecta especificación del modelo

Multicolinealidad perfecta

Supóngase un modelo de 2 variables

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

Así que la matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ será

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{2i}X_{3i} & \sum X_{3i}^2 \end{pmatrix}$$

Si se diese el caso que $X_{3i} = qX_{2i}$ entonces el $\rho(\mathbf{X}_{n\mathrm{X}3}) = \mathbf{2}$, entonces se tendría

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2i} & q\sum X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & q\sum X_{2i}^2 \\ q\sum X_{2i} & q\sum X_{2i}^2 & q^2\sum X_{2i}^2 \end{pmatrix}$$

Se observa que la 3a columna de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ es q veces la 2a, por lo tanto los datos muestrales no permiten estimar el modelo planteado

Multicolinealidad perfecta

En efecto

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 q X_{2i} + u_i$$

$$Y_i = \beta_1 + (\beta_2 + q\beta_3) X_{2i} + u_i$$

La muestra contiene información para estimar β_1 y $\beta_2 + q\beta_3$, pero no hay suficiente información para estimar β_2 y β_3 por separado

En este caso extremo de multicolinealidad perfecta el modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$ no puede ser estimado. Si es consecuencia de una incorrecta especificación el único camino es re-especificar el modelo

Ausencia total de multicolinealidad (ortogonalidad)

En el otro extremo está la ausencia total de interdependencia entre regresores. Es el caso de la ortogonalidad: como la variable X_j es totalmente independiente de otra X_m, su producto vectorial será nulo $X_j'X_m = 0$. Este es el mejor caso para estimar β_j, pero rara vez sucede

Si la correlación entre los regresores es 0, el estimador MCO, $\widehat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$, equivale a esta expresión:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\beta}_2 \\ \\ \widehat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum(X_{2i}-\bar{X}_2)(Y_i-\bar{Y})}{\sum(X_{2i}-\bar{X}_2)^2} \\ \\ \frac{\sum(X_{3i}-\bar{X}_3)(Y_i-\bar{Y})}{\sum(X_{3i}-\bar{X}_3)^2} \end{bmatrix}$$

- La matriz $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ se convierte en una matriz diagonal, se pierde la componente de covarianza entre los regresores por la incorrelación los mismos
- Las estimaciones del modelo múltiple coinciden con la de dos modelos simples por separado
- Los valores de la varianza si varían puesto que $\widehat{\sigma}_u^2$ depende del número de regresores utilizados: $\widehat{\sigma}_u^2 = \frac{\widehat{\mathbf{u}}'\widehat{\mathbf{u}}}{N-k}$ y $Cov(\widehat{\mathbf{B}}) = \widehat{\sigma}_u^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$
- Difícilmente se da en la práctica

Multicolinealidad imperfecta

En este caso existe una altísima dependencia entre regresores mas no es una relación exacta

En algunos casos el origen está en el movimiento conjunto de algunas variables. Es el caso de ciertas series temporales macroeconómicas. En otros casos, el origen puede estar en la construcción del modelo: si se incluyen cuadrados y productos cruzados, además de los regresores lineales, como en la función translog o en la ecuación de mincer

Es la situación más habitual en la práctica. Se cumple la condición de rango:

$$\rho(\mathbf{X}_{n\mathrm{x}k}) = k$$
$$|\mathbf{X}'\mathbf{X}| \neq 0$$
$$(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \text{ es una matriz no singular}$$
$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \text{ existe}$$

$y_i=\beta_1+\beta_2 x_{2,i}+\beta_3 x_{3,i}+u_i$ $\quad r_{x_2x_3}=0 \quad r_{x_2x_3}=0,9 \quad r_{x_2x_3}=0,99$

$r_{x_2x_3}$	$(X'X)$			$\lvert X'X \rvert$	$(X'X)^{-1}$		
0	120	61,004614	66,708938	1	6,220273	-6,603373	-5,135692
	61,004614	31,090011	33,912942		-6,603373	12,989269	0
	66,708938	33,912942	37,192264		-5,135692	0	9,238395
0,9	120	61,004614	57,283422	$\boxed{0,13888}$	3,377475	-5,782412	-0,899793
	61,004614	31,090011	29,191517		-5,782412	68,364564	-60,692330
	57,283422	29,191517	27,424042		-0,899793	-60,692330	66,519899
0,99	120	61,004614	58,487073	$\boxed{0,01354}$	3,381193	-9,791567	3,292823
	61,004614	31,090011	29,807718		-9,791567	652,724630	-660,731100
	58,487073	29,807718	28,579785		3,292823	-660,731100	682,415830

Consecuencias de la multicolinealidad imperfecta

1. Hay pérdida de precisión en la estimación individual de los parámetros
2. Como consecuencia de la mayor varianza habrán intervalos de confianza más amplios y más tendencias al no rechazo de $H_0 : \beta_j = 0$. No obstante la prueba en su conjunto no se verá afectada
3. Si como consecuencia del no rechazo de $\beta_j = 0$ se elimina X_{ji}, puede ocurrir un sesgo en la estimación del resto de parámetros
4. Excesiva sensibilidad muestral

Criterios para detectar multicolinealidad

- La multicolinealidad es una cuestión de grado y no de clase. La distinción importante no es entre presencia o ausencia de multicolinealidad, sino entre sus diferentes grados
- Como la multicolinealidad se refiere a la condición de las variables explicativas que son no estocásticas por supuestos, es una característica de la muestra y no de la población

Por consiguiente, no es necesario "llevar a cabo pruebas sobre multicolinealidad", pero, si se desea, es posible medir su grado en cualquier muestra determinada

No existe un método único para detectar o medir la fuerza de la multicolinealidad. Lo que se tiene son ciertas reglas prácticas, algunas informales y otras formales, pero todas reglas prácticas

Criterios para detectar multicolinealidad

- Diagrama de dispersión: permite observar cómo se relacionan las diversas variables de un modelo de regresión
- Un R^2 elevado o significancia conjunta del modelo y pocas razones t significativas
- Altas correlaciones entre parejas de regresores
- Regresiones auxiliares y calculo de R_j^2
- La regla práctica de Klein: la multicolinealidad puede ser un problema complicado solamente si el R^2 de una regresión auxiliar es mayor que el R^2 de la regresión de Y sobre todos los regresores
- Factor inflacionario de la varianza (FIV)

$$Var(\widehat{\beta}_j) = \frac{\widehat{\sigma}_u^2}{\sum x_{ji}^2(1-R_j^2)} = \frac{\widehat{\sigma}_u^2}{\sum x_{ji}^2} FIV_j, \text{ donde } FIV_j = \frac{1}{1-R_j^2}$$

La regla práctica es: si el FIV de una variable es superior a 10 (esto sucede si R_j^2 excede 0.90), se dice que esa variable es muy colineal

Medidas correctivas

- La multicolinealidad es en esencia un problema de deficiencia de datos, y en algunas ocasiones no hay opción respecto de los datos disponibles para el análisis empírico
- Procedimiento de reglas prácticas
    - Información *a priori*
    - Combinación de información de corte transversal y de series de tiempo
    - Eliminación de una(s) variable(s) y el sesgo de especificación
    - Transformación de variables
    - Datos nuevos o adicionales

Ejercicio aplicado en R

Los datos para este ejercicio fueron extraidos de *the 1974 Motor Trend US magazine*, y contiene información sobre consumo de gasolina y 10 características del diseño y desempeño de 32 automóviles.

Se dispone de las siguientes varibles:

- mpg: Miles/(US) gallon
- disp: Displacement (cu.in.)
- hp: Gross horsepower
- wt: Weight (1000 lbs)
- qsec: 1/4 mile time

La idea es analizar los determinantes del desempeño de los automóviles y se estima la siguiente ecuación:

$$mpg_i = \beta_1 + \beta_2 disp_i + \beta_3 hp_i + \beta_4 wt + \beta_5 qsec + u_i$$

Ejercicio aplicado en R

```
library(Hmisc); library(corrplot); library(olsrr); library('mctest')
data(mtcars)
model <- lm(mpg ~ disp + hp + wt + qsec, data = mtcars)
summary(model)
```

```
Call:
lm(formula = mpg ~ disp + hp + wt + qsec, data = mtcars)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.8664 -1.5819 -0.3788  1.1712  5.6468 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)   
(Intercept) 27.329638   8.639032   3.164  0.00383 **
disp         0.002666   0.010738   0.248  0.80576   
hp          -0.018666   0.015613  -1.196  0.24227   
wt          -4.609123   1.265851  -3.641  0.00113 **
qsec         0.544160   0.466493   1.166  0.25362   
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.622 on 27 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8351,	Adjusted R-squared:  0.8107 
F-statistic: 34.19 on 4 and 27 DF,  p-value: 3.311e-10
```

```
# Matriz de correlaciones parciales y su significancia estadística
subdata <- mtcars[,c("disp",  "hp", "wt", "qsec")]
cor(subdata)
```

```
           disp         hp         wt       qsec
disp  1.0000000  0.7909486  0.8879799 -0.4336979
hp    0.7909486  1.0000000  0.6587479 -0.7082234
wt    0.8879799  0.6587479  1.0000000 -0.1747159
qsec -0.4336979 -0.7082234 -0.1747159  1.0000000
```

```
cor <- cor(mtcars[,c("disp",  "hp", "wt", "qsec")])
cor
```

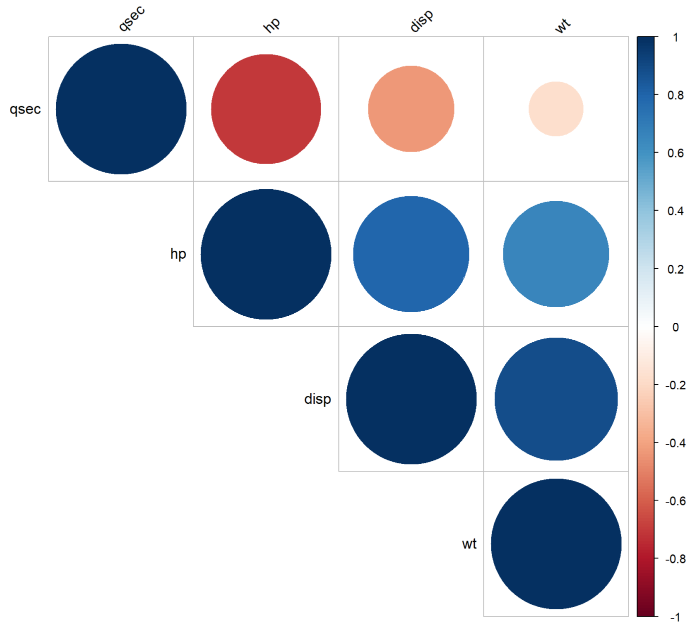
```
           disp         hp         wt       qsec
disp  1.0000000  0.7909486  0.8879799 -0.4336979
hp    0.7909486  1.0000000  0.6587479 -0.7082234
wt    0.8879799  0.6587479  1.0000000 -0.1747159
qsec -0.4336979 -0.7082234 -0.1747159  1.0000000
```

```
# Correlaciones con significancia estadística
rcorr(as.matrix(subdata))
```

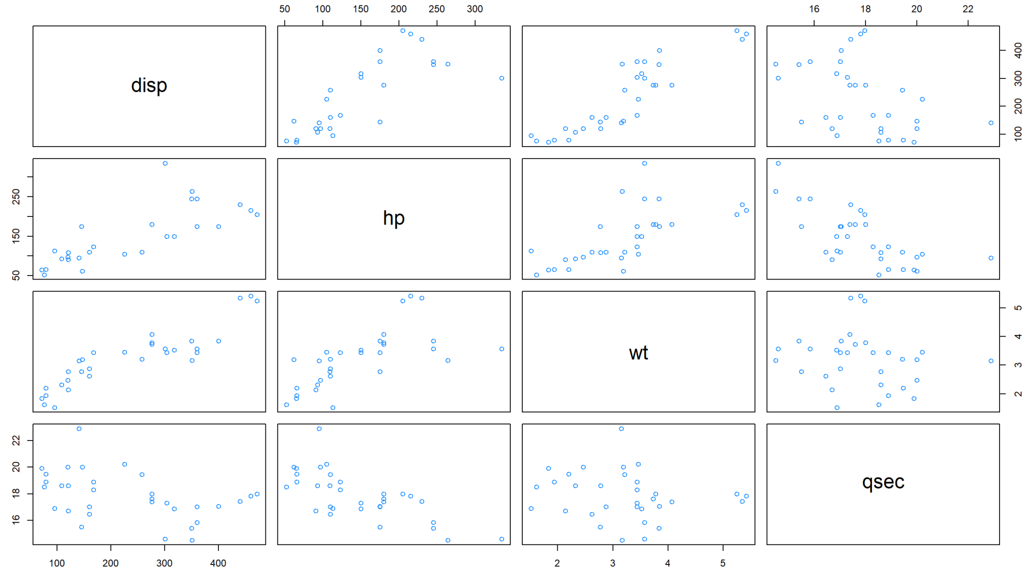
```
      disp    hp    wt  qsec
disp  1.00  0.79  0.89 -0.43
hp    0.79  1.00  0.66 -0.71
wt    0.89  0.66  1.00 -0.17
qsec -0.43 -0.71 -0.17  1.00

n= 32 


P
     disp   hp     wt     qsec  
disp        0.0000 0.0000 0.0131
hp   0.0000        0.0000 0.0000
wt   0.0000 0.0000        0.3389
```

Ejercicio aplicado en R

```
# Corrplot function
corrplot(cor, type="upper", order = "hclust",tl.col = "black",
         tl.srt = 45, sig.level = 0.05, insig = "blank")
```




```
# Diagrama de dispersión
plot(subdata, col = "dodgerblue")
```



Ejercicio aplicado en R

```r
# FIV
# vif: factor de inflación de la varianza (FIV). VIF mayores a 10 son prec
# la tolerancia = 1/vif. Tolerancia más bajo que 0.1 es comparable a un Vi

ols_vif_tol(model)
```

```
  Variables Tolerance      VIF
1      disp 0.1252279 7.985439
2        hp 0.1935450 5.166758
3        wt 0.1445726 6.916942
4      qsec 0.3191708 3.133119
```

```r
ols_coll_diag(model)
```

```
Tolerance and Variance Inflation Factor
---------------------------------------
  Variables Tolerance      VIF
1      disp 0.1252279 7.985439
2        hp 0.1935450 5.166758
3        wt 0.1445726 6.916942
4      qsec 0.3191708 3.133119


Eigenvalue and Condition Index
------------------------------
   Eigenvalue Condition Index   intercept        disp          hp
1 4.721487187        1.000000 0.000123237 0.001132468 0.001413094
2 0.216562203        4.669260 0.002617424 0.036811051 0.027751289
3 0.050416837        9.677242 0.001656551 0.120881424 0.392366164
4 0.010104757       21.616057 0.025805998 0.777260487 0.059594623
5 0.001429017       57.480524 0.969796790 0.063914571 0.518874831
            wt         qsec
1 0.0005253393 0.0001277169
2 0.0002096014 0.0046789491
3 0.0377028008 0.0001952599
4 0.7017528428 0.0024577686
5 0.2598094157 0.9925403056
```

Ejercicio aplicado en R

```r
# Otro paquete para hacer diagnóstico de colinealidad es mctest
# Leer https://journal.r-project.org/archive/2016/RJ-2016-062/RJ-2016-062.pdf para entender cada estadístico del paquete
#omcdiag(model)
#imcdiag(model)
#imcdiag(model, corr=T)
#imcdiag(model, corr=T, all=TRUE)
#mctest(model, all=TRUE)
mc.plot(model)
```

Ejercicio aplicado en R

```
# Solución: eliminar disp
model1 <- lm(mpg ~ hp + wt + qsec, data = mtcars)
summary(model1)
```

```

Call:
lm(formula = mpg ~ hp + wt + qsec, data = mtcars)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.8591 -1.6418 -0.4636  1.1940  5.6092 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 27.61053    8.41993   3.279  0.00278 ** 
hp          -0.01782    0.01498  -1.190  0.24418    
wt          -4.35880    0.75270  -5.791 3.22e-06 ***
qsec         0.51083    0.43922   1.163  0.25463    
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.578 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8348,	Adjusted R-squared:  0.8171 
F-statistic: 47.15 on 3 and 28 DF,  p-value: 4.506e-11
```

```
imcdiag(model1, corr=T)
```

```

Call:
imcdiag(mod = model1, corr = T)


All Individual Multicollinearity Diagnostics Result

        VIF    TOL      Wi       Fi Leamer    CVIF Klein   IND1
hp   4.9220 0.2032 56.8684 117.6587 0.4507 -1.5328     0 0.0140
wt   2.5304 0.3952 22.1914  45.9133 0.6286 -0.7880     0 0.0273
qsec 2.8738 0.3480 27.1702  56.2141 0.5899 -0.8950     0 0.0240
       IND2
```

```
# hp y qsec tienen alta correlación, se podría eliminar qsec
model2 <- lm(mpg ~ hp + wt, data = mtcars)
summary(model2)
```

```

Call:
lm(formula = mpg ~ hp + wt, data = mtcars)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max 
-3.941 -1.600 -0.182  1.050  5.854 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 37.22727    1.59879  23.285  < 2e-16 ***
hp          -0.03177    0.00903  -3.519  0.00145 ** 
wt          -3.87783    0.63273  -6.129 1.12e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.593 on 29 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8268,	Adjusted R-squared:  0.8148 
F-statistic: 69.21 on 2 and 29 DF,  p-value: 9.109e-12
```

```
imcdiag(model2, corr=T)
```

```

Call:
imcdiag(mod = model2, corr = T)


All Individual Multicollinearity Diagnostics Result

      VIF    TOL      Wi  Fi Leamer    CVIF Klein   IND1 IND2
hp 1.7666 0.5661 22.9987 Inf 0.7524 -0.8613     0 0.0189    1
wt 1.7666 0.5661 22.9987 Inf 0.7524 -0.8613     0 0.0189    1

1 --> COLLINEARITY is detected by the test 
0 --> COLLINEARITY is not detected by the test
```