Raport 1

Analiza Sygnałów

Szeregi i Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Agnieszka Staszkiewicz 268791

26.05.2024

Spis treści

1 Szeregi Fouriera **3**

1.1 Teoria . . . 3

1.2 Funkcja $|\sin(x)|$ . . . 4

1.2.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie 5

1.2.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie . . . 6

1.2.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną . . . 8

1.2.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE . . . 13

1.3 Funkcja trójkątna . . . 15

1.3.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie 16

1.3.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie . . . 19

1.3.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną . . . 21

1.3.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE . . . 26

1.4 Funkcja $-|cos(x)|$ . . . 28

1.4.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie 29

1.4.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie . . . 31

1.4.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną . . . 32

1.4.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE . . . 38

1.5 Porównanie MAE i RMSE . . . 40

2 Transformata Fouriera **41**

2.1 Teoria . . . 41

2.2 Impuls trójkątny . . . 41

2.3 Impuls kosinusoidalny . . . 46

2.4 Impuls wykładniczy malejąco . . . 50

2.4.1 Porównanie impulsu z jej transformatą Fouriera . . . 53

1 Szeregi Fouriera

1.1 Teoria

Szereg Fouriera umożliwia rozkład funkcji okresowej na sumę funkcji trygonometrycznych. Szereg ten pozwala przedstawić funkcje w postaci sumy sinusów i cosinusów.

Szeregiem Fouriera funkcji $s(x)$ o okresie T w przedziale [a,b], nazywamy szereg trygonometryczny w postaci:

$$S_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right),$$

gdzie N to liczba wyrazów w szeregu Fouriera.

Współczynniki A_n i B_n obliczamy za pomocą wzorów:

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_a^b s(x)\, dx,$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_a^b s(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_a^b s(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx.$$

- MAE - Średni błąd bezwzględny :

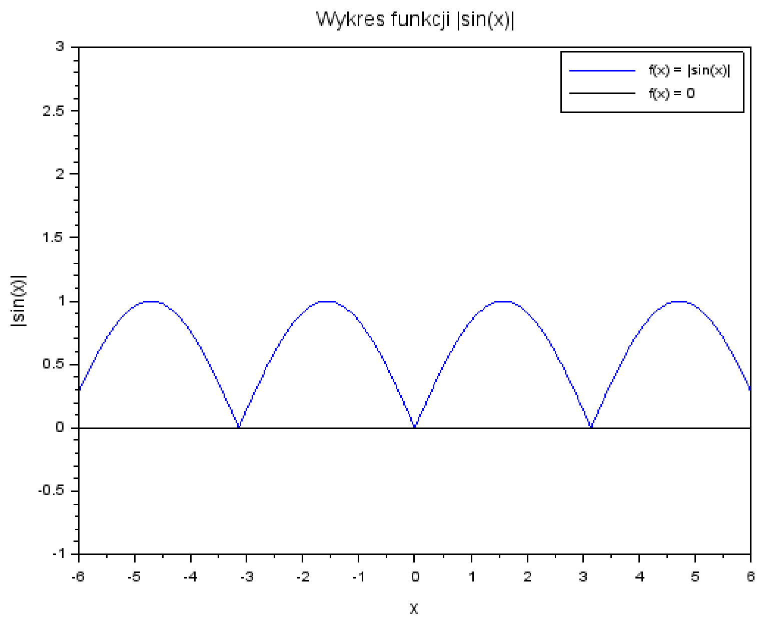
$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i|,$$

- RMSE - pierwiastek błędu średniokwadratowego:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

gdzie y_i to wartość rzeczywista funkcji dla danej wartości x_i, a $\hat{y}_i$ to wartość aproksymacji szeregiem Fouriera dla tego samego punktu x_i

1.2 Funkcja $|\sin(x)|$



Rysunek 1: Wykres funkcji $|\sin{(x)}|$.

Kod do powyższego wykresu: (wykres1.sce)

```
// Zakres x
x = -10:0.01:10

// Obliczenie wartosci funkcji |sin(x)|
y = abs(sin(x))

// Rysowanie wykresu
plot(x, y)  //funkcja f(x) = |sin(x)|
plot(x, t = 0, 'black')  //funkcja f(x) = 0

//Opisanie wykresu
xlabel('x') //Os X
ylabel('|sin(x)|') //Os Y
title('Wykres funkcji |sin(x)|')//Tytul
legend('f(x) = |sin(x)|', 'f(x) = 0 ')// Dodanie legendy

//Zakres osi na wykresie
h = gca()
h.data_bounds = [-6,-1;6,3]
```

1.2.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie

Współczynniki Szeregu Fouriera funkcji $|\sin(x)|$ o okresie $T = 2\pi$ i przedziale $[-\pi, \pi]$ możemy zapisać za pomocą wzorów:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \, dx$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(nx) \, dx$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \sin(nx) \, dx$$

Funkcja $|\sin(x)|$ jest funkcją parzystą, czyli $B_n = 0$.

Obliczmy A_0:

Wiedząc, że funkcja $|\sin(x)|$ jest parzysta możemy zapisać:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(x) \, dx = -\frac{2}{\pi} \left[\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

Obliczmy A_n:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(x) \cos(nx) \, dx$$

Korzystamy ze wzoru:

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$$

Otrzymujemy:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\sin((n{+}1)x) {-} \sin((n{-}1)x)) \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{0}^{\pi} \sin((n+1)x) \, dx - \int_{0}^{\pi} \sin((n-1)x) \, dx \right)$$

Obliczmy pierwszą całkę, korzystając z metody podstawienia:

$$\int\limits_0^\pi \sin((n{+}1)x)\,dx = \begin{bmatrix} t = (n+1)x \\ dx = \dfrac{dt}{n+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{n+1}\left[\cos((n+1)x)\right]_0^\pi = -\frac{1}{n+1}\left(\cos(n+1)\pi - 1\right)$$

Analogicznie obliczamy drugą całkę:

$$\int\limits_0^\pi \sin((n-1)x)\,dx = -\frac{1}{n-1}\left(\cos(n-1)\pi - 1\right)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\left(\cos(n+1)\pi - 1\right) + \frac{1}{n-1}\left(\cos(n-1)\pi - 1\right)\right)$$

- Dla n parzystych :

$$A_n = \frac{-4}{\pi(n^2-1)}$$

- Dla n nieparzystych:

$$A_n = 0$$

Podsumowując Szereg Fouriera dla funkcji $|\sin(x)|$ możemy zapisać jako:

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{N}\left((1 - n \cdot mod2) \cdot \frac{-4}{\pi(n^2-1)}\cos(nx)\right)$$

1.2.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie

Za pomocą wbudowanej funkcji *integrate*() w Scilabie możemy sprawdzić numerycznie jakie wartośći będą miały współczynniki Szeregu Fouriera naszej funkcji. Sprawdźmy dla $n = 10$.

```
"Funkcja |sin(x)|"

"Współczynnik a_0:"

 1.2732395

"Współczynniki a_n:"

       column 1 to 7
 5.183D-17  -0.4244132  -5.024D-17  -0.0848826   6.889D-17  -0.0363783  -3.267D-16
       column 8 to 10
-0.0202102   1.386D-16  -0.012861

"Współczynniki b_n:"

 0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.
```

Rysunek 2: Współczynniki Szeregu Fouriera dla funkcji $|\sin(x)|$ wyznaczone numerycznie w Scilabie.

Warto zwrócić uwagę, że wartości takie jak : $5.183D{-}17, -5.024D{-}17, 6.889D{-}17$ oznaczają odpowiednio $5.183 \cdot 10^{-17}, -5.024 \cdot 10^{-17}, 6.889 \cdot 10^{-17}$, czyli wartośći te są praktycznie równe zeru. Wynika to z błędów numerycznych, które pojawiają się podczas obliczania całek numerycznych przez komputer.

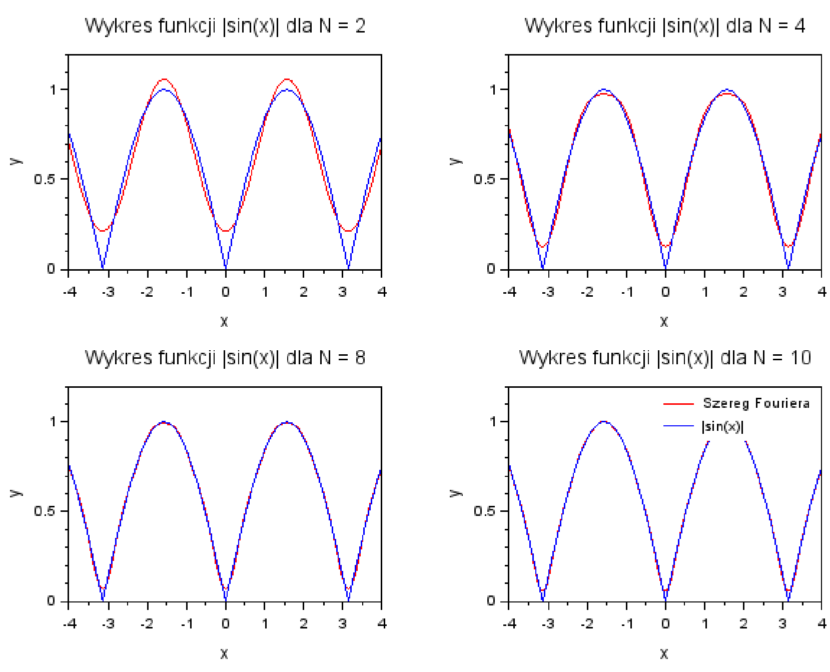
Kod do wyznaczenia współczynników Szeregu Fouriera numerycznie dla funkcji $|sin(x)|$ (1numer.sce):

```
// Funkcja |sin(x)|
function y = f(x)
    y = abs(sin(x))
endfunction

//Wspolczynnik a_0
a_0 = integrate('abs(sin(x))','x', -%pi, %pi) / %pi

// Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera

//Wspolczynnik A_n
function a_n = fourier_a(n)
    a_n = integrate('abs(sin(x)) * cos(n * x)','x', -%pi, %pi) /
    %pi
endfunction

//Wspolczynnik B_n
function b_n = fourier_b(n)
    b_n = integrate('abs(sin(x)) * sin(n * x)','x', -%pi, %pi) /
    %pi
endfunction

// Zakres N
n = 10

```

```
// Obliczenie wspolczynnikow Fouriera
wart_a = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci A_n
wart_b = zeros(1, n) //tablica zerwoa dla wartosci B_n

//Obliczanie wspolczynnikow Fouriera dla N wartosci
for i = 1:n
    wart_a(i) = fourier_a(i) //zapisujemy wyniki do tablicy
    wart_b(i) = fourier_b(i)
end

// Wyswietlenie wynikow
disp('Funkcja |sin(x)|')
disp('Wspolczynnik a_0:')
disp(a_0)
disp('Wspolczynniki a_n:')
disp(wart_a)
disp('Wspolczynniki b_n:')
disp(wart_b)
```

1.2.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną

Porównanie funkcji $|sin(x)|$ (niebieski) z szeregiem wyznaczonym analitycznie (czerwony):



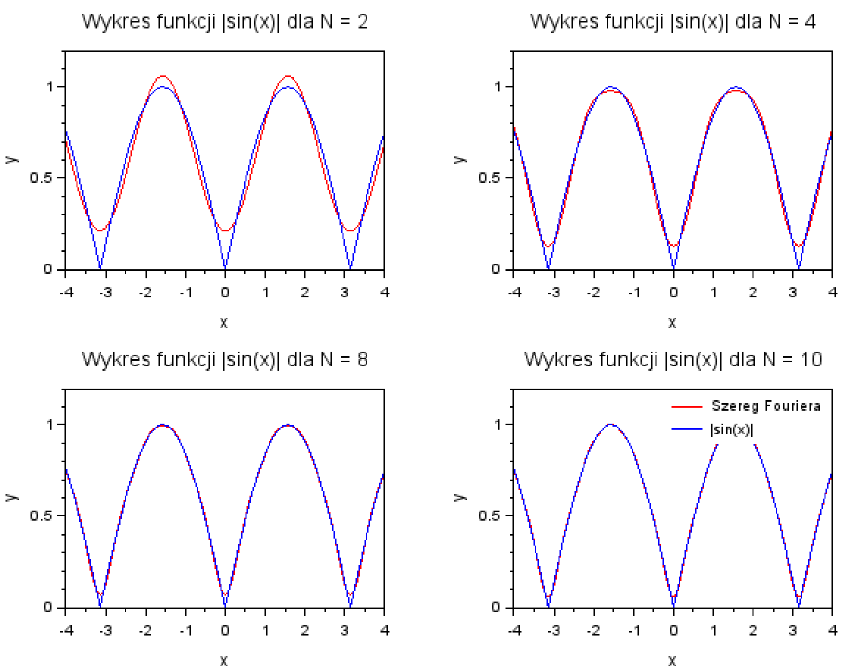
Rysunek 3: Porównanie funkcji $|\sin(x)|$ z szeregiem wyznaczonym analitycznie.

Kod do powyższego wykresu(1analit.sci):

```
// Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze wspolczynnikami
    obliczonymi analitycznie
function y = fun_z_anality(x, N)
    // Stala czesc wyrazenia
    y = 2 / %pi

    // Sumowanie dla n od 1 do N
    for n = 1:N
        // Wspolczynnik B_n
        bn = 0
        //Wspolczynnik A_n
        if modulo(n, 2) == 0 then
            // Jesli n jest parzyste, obliczamy wyrazenie
            an = ((-4)/ (%pi*(n^2-1))) * cos(n * x)
        else
            // Jesli n jest nieparzyste, dodajemy 0 do sumy
            an = 0
        end
        // Sumujemy
        y = y + an + bn
    end
end

// Zakres x
x = linspace(-4, 4, 1000)

// Funkcja |sin(x)|
a = abs(sin(x))


// Rysowanie wykresu

//dla N = 2
subplot(2,2,1)
plot(x, fun_z_anality(x, 2), 'r')
plot(x,a)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 2')
e = gca()
e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]

//dla N = 4
subplot(2,2,2)
plot(x, fun_z_anality(x, 4), 'r')
plot(x,a)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 4')
e = gca()
e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]

//dla N = 8
subplot(2,2,3)
plot(x, fun_z_anality(x, 8), 'r')
plot(x,a)
```

```
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 8')
e = gca()
e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]

//dla N = 10
subplot(2,2,4)
plot(x, fun_z_anality(x, 10), 'r')
plot(x,a)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 10')
e = gca()
e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]

legend('Szereg Fouriera','|sin(x)|',font_size=1,with_box=%f)
```

Porównanie funkcji $|sin(x)|$ (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (czerwony):

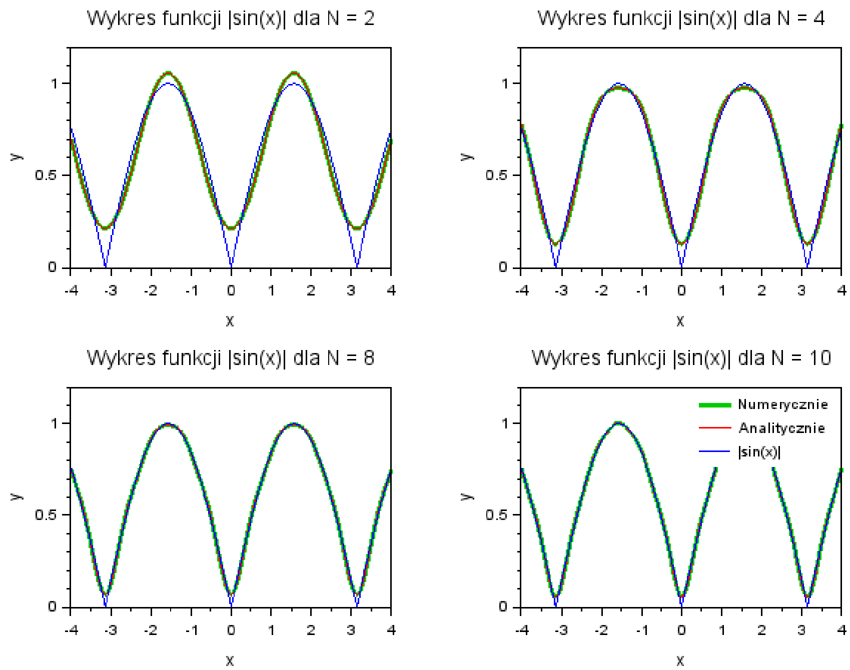


Rysunek 4: Porównanie funkcji $|\sin(x)|$ z szeregiem wyznaczonym numerycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu (fun.num.1.sci):

```
//Wspolczynniki metoda numeryczna

//Wspolczynnik a_0
a_0 = integrate('abs(sin(x))','x', -%pi, %pi) / %pi

// Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera

//Wspolczynnik A_n
function a_n = fourier_a(n)
    a_n = integrate('abs(sin(x)) * cos(n*x)','x', -%pi, %pi) / %pi
endfunction

//Wspolczynnik B_n
function b_n = fourier_b(n)
    b_n = integrate('abs(sin(x)) * sin(n * x)','x', -%pi, %pi) / %pi
endfunction



// Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze wspolczynnikami obliczonymi analitycznie
function y = fun_z_numer(x, N)
    // Stala czesc wyrazenia
    y = a_0/2

    // Sumowanie dla n od 1 do N
    for n = 1:N

        //Wspolczynnik A_n
        a_n = fourier_a(n)

        // Wspolczynnik B_n
        b_n = fourier_b(n)

        // Sumujemy
        y = y + a_n*(cos(n*x)) + b_n*(sin(n*x))
    end
end

// Zakres x
x = linspace(-4, 4, 1000)

// Funkcja |sin(x)|
a = abs(sin(x))


// Rysowanie wykresu
...
```

Porównanie funkcji $|sin(x)|$ (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (zielony) i wyznaczonym analitycznie (czerwony):



Rysunek 5: Porównanie funkcji $|\sin{(x)}|$ z szeregiem wyznaczonym numerycznie i wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu(1.porównanie.sci):

```
//Definicje funkcji z kodu do rysunku (3 i 4)

// Rysowanie wykresu
dark_green = [0, 0.8, 0]

//dla N = 2
subplot(2,2,1)
plot(x,fun_z_numer(x,2),'color', dark_green,'LineWidth',3)
plot(x, fun_z_anality(x, 2), 'r-')
plot(x,a)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 2')
e = gca()
e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]
...
```

1.2.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE

Wyniki porównania jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną i numerycznią do funkcji $|sin(x)|$ za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N możemy przedstawić w tabeli:

N	Funkcja |sin(x)| analitycznie		Funkcja |sin(x)| numerycznie	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE
2	0.0600771	0.0720127	0.0600771	0.0720127
4	0.0267389	0.0341608	0.0267389	0.0341608
8	0.0104350	0.0144701	0.0104350	0.0144701
10	0.0075061	0.0107634	0.0075061	0.0107634

Rysunek 6: Tabela porównująca jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną i numerycznią do funkcji $|sin(x)|$ za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N.

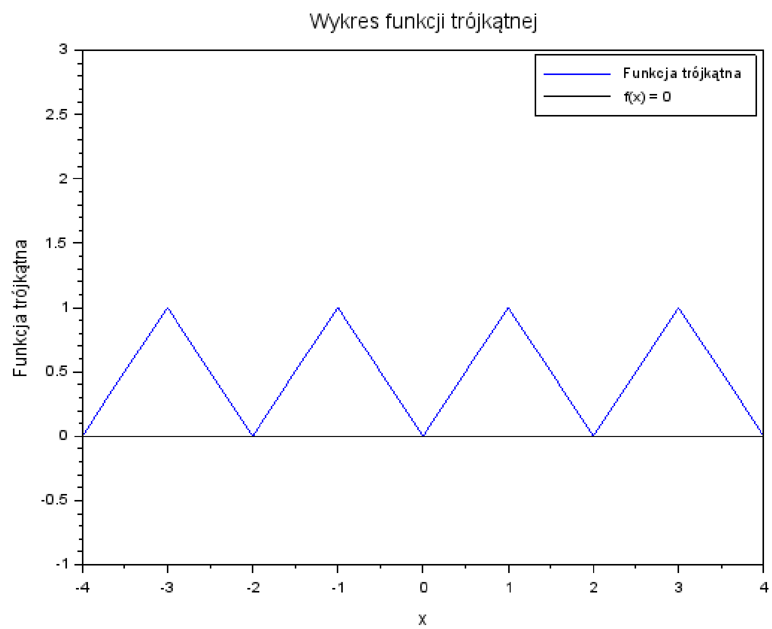
Z tabeli widać, że wartośći dla Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną są takei same jak dla Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą numeryczną. Możemy wnioskować, że metoda obliczanie Szeregu Fouriera nie ma znaczenia. Dlatego w dalszej części będziemy porównywać jakość dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego jedną metodą do funckji. Przykładowo wybierzemy metode analityczną.

Kod (MAE.RMSE.1A.sci, MAE.RMSE.1N.sci)

```
//Definicje funkcji z kodu do rysunku (3 i 4)

//MEA

disp("MAE dla funckji |sin(x)| i Szeregu Fouriera wyznaczonym
    metoda analityczna")

//Dla N = 2
y_falka2 = fun_z_anality(x, 2)
MAE2 = mean(abs(a - y_falka2))

disp("MAE dla N=2",MAE2)

//Dla N = 4
y_falka4 = fun_z_anality(x, 4)
MAE4= mean(abs(a - y_falka4))

disp("MAE dla N=4",MAE4)
```

```
...

//RMSE

disp("RMSE dla funckji |sin(x)| i Szeregu Fouriera wyznaczonym
    metoda analityczna")

//Dla N = 2
RMSE2 = sqrt(mean((a - y_falka2).^2))
disp("RMSE dla N=2",RMSE2)

//Dla N = 4
RMSE4 = sqrt(mean((a - y_falka4).^2))
disp("RMSE dla N=4",RMSE4)
```

1.3 Funkcja trójkątna



Rysunek 7: Wykres funkcji trójkątnej.

Kod do powyższego wykresu:

```
function y = f(x)
    x_t = modulo(x, 2)//przeksztalcamy kazda wartosc x na wartosc z przedzialu [0, 2)

    if x_t < 0 then //przesuwa ujemne wartosci do dodatniego zakresu [0, 2)
        x_t = x_t + 2
    end

    //wzor funkcji trojkatnej
    if x_t < 1 then
        y = x_t
    else
        y = 2 - x_t
    end
endfunction

//Zakres x
x = linspace(-4, 4, 1000)

//Tablica do przechowywania wartosci
```

```
y = zeros(x)

// Obliczanie wartosci funkcji
for i = 1:length(x)
    y(i) = f(x(i))
end

// Rysowanie wykresu
plot(x, y)
plot(x, t=0, 'black')

//Opisanie wykresu
xlabel('x')
ylabel('Funkcja trojkatna')
title('Wykres funkcji trojkatnej')
legend('Funkcja trojkatna ', 'f(x) = 0')

//Zakres osi na wykresie
t = gca()
t.data_bounds = [-4,-1;4,3]
```

1.3.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie

Kolejną funkcją jaką będziemy rozwijać w Szereg Fouriera jest funkcja trójkątna opisująca sygnał trójkątny. Ogólny wzór funkcji trójkątnej możemy zapisać jako:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x - 2k, & \text{dla } 2ak < x < a + 2ak, \\ 2 + 2k - \frac{1}{a}x, & \text{dla } a + 2ak < x < 2a + 2ak. \end{cases}$$

gdzie:

a - połowa okresu funkcji trójkątnej. Okres funkcji trójkątnej jest równy $2a$.
k - liczba całkowita, która indeksuje kolejne okresy funkcji. Odpowiada za powtarzanie się funkcji trójkątnej w każdym kolejnym okresie.

Na przedziale $[0, 2a]$, czyli dla $k = 0$, wzór ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x, & \text{dla } 0 < x < a, \\ 2 - \frac{1}{a}x, & \text{dla } a < x < 2a. \end{cases}$$

Rozważmy powyższą funkcję dla $a = 1$, czyli okres funkcji $T = 2$. Wtedy wzór możemy przedstawić jako:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{dla } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Współczynniki Szeregu Fouriera powyższej funkcji o okresie $T = 2$ i przedziale $[0, 2]$ możemy obliczyć za pomocą wzorów:

$$A_0 = \int_0^2 f(x)\,dx,$$

$$A_n = \int_0^2 f(x)\cos(\pi n x)\;dx,$$

$$B_n = \int_0^2 f(x)\sin(\pi n x)\;dx.$$

Funkcja trójkątna jest funkcją parzystą, czyli $B_n = 0$.

Obliczmy A_0:

$$A_0 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Obliczmy A_n:

$$A_n = \int_0^2 f(x)\cos(\pi n x)\;dx = \int_0^1 x\cos(\pi n x)\,dx + \int_1^2 (2-x)\cos(\pi n x)\,dx$$

Obliczmy pierwszą całkę, korzystając z całkownaia przez części:

$$\int_0^1 x\cos(\pi n x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x & v' = \cos(\pi n x) \\ u' = 1 & v = \dfrac{1}{\pi n}\sin(\pi n x) \end{bmatrix} = \Big[\frac{x}{\pi n}\sin(\pi n x)\Big]_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin(\pi n x) =$$

$$= 0 - \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}\left[-\cos\pi n x\right]_0^1 = \frac{1}{\pi^2 n^2}(\cos(\pi n) - 1)$$

Obliczmy drugą całkę, korzystając z całkownaia przez części:

$$\int_1^2 (2-x)\cos(\pi n x)\,dx = \begin{bmatrix} u = 2-x & v' = \cos(\pi n x) \\ u' = -1 & v = \frac{1}{\pi n}\sin(\pi n x) \end{bmatrix} = \left[\frac{2-x}{\pi n}\sin(\pi n x)\right]_1^2 + \frac{1}{\pi n}\int_1^2 \sin(\pi n x) =$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}\left[-\cos(\pi n x)\right]_1^2 = -\frac{1}{\pi^2 n^2}(\cos(2\pi n) - \cos(\pi n))$$

Możemy teraz zapisać:

$$A_n = \frac{1}{\pi^2 n^2}(\cos(\pi n) - 1) - \frac{1}{\pi^2 n^2}(\cos(2\pi n) - \cos(\pi n)) = \frac{1}{\pi^2 n^2}[2\cos(\pi n) - 1 - \cos(2\pi n)]$$

- Dla n parzystych :

$$A_n = 0$$

- Dla n nieparzystych:

$$A_n = \frac{-4}{\pi^2 n^2}$$

Podsumowując Szereg Fouriera dla funkcji trójkątnej możemy zapisać jako:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left((n \cdot mod2) \cdot \frac{-4}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi x)\right)$$

1.3.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie

```
"Funkcja trójkątna"

"Współczynnik a_0:"

 1.

"Współczynniki a_n:"

       column 1 to 7
-0.4052847   1.596D-16  -0.0450316  -2.255D-17  -0.0162114  -1.249D-16  -0.0082711
       column 8 to 10
-7.242D-17  -0.0050035  -3.469D-17

"Współczynniki b_n:"

       column 1 to 7
 5.551D-17   2.776D-17  -8.327D-17   0.   4.163D-17  -1.388D-17  -1.110D-16
       column 8 to 10
 7.633D-17  -1.318D-16   5.551D-17
```

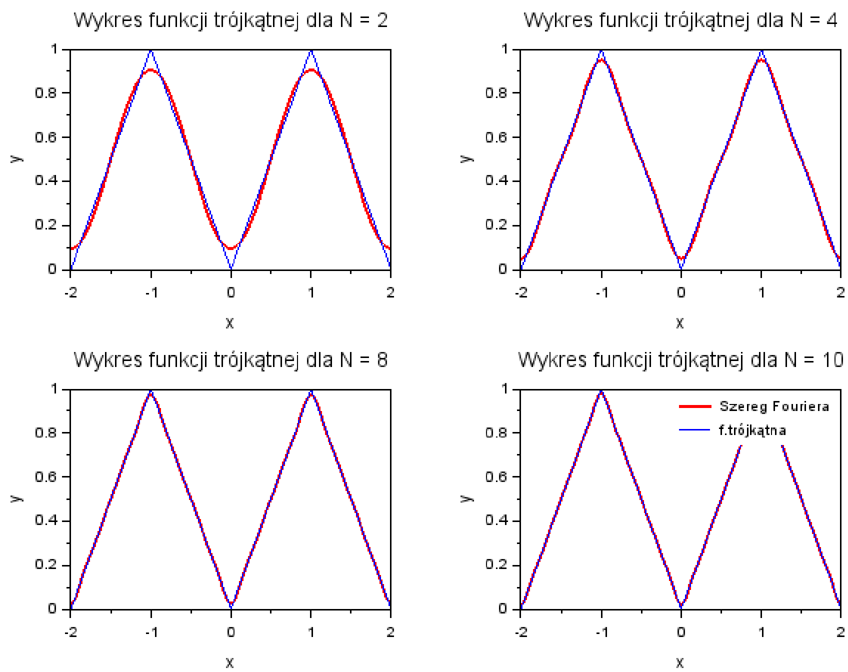
Rysunek 8: Współczynniki Szeregu Fouriera dla funkcji trójkątnej wyznaczone numerycznie w Scilabie. (Dla n = 10).

Kod do wyznaczenia współczynników Szeregu Fouriera numerycznie dla funkcji trójkątnej :

```
// Funkcja trojkatna dla x nalezacych do przedzialu [0,1]
function y = f1(x)
    y = x
endfunction

// Funkcja trojkatna dla x nalezacych do przedzialu [1,2]
function y = f2(x)
    y = 2-x
endfunction


//Wspolczynnik a_0
a_0 = integrate('x','x', 0, 1) + integrate('(2-x)','x', 1, 2)

// Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera

//Wspolczynnik A_n
function a_n = fourier_a(n)
    a_n = integrate('x * cos(n * x * %pi)','x', 0, 1) + integrate('
    (2-x) * cos(n * x * %pi)','x', 1, 2)
endfunction

//Wspolczynnik B_n
function b_n = fourier_b(n)
    b_n = integrate('x * sin(n * x * %pi)','x', 0, 1) + integrate('
    (2-x) * sin(n * x * %pi)','x', 1, 2)
endfunction

// Zakres N
n = 10

// Obliczenie wspolczynnikow Fouriera
wart_a = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci A_n
wart_b = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci B_n

//Obliczanie wspolczynnikow Fouriera dla N wartosci
for i = 1:n
    wart_a(i) = fourier_a(i) //zapisujemy wyniki do tablicy
    wart_b(i) = fourier_b(i)
end

// Wyswietlenie wynikow
disp('Funkcja trojkatna')
disp('Wspolczynnik a_0:')
disp(a_0)
disp('Wspolczynniki a_n:')
disp(wart_a)
disp('Wspolczynniki b_n:')
disp(wart_b)
```

1.3.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną

Porównanie funkcji trójkątnej (niebieski) z szeregiem wyznaczonym analitycznie (czerwony):



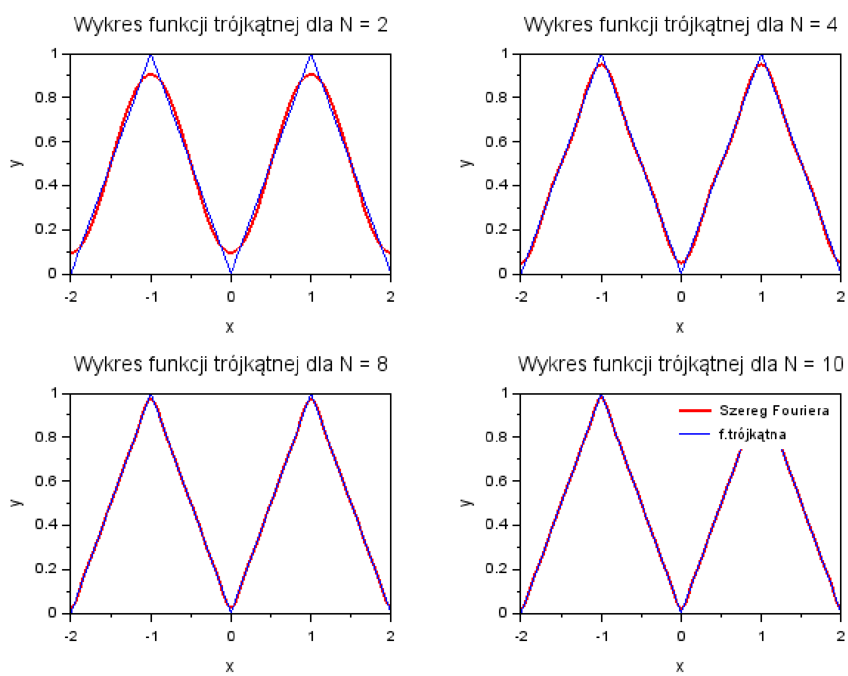
Rysunek 9: Porównanie funkcji trójkątnej z szeregiem wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```
// Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze wspolczynnikami obliczonymi analitycznie

function y2 = fun2_z_anality(x, N)
    // Stala czesc wyrazenia
    y2 = 1/2

    // Sumowanie dla n od 1 do N
    for n = 1:N
        // Wspolczynnik B_n
        bn = 0
        //Wspolczynnik A_n
        if modulo(n, 2) == 1 then
            // Jesli n jest nieparzyste, obliczamy wyrazenie
            an = ((-4)/ ((%pi^2)*(n^2))) * cos(n * x * %pi)
        else
            // Jesli n jest parzyste, dodajemy 0 do sumy
            an = 0
        end
        // Sumujemy
        y2 = y2 + an + bn
    end
end


//Funkcja trojkatna
function y = f(x)
    x_t = modulo(x, 2)//przeksztalcamy kazda wartosc x na wartosc z przedzialu [0, 2)

    if x_t < 0 then //przesuwa ujemne wartosci do dodatniego zakresu [0, 2)
        x_t = x_t + 2
    end

    //wzor funkcji trojkatnej
    if x_t < 1 then
        y = x_t
    else
        y = 2 - x_t
    end
endfunction

//Zakres x
x = linspace(-4, 4, 1000)

//wywolanie funkcji trojkatnej
for i = 1:length(x)
    y(i) = f(x(i))
end


// Rysowanie wykresu

//dla N = 2
subplot(2,2,1)
```

```
plot(x, fun2_z_anality(x, 2), 'r', 'LineWidth',2)
plot(x,y)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji trojkatnej dla N = 2')
e = gca()
e.data_bounds = [-2,0;2,1]
...
```

Porównanie funkcji $|sin(x)|$ (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (czerwony):



Rysunek 10: Porównanie funkcji trójkątnej z szeregiem wyznaczonym numerycznie.

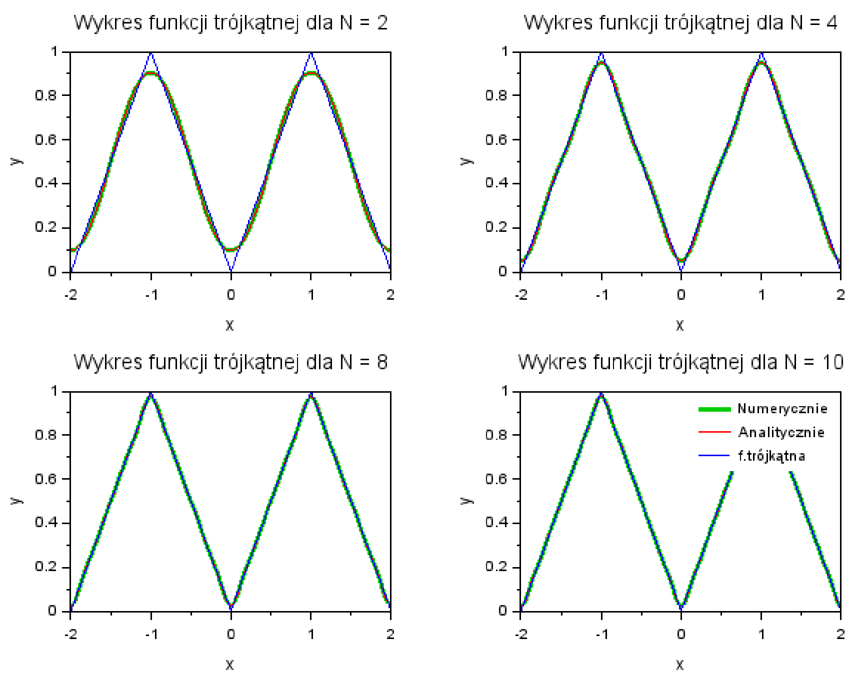
Fragment kodu do powyższego wykresu:

```
// Wspolczynniki wyznaczone numerycznie

//Wspolczynnik a_0
a_0 = integrate('x','x', 0, 1) + integrate('(2-x)','x', 1, 2)


// Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera

//Wspolczynnik A_n
function a_n = fourier_a(n)
```

```
    a_n = integrate('x * cos(n * x * %pi)','x', 0, 1) + integrate('(2-x) * cos(n * x * %pi)','x', 1, 2)
endfunction

//Wspolczynnik B_n
function b_n = fourier_b(n)
    b_n = integrate('x * sin(n * x * %pi)','x', 0, 1) + integrate('(2-x) * sin(n * x * %pi)','x', 1, 2)
endfunction


// Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze wspolczynnikami obliczonymi analitycznie
function y = fun2_z_numer(x, N)
    // Stala czesc wyrazenia
    y = a_0/2

    // Sumowanie dla n od 1 do N
    for n = 1:N

        //Wspolczynnik A_n
        a_n = fourier_a(n)

        // Wspolczynnik B_n
        b_n = fourier_b(n)

        // Sumujemy
        y = y + a_n*(cos(n*x*%pi)) + b_n*(sin(n*x*%pi))
    end
end


//Funkcja trojkatna
function y = f(x)
    x_t = modulo(x, 2)//przeksztalcamy kazda wartosc x na wartosc z przedzialu [0, 2)

    if x_t < 0 then //przesuwa ujemne wartosci do dodatniego zakresu [0, 2)
        x_t = x_t + 2
    end

    //wzor funkcji trojkatnej
    if x_t < 1 then
        y = x_t
    else
        y = 2 - x_t
    end
endfunction

//Zakres x
x = linspace(-4, 4, 1000)

//wywolanie funkcji trojkatnej
for i = 1:length(x)
    y(i) = f(x(i))
end
```

```
// Rysowanie wykresu

//dla N = 2
subplot(2,2,1)
plot(x, fun2_z_numer(x, 2), 'r', 'LineWidth',2)
plot(x,y)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji trojkatnej dla N = 2')
e = gca()
e.data_bounds = [-2,0;2,1]
...
```

Porównanie funkcji trójkątnej (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (zielony) i wyznaczonym analitycznie (czerwony):



Rysunek 11: Porównanie funkcji trójkątnej z szeregiem wyznaczonym numerycznie i wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```
// Definicje funkcji z kodu do rysunku (8 i 9)

// Rysowanie wykresu
```

```
dark_green = [0, 0.8, 0]


//dla N = 2
subplot(2,2,1)
plot(x,fun2_z_numer(x,2),'color', dark_green,'LineWidth',3)
plot(x, fun2_z_anality(x, 2), 'r-')
plot(x,y)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji trojkatnej dla N = 2')
e = gca()
e.data_bounds = [-2,0;2,1]
...
```

1.3.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE

Wyniki porównania jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną do funkcji trójkątnej za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N możemy przedstawić w tabeli:

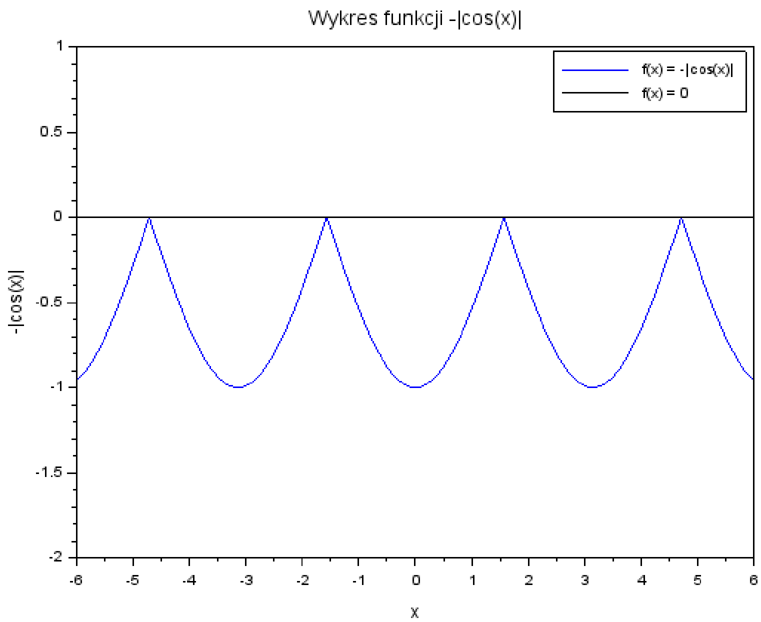
N	Funkcja trójkątna	
	MAE	RMSE
2	0.0293549	0.0348321
4	0.0111312	0.0139228
8	0.0037336	0.0051535
10	0.0025830	0.0037181

Rysunek 12: Tabela porównująca jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną do funkcji trójkątnej za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N.

```
//Definicje funkcji z kodu do rysunku (8 i 9)

//MEA

disp("MAE dla funckji trojkatnej i Szeregu Fouriera wyznaczonym
    metoda analityczna")

//Dla N = 2

y_falka2 = fun2_z_anality(x, 2)
MAE2 = mean(abs(f(x) - y_falka2))

disp("MAE dla N=2",MAE2)
```

```

//Dla N = 4
y_falka4 = fun2_z_anality(x, 4)
MAE4= mean(abs(f(x) - y_falka4))
...

/RMSE

disp("RMSE dla funckji trojkatnej i Szeregu Fouriera wyznaczonym
    metoda analityczna")

//Dla N = 2
RMSE2 = sqrt(mean((f(x) - y_falka2).^2))
disp("RMSE dla N=2",RMSE2)

//Dla N = 4
RMSE4 = sqrt(mean((f(x) - y_falka4).^2))
disp("RMSE dla N=4",RMSE4)
...
```

1.4 Funkcja $-|cos(x)|$



Rysunek 13: Wykres funkcji $-|cos(x)|$.

Kod do powyższego wykresu:

```
// Zakres x
x = -10:0.01:10

// Obliczenie wartosci funkcji -|cos(x)|
y = -abs(cos(x))

// Rysowanie wykresu
plot(x, y)  //funkcja f(x) = -|cos(x)|
plot(x, t = 0, 'black')  //funkcja f(x) = 0

//Opisanie wykresu
xlabel('x') //Os X
ylabel('-|cos(x)|') //Os Y
title('Wykres funkcji -|cos(x)|')//Tytul
legend('f(x) = -|cos(x)|', 'f(x) = 0 ')// Dodanie legendy

//Zakres osi na wykresie
p = gca()
p.data_bounds = [-6,-2;6,1]
```

1.4.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie

Kolejną funkcją jaką będziemy rozwijać w Szereg Fouriera jest funkcja $-|cos(x)|$ o okresie $T = \pi$. Współczynniki Szeregu Fouriera funkcji o okresie $T = \pi$ i przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ możemy obliczyć za pomocą wzorów:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx,$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos{(2nx)}\ dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin{(2nx)}\ dx.$$

Funkcja $-|\cos(x)|$ jest funkcją parzystą, czyli $B_n = 0$.

Obliczmy A_0:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = -\frac{2}{\pi} \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\, dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \right) = -\frac{2}{\pi} \left([\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{4}{\pi}$$

Obliczmy A_n:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos{(2nx)}\ dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -|\cos x| \cdot \cos{(2nx)}\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \cdot \cos{(2nx)}\, dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos{(2nx)}\, dx \right) = -\frac{4}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \cdot \cos{(2nx)}\, dx$$

Korzystamy ze wzoru:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

Otrzymujemy:

$$A_n = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos((1-2n)x) + \cos((1+2n)x)\, dx = -\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos((1-2n)x)\, dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos((1+2n)x)\, dx\right)$$

Obliczmy pierwszą całkę, korzystając z metody podstawienia:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos((1-2n)x)\, dx \begin{bmatrix} t = (1-2n)x \\ dx = \dfrac{dt}{1-2n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-2n}\left[\sin((1-2n)x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{1}{1-2n}\sin\left((1-2n)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Analogicznie obliczamy drugą całkę:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos((1+2n)x)\, dx = -\frac{1}{1+2n}\sin\left((1+2n)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$A_n = -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{1-2n}\sin\left((1-2n)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{1+2n}\sin\left((1+2n)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

- Dla n parzystych :

$$A_n = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

- Dla n nieparzystych:

$$A_n = -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

Ogólnie współczynnik A_n możemy zapisać jako:

$$A_n = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$$

Podsumowując Szereg Fouriera dla funkcji $-|\cos(x)|$ możemy zapisać jako:

$$-\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\cos(2nx)\right)$$

1.4.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie

```
"Funkcja -|cos(x)|"

"Współczynnik a_0:"

-1.2732395

"Współczynniki a_n:"

       column 1 to 7
-0.4244132   0.0848826  -0.0363783   0.0202102  -0.012861   0.0089038  -0.0065294
       column 8 to 10
 0.0049931  -0.0039419   0.0031911

"Współczynniki b_n:"

 0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.
```

Rysunek 14: Współczynniki Szeregu Fouriera dla funkcji $-|cos(x)|$ wyznaczone numerycznie w Scilabie. (Dla n = 10).

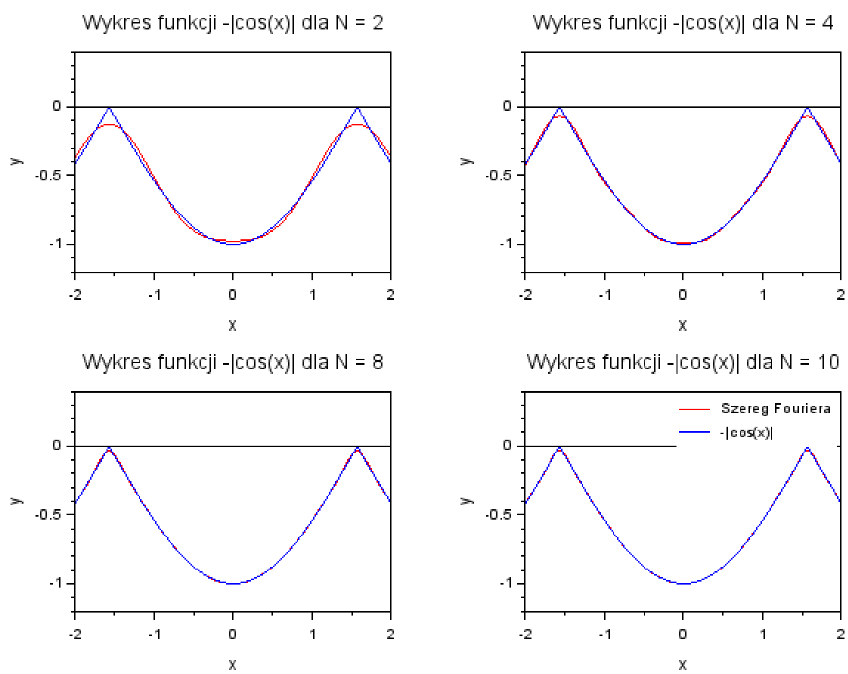
Kod do wyznaczenia współczynników Szeregu Fouriera numerycznie dla funkcji $-|cos(x)|$:

```
// Funkcja -|cos(x)|
function y = f(x)
    y = -abs(cos(x))
endfunction


//Wspolczynnik a_0
a_0 = (2/%pi)*integrate('-abs(cos(x))','x', -%pi/2, %pi/2)

```

```
// Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera

//Wspolczynnik A_n
function a_n = fourier_a(n)
    a_n = (2/%pi)*integrate('(-abs(cos(x))) * cos(2*n*x)','x', -%pi/2, %pi/2)
endfunction

//Wspolczynnik B_n
function b_n = fourier_b(n)
    b_n = (2/%pi)*integrate('(-abs(cos(x))) * sin(2*n*x)','x', -%pi/2, %pi/2)
endfunction

// Zakres N
n = 10

// Obliczenie wspolczynnikow Fouriera
wart_a = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci A_n
wart_b = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci B_n

//Obliczanie wspolczynnikow Fouriera dla N wartosci
for i = 1:n
    wart_a(i) = fourier_a(i) //zapisujemy wyniki do tablicy
    wart_b(i) = fourier_b(i)
end

// Wyswietlenie wynikow
disp('Funkcja -|cos(x)|')
disp('Wspolczynnik a_0:')
disp(a_0)
disp('Wspolczynniki a_n:')
disp(wart_a)
disp('Wspolczynniki b_n:')
disp(wart_b)
```

1.4.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną

Porównanie funkcji $-|cos(x)|$ (niebieski) z szeregiem wyznaczonym analitycznie (czerwony):

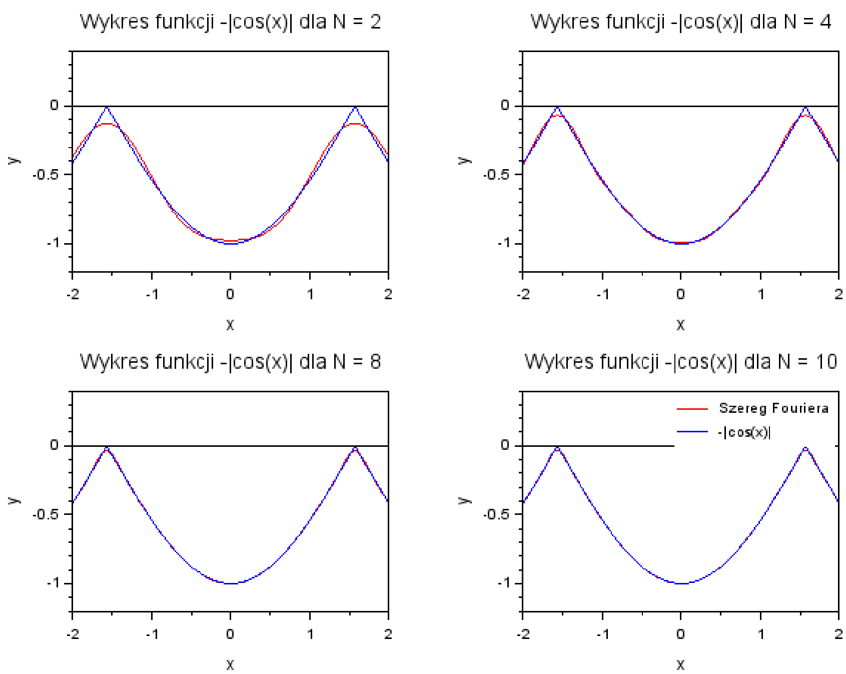


Rysunek 15: Porównanie funkcji $-|cos(x)|$ z szeregiem wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```
// Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze wspolczynnikami obliczonymi analitycznie
function y = fun3_z_anality(x, N)
    // Stala czesc wyrazenia
    y = - 2 / %pi

    // Sumowanie dla n od 1 do N
    for n = 1:N
        // Wspolczynnik B_n
        bn = 0
        //Wspolczynnik A_n
        an = - (2 / %pi) * ( (-1)^n / (2 * n + 1) + (-1)^(n - 1) / (2 * n - 1) )
        // Sumujemy
        y = y + an* cos(2 * n * x) + bn* sin(2 * n * x)
    end
end

// Zakres x
x = linspace(-4, 4, 1000)

// Funkcja -|cos(x)|
a = -abs(cos(x))


// Rysowanie wykresu

//dla N = 2
subplot(2,2,1)
plot(x, fun3_z_anality(x, 2), 'r')
plot(x,a)
plot(x,t=0,'black')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji -|cos(x)| dla N = 2')
e = gca()
e.data_bounds = [ -2 , -1.2;2 ,0.25]
...
```

Porównanie funkcji $-|cos(x)|$ (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (czerwony):



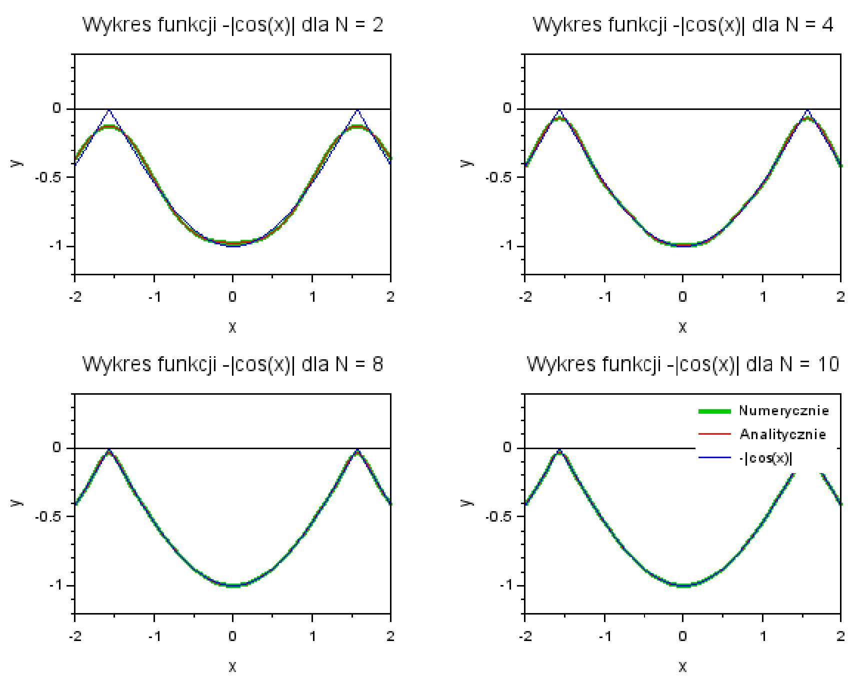
Rysunek 16: Porównanie funkcji $-|cos(x)|$ z szeregiem wyznaczonym numerycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```
// Wspolczynniki wyznaczone numerycznie

//Wspolczynnik a_0
a_0 = (2/%pi)*integrate('-abs(cos(x))','x', -%pi/2, %pi/2)

// Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera

//Wspolczynnik A_n
function a_n = fourier3_a(n)
    a_n = (2/%pi)*integrate('(-abs(cos(x))) * cos(2*n*x)','x', -%pi/2, %pi/2)
endfunction

//Wspolczynnik B_n
function b_n = fourier3_b(n)
    b_n = (2/%pi)*integrate('(-abs(cos(x))) * sin(2*n*x)','x', -%pi/2, %pi/2)
endfunction



// Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze wspolczynnikami obliczonymi numerycznie
function y = fun3_z_numer(x, N)
```

```
    // Stala czesc wyrazenia
    y = a_0/2

    // Sumowanie dla n od 1 do N
    for n = 1:N

        //Wspolczynnik A_n
        a_n = fourier3_a(n)

        // Wspolczynnik B_n
        b_n = fourier3_b(n)

        // Sumujemy
        y = y + a_n*(cos(2*n*x)) + b_n*(sin(2*n*x))
    end
end

// Zakres x
x = linspace(-4, 4, 1000)

// Funkcja -|cos(x)|
a = -abs(cos(x))


// Rysowanie wykresu

//dla N = 2
subplot(2,2,1)
plot(x, fun3_z_numer(x, 2), 'r')
plot(x,a)
plot(x,t=0,'black')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji -|cos(x)| dla N = 2')
e = gca()
e.data_bounds = [ -2 , -1.2;2 ,0.25]
...
```

Porównanie funkcji $-|cos(x)|$ (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (zielony) i wyznaczonym analitycznie (czerwony):



Rysunek 17: Porównanie funkcji $-|cos(x)|$ z szeregiem wyznaczonym numerycznie i wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```
// Definicje funkcji z kodu do rysunku (13 i 14)

// Rysowanie wykresu
dark_green = [0, 0.8, 0]


//dla N = 2
subplot(2,2,1)
plot(x,fun3_z_numer(x,2),'color', dark_green,'LineWidth',3)
plot(x, fun3_z_anality(x, 2), 'r-')
plot(x,a)
plot(x,t=0,'black')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Wykres funkcji -|cos(x)| dla N = 2')
e = gca()
e.data_bounds = [ -2 , -1.2;2 ,0.25]
...
```

1.4.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE

Wyniki porównania jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną do funkcji $-|cos(x)|$ za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N możemy przedstawić w tabeli:

N	Funkcja -|cos(x)|	
	MAE	RMSE
2	0.0236043	0.0300000
4	0.0087724	0.0123248
8	0.0029073	0.0047006
10	0.0020053	0.0034136

Rysunek 18: Tabela porównująca jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną do funkcji $-|cos(x)|$ za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N.

```
//Definicje funkcji z kodu do rysunku (13 i 14)

//MEA

disp("MAE dla funckji -|cos(x)| i Szeregu Fouriera wyznaczonym
    metoda analityczna")
```

```
//Dla N = 2
y_falka2 = fun3_z_anality(x, 2)
MAE2 = mean(abs(a - y_falka2))

disp("MAE dla N=2",MAE2)

//Dla N = 4
y_falka4 = fun3_z_anality(x, 4)
MAE4= mean(abs(a - y_falka4))
...

//RMSE

disp("RMSE dla funckji -|cos(x)| i Szeregu Fouriera wyznaczonym metoda analityczna")

//Dla N = 2
RMSE2 = sqrt(mean((a - y_falka2).^2))
disp("RMSE dla N=2",RMSE2)

//Dla N = 4
RMSE4 = sqrt(mean((a - y_falka4).^2))
disp("RMSE dla N=4",RMSE4)
```

1.5 Porównanie MAE i RMSE

- MAE

N	MAE		
	|sin(x)|	Funkcja trójkątna	-|cos(x)|
2	0.0600771	0.0293549	0.0236043
4	0.0267389	0.0111312	0.0087724
8	0.0104350	0.0037336	0.0029073
10	0.0075061	0.0025830	0.0020053

Rysunek 19: Tabela przedstawiająca wartości MAE dla wszystkich funckji.

- RMSE

N	RMSE		
	|sin(x)|	Funkcja trójkątna	-|cos(x)|
2	0.0720127	0.0348321	0.0300000
4	0.0341608	0.0139228	0.0123248
8	0.0144701	0.0051535	0.0047006
10	0.0107634	0.0037181	0.0034136

Rysunek 20: Tabela przedstawiająca wartości RMSE dla wszystkich funckji.

2 Transformata Fouriera

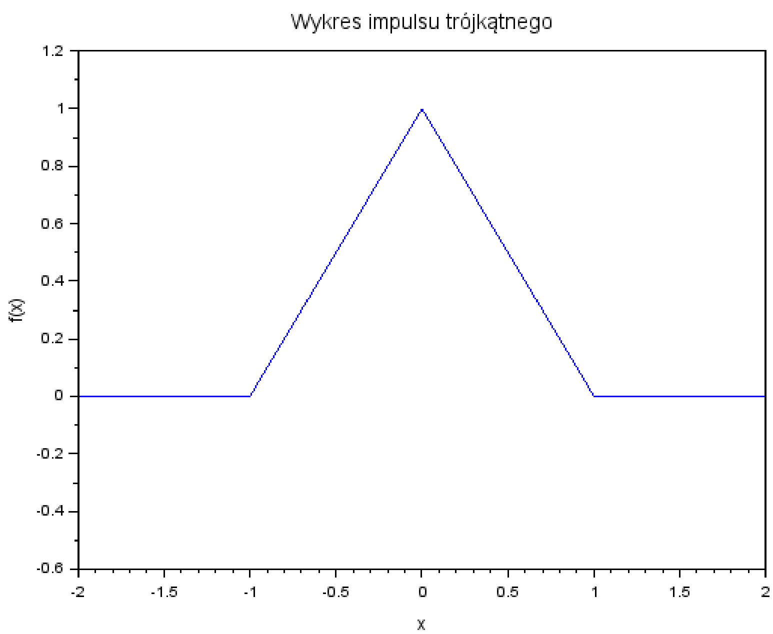
2.1 Teoria

Dla funkcji $f(t)$ transformatę Fouriera określa się wzorem:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i t\xi}\, dt,$$

gdzie i to jednostka urojona.

2.2 Impuls trójkątny



Rysunek 21: Wykres impulsu trójkątnego.

Kod do powyższego wykresu(impuls1.sci):

```
// Funkcja impulsu trojkatnego
function y = f(x)
    y = zeros(size(x)) // Inicjalizacja wektora y

    for i = 1:length(x)
```

```
        if abs(x(i)) <= 1 then
            y(i) = 1 - abs(x(i))
        else
            y(i) = 0
        end
    end
endfunction

// Zakres x
x = linspace(-2, 2, 1000)

//Wywolanie funckji
y = f(x)

// Rysowanie wykresu
plot(x, y,'LineWidth', 1)
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
title('Wykres impulsu trojkatnego')

b = gca()
b.data_bounds = [-2,-0.5;2,1.2]
```

Wzór impulsu trójkątnego możemy zapisać jako:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{dla } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Obliczmy transformate Fouriera dla impulsu trójkątnego:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{-2\pi i x\xi}\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} 0\,dx = \int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{-2\pi i x\xi}\,dx =$$
$$= \int\limits_{-1}^{0}(1+x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx + \int\limits_{0}^{1}(1-x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} e^{-2\pi i x\xi}\,dx + \int\limits_{-1}^{0} x\cdot e^{-2\pi i x\xi}\,dx +$$
$$\int\limits_{0}^{1} e^{-2\pi i x\xi}\,dx - \int\limits_{0}^{1} x\cdot e^{-2\pi i x\xi}\,dx$$

Obliczmy pierwszą całkę korzystając z metody podstawienia:

$$\int\limits_{-1}^{0} e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \begin{bmatrix} -2\pi i x\xi = t \\ dx = \dfrac{dt}{-2\pi i\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{-2\pi i\xi}\left[e^{-2\pi i x\xi}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{-2\pi i\xi}\left(1 - e^{2\pi i\xi}\right)$$

W taki sam sposób możemy obliczyć całkę trzecią:

$$\int_0^1 e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \frac{1}{-2\pi i\xi}\left[e^{-2\pi i x\xi}\right]_0^1 = \frac{1}{-2\pi i\xi}\left(e^{-2\pi i\xi} - 1\right)$$

Teraz obliczmy całkę drugą:

$$\int_{-1}^0 x\cdot e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \begin{bmatrix} u = x & v' = e^{-2\pi i x\xi} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{-2\pi i\xi}e^{-2\pi i x\xi} \end{bmatrix} = \left[x\cdot\frac{1}{-2\pi i\xi}e^{-2\pi i x\xi}\right]_{-1}^0 - \frac{1}{-2\pi i\xi}\int_{-1}^0 e^{-2\pi i x\xi}\,dx =$$

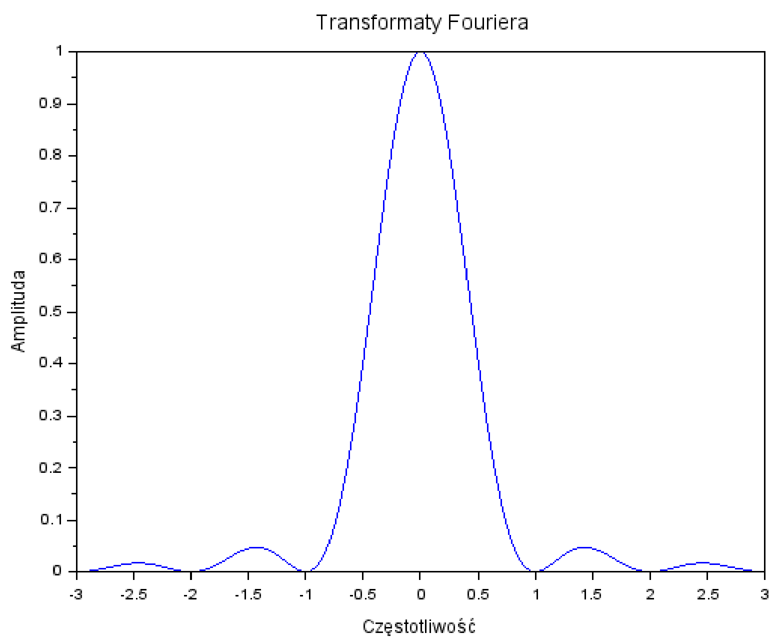
$$= \frac{1}{2\pi i\xi}e^{2\pi i\xi} - \frac{1}{(-2\pi i\xi)^2}\left(1 - e^{2\pi i\xi}\right)$$

Podobnie robimy z całką czwartą:

$$\int_0^1 x\cdot e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \left[x\cdot\frac{1}{-2\pi i\xi}e^{-2\pi i x\xi}\right]_0^1 - \frac{1}{-2\pi i\xi}\int_0^1 e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \frac{1}{-2\pi i\xi}e^{-2\pi i\xi} - \frac{1}{(-2\pi i\xi)^2}\left(e^{-2\pi i\xi} - 1\right)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{1}{\pi i\xi}\left(e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}\right) + \frac{1}{(-2\pi i\xi)^2}\left(e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}\right) = \left(\frac{1}{\pi i\xi} + \frac{1}{(-2\pi i\xi)^2}\right)\left(e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}\right)$$

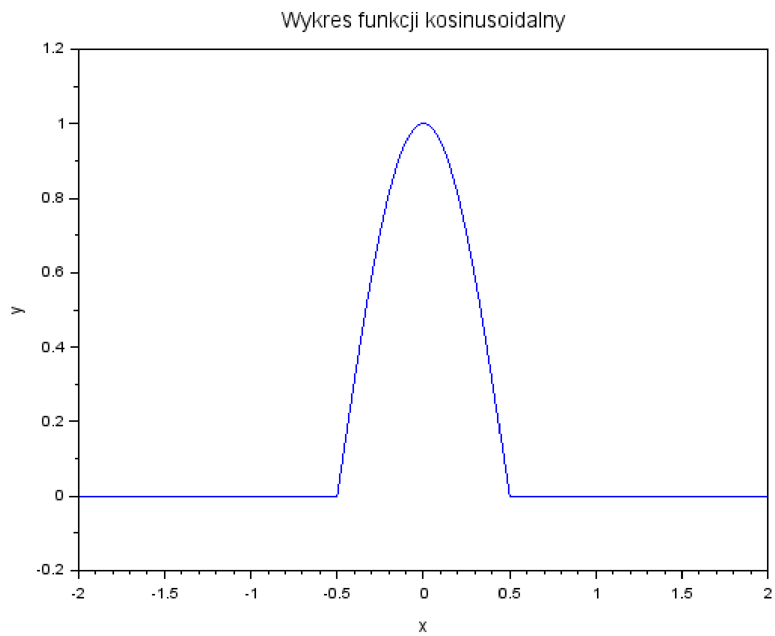


Rysunek 22: Wykres transformaty Fouriera impulsu kosinusoidalnego.

Kod do powyższego wykresu(tran1.sci):

```

// Funkcja do obliczania transformaty Fouriera
function Y = fourier_transform(y, t, f)
    dt = t(2) - t(1) // Zakdadamy rownomierne probkowanie
    N = length(y) // Liczba probek
    Y = zeros(1, length(f));

    for k = 1:length(f)
        sum = 0
        for n = 1:N
            sum = sum + y(n) * exp(-%i * 2 * %pi * f(k) * t(n))
        end
        Y(k) = sum * dt
    end
endfunction

// Zakres x
x = linspace(-2, 2, 1000)

// Wywolanie funkcji
y = f(x)

t = x // Czas
f = linspace(-3, 3, 1000) // Zakres czestotliwosci

// Obliczenie transformaty Fouriera
Y = fourier_transform(y, t, f)

//Rysowanie funckji
plot(f, abs(Y))
title('Transformaty Fouriera')
xlabel('Czestotliwosc')
ylabel('Amplituda')
```

2.3 Impuls kosinusoidalny



Rysunek 23: Wykres impulsu kosinusoidalnego.

Kod do powyższego wykresu(impuls2.sci):

```
//Zakres
t = -3:0.001:3

//Funkcja impulsu kosinusoidalnego
function y = f(x)
    y = zeros(size(t))

    for i = 1:length(t)
        if abs(t(i)) > 0.5 then
            y(i) = 0
        else
            y(i) = cos(%pi*t(i))
        end
    end
endfunction

//Wywolanie funkcji
y = f(x)

// Rysowanie wykresu
plot(t, y)
xlabel('x')
ylabel('y')
```

```
title('Wykres funkcji kosinusoidalny')
e = gca()
e.data_bounds = [-2,-0.2;2,1.2]
```

Wzór impulsu kosinusoidalnego możemy zapisać jako:

$$f(x) = \begin{cases} cos(\pi x), & \text{dla } |x| < 0.5, \\ 0, & \text{dla } |x| \geq 0.5. \end{cases}$$

Obliczmy transformate Fouriera dla impulsu trójkątnego:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-0.5} 0\,dx + \int\limits_{-0.5}^{0.5} \cos{(\pi x)}e^{-2\pi i x\xi}\,dx + \int\limits_{0.5}^{\infty} 0\,dx = \int\limits_{-0.5}^{0.5} \cos{(\pi x)}e^{-2\pi i x\xi}\,dx$$

Skorzystajmy z całkowania przez części:

$$\int \cos{(\pi x)}e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \cos{(\pi x)}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi} - \int \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}(-\pi\sin{(\pi x)})\,dx =$$

$$= \cos{(\pi x)}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi} + \sin{(\pi x)}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi} - \int \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}(\pi\cos{(\pi x)})\,dx =$$

$$= \cos{(\pi x)}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi} + \sin{(\pi x)}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi} - \frac{\pi}{-2\pi i\xi}\int e^{-2\pi i x\xi}\cos{(\pi x)}\,dx$$

Czyli możemy zapisać:

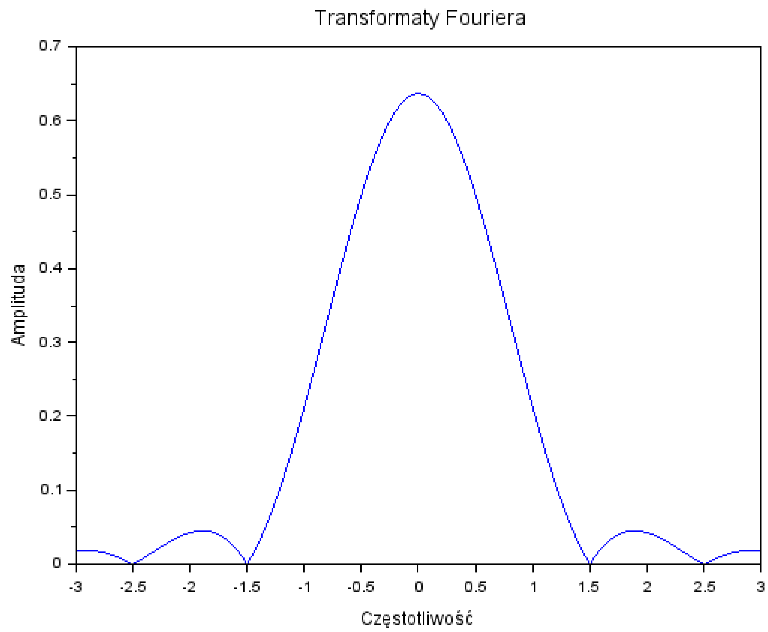
$$\int \cos{(\pi x)}e^{-2\pi i x\xi}\,dx + \frac{1}{2i\xi}\int \cos{(\pi x)}e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \frac{\cos{(\pi x)}e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi} + \left(\frac{\sin{(\pi x)}e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\right)$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\int \cos{(\pi x)}e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \frac{e^{-2\pi i x\xi}\cos{(\pi x + \frac{\pi}{2})}}{-2\pi i\xi(1+\frac{\pi}{2i})}$$

Ostatecznie mamy:

$$\frac{e^{-2\pi i 0.5\xi}\cos{(\pi 0.5 + \frac{\pi}{2})}}{-2\pi i\xi(1+\frac{\pi}{2i})} - \frac{e^{-2\pi i(-0.5)\xi}\cos{(\pi(-0.5) + \frac{\pi}{2})}}{-2\pi i\xi(1+\frac{\pi}{2i})}$$



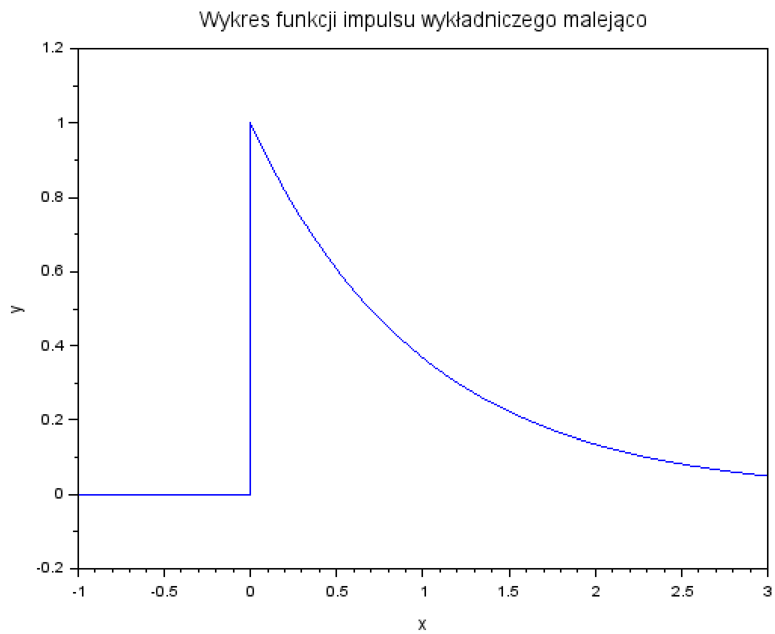
Rysunek 24: Wykres transformaty Fouriera impulsu kosinusoidalnego.

Kod do powyższego wykresu (tran2.sci):

```
// Funkcja do obliczania transformaty Fouriera
function Y = fourier_transform(y, t, f)
    dt = t(2) - t(1) // Zakladamy rownomierne probkowanie
    N = length(y) // Liczba probek
    Y = zeros(1, length(f))

    for k = 1:length(f)
        sum = 0;
        for n = 1:N
            sum = sum + y(n) * exp(-%i * 2 * %pi * f(k) * t(n))
        end
        Y(k) = sum * dt
    end
endfunction

// Zakres x
x = linspace(-2, 2, 1000)

// Wywolanie funkcji
y = f(x)


t = x // Czas
f = linspace(-3, 3, 1000); // Zakres czestotliwosci

// Obliczenie transformaty Fouriera
Y = fourier_transform(y, t, f)
```

```

//Rysowanie funckji
plot(f, abs(Y))
title('Transformaty Fouriera')
xlabel('Czestotliwosc')
ylabel('Amplituda')
```

2.4 Impuls wykładniczy malejąco



Rysunek 25: Wykres impulsu wykładniczego malejąco.

Kod do powyższego wykresu (impuls3.sci):

```
//Zakres
x = -3:0.001:3

//Funckja wykladniczo malejaca
function y = f(x)
    y = zeros(size(x))

    for i = 1:length(x)
        if x(i) < 0 then
            y(i) = 0
        else
            y(i) = exp(-x(i))
        end
    end
endfunction

//Wywolanie
y = f(x)

// Rysowanie wykresu
plot(t, y)
xlabel('x')
```

```
ylabel('y')
title('Wykres funkcji impulsu wykladniczego malejaco ')
e = gca()
e.data_bounds = [-1,-0.2;3,1.2]
```

Wzór impulsu wykładniczego malejąco możemy zapisać jako:

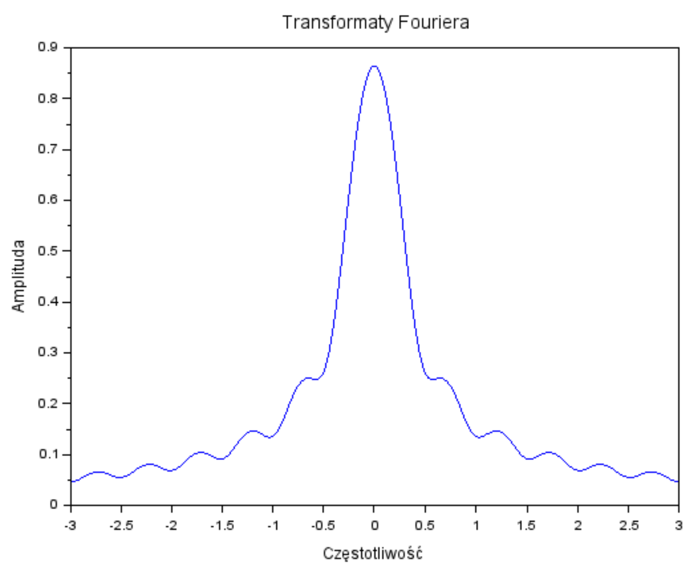
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{dla } x \geq 0, \\ 0, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Obliczmy transformate Fouriera dla impulsu wykładniczego malejąco:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(1+2\pi i\xi)x}\,dx$$

Skorzystamy teraz z metody podstawienia:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \frac{1}{-(1+2\pi i\xi)}\left[e^{-(1+2\pi i\xi)x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{-(1+2\pi i\xi)}$$

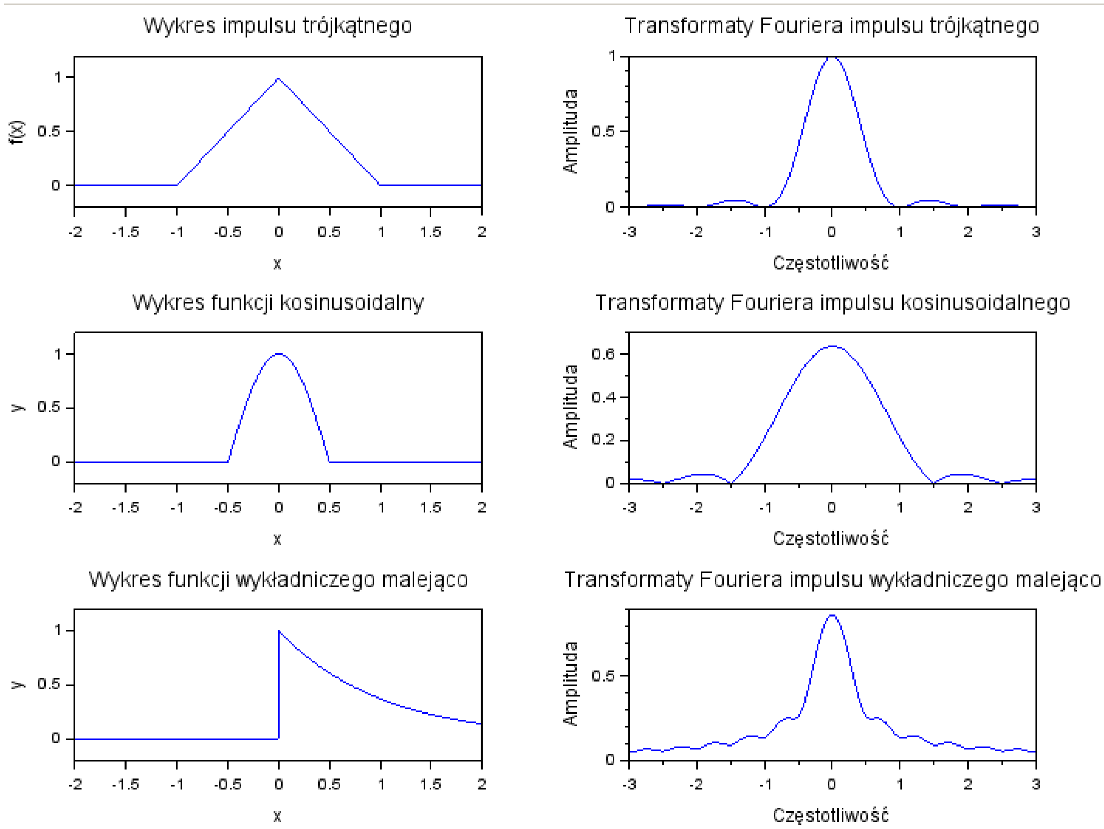


Rysunek 26: Wykres transformaty Fouriera impulsu wykładniczego malejąco.

Kod od powyższego wykresu. (tran3.sci)

```
// Funkcja do obliczania transformaty Fouriera
function Y = fourier_transform(y, t, f)
    dt = t(2) - t(1) // Zakladamy rownomierne probkowanie
    N = length(y) // Liczba probek
    Y = zeros(1, length(f))

    for k = 1:length(f)
        sum = 0
        for n = 1:N
            sum = sum + y(n) * exp(-%i * 2 * %pi * f(k) * t(n))
        end
        Y(k) = sum * dt
    end
endfunction

// Zakres x
x = linspace(-2, 2, 1000)

// Wywolanie funkcji
y = f(x)


t = x // Czas
f = linspace(-3, 3, 1000) // Zakres czestotliwosci

// Obliczenie transformaty Fouriera
Y = fourier_transform(y, t, f)

//Rysowanie funckji
plot(f, abs(Y))
title('Transformaty Fouriera')
xlabel('Czestotliwosc')
ylabel('Amplituda')
```

2.4.1 Porównanie impulsu z jej transformatą Fouriera



Rysunek 27: Wykres porównujący impulsy z ich transformatami Fouriera(im.tra1.sci).