
OPTIMIZACIÓN

Primer Cuatrimestre 2017

Práctica N° 1: Minimización sin restricciones.

Generalidades:

Ejercicio 1 Mostrar ejemplos de las siguientes situaciones:

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que todos los puntos de $[0, 1]$ sean extremos locales de f .
- (b) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f tenga varios minimizadores locales y globales.
- (c) $\Omega \subset \mathbb{R}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que f no tenga extremos absolutos en Ω .
- (d) $\Omega \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f no tenga extremos absolutos en Ω .
- (e) $\Omega \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tal que f no tenga extremos absolutos en Ω .

Ejercicio 2 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ entonces f tiene un minimizador global en \mathbb{R}^n .

Ejercicio 3 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq f(x_0)\}$ es acotado, entonces f tiene un minimizador global en \mathbb{R}^n .

Ejercicio 4 Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$. Verificar que, para $x = (0, 0)$, $\lambda = 0$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(x + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$, pero x no es un minimizador local de f .

Ejercicio 5 Encontrar ejemplos donde:

- (a) x^* es minimizador local de f en Ω , pero $\nabla f(x^*) \neq 0$
- (b) x^* es minimizador local de f en Ω , $\nabla f(x^*) = 0$, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no es semidefinida positiva.
- (c) Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$ pero x^* no es minimizador local.
- (d) Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$, pero x^* no es minimizador local.
- (e) Ω es abierto, x^* minimizador local estricto, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no sea definida positiva.

Ejercicio 6 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una función cuadrática, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x + c$. Escribir un algoritmo que verifique si f tiene un mínimo y, en tal caso lo encuentre resolviendo un sistema de ecuaciones apropiado.

Ejercicio 7 Escribir un algoritmo que dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un índice i , $1 \leq i \leq n$, aproxime $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Ejercicio 8 Utilizando el programa del ejercicio anterior, escribir programas que calculen $\nabla f(a)$ y $Hf(a)$, para f y a dados.

Ejercicio 9 Escribir un programa que dada una f y un punto inicial x_0 busque un mínimo x^* de f usando el algoritmo de Newton. Pruébalo para i) el caso del Ejercicio 4 y ii) para la función $f(x, y, z) = -1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 - 4y + y^2 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4$.

Ejercicio 10 Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

Funciones Convexas:

Ejercicio 11 Probar que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa y tiene mínimo, entonces el mínimo es único. Dar un ejemplo de función estrictamente convexa sin mínimo.

Ejercicio 12 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, probar que:

- (a) si f es convexa, entonces f es continua.
- (b) si f estrictamente convexa con un único mínimo x^* , entonces $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Ejercicio 13 Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ un conjunto de funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo Ω . Muestre que la función $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ es convexa en la región en la cual es finita.

Ejercicio 14 Sea γ un función monótona no decreciente de una variable, es decir $r' > r$ implica $\gamma(r') \geq \gamma(r)$, que además es convexa y sea f una función convexa definida en un conjunto convexo. Muestre que la función $\gamma(f)$ definida como $\gamma(f)(x) = \gamma(f(x))$ es convexa sobre Ω .

Ejercicio 15 Sea $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Muestre que una condición necesaria y suficiente para que un punto x^* en el interior de Ω sea un mínimo relativo de f es que $\nabla f(x^*) = 0$ y que f sea localmente convexa en x^* .

QR:

Ejercicio 16 Sea $v \in \mathbb{C}^n$. Probar que la matriz $I - vv^*$ es unitaria si y sólo si $\|v\|_2^2 = 2$ o $v = 0$.

Ejercicio 17 Dados $x \neq y$ en \mathbb{C}^n tal que $\|x\|_2 = \|y\|_2$ y $\langle x, y \rangle$ es real. Probar que la matriz unitaria $U = I - vv^*$ con $v = \frac{\sqrt{2}}{\|x - y\|_2}(x - y)$ satisface que $Ux = y$.

Ejercicio 18 Implementar un programa que calcule la descomposición QR de una matriz aplicando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt. Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programas entre sí y con las dadas por el comando `qr` de Matlab.

Ejercicio 19 Considerar el problema de cuadrados mínimos, es decir el problema de buscar, dadas por $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($n > m$) y $b \in \mathbb{R}^n$, un punto $x^* \in \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\|Ax^* - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \|Ax - b\|.$$

Probar que la descomposición QR de A permite resolver este problema. En particular, que si $A = QR$, entonces x^* satisface que $Rx^* = Q^tb$.

Ejercicio 20 Escribir un programa que resuelva el problema de cuadrados mínimos utilizando el algoritmo del Ejercicio 18.