Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2016

TP N° 1. Convección-Difusión. Método ADI 2D.

El objetivo de este trabajo es resolver la ecuación de convección-difusión en un rectángulo, utilizando un método de direcciones alternadas, que descompone un problema multidimensional en varios problemas uni-dimensionales. Concretamente, se desea resolver:

$$\begin{cases} u_t = \mu_x u_{xx} + \mu_y u_{yy} + a_x u_x + a_y u_y + f & \Omega = [0,2]^2,\ t \in (0, T_f) \\ u(x,y,t) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega,\ t \in (0,T_f). \\ u(x,y,0) = g(x,y) & (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

Consideramos una grilla del interior de Ω:

$$\{x_i = ih_x :\ 1 \leq i \leq I-1\} \times \{y_j = jh_y :\ 1 \leq j \leq J-1\}.$$

Para simplicar, puede tomarse $h_x = h_y = h$ e $I = J$. A esto agregamos la grilla temporal $\{t_n = n\Delta t :\ 0 \leq T\}$, con $T = T_f/\Delta t$. Sobre esta grilla se define u_{ij}^n, aproximación de $u(x_i, y_j, t_n)$. Notamos u^n al arreglo (u_{ij}^n).

Definimos los operadores de discretización espacial δ_x^2 y δ_x:

$$\delta_x^2(u_{ij}^n) = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2}.$$

$$\delta_x(u_{ij}^n) = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h}.$$

que operan sobre la coordenadas x, y análogamente δ_y^2 y δ_y que operan sobre la coordenada y. Así, podemos discretizar en el espacio con los operadores A_x, A_y, dados por

$$\begin{aligned} D_x(u^n) =& \mu_x \delta_x^2(u_{ij}^n) + a_x \delta_x(u_{ij}^n) \\ D_y(u^n) =& \mu_y \delta_y^2(u_{ij}^n) + a_y \delta_y(u_{ij}^n) \end{aligned}$$

El método de direcciones alternadas (ADI) consiste en resolver dos problemas en cada iteración temporal, cada uno de ellos implícito en una única coordenada, y explícito en la otra. Definiendo la solución a un paso intermedio u^*, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{u^* - u^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\left(D_y(u_n) + D_x(u^*) + f\right) \\ \frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\left(D_x(u^*) + D_y(u^{n+1}) + f\right) \end{aligned}$$

Tarea:
Estudie el problema de convección-difusión con

1. Los parámetros $f = 1, \mu_x = 1, \mu_y = 1, a_x = 5, a_y = 5$
2. Las condiciones iniciales $g(x, y) = e^{-10((x-0.5)^2+(y-0.5)^2)}$
3. El tiempo final $T_f = 0.5$

Para ello,

1. Utilizando la matriz usual A de la derivada segunda y otra matriz B de la derivada primera en 1D, implemente un método explícito de orden 1 para la ecuación dada, en dos dimensiones. **Sugerencia:** Preste atención a las transpuestas!
2. Implemente el esquema propuesto y compare ambos métodos. Verifique numéricamente que el método ADI es incondicionalmente estable.
3. Estudie numéricamente el error del método ADI en el tiempo. Para ello, calcule la solución a tiempo $t = T_f$ utilizando distintos valores de Δt. Tomando $\Delta t, \Delta x$ muy pequeños como referencia, grafique la convergencia a ese valor, en escala logarítmica.

Sugerencia: Visualice la solución a cada paso, por ejemplo, utilizando `surf(X,Y,Un); shading interp; view(0,90);` – se debería observar convección y difusión, y el alcance de un estado estacionario no-nulo.