$A \in \mathbb{R}$, $a_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1} a_{ij} \leq 1 \ \forall i \Rightarrow \|A^n\|_\infty \leq 1 \ \forall n$.

$$\|A^n\|_\infty \leq \|A\|_\infty^n = \Big(\max_i \underbrace{\sum_j |a_{ij}|}_{\leq 1}\Big)^n \leq 1^n \leq 1.$$

18/08/2016

→ Problema semi-discreto (fijar una discr. en x) $\begin{cases} u_t = A^h u \\ u(0) = u_0(x) \end{cases}$ Sistema EDO

* Cualq. discr. temporal para EDO.

→ Euler explícito · $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \dfrac{1}{(\Delta x)^2} A u^n$ · $u^{n+1} = \left(I + \dfrac{\Delta t\, A}{(\Delta x)^2}\right) u^n$

→ $A u = @(u)\,[u(2) - 2u(1), -2u(2{:}end-1) + u(1{:}end-2), \ldots, u(end-1) - 2u(end)]$

→ Euler implícito

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2} A u^{n+1} \qquad r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \qquad (I - rA)u^{n+1} = u^n$$

$u^{n+1} = (I - rA)^{-1} u^n$ → invertir con sparse

· $I - rA = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & & 0 \\ -r & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -r \\ 0 & & -r & 1+2r \end{bmatrix}$ $\qquad \|(I - rA)^{-1}\|_\infty \leq 1$ (ej. 16 pr. 1)

25/08/2016

$U(x_j, t_{n+1})$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + o((x-a)^3)$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} = f'(a) + \frac{f''(a)(x-a)}{2!} + o((x-a)^2)$$

. Error de truncado para $u_t = u_{xx}$

. Método explícito + centradas

→ $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$ → Reemplazamos u_j^n por solución exacta ⇒ por

la derivada tercera desaparece

Taylor, me queda una aproximación de u ⇒ $u_t - u_{xx} + \left(u_{tt}\frac{\Delta t}{2} - u_{xxxx}\frac{(\Delta x)^2}{12}\right) + \dots$

⇒ error: $O((\Delta x)^2 + \Delta t)$

* Si aproximamos en el espacio $u_{xx} \sim A_h u$ ($O((\Delta x)^p)$) y usamos un método para sistemas de EDO,

$u' = Au$ con orden $(\Delta t)^q$, entonces el truncado para $u_t = u_{xx}$ es $O((\Delta t)^q + (\Delta x)^p)$

No todos los métodos de DF se obtienen de esa forma.

. Ej. ec. de reacción-difusión: $u_t = u_{xx} + u(1-u)$

→ Método implícito - explícito $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \delta_{xx}(u^{n+1}) + u_j^n(1-u_j^n)$ $\left[\delta_{xx}(u^n)_j = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}\right]$

. Ej. considerar $u_t = u_{xx} + \alpha u$ usando método impl. - expl. (Strang - ec. parabólicas)

(Strang – ec. parabólicas)

* Modos de Fourier discretos

$w_j(\xi) = e^{ijh\xi}$, ξ entero.
frecuencia del modo

$\frac{\partial e^{ix\xi}}{\partial x} = i\xi e^{ix\xi}$ autofunción de la derivada.

$\delta x = \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{2h}$

$\delta_x(w(\xi)) = \frac{e^{i(j+1)h\xi} - e^{i(j-1)h\xi}}{2h} = \frac{e^{ijh\xi}}{2h}\left(e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}\right) = w_j(\xi)\frac{i}{h}\operatorname{sen}(h\xi)$

- $w(\xi)$ son autovectores de δx, con autovalor $g(\xi) = \frac{i}{h}\operatorname{sen}(h\xi) \longrightarrow \sim i\xi + O(h^2)$

$\left\{\frac{e^{ijh\xi}}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ son BON de $\mathbb{C}^J$ con $h = \frac{2\pi}{J+1}$ con el p.i $\langle u, v\rangle = h\sum_{i=0}^{J} u_i \overline{v_i}$

$\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(e^{ijh\xi_1}\,\overline{e^{ijh\xi_2}}\right) = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} e^{ijh(\xi_1-\xi_2)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_1 = \xi_2 \\ 0 & \text{si } \underline{\text{no}} \end{cases}$

- $\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(e^{ih\xi}\right)^j = \frac{1 - \overbrace{e^{ih(J+1)\xi}}^{=0}}{1 - \underbrace{e^{ih\xi}}_{=0}} - 1 = 0$

- Teniendo una BON, podemos usar Parseval: $\|v\|_2 = \|\hat{v}\|_2$ $\hat{v}$ coordenadas en la BON

$\|\delta_x(u)\|_2 = \|\widehat{\delta x}(u)\|_2 = |g(\xi)|\|\hat{u}\|_2 = |g(\xi)|\|u\|_2$

- Obs estamos usando δx sin cond. de borde (o cond. periódicas

03/09/2016

- $A_1(u_j) = a_j\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}\right) + a_j\left(\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{(\Delta x)^2}\right) = \frac{\frac{a_j'}{2}\Delta x(u_{j+1}-u_{j-1}) + a_j(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1})}{(\Delta x)^2}$

- $A_2 = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} \bigcirc & a_{5/2} & & \\ a_{3/2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -(a_{\frac{5}{2}}+a_{\frac{3}{2}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

- $A_1 = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} \ddots & & \\ \frac{a_j - a_j' h}{2} & -2a_j & \frac{a_j + a_j' h}{2} \\ & & \ddots \end{bmatrix}$

* Principio del máximo

$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = A_q(u^n) \quad q = 1, 2 \qquad u^{n+1} = \Delta t A_q(u^n) + u^n \qquad B^q = (I + \Delta t A_q)$

$B_i^1 = [\dots, r(a_i - a_i' \frac{h}{2}), 1 - 2ra_j, r(a_i + a_i' \frac{h}{2}) \dots] \qquad \sum_{j=1}^{n} B_i^1 = 1$ ✓

$1 - 2ra_i \geq 0$ si $r \leq \frac{1}{2a_i}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} r(a_i - a_i'\frac{h}{2}) \geq 0 \\ r(a_i + a_i'\frac{h}{2}) \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow h \leq 2\left|\frac{a_i}{a_i'}\right|$

$B_i^2 = [\dots, ra_{i-\frac{1}{2}}, 1 - r(a_{i+\frac{1}{2}} + a_{i-\frac{1}{2}}), ra_{i+\frac{1}{2}} \dots] \qquad \sum_{j=1}^{n} B_i^2 = 1$ ✓

$B_{ij} \geq 0 \ \forall i,j \qquad 1 - r(a_{i+\frac{1}{2}} + a_{i-\frac{1}{2}}) \geq 0$ si $r \leq \frac{1}{a_{i+\frac{1}{2}} + a_{i-\frac{1}{2}}}$ → en gral. más favorable

- Ppio máx ⇒ est. en $\|\cdot\|_\infty$

NOTA

· $u_t = a(x,t)\, u_{xx}$ $\rightarrow Au \sim a(x,t)\dfrac{\delta_{xx}(u)}{(\Delta x)^2}$ $\rightarrow u_t = Au$ $\quad Au - 1$ (Crank-Nicolson)

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = \frac{Au^{n+1}+Au^n}{2} \Rightarrow \text{Truncado } O\left((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\right)$$

$$* \; u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{r}{2}\left(g_j^{n+1}\delta_{xx}(u^{n+1}) + a_j^n \delta_{xx}(u^n)\right)$$

· Posibilidades T.P.

(1) Calor 2-D, usando varios 1-D. $\qquad u_{ij}^{n+1} = B \backslash u_{ij}^{n}$ $\qquad u_{ij}$ vector de tamaño n^2

$B \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$

LOD

intermedio entre n y n+1

$$U_{ij}^{*} = U_{ij}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\left(A_x U_{ij}^{n} + A_x U_{ij}^{*}\right) \qquad \text{(C-N en } x\text{)}$$

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^{*} + \frac{\Delta t}{2}\left(A_y U_{ij}^{*} + A_y U_{ij}^{n+1}\right) \qquad \text{(C-N en } y\text{)}$$

ADI

Lo mismo con $\quad A_y \quad A_x \qquad$ CN impl. en x, expl. en y

$\qquad\qquad\qquad A_x \quad A_y \qquad$ CN impl. en y, " " x

Burgers

(2) $\begin{cases} u_t = a u_{xx} + u\, u_x \\ u(1) = u(0). \end{cases}$ $\quad$ Sol. exacta conocida. $\quad \rightarrow$ Implícito en la difusión, explícito en la no-linealidad

→ Queremos orden alto en el tiempo $\quad \dfrac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = Au^{n+1} + u^n$

producir un valor a tiempo n+1 con m anteriores

→ Ver orden y estabilidad

13/09/16

- Repaso estabilidad / Lax

- $Bu^{n+1} = E u^n \to u^{n+1} = M u^n \quad M(n, \Delta t)$

- Lax-Richmyer: $\exists$ C indep. $n, \Delta t$ y τ / si $\Delta t < \tau \Rightarrow \|M^n\| < C \quad \forall\, 0 < n\Delta t \leq T_f$

- Teo equiv. Lax

  Un método es consistente $\Rightarrow$ estable $\Leftrightarrow$ convergente.

- Condición necesaria (Von Neumann)

  Si el método es estable $\Rightarrow \exists\, c' \,/\, |\lambda| \leq 1 + c'\Delta t \quad \forall \lambda$ autovalor de M.

dem: $\|M^n v\| = |\lambda|^n \|v\| \Rightarrow \|M^n\| \geq |\lambda|^n$ (cualquier norma). Para tener estabilidad, $\exists\, c \,/\, |\lambda|^n \leq c$

c indep. de $n, \Delta t \Rightarrow |\lambda| \leq c^{\Delta t / T_f}$ Lax-Richmyer

c^x es convexa: $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$

con $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $t = \frac{\Delta t}{T_f}$

$|\lambda| \leq c^{\Delta t/T_f} \leq \frac{\Delta t}{T_f} c + 1 - \frac{\Delta t}{T_f} = 1 + \Delta t \left(\frac{c-1}{T_f}\right) \leq 1 + \Delta t\, c'$ ///

(con $c' = \frac{c-1}{T_f}$)

- Obs

  Si se tiene $|\lambda| > \alpha > 1 \quad \forall n, \Delta t \Rightarrow$ el método es inestable en cualquier norma (vectorial)

* ¿Cuándo es suficiente la cond. de V.N?

1. M es normal $\to$ tenemos est. en $\|\cdot\|_2$

dem: Tenemos $\|M^n\|_2 = \rho(M)^n \leq (1 + c'\Delta t)^n \leq e^{c'T_f}$ $\quad e^{c'T_f}$ indep. de $n, \Delta t$.

2. $e^{i\xi_j \Delta x}$ es un autovector del operador de diferenciar (de la matriz M), con autovalor λ y $|\lambda| \leq 1 + c'\Delta t$

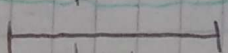
- Si $e^{i\xi_j \Delta x}$ son autovec. $\Rightarrow$ M normal $\Rightarrow$ Vale 1 para método Fourier

3. Estabilidad fuerte: $\|M\| \leq 1$ Lo solemos chequear para $\|\cdot\|_\infty$ con los lemas de Pr. 1, ej. 15, 16

* Análisis de estabilidad

Chequear condiciones necesarias y/o suficientes. Por ej., teo de Gershgorin para la cond. de Neumann en $\|\cdot\|_p$, $p \neq 0$

Ec. hiperbólicas en 1-D



autopista

$\rho(x,t)$ densidad autos
$v(x,t)$ velocidad

- Masa en un intervalo (x_1, x_2): $\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx$

· Flujo en un punto: $\rho(x,t)v(x,t)$

→ Cons. masa: sólo cambia por el flujo en el borde

$$\cdot \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t)\,dx = \rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_2,t)v(x_2,t)$$

· Podemos integrar en (t_1,t_2)

$$\int_{x_1}^{x_2}[\rho(x,t_2)-\rho(x,t_1)]\,dx = \int_{t_1}^{t_2}[\rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_2,t)v(x_2,t)]\,dt$$

(suponiendo ρ suave)

$$\to \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}(\rho v)_x \quad \forall (t_1,t_2), (x_1,x_2) \Rightarrow \rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad \text{(forma dif.)}$$

→ Si $v=a$ cte., $\rho_t + a\rho_x = 0$ (Ec. transporte lineal)

Si $v = v(\rho)$ conocido → Autos: $v(\rho) = V_{máx}\left(1-\frac{\rho}{\rho_{máx}}\right)$ → No autos: $\rho_t + f(\rho)_x = 0$

con $f(\rho) = \rho V_{máx}\left(1-\frac{\rho}{\rho_{máx}}\right)$

· $\tilde{f}(\rho) = a\rho\log\left(\frac{\rho_{máx}}{\rho}\right)$ (datos)

→ Transporte - difusión: Igual, con flujo: $\rho v - D\rho_x = f$. $\Rightarrow \rho_t + a\rho_x = D\rho_{xx}$

* Ec. Euler (dinámica de gases)

· $\rho_t + (\rho v)_x = 0$ cons. masa. · $(\rho v)_t + (\rho v^2 + P)_x = 0$. cons. movimiento.

· $E_t + (v(E+P))_x = 0$ cons. energía · $P = P(\rho, \rho v, E)$ ec. de estado.

$$u_t + (f(u))_x, \quad u = \begin{bmatrix}\rho \\ \rho v \\ E\end{bmatrix} \quad f(u) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2(u_1 + P(u)) \\ u_2(u_3 + P(u))/u_1 \end{bmatrix}$$

* Práctica 3

① Métodos para $u_t + au_x = 0$ ② Ec. Burgers $u_t + u.u_x = 0 \to u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$ → método Conservati[...] No conse[...]

③ sistemas y $u_{tt} = u_{xx} \to \begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = u_x \end{cases}$

Scanned by CamScanner

20/09/2016

- Estabilidad ~~para~~ métodos con dif. artificial.

Lax-F = ejercicio

- $u_t + a u_x = \mu u_{xx}$ forward + centradas: up-wind $\mu = \Delta x/2$

Lax-W $\mu = a^2 \frac{\Delta t}{2}$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) = \mu\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}\right)$$

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\mu}\frac{\Delta x}{2}}$$

- $$u_j^{n+1} = \underbrace{\frac{-a\Delta t}{2\Delta x}}_{r\rho}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \underbrace{\frac{\mu\Delta t}{(\Delta x)^2}}_{r}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) + u_j^n$$

- $\lambda = 1 + r\left(e^{i\xi h} - 2 + e^{-i\xi h}\right) - r\rho\left(e^{i\xi h} - e^{-i\xi h}\right)$ $\quad \lambda = 1 - 4r\,sen^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) - 2ir\rho\,sen(\xi h)$

→ $|\lambda|^2 = \left(1 - 4r\,sen^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right)^2 + (2r\rho)^2 sen^2(\xi h) = 1 + 16r^2 sen^4\left(\frac{\xi h}{2}\right) - 8r\,sen^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) + 16r^2\rho^2 sen^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)$

$|\lambda|^2 = 1 + 8r\,sen^2\left[2r\,sen^2 - 1 + 2r\rho^2\cos^2\right]$ $\quad sen(2\theta) = 2\,sen(\theta)\cos(\theta)$

$= 1 + 8r\,sen^2\left(\cos^2 - 1 + 2r\,sen^2 + 2r\rho^2\cos^2 - \cos^2\right) = 1 - 8r\,sen^2\left(\overbrace{1 - \cos^2}^{sen^2} - 2r\,sen^2 - 2r\rho^2\cos^2 + \cos^2\right) =$

$1 - 8r\,sen^2\left((1-2r)sen^2 + (1-2r\rho^2)\cos^2\right) \leq 1$ si $\underbrace{0 \leq r}_{\text{NO trivial}} \leq \frac{1}{2}$ y $r\rho^2 \leq \frac{1}{2}$ ⇒ estable

*Ej. up-wind $\mu = \frac{\Delta x a}{2}$ ⇒ $\rho = 1$ $\quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x}\mu = \frac{\nu}{2}$, $\nu = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ $\quad \therefore\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ si $0 \leq \nu \leq 1$

No Final

* **Ej.** up-wind $\mu = \frac{\Delta x a}{2}$ $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}\mu = \frac{\nu}{2}$, $\nu = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ $\therefore$ $0 \le r \le \frac{1}{2}$ sii $0 \le \nu \le 1$

$\Downarrow$ $p=1$

* **Ej.** • Lax-F, Lax-W $|\nu| \le 1$ (No depende del signo de a)

• Leap frog (sin dif. artificial) $\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -a\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t}\right)$ estable, sin dif. artificial.

• **Error de amplitud y fase**

$u = e^{i(kx+wt)}$ $u_t = iwu$, $u_x = iku$ es solución de $u_t + a u_x = 0$. sii $w = -ak$

$\Rightarrow u = e^{ikx} \cdot e^{-iakt}$ $\Delta fase = -ak$ $\Delta t\, ak = k\nu\Delta x$. Error de fase: $\frac{\arg(\lambda)}{k\nu\Delta x} + 1$

. Error de amplitud: $1 - |\lambda|$

. Error en Δt: Sup. $|\lambda| = 0{,}99$. $\rightarrow$ Error de amplitud en $n\Delta t$ $|\lambda|^{100} \sim 0{,}32$. Queremos que sea pequeño, sobretodo para simulaciones largas

$\rightarrow$ Calcular. $|\lambda|^2 = 1 - 4\nu(1-\nu)\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)$. Suponer $\xi h = \varepsilon$ y hacer Taylor en ε.

. Error de fase: $\arg(\lambda) = -tg^{-1}(\lambda)$ Taylor de arctg. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\nu\sin(\xi h)}{(1+\nu) + \nu\cos(\xi h)}\right)$ Taylor ... $\operatorname{arctg}(p_1\xi h + p_2\xi^2 h^2 + \ldots$

$O(\xi^2 h^2)$

NOTA

• Labo

$u_t + a u_x = 0$ $\qquad u(0,t)=0$ (Dirichlet) $\qquad u(0,t) = u(1,t)$ (Periódica)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = a\frac{(u_{j-1}^n - u_j^n)}{\Delta x} \quad \text{upwind}$$

→ Condición de borde numérica

$$= \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{Lax-W}$$

. Ej.: upwind en último nodo. NO trivial en 2D, puede afectar estab.

• Para hacer: • Ver up-wind y Lax-W en cond. periódicas. $V_0(x) = \text{sen}(4x)$ ← error de amplitud y de fase

$V_0(x) = \chi_{[0,1/2]}(x)$

• Burgers con y sin regla de la cadena:

→ $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \qquad u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{\nabla}{2}\left({u_{j+1}^n}^2 - {u_j^n}^2\right)$

$u_t + u \cdot u_x = 0 \qquad u_j^{n+1} - u_j^n = -\nabla u_j^n \left(u_{j+1}^n - u_j^n\right)$

Con $V_0(x) = \chi_{[0,1/2]}(x)$ ec. NO lineal,

solución NO suave

---

* Hasta ej. 11 (est. y CFL) (puede haber dif. art.)

* dsp. amplitud y fase → Burgers (poca teoría) → ondas ($u_{tt} = u_{xx}$) fácil.

22/09/2016

- **Error de amplitud y de fase**

$u_t + a u_x = 0$. • Ampl. $|\lambda|^2$ • Fase $\phi = \arg(\lambda) = -\operatorname{atg}^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\operatorname{Re}(\lambda)}\right)$

- **Métodos con difusión artificial**

• $u_t + a u_x = \mu u_{xx}$ discr. centrada. • $\lambda = 1 - 4r\,\text{sen}^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) - 2ir\rho\,\text{sen}(\xi h)$

• $r = \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ • $\rho = \frac{a}{\mu}\frac{\Delta x}{2}$ • $r\rho = \frac{\nu}{2}$ • $\nu = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$

→ $|\lambda|^2 = 1 - 8r\,\text{sen}^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\left[\text{sen}^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)(1-2r) + (1-2r\rho^2) \dots \cos^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right]$

- **Taylor en ξh**

* $\text{sen}(h) \sim h - \frac{h^3}{6} + O(h^5)$ * $\text{sen}^2(h) \sim h^2 - \frac{h^4}{3} + O(h^6)$ * $\cos(h) \sim 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{2^4} + O(h^6)$
* $\cos^2(h) \sim 1 - h^2 + \frac{h^4}{4} + O(h^6)$ * $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2r\rho\,\text{sen}(\xi h)}{1 - 4\,\text{sen}^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}\right) \sim 2r\rho\xi h + \frac{1}{3}(\rho r - 6\rho r^2 + 8\rho^3 r^3)\xi^3 h^3 + O(\xi^5 h^5)$
* $\operatorname{arctg}\left(\frac{\nu\,\text{sen}(\xi h)}{\sqrt{1 - \nu\,\text{sen}^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}}\right) \sim \nu\xi h + \frac{\nu}{24}(3\nu - 8\nu^2 - 4)\xi^3 h^3 + O(\xi^5 h^5)$ → **Mathematica:** series$(\cos(x^2), \{x, 0, 3\}$

- Leyes de conservación

¿Cómo obtener discr. up-wind cons, L-W cons?

- Ondas con centradas (fácil) $u_{tt} = u_{xx} \rightarrow \dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$

$$\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 1 = -4 r \lambda \operatorname{sen}^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)}_{\text{Coefs. reales}} \qquad r = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = \nu^2$$

[Mirar las notas de la página]

$$|\gamma|^2 = a^2\nu^2 \operatorname{sen}^2(ph) + (1 - a\nu \operatorname{sen}(ph))(1 + a\nu \operatorname{sen}(ph)) = a^2\nu^2 \operatorname{sen}^2(ph) + 1 - a^2\nu^2 \operatorname{sen}^2(ph) = 1$$

$\Rightarrow$ si $\nu < \frac{1}{a}$, el método resulta estable