Optimización

Primer Cuatrimestre 2017

Práctica N° 0: Repaso.

Repaso de Álgebra Lineal

Ejercicio 1 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que la aplicación $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $< v, w >= v^t Aw$ define un producto interno si y sólo si A es simétrica y definida positiva.

Ejercicio 2 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Probar que si λ es autovalor de A entonces $\lambda \in \mathbb{R}$. Si además A es definida positiva, probar que $\lambda > 0$.

Ejercicio 3 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y sean v_1 y v_2 autovectores de A correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente. Probar que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces v_1 y v_2 son ortogonales con el producto interno usual.

Ejercicio 4 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A es simétrica si y sólo si $O^t AO$ es simétrica para toda $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal (es decir, $O^{-1} = O^t$).

Ejercicio 5 Sea $B = \{q_1, ..., q_n\}$ una base ortonormal. Probar que la matriz $Q = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ q_1 & \cdots & q_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

Ejercicio 6 Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, entonces admite una base ortonormal de autovectores.

Ejercicio 7 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva, y sea $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ la submatriz con coeficientes (a_{ij}) para $1 \leq i, j \leq k$. Probar que A_k es simétrica definida positiva $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Concluir que $\det(A_k) > 0$ para todo k. Los valores $\det(A_k)$ se llaman *menores principales* de A.

Repaso de Análisis

Ejercicio 8 Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.
a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$ b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$

Ejercicio 9 Sea $f(x, y) = xe^y$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1, 0)$. Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0{,}98, 0{,}02)$. Estimar el error cometido.

Ejercicio 10 Calcular los puntos críticos de $f(x, y) = xe^{-y^2} + x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^4$ y $h(x, y) = x^4 - y^4$ y sus hessianos en dichos puntos. ¿Son máximos locales, mínimos locales o puntos silla? ¿Son globales?

Ejercicio 11 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

Ejercicio 12 Determinar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = xy(x - y)^2 \qquad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

b) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \qquad A = \mathbb{R}^2$.

c) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \qquad A = \{(x, y) \in R^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Ejercicio 13 La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x, y) viene dada por la función $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

Repaso Cálculo Numérico

Ejercicio 14 Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar:

a) n es $O(n)$

b) $3n^2 + 7n + 4$ es $O(n^2)$

c) n^i es $O(n^j)$ si $i < j$

Ejercicio 15 Mostrar que $n!$ no es $O(r^n)$, cualquiera sea el entero positivo r. Concluir que una complejidad de $O(n!)$ es "peor" que una complejidad exponencial de cualquier base.

Ejercicio 16 Escribir algoritmos para realizar suma, resta y multiplicación de matrices. Determinar la complejidad y expresarla en función de la dimensión de las matrices.

Ejercicio 17 Escribir un programa para calcular la descomposición de Cholesky de una matriz simétrica y definida positiva.

Ejercicio 18 Escribir un programa que resuelva sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya matriz asociada sea simétrica y definida positiva, usando el programa del ejercicio anterior.

Ejercicio 19 Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función C^1, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ el vector de puntos equiespaciados tales que $x_0 = a$, $x_n = b$, e $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ el vector con $y_i = f(x_i)$. Escribir un programa que devuelvan un vector z tal que $z_i \sim f'(x_i)$, donde la aproximación se realiza usando el método de diferencias finitas, tomando como datos los vectores x e y y el tipo (*backward*, *forward* y *centradas*).

Ejercicio 20 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de clase C^2 tal que se anula solamente una vez en el intervalo. Escribir el algoritmo de Newton para aproximar la raiz de f. Usar alguna variante de diferencias finitas del ejercicio anterior para estimar los valores de f'.

Ejercicio 21 Escribir un algoritmo para el siguiente problema de Cuadrados Mínimos: Dados puntos distintos en el plano $\{(x_1, y_1), ...(x_n, y_n)\}$, hallar el polinomio $p \in \mathcal{P}_k$ que mejor aproxime estos datos en el sentido de cuadrados mínimos; es decir que minimice la expresión: $\sum_{i=1}^{n} |y_i - p(x_i)|^2$.