

# Raport 1

Analiza Sygnałów

Szeregi i Transformaty Fouriera wybranych  
sygnałów

Agnieszka Staszekiewicz 268791

26.05.2024

# Spis treści

<b>1 Szeregi Fouriera</b>	<b>3</b>
1.1 Teoria . . . . .	3
1.2 Funkcja $ \sin(x) $ . . . . .	4
1.2.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie	5
1.2.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycz-	
nie w Scilabie . . . . .	6
1.2.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i nu-	
meryczną . . . . .	8
1.2.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funk-	
cji za pomocą MAE i RMSE . . . . .	13
1.3 Funkcja trójkątna . . . . .	15
1.3.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie	16
1.3.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycz-	
nie w Scilabie . . . . .	19
1.3.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i nu-	
meryczną . . . . .	21
1.3.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funk-	
cji za pomocą MAE i RMSE . . . . .	26
1.4 Funkcja $- \cos(x) $ . . . . .	28
1.4.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie	29
1.4.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycz-	
nie w Scilabie . . . . .	31
1.4.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i nu-	
meryczną . . . . .	32
1.4.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funk-	
cji za pomocą MAE i RMSE . . . . .	38
1.5 Porównanie MAE i RMSE . . . . .	40
<b>2 Transformata Fouriera</b>	<b>41</b>
2.1 Teoria . . . . .	41
2.2 Impuls trójkątny . . . . .	41
2.3 Impuls kosinusoidalny . . . . .	46
2.4 Impuls wykładniczy malejąco . . . . .	50
2.4.1 Porównanie impulsu z jej transformatą Fouriera . . . . .	53

# 1 Szeregi Fouriera

## 1.1 Teoria

Szereg Fouriera umożliwia rozkład funkcji okresowej na sumę funkcji trygonometrycznych. Szereg ten pozwala przedstawić funkcję w postaci sumy sinusów i cosinusów.

Szeregiem Fouriera funkcji  $s(x)$  o okresie  $T$  w przedziale  $[a, b]$ , nazywamy szereg trygonometryczny w postaci:

$$S_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right),$$

gdzie  $N$  to liczba wyrazów w szeregu Fouriera.

Współczynniki  $A_n$  i  $B_n$  obliczamy za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T} \int_a^b s(x) dx, \\ A_n &= \frac{2}{T} \int_a^b s(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_a^b s(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx. \end{aligned}$$

- MAE - Średni błąd bezwzględny :

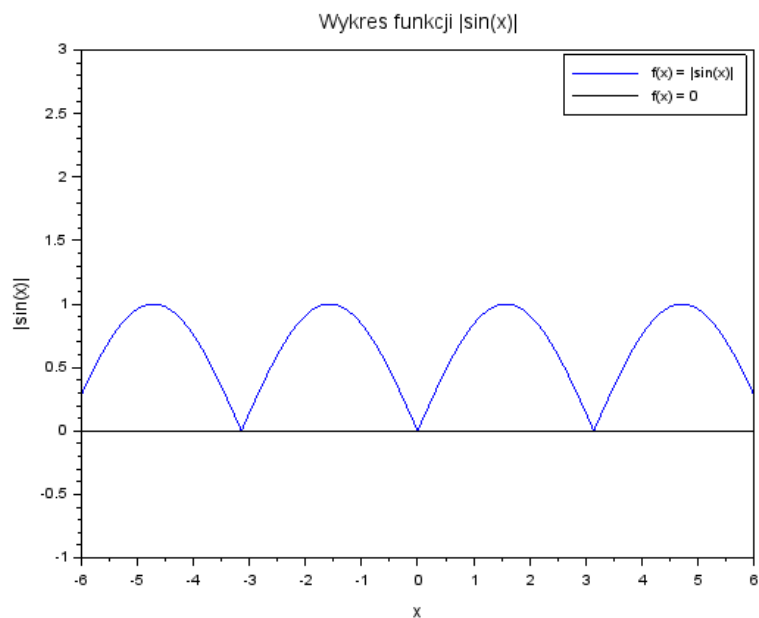
$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|,$$

- RMSE - pierwiastek błędu średniokwadratowego:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

gdzie  $y_i$  to wartość rzeczywista funkcji dla danej wartości  $x_i$ , a  $\hat{y}_i$  to wartość aproksymacji szeregiem Fouriera dla tego samego punktu  $x_i$

## 1.2 Funkcja $|\sin(x)|$



Rysunek 1: Wykres funkcji  $|\sin(x)|$ .

Kod do powyższego wykresu: (wykres1.sce)

```
1 // Zakres x
2 x = -10:0.01:10
3
4 // Obliczenie wartosci funkcji |sin(x)|
5 y = abs(sin(x))
6
7 // Rysowanie wykresu
8 plot(x, y) //funkcja f(x) = |sin(x)|
9 plot(x, t = 0, 'black') //funkcja f(x) = 0
10
11 //Opisanie wykresu
12 xlabel('x') //Os X
13 ylabel('|sin(x)|') //Os Y
14 title('Wykres funkcji |sin(x)|')//Tytul
15 legend('f(x) = |sin(x)|', 'f(x) = 0 ')// Dodanie legendy
16
17 //Zakres osi na wykresie
18 h = gca()
19 h.data_bounds = [-6,-1;6,3]
```

### 1.2.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie

Współczynniki Szeregu Fouriera funkcji  $|\sin(x)|$  o okresie  $T = 2\pi$  i przedziale  $[-\pi, \pi]$  możemy zapisać za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx \\A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(nx) dx \\B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \sin(nx) dx\end{aligned}$$

Funkcja  $|\sin(x)|$  jest funkcją parzystą, czyli  $B_n = 0$ .

Obliczmy  $A_0$ :

Wiedząc, że funkcja  $|\sin(x)|$  jest parzysta możemy zapisać:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\frac{2}{\pi} [\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

Obliczmy  $A_n$ :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx$$

Korzystamy ze wzoru:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Otrzymujemy:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin((n+1)x) dx - \int_0^{\pi} \sin((n-1)x) dx \right)$$

Obliczmy pierwszą całkę, korzystając z metody podstawienia:

$$\int_0^{\pi} \sin((n+1)x) dx = \left[ \begin{array}{l} t = (n+1)x \\ dx = \frac{dt}{n+1} \end{array} \right] = -\frac{1}{n+1} [\cos((n+1)x)]_0^{\pi} = -\frac{1}{n+1} (\cos(n+1)\pi - 1)$$

Analogicznie obliczamy drugą całkę:

$$\int_0^{\pi} \sin((n-1)x) dx = -\frac{1}{n-1} (\cos(n-1)\pi - 1)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{n+1} (\cos(n+1)\pi - 1) + \frac{1}{n-1} (\cos(n-1)\pi - 1) \right)$$

- Dla  $n$  parzystych :

$$A_n = \frac{-4}{\pi(n^2 - 1)}$$

- Dla  $n$  nieparzystych:

$$A_n = 0$$

Podsumowując Szereg Fouriera dla funkcji  $|\sin(x)|$  możemy zapisać jako:

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^N \left( (1 - n \cdot \text{mod} 2) \cdot \frac{-4}{\pi(n^2 - 1)} \cos(nx) \right)$$

### 1.2.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie

Za pomocą wbudowanej funkcji *integrate()* w Scilabie możemy sprawdzić numerycznie jakie wartości będą miały współczynniki Szeregu Fouriera naszej funkcji. Sprawdźmy dla  $n = 10$ .

```

"Funkcja |sin(x)|"

"Współczynnik a_0:"

1.2732395

"Współczynniki a_n:"

      column 1 to 7
5.183D-17 -0.4244132 -5.024D-17 -0.0848826 6.889D-17 -0.0363783 -3.267D-16
      column 8 to 10
-0.0202102 1.386D-16 -0.012861

"Współczynniki b_n:"

0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.

```

Rysunek 2: Współczynniki Szeregu Fouriera dla funkcji  $|\sin(x)|$  wyznaczone numerycznie w Scilabie.

Warto zwrócić uwagę, że wartości takie jak :  $5.183D-17$ ,  $-5.024D-17$ ,  $6.889D-17$  oznaczają odpowiednio  $5.183 \cdot 10^{-17}$ ,  $-5.024 \cdot 10^{-17}$ ,  $6.889 \cdot 10^{-17}$ , czyli wartości te są praktycznie równe zero. Wynika to z błędów numerycznych, które pojawiają się podczas obliczania całek numerycznych przez komputer.

Kod do wyznaczenia współczynników Szeregu Fouriera numerycznie dla funkcji  $|\sin(x)|$  (1numer.sce):

```

1 // Funkcja |sin(x)|
2 function y = f(x)
3     y = abs(sin(x))
4 endfunction
5
6 //Wspolczynnik a_0
7 a_0 = integrate('abs(sin(x))','x', -%pi, %pi) / %pi
8
9 // Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera
10
11 //Wspolczynnik A_n
12 function a_n = fourier_a(n)
13     a_n = integrate('abs(sin(x)) * cos(n * x)','x', -%pi, %pi) /
        %pi
14 endfunction
15
16 //Wspolczynnik B_n
17 function b_n = fourier_b(n)
18     b_n = integrate('abs(sin(x)) * sin(n * x)','x', -%pi, %pi) /
        %pi
19 endfunction
20
21 // Zakres N
22 n = 10
23

```

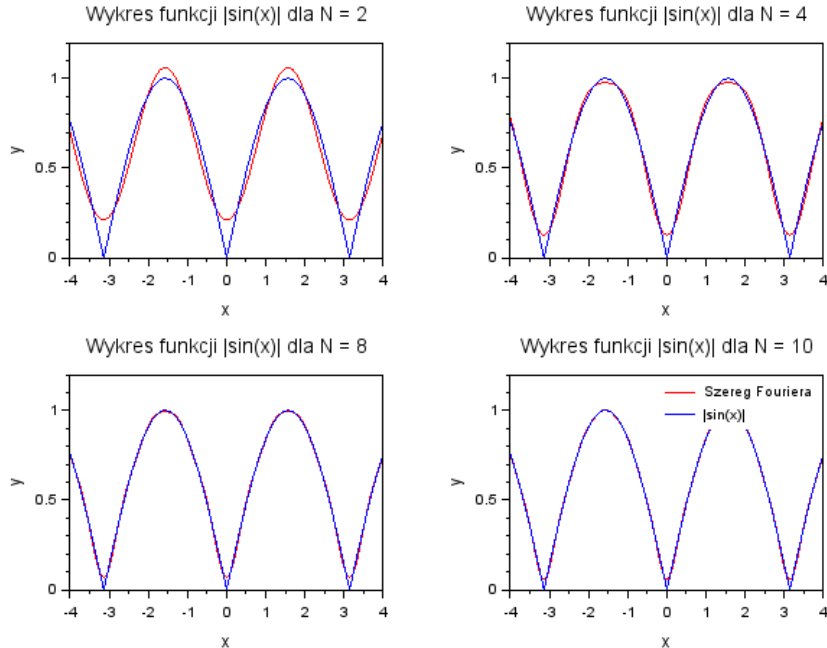
```

24 // Obliczenie współczynników Fouriera
25 wart_a = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci A_n
26 wart_b = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci B_n
27
28 //Obliczanie współczynników Fouriera dla N wartosci
29 for i = 1:n
30     wart_a(i) = fourier_a(i) //zapisujemy wyniki do tablicy
31     wart_b(i) = fourier_b(i)
32 end
33
34 // Wyświetlenie wyników
35 disp('Funkcja |sin(x)|')
36 disp('Współczynnik a_0:')
37 disp(a_0)
38 disp('Współczynniki a_n:')
39 disp(wart_a)
40 disp('Współczynniki b_n:')
41 disp(wart_b)

```

### 1.2.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną

Porównanie funkcji  $|\sin(x)|$  (niebieski) z szeregiem wyznaczonym analitycznie (czerwony):



Rysunek 3: Porównanie funkcji  $|\sin(x)|$  z szeregiem wyznaczonym analitycznie.



Kod do powyższego wykresu(1analit.sci):

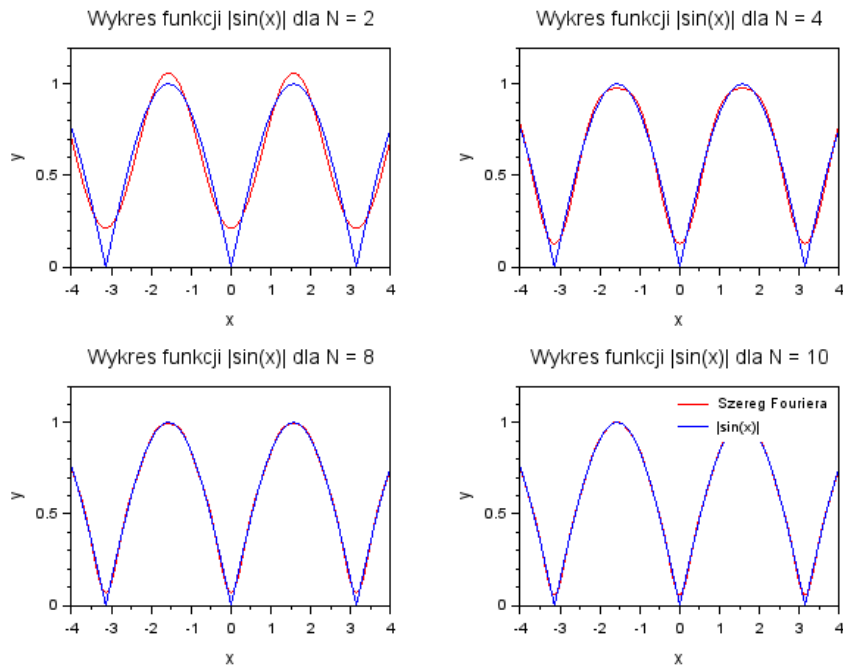
```
1 // Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze współczynnikami
  obliczonymi analitycznie
2 function y = fun_z_anality(x, N)
3     // Stała czesc wyrażenia
4     y = 2 / %pi
5
6     // Sumowanie dla n od 1 do N
7     for n = 1:N
8         // Współczynnik B_n
9         bn = 0
10        //Współczynnik A_n
11        if modulo(n, 2) == 0 then
12            // Jesli n jest parzyste, obliczamy wyrażenie
13            an = ((-4)/ (%pi*(n^2-1))) * cos(n * x)
14        else
15            // Jesli n jest nieparzyste, dodajemy 0 do sumy
16            an = 0
17        end
18        // Sumujemy
19        y = y + an + bn
20    end
21 end
22
23 // Zakres x
24 x = linspace(-4, 4, 1000)
25
26 // Funkcja |sin(x)|
27 a = abs(sin(x))
28
29
30 // Rysowanie wykresu
31
32 //dla N = 2
33 subplot(2,2,1)
34 plot(x, fun_z_anality(x, 2), 'r')
35 plot(x,a)
36 xlabel('x')
37 ylabel('y')
38 title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 2')
39 e = gca()
40 e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]
41
42 //dla N = 4
43 subplot(2,2,2)
44 plot(x, fun_z_anality(x, 4), 'r')
45 plot(x,a)
46 xlabel('x')
47 ylabel('y')
48 title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 4')
49 e = gca()
50 e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]
51
52 //dla N = 8
53 subplot(2,2,3)
54 plot(x, fun_z_anality(x, 8), 'r')
55 plot(x,a)
```

```

56 xlabel('x')
57 ylabel('y')
58 title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 8')
59 e = gca()
60 e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]
61
62 //dla N = 10
63 subplot(2,2,4)
64 plot(x, fun_z_anality(x, 10), 'r')
65 plot(x,a)
66 xlabel('x')
67 ylabel('y')
68 title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 10')
69 e = gca()
70 e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]
71
72 legend('Szereg Fouriera','|sin(x)|',font_size=1,with_box=%f)

```

Porównanie funkcji  $|\sin(x)|$  (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (czerwony):

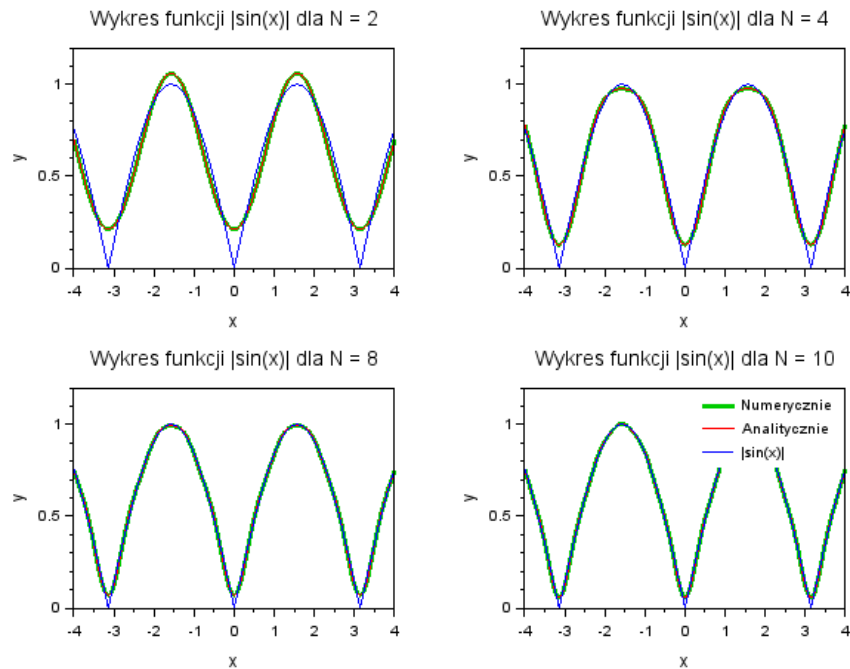


Rysunek 4: Porównanie funkcji  $|\sin(x)|$  z szeregiem wyznaczonym numerycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu (fun.num.1.sci):

```
1 //Wspolczynniki metoda numeryczna
2
3 //Wspolczynnik a_0
4 a_0 = integrate('abs(sin(x))','x', -%pi, %pi) / %pi
5
6 // Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera
7
8 //Wspolczynnik A_n
9 function a_n = fourier_a(n)
10     a_n = integrate('abs(sin(x)) * cos(n*x)','x', -%pi, %pi) / %pi
11 endfunction
12
13 //Wspolczynnik B_n
14 function b_n = fourier_b(n)
15     b_n = integrate('abs(sin(x)) * sin(n * x)','x', -%pi, %pi) /
        %pi
16 endfunction
17
18
19
20 // Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze wspolczynnikiem
    obliczonymi analitycznie
21 function y = fun_z_numer(x, N)
22     // Stala czesc wyrazenia
23     y = a_0/2
24
25     // Sumowanie dla n od 1 do N
26     for n = 1:N
27
28         //Wspolczynnik A_n
29         a_n = fourier_a(n)
30
31         // Wspolczynnik B_n
32         b_n = fourier_b(n)
33
34         // Sumujemy
35         y = y + a_n*(cos(n*x)) + b_n*(sin(n*x))
36     end
37 end
38
39 // Zakres x
40 x = linspace(-4, 4, 1000)
41
42 // Funkcja |sin(x)|
43 a = abs(sin(x))
44
45
46 // Rysowanie wykresu
47 ...
```

Porównanie funkcji  $|\sin(x)|$  (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (zielony) i wyznaczonym analitycznie (czerwony):



Rysunek 5: Porównanie funkcji  $|\sin(x)|$  z szeregiem wyznaczonym numerycznie i wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu(1.porównanie.sci):

```
1 //Definicje funkcji z kodu do rysunku (3 i 4)
2
3 // Rysowanie wykresu
4 dark_green = [0, 0.8, 0]
5
6 //dla N = 2
7 subplot(2,2,1)
8 plot(x,fun_z_numer(x,2),'color', dark_green,'LineWidth',3)
9 plot(x, fun_z_anality(x, 2), 'r-')
10 plot(x,a)
11 xlabel('x')
12 ylabel('y')
13 title('Wykres funkcji |sin(x)| dla N = 2')
14 e = gca()
15 e.data_bounds = [-%pi,0;%pi,1.2]
16 ...
```

### 1.2.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE

Wyniki porównania jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną i numeryczną do funkcji  $|\sin(x)|$  za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N możemy przedstawić w tabeli:

N	Funkcja $ \sin(x) $ analitycznie		Funkcja $ \sin(x) $ numerycznie	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE
2	0.0600771	0.0720127	0.0600771	0.0720127
4	0.0267389	0.0341608	0.0267389	0.0341608
8	0.0104350	0.0144701	0.0104350	0.0144701
10	0.0075061	0.0107634	0.0075061	0.0107634

Rysunek 6: Tabela porównująca jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną i numeryczną do funkcji  $|\sin(x)|$  za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N.

Z tabeli widać, że wartości dla Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną są takie same jak dla Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą numeryczną. Możemy wnioskować, że metoda obliczania Szeregu Fouriera nie ma znaczenia. Dlatego w dalszej części będziemy porównywać jakość dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego jedną metodą do funkcji. Przykładowo wybierzemy metodę analityczną.

Kod (MAE.RMSE.1A.sci, MAE.RMSE.1N.sci)

```

1 //Definicje funkcji z kodu do rysunku (3 i 4)
2
3 //MEA
4
5 disp("MAE dla funkcji |sin(x)| i Szeregu Fouriera wyznaczonym
    metoda analityczna")
6
7 //Dla N = 2
8 y_falka2 = fun_z_anality(x, 2)
9 MAE2 = mean(abs(a - y_falka2))
10
11 disp("MAE dla N=2",MAE2)
12
13 //Dla N = 4
14 y_falka4 = fun_z_anality(x, 4)
15 MAE4= mean(abs(a - y_falka4))
16
17 disp("MAE dla N=4",MAE4)

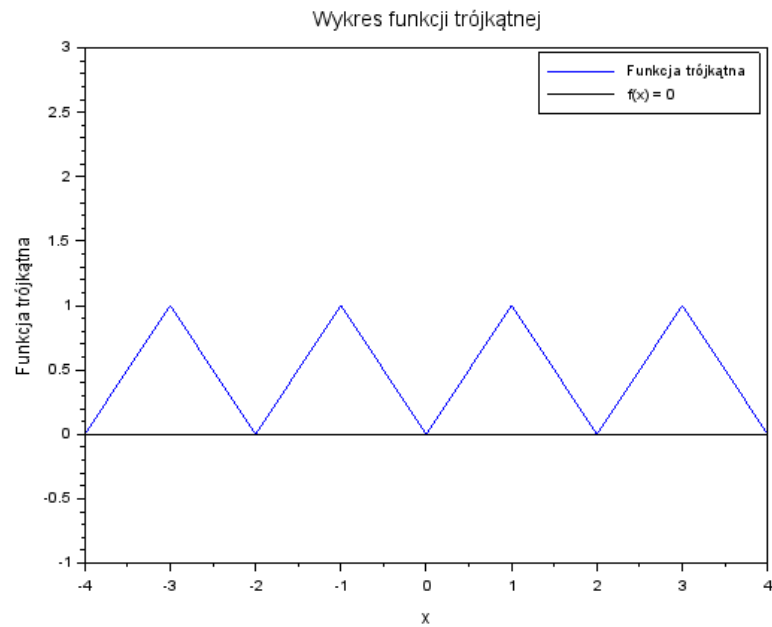
```

```

18 ...
19
20 //RMSE
21
22 disp("RMSE dla funkcji |sin(x)| i Szeregu Fouriera wyznaczonym
      metoda analityczna")
23
24 //Dla N = 2
25 RMSE2 = sqrt(mean((a - y_falka2).^2))
26 disp("RMSE dla N=2",RMSE2)
27
28 //Dla N = 4
29 RMSE4 = sqrt(mean((a - y_falka4).^2))
30 disp("RMSE dla N=4",RMSE4)

```

### 1.3 Funkcja trójkątna



Rysunek 7: Wykres funkcji trójkątnej.

Kod do powyższego wykresu:

```
1 function y = f(x)
2     x_t = modulo(x, 2) //przekształcamy każda wartość x na wartość z
                          przedziału [0, 2)
3
4     if x_t < 0 then //przesuwa ujemne wartości do dodatniego
                          zakresu [0, 2)
5         x_t = x_t + 2
6     end
7
8     //wzór funkcji trójkątnej
9     if x_t < 1 then
10         y = x_t
11     else
12         y = 2 - x_t
13     end
14 endfunction
15
16 //Zakres x
17 x = linspace(-4, 4, 1000)
18
19 //Tablica do przechowywania wartości
```

```

20 y = zeros(x)
21
22 // Obliczanie wartosci funkcji
23 for i = 1:length(x)
24     y(i) = f(x(i))
25 end
26
27 // Rysowanie wykresu
28 plot(x, y)
29 plot(x, t=0, 'black')
30
31 //Opisanie wykresu
32 xlabel('x')
33 ylabel('Funkcja trojkatna')
34 title('Wykres funkcji trojkatnej')
35 legend('Funkcja trojkatna ', 'f(x) = 0')
36
37 //Zakres osi na wykresie
38 t = gca()
39 t.data_bounds = [-4,-1;4,3]

```

### 1.3.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie

Kolejną funkcją jaką będziemy rozwijać w Szereg Fouriera jest funkcja trójkątna opisująca sygnał trójkątny. Ogólny wzór funkcji trójkątnej możemy zapisać jako:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x - 2k, & \text{dla } 2ak < x < a + 2ak, \\ 2 + 2k - \frac{1}{a}x, & \text{dla } a + 2ak < x < 2a + 2ak. \end{cases}$$

gdzie:

$a$  - połowa okresu funkcji trójkątnej. Okres funkcji trójkątnej jest równy  $2a$ .  
 $k$  - liczba całkowita, która indeksuje kolejne okresy funkcji. Odpowiada za powtarzanie się funkcji trójkątnej w każdym kolejnym okresie.

Na przedziale  $[0, 2a]$ , czyli dla  $k = 0$ , wzór ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x, & \text{dla } 0 < x < a, \\ 2 - \frac{1}{a}x, & \text{dla } a < x < 2a. \end{cases}$$

Rozważmy powyższą funkcję dla  $a = 1$ , czyli okres funkcji  $T = 2$ . Wtedy wzór możemy przedstawić jako:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{dla } 1 < x < 2. \end{cases}$$



Współczynniki Szeregu Fouriera powyższej funkcji o okresie  $T = 2$  i przedziale  $[0, 2]$  możemy obliczyć za pomocą wzorów:

$$A_0 = \int_0^2 f(x) dx,$$

$$A_n = \int_0^2 f(x) \cos(\pi n x) dx,$$

$$B_n = \int_0^2 f(x) \sin(\pi n x) dx.$$

Funkcja trójkątna jest funkcją parzystą, czyli  $B_n = 0$ .

Obliczmy  $A_0$ :

$$A_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[ 2x - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Obliczmy  $A_n$ :

$$A_n = \int_0^2 f(x) \cos(\pi n x) dx = \int_0^1 x \cos(\pi n x) dx + \int_1^2 (2-x) \cos(\pi n x) dx$$

Obliczmy pierwszą całkę, korzystając z całkowania przez części:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(\pi n x) dx &= \left[ \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos(\pi n x) \\ u' = 1 & v = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n x) \end{array} \right] = \left[ \frac{x}{\pi n} \sin(\pi n x) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \sin(\pi n x) dx = \\ &= 0 - \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{1}{\pi n} [-\cos \pi n x]_0^1 = \frac{1}{\pi^2 n^2} (\cos(\pi n) - 1) \end{aligned}$$

Obliczmy drugą całkę, korzystając z całkowania przez części:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2-x) \cos(\pi n x) dx &= \left[ \begin{array}{ll} u = 2-x & v' = \cos(\pi n x) \\ u' = -1 & v = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n x) \end{array} \right] = \left[ \frac{2-x}{\pi n} \sin(\pi n x) \right]_1^2 + \frac{1}{\pi n} \int_1^2 \sin(\pi n x) dx = \\ &= 0 + \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{1}{\pi n} [-\cos(\pi n x)]_1^2 = -\frac{1}{\pi^2 n^2} (\cos(2\pi n) - \cos(\pi n))\end{aligned}$$

Możemy teraz zapisać:

$$A_n = \frac{1}{\pi^2 n^2} (\cos(\pi n) - 1) - \frac{1}{\pi^2 n^2} (\cos(2\pi n) - \cos(\pi n)) = \frac{1}{\pi^2 n^2} [2 \cos(\pi n) - 1 - \cos(2\pi n)]$$

- Dla  $n$  parzystych :

$$A_n = 0$$

- Dla  $n$  nieparzystych:

$$A_n = \frac{-4}{\pi^2 n^2}$$

Podsumowując Szereg Fouriera dla funkcji trójkątnej możemy zapisać jako:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left( (n \cdot \text{mod} 2) \cdot \frac{-4}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) \right)$$

### 1.3.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie

```
"Funkcja trójkątna"

"Współczynnik a_0:"

1.

"Współczynniki a_n:"

      column 1 to 7
-0.4052847  1.596D-16 -0.0450316 -2.255D-17 -0.0162114 -1.249D-16 -0.0082711
      column 8 to 10
-7.242D-17 -0.0050035 -3.469D-17

"Współczynniki b_n:"

      column 1 to 7
5.551D-17  2.776D-17 -8.327D-17  0.  4.163D-17 -1.388D-17 -1.110D-16
      column 8 to 10
7.633D-17 -1.318D-16  5.551D-17
```

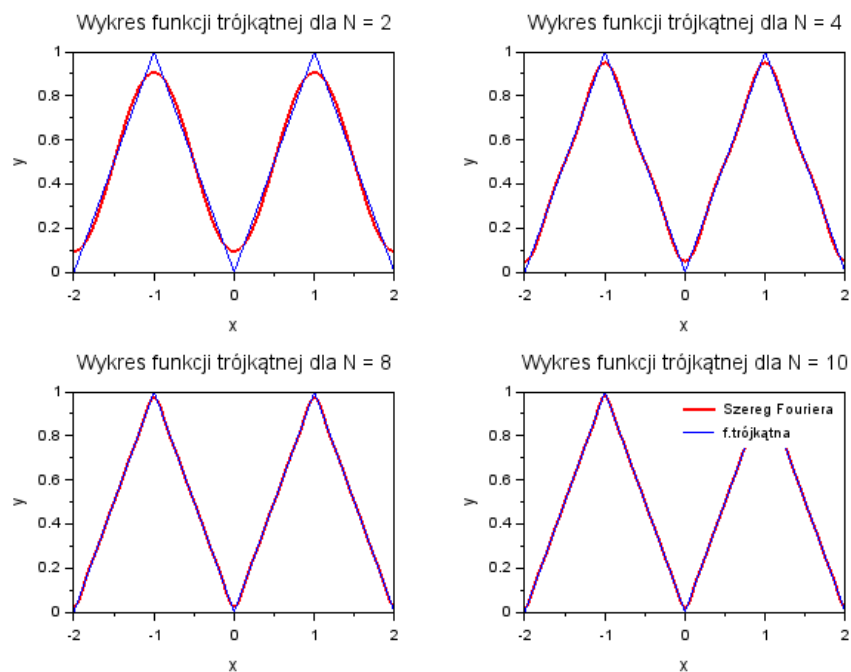
Rysunek 8: Współczynniki Szeregu Fouriera dla funkcji trójkątnej wyznaczone numerycznie w Scilabie. (Dla  $n = 10$ ).

Kod do wyznaczenia współczynników Szeregu Fouriera numerycznie dla funkcji trójkątnej :

```
1 // Funkcja trojkatna dla x nalezacych do przedzialu [0,1]
2 function y = f1(x)
3     y = x
4 endfunction
5
6 // Funkcja trojkatna dla x nalezacych do przedzialu [1,2]
7 function y = f2(x)
8     y = 2-x
9 endfunction
10
11
12 //Wspolczynnik a_0
13 a_0 = integrate('x','x', 0, 1) + integrate('(2-x)','x', 1, 2)
14
15 // Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera
16
17 //Wspolczynnik A_n
18 function a_n = fourier_a(n)
19     a_n = integrate('x * cos(n * x * %pi)','x', 0, 1) + integrate('
20         (2-x) * cos(n * x * %pi)','x', 1, 2)
21 endfunction
22
23 //Wspolczynnik B_n
24 function b_n = fourier_b(n)
25     b_n = integrate('x * sin(n * x * %pi)','x', 0, 1) + integrate('
26         (2-x) * sin(n * x * %pi)','x', 1, 2)
27 endfunction
28
29 // Zakres N
30 n = 10
31
32 // Obliczenie wspolczynnika Fouriera
33 wart_a = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci A_n
34 wart_b = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci B_n
35
36 //Obliczanie wspolczynnika Fouriera dla N wartosci
37 for i = 1:n
38     wart_a(i) = fourier_a(i) //zapisujemy wyniki do tablicy
39     wart_b(i) = fourier_b(i)
40 end
41
42 // Wyswietlenie wynikow
43 disp('Funkcja trojkatna')
44 disp('Wspolczynnik a_0:')
45 disp(a_0)
46 disp('Wspolczynniki a_n:')
47 disp(wart_a)
48 disp('Wspolczynniki b_n:')
49 disp(wart_b)
```

### 1.3.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną

Porównanie funkcji trójkątnej (niebieski) z szeregiem wyznaczonym analitycznie (czerwony):



Rysunek 9: Porównanie funkcji trójkątnej z szeregiem wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

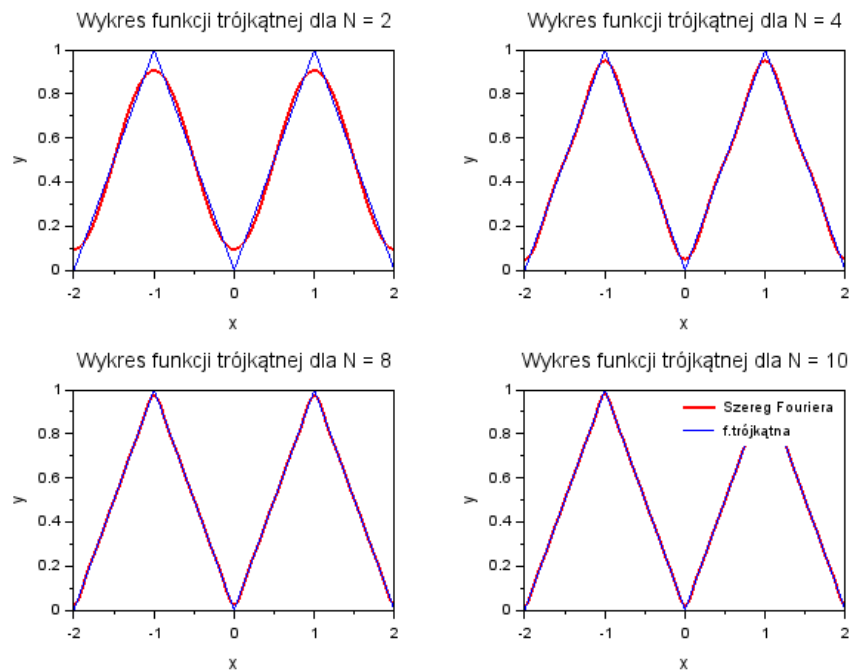
```
1 // Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze współczynnikami
  obliczonymi analitycznie
2
3 function y2 = fun2_z_anality(x, N)
4     // Stała czesc wyrazenia
5     y2 = 1/2
6
7     // Sumowanie dla n od 1 do N
8     for n = 1:N
9         // Wspolczynnik B_n
10        bn = 0
11        //Wspolczynnik A_n
12        if modulo(n, 2) == 1 then
13            // Jesli n jest nieparzyste, obliczamy wyrazenie
14            an = ((-4)/ ((%pi^2)*(n^2))) * cos(n * x * %pi)
15        else
16            // Jesli n jest parzyste, dodajemy 0 do sumy
17            an = 0
18        end
19        // Sumujemy
20        y2 = y2 + an + bn
21    end
22 end
23
24 //Funkcja trojkatna
25 function y = f(x)
26     x_t = modulo(x, 2)//przekształcamy kazda wartosc x na wartosc z
  przedzialu [0, 2)
27
28     if x_t < 0 then //przesuwa ujemne wartosci do dodatniego
  zakresu [0, 2)
29         x_t = x_t + 2
30     end
31
32     //wzor funkcji trojkatnej
33     if x_t < 1 then
34         y = x_t
35     else
36         y = 2 - x_t
37     end
38 endfunction
39
40 //Zakres x
41 x = linspace(-4, 4, 1000)
42
43 //wywołanie funkcji trojkatnej
44 for i = 1:length(x)
45     y(i) = f(x(i))
46 end
47
48
49 // Rysowanie wykresu
50
51 //dla N = 2
52 subplot(2,2,1)
```

```

54 plot(x, fun2_z_anality(x, 2), 'r', 'LineWidth',2)
55 plot(x,y)
56 xlabel('x')
57 ylabel('y')
58 title('Wykres funkcji trójkątnej dla N = 2')
59 e = gca()
60 e.data_bounds = [-2,0;2,1]
61 ...

```

Porównanie funkcji  $|\sin(x)|$  (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (czerwony):



Rysunek 10: Porównanie funkcji trójkątnej z szeregiem wyznaczonym numerycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```

1 // Współczynniki wyznaczone numerycznie
2
3 //Współczynnik a_0
4 a_0 = integrate('x','x', 0, 1) + integrate('(2-x)','x', 1, 2)
5
6
7 // Funkcje obliczające współczynniki Fouriera
8
9 //Współczynnik A_n
10 function a_n = fourier_a(n)

```

```

11     a_n = integrate('x * cos(n * x * %pi)', 'x', 0, 1) + integrate('
        (2-x) * cos(n * x * %pi)', 'x', 1, 2)
12 endfunction
13
14 //Wspolczynnik B_n
15 function b_n = fourier_b(n)
16     b_n = integrate('x * sin(n * x * %pi)', 'x', 0, 1) + integrate('
        (2-x) * sin(n * x * %pi)', 'x', 1, 2)
17 endfunction
18
19
20 // Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze wspolczynnikami
    obliczonymi analitycznie
21 function y = fun2_z_numer(x, N)
22     // Stala czesc wyrazenia
23     y = a_0/2
24
25     // Sumowanie dla n od 1 do N
26     for n = 1:N
27
28         //Wspolczynnik A_n
29         a_n = fourier_a(n)
30
31         // Wspolczynnik B_n
32         b_n = fourier_b(n)
33
34         // Sumujemy
35         y = y + a_n*(cos(n*x*%pi)) + b_n*(sin(n*x*%pi))
36     end
37 end
38
39
40 //Funkcja trojkatna
41 function y = f(x)
42     x_t = modulo(x, 2)//przekształcamy kazda wartosc x na wartosc z
        przedzialu [0, 2)
43
44     if x_t < 0 then //przesuwa ujemne wartosci do dodatniego
        zakresu [0, 2)
45         x_t = x_t + 2
46     end
47
48     //wzor funkcji trojkatnej
49     if x_t < 1 then
50         y = x_t
51     else
52         y = 2 - x_t
53     end
54 endfunction
55
56 //Zakres x
57 x = linspace(-4, 4, 1000)
58
59 //wywołanie funkcji trojkatnej
60 for i = 1:length(x)
61     y(i) = f(x(i))
62 end

```

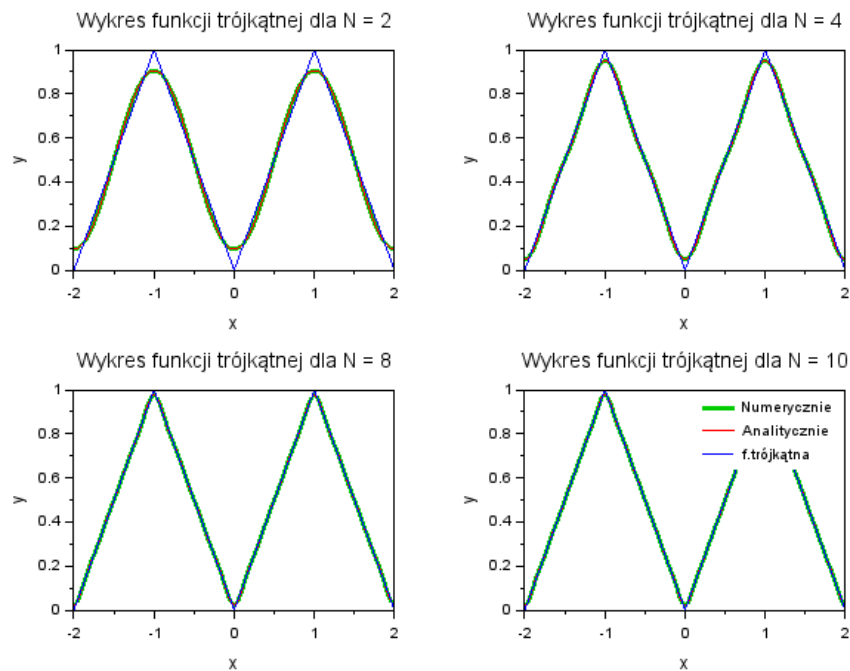


```

63
64
65 // Rysowanie wykresu
66
67 //dla N = 2
68 subplot(2,2,1)
69 plot(x, fun2_z_numer(x, 2), 'r', 'LineWidth',2)
70 plot(x,y)
71 xlabel('x')
72 ylabel('y')
73 title('Wykres funkcji trójkątnej dla N = 2')
74 e = gca()
75 e.data_bounds = [-2,0;2,1]
76 ...

```

Porównanie funkcji trójkątnej (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (zielony) i wyznaczonym analitycznie (czerwony):



Rysunek 11: Porównanie funkcji trójkątnej z szeregiem wyznaczonym numerycznie i wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```

1 // Definicje funkcji z kodu do rysunku (8 i 9)
2
3 // Rysowanie wykresu

```

```

4 dark_green = [0, 0.8, 0]
5
6
7 //dla N = 2
8 subplot(2,2,1)
9 plot(x,fun2_z_numer(x,2),'color', dark_green,'LineWidth',3)
10 plot(x, fun2_z_anality(x, 2), 'r-')
11 plot(x,y)
12 xlabel('x')
13 ylabel('y')
14 title('Wykres funkcji trojkatnej dla N = 2')
15 e = gca()
16 e.data_bounds = [-2,0;2,1]
17 ...

```

### 1.3.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE

Wyniki porównania jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną do funkcji trójkątnej za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N możemy przedstawić w tabeli:

N	Funkcja trójkątna	
	MAE	RMSE
2	0.0293549	0.0348321
4	0.0111312	0.0139228
8	0.0037336	0.0051535
10	0.0025830	0.0037181

Rysunek 12: Tabela porównująca jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną do funkcji trójkątnej za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N.

```

1 //Definicje funkcji z kodu do rysunku (8 i 9)
2
3 //MEA
4
5 disp("MAE dla funkcji trojkatnej i Szeregu Fouriera wyznaczonym
6     metoda analityczna")
7
8 //Dla N = 2
9 y_falka2 = fun2_z_anality(x, 2)
10 MAE2 = mean(abs(f(x) - y_falka2))
11
12 disp("MAE dla N=2",MAE2)

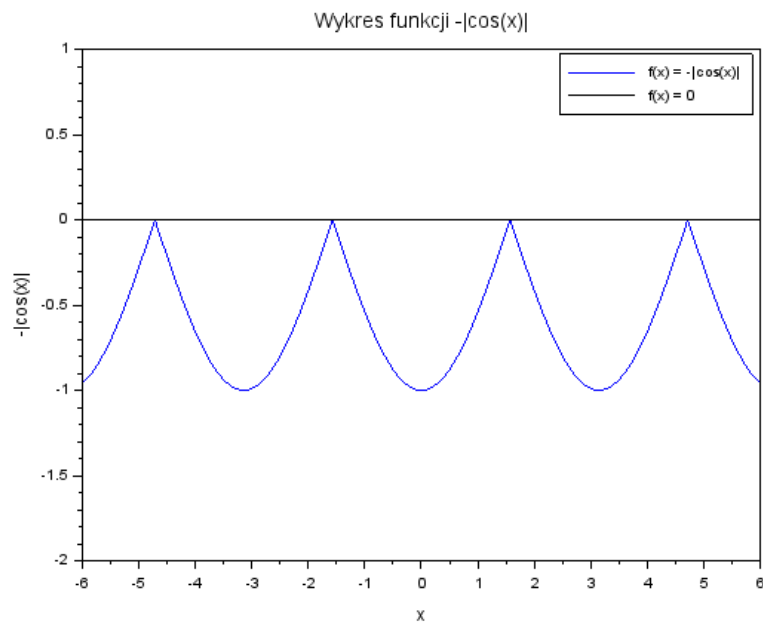
```

```

13
14 //Dla N = 4
15 y_falka4 = fun2_z_anality(x, 4)
16 MAE4= mean(abs(f(x) - y_falka4))
17 ...
18
19 /RMSE
20
21 disp("RMSE dla funkcji trojkatnej i Szeregu Fouriera wyznaczonym
      metoda analityczna")
22
23 //Dla N = 2
24 RMSE2 = sqrt(mean((f(x) - y_falka2).^2))
25 disp("RMSE dla N=2",RMSE2)
26
27 //Dla N = 4
28 RMSE4 = sqrt(mean((f(x) - y_falka4).^2))
29 disp("RMSE dla N=4",RMSE4)
30 ...

```

## 1.4 Funkcja $-\lvert\cos(x)\rvert$



Rysunek 13: Wykres funkcji  $-\lvert\cos(x)\rvert$ .

Kod do powyższego wykresu:

```
1 // Zakres x
2 x = -10:0.01:10
3
4 // Obliczenie wartosci funkcji -|cos(x)|
5 y = -abs(cos(x))
6
7 // Rysowanie wykresu
8 plot(x, y) //funkcja f(x) = -|cos(x)|
9 plot(x, t = 0, 'black') //funkcja f(x) = 0
10
11 //Opisanie wykresu
12 xlabel('x') //Os X
13 ylabel('-|cos(x)|') //Os Y
14 title('Wykres funkcji -|cos(x)|')//Tytul
15 legend('f(x) = -|cos(x)|', 'f(x) = 0')// Dodanie legendy
16
17 //Zakres osi na wykresie
18 p = gca()
19 p.data_bounds = [-6,-2;6,1]
```

### 1.4.1 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera analitycznie

Kolejną funkcją jaką będziemy rozwijać w Szereg Fouriera jest funkcja  $-|\cos(x)|$  o okresie  $T = \pi$ . Współczynniki Szeregu Fouriera funkcji o okresie  $T = \pi$  i przedziale  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  możemy obliczyć za pomocą wzorów:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx,$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2nx) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2nx) dx.$$

Funkcja  $-|\cos(x)|$  jest funkcją parzystą, czyli  $B_n = 0$ .

Obliczmy  $A_0$ :

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\frac{2}{\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) = -\frac{2}{\pi} \left( [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{4}{\pi}$$

Obliczmy  $A_n$ :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -|\cos x| \cdot \cos(2nx) dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x \cdot \cos(2nx) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos(2nx) dx \right) = -\frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x \cdot \cos(2nx) dx \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$

Otrzymujemy:

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos ((1-2n)x) + \cos ((1+2n)x) dx = -\frac{2}{\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos ((1-2n)x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos ((1+2n)x) dx \right)$$

Obliczmy pierwszą całkę, korzystając z metody podstawienia:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos ((1-2n)x) dx \left[ \begin{array}{l} t = (1-2n)x \\ dx = \frac{dt}{1-2n} \end{array} \right] = \frac{1}{1-2n} [\sin((1-2n)x)]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{1}{1-2n} \sin \left( (1-2n) \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Analogicznie obliczamy drugą całkę:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos ((1+2n)x) dx = -\frac{1}{1+2n} \sin \left( (1+2n) \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{1-2n} \sin \left( (1-2n) \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) - \frac{1}{1+2n} \sin \left( (1+2n) \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

- Dla  $n$  parzystych :

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

- Dla  $n$  nieparzystych:

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$$

Ogólnie współczynnik  $A_n$  możemy zapisać jako:

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right)$$

Podsumowując Szereg Fouriera dla funkcji  $-|\cos(x)|$  możemy zapisać jako:

$$-\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^N \left( -\frac{2}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \cos(2nx) \right)$$

#### 1.4.2 Wyznaczenie współczynników Szeregu Fouriera numerycznie w Scilabie

```
"Funkcja -|cos(x)|"

"Współczynnik a_0:"

-1.2732395

"Współczynniki a_n:"

      column 1 to 7
-0.4244132  0.0848826 -0.0363783  0.0202102 -0.012861  0.0089038 -0.0065294
      column 8 to 10
0.0049931 -0.0039419  0.0031911

"Współczynniki b_n:"

0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.
```

Rysunek 14: Współczynniki Szeregu Fouriera dla funkcji  $-|\cos(x)|$  wyznaczone numerycznie w Scilabie. (Dla  $n = 10$ ).

Kod do wyznaczenia współczynników Szeregu Fouriera numerycznie dla funkcji  $-|\cos(x)|$  :

```
1 // Funkcja -|cos(x)|
2 function y = f(x)
3     y = -abs(cos(x))
4 endfunction
5
6
7 //Współczynnik a_0
8 a_0 = (2/%pi)*integrate('-abs(cos(x))','x', -%pi/2, %pi/2)
9
```

```

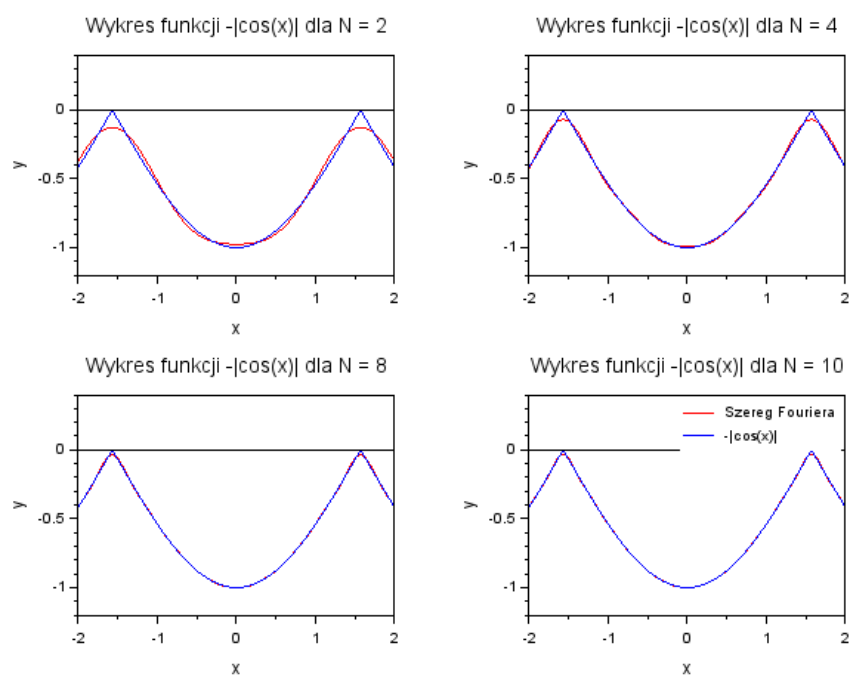
10 // Funkcje obliczajace wspolczynniki Fouriera
11
12 //Wspolczynnik A_n
13 function a_n = fourier_a(n)
14     a_n = (2/%pi)*integrate('(-abs(cos(x))) * cos(2*n*x)', 'x', -%pi
        /2, %pi/2)
15 endfunction
16
17 //Wspolczynnik B_n
18 function b_n = fourier_b(n)
19     b_n = (2/%pi)*integrate('(-abs(cos(x))) * sin(2*n*x)', 'x', -%pi
        /2, %pi/2)
20 endfunction
21
22 // Zakres N
23 n = 10
24
25 // Obliczenie wspolczynnikow Fouriera
26 wart_a = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci A_n
27 wart_b = zeros(1, n) //tablica zerowa dla wartosci B_n
28
29 //Obliczanie wspolczynnikow Fouriera dla N wartosci
30 for i = 1:n
31     wart_a(i) = fourier_a(i) //zapisujemy wyniki do tablicy
32     wart_b(i) = fourier_b(i)
33 end
34
35 // Wyświetlenie wynikow
36 disp('Funkcja -|cos(x)|')
37 disp('Wspolczynnik a_0:')
38 disp(a_0)
39 disp('Wspolczynniki a_n:')
40 disp(wart_a)
41 disp('Wspolczynniki b_n:')
42 disp(wart_b)

```

### 1.4.3 Porównanie oryginalnej funkcji z metodą analityczną i numeryczną

Porównanie funkcji  $-|\cos(x)|$  (niebieski) z szeregiem wyznaczonym analitycznie (czerwony):



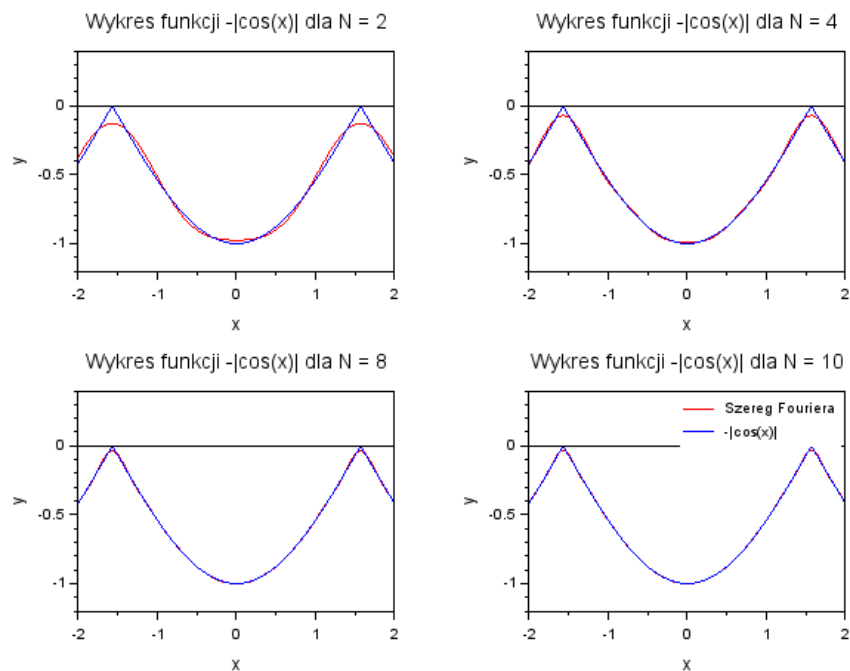


Rysunek 15: Porównanie funkcji  $-|\cos(x)|$  z szeregiem wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```
1 // Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze współczynnikami
  obliczonymi analitycznie
2 function y = fun3_z_anality(x, N)
3 // Stała czesc wyrazenia
4 y = - 2 / %pi
5
6 // Sumowanie dla n od 1 do N
7 for n = 1:N
8 // Wspolczynnik B_n
9 bn = 0
10 //Wspolczynnik A_n
11 an = - (2 / %pi) * ( (-1)^n / (2 * n + 1) + (-1)^(n - 1) /
  (2 * n - 1) )
12 // Sumujemy
13 y = y + an* cos(2 * n * x) + bn* sin(2 * n * x)
14 end
15 end
16
17 // Zakres x
18 x = linspace(-4, 4, 1000)
19
20 // Funkcja -|cos(x)|
21 a = -abs(cos(x))
22
23
24 // Rysowanie wykresu
25
26 //dla N = 2
27 subplot(2,2,1)
28 plot(x, fun3_z_anality(x, 2), 'r')
29 plot(x,a)
30 plot(x,t=0,'black')
31 xlabel('x')
32 ylabel('y')
33 title('Wykres funkcji -|cos(x)| dla N = 2')
34 e = gca()
35 e.data_bounds = [ -2 , -1.2;2 ,0.25]
36 ...
```

Porównanie funkcji  $-|\cos(x)|$  (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (czerwony):



Rysunek 16: Porównanie funkcji  $-|\cos(x)|$  z szeregiem wyznaczonym numerycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

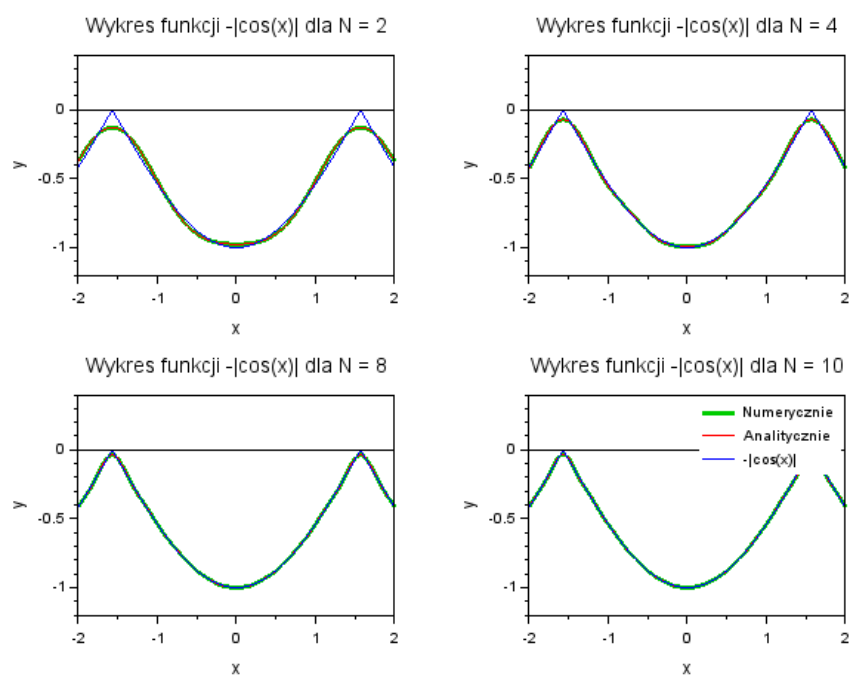
```
1 // Współczynniki wyznaczone numerycznie
2
3 //Współczynnik a_0
4 a_0 = (2/%pi)*integrate(' -abs(cos(x)) ','x', -%pi/2, %pi/2)
5
6 // Funkcje obliczające współczynniki Fouriera
7
8 //Współczynnik A_n
9 function a_n = fourier3_a(n)
10     a_n = (2/%pi)*integrate('(-abs(cos(x))) * cos(2*n*x) ','x', -%pi/2, %pi/2)
11 endfunction
12
13 //Współczynnik B_n
14 function b_n = fourier3_b(n)
15     b_n = (2/%pi)*integrate('(-abs(cos(x))) * sin(2*n*x) ','x', -%pi/2, %pi/2)
16 endfunction
17
18
19
20 // Funkcja do obliczania szeregu Fouriera ze współczynnikami
    obliczonymi numerycznie
21 function y = fun3_z_numer(x, N)
```

```

22 // Stala czesc wyrazenia
23 y = a_0/2
24
25 // Sumowanie dla n od 1 do N
26 for n = 1:N
27
28     //Wspolczynnik A_n
29     a_n = fourier3_a(n)
30
31     // Wspolczynnik B_n
32     b_n = fourier3_b(n)
33
34     // Sumujemy
35     y = y + a_n*(cos(2*n*x)) + b_n*(sin(2*n*x))
36 end
37 end
38
39 // Zakres x
40 x = linspace(-4, 4, 1000)
41
42 // Funkcja -|cos(x)|
43 a = -abs(cos(x))
44
45
46 // Rysowanie wykresu
47
48 //dla N = 2
49 subplot(2,2,1)
50 plot(x, fun3_z_numer(x, 2), 'r')
51 plot(x,a)
52 plot(x,t=0,'black')
53 xlabel('x')
54 ylabel('y')
55 title('Wykres funkcji -|cos(x)| dla N = 2')
56 e = gca()
57 e.data_bounds = [ -2 , -1.2;2 ,0.25]
58 ...

```

Porównanie funkcji  $-|\cos(x)|$  (niebieski) z szeregiem wyznaczonym numerycznie (zielony) i wyznaczonym analitycznie (czerwony):



Rysunek 17: Porównanie funkcji  $-|\cos(x)|$  z szeregiem wyznaczonym numerycznie i wyznaczonym analitycznie.

Fragment kodu do powyższego wykresu:

```

1 // Definicje funkcji z kodu do rysunku (13 i 14)
2
3 // Rysowanie wykresu
4 dark_green = [0, 0.8, 0]
5
6
7 //dla N = 2
8 subplot(2,2,1)
9 plot(x,fun3_z_numer(x,2),'color', dark_green,'LineWidth',3)
10 plot(x, fun3_z_anality(x, 2), 'r-')
11 plot(x,a)
12 plot(x,t=0,'black')
13 xlabel('x')
14 ylabel('y')
15 title('Wykres funkcji  $-|\cos(x)|$  dla N = 2')
16 e = gca()
17 e.data_bounds = [ -2 , -1.2;2 ,0.25]
18 ...

```

#### 1.4.4 Porównanie jakości dopasowania Szeregu Fouriera do funkcji za pomocą MAE i RMSE

Wyniki porównania jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną do funkcji  $-|\cos(x)|$  za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N możemy przedstawić w tabeli:

N	Funkcja $- \cos(x) $	
	MAE	RMSE
2	0.0236043	0.0300000
4	0.0087724	0.0123248
8	0.0029073	0.0047006
10	0.0020053	0.0034136

Rysunek 18: Tabela porównująca jakości dopasowania Szeregu Fouriera wyznaczonego metodą analityczną do funkcji  $-|\cos(x)|$  za pomocą MAE i RMSE dla różnych wartości N.

```

1 //Definicje funkcji z kodu do rysunku (13 i 14)
2
3 //MEA
4
5 disp("MAE dla funkcji  $-|\cos(x)|$  i Szeregu Fouriera wyznaczonym
    metoda analityczna")

```

```

6
7 //Dla N = 2
8 y_falka2 = fun3_z_anality(x, 2)
9 MAE2 = mean(abs(a - y_falka2))
10
11 disp("MAE dla N=2",MAE2)
12
13 //Dla N = 4
14 y_falka4 = fun3_z_anality(x, 4)
15 MAE4= mean(abs(a - y_falka4))
16 ...
17
18 //RMSE
19
20 disp("RMSE dla funkcji -|cos(x)| i Szeregu Fouriera wyznaczonym
      metoda analityczna")
21
22 //Dla N = 2
23 RMSE2 = sqrt(mean((a - y_falka2).^2))
24 disp("RMSE dla N=2",RMSE2)
25
26 //Dla N = 4
27 RMSE4 = sqrt(mean((a - y_falka4).^2))
28 disp("RMSE dla N=4",RMSE4)

```

## 1.5 Porównanie MAE i RMSE

- MAE

N	MAE		
	$ \sin(x) $	Funkcja trójkątna	$- \cos(x) $
2	0.0600771	0.0293549	0.0236043
4	0.0267389	0.0111312	0.0087724
8	0.0104350	0.0037336	0.0029073
10	0.0075061	0.0025830	0.0020053

Rysunek 19: Tabela przedstawiająca wartości MAE dla wszystkich funkcji.

- RMSE

N	RMSE		
	$ \sin(x) $	Funkcja trójkątna	$- \cos(x) $
2	0.0720127	0.0348321	0.0300000
4	0.0341608	0.0139228	0.0123248
8	0.0144701	0.0051535	0.0047006
10	0.0107634	0.0037181	0.0034136

Rysunek 20: Tabela przedstawiająca wartości RMSE dla wszystkich funkcji.



## 2 Transformata Fouriera

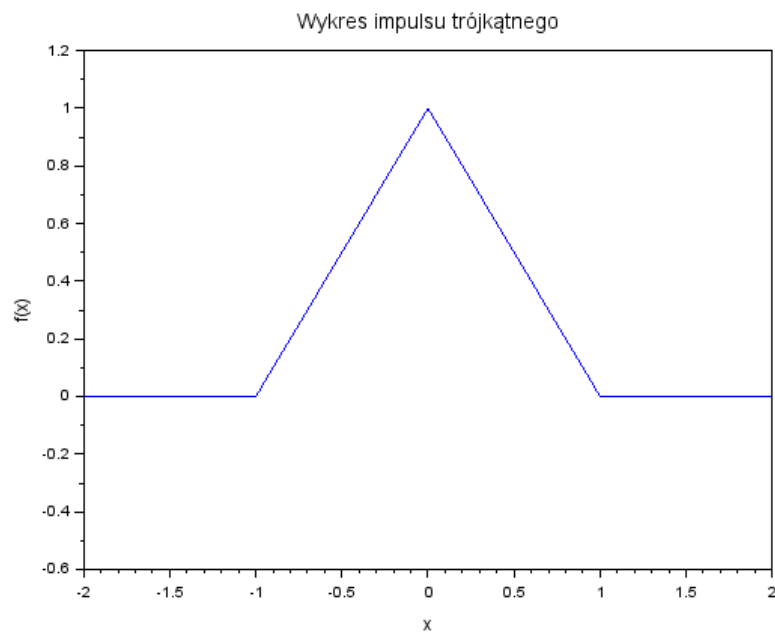
### 2.1 Teoria

Dla funkcji  $f(t)$  transformatę Fouriera określa się wzorem:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt,$$

gdzie  $i$  to jednostka urojona.

### 2.2 Impuls trójkątny



Rysunek 21: Wykres impulsu trójkątnego.

Kod do powyższego wykresu(impuls1.sci):

```
1 // Funkcja impulsu trojkatnego
2 function y = f(x)
3     y = zeros(size(x)) // Inicjalizacja wektora y
4
5     for i = 1:length(x)
```

```

6         if abs(x(i)) <= 1 then
7             y(i) = 1 - abs(x(i))
8         else
9             y(i) = 0
10        end
11    end
12 endfunction
13
14 // Zakres x
15 x = linspace(-2, 2, 1000)
16
17 //Wywołanie funckji
18 y = f(x)
19
20 // Rysowanie wykresu
21 plot(x, y, 'LineWidth', 1)
22 xlabel('x')
23 ylabel('f(x)')
24 title('Wykres impulsu trojkatego')
25
26 b = gca()
27 b.data_bounds = [-2,-0.5;2,1.2]

```

Wzór impulsu trójkątnego możemy zapisać jako:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{dla } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Obliczmy transformatę Fouriera dla impulsu trójkątnego:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{-2\pi i x \xi} dx + \int_1^{\infty} 0 dx = \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{-2\pi i x \xi} dx = \\
 &= \int_{-1}^0 (1 + x) e^{-2\pi i x \xi} dx + \int_0^1 (1 - x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-1}^0 e^{-2\pi i x \xi} dx + \int_{-1}^0 x \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx + \\
 &\quad \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} dx - \int_0^1 x \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx
 \end{aligned}$$

Obliczmy pierwszą całkę korzystając z metody podstawienia:

$$\int_{-1}^0 e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[ \begin{array}{l} -2\pi i x \xi = t \\ dx = \frac{dt}{-2\pi i \xi} \end{array} \right] = \frac{1}{-2\pi i \xi} [e^{-2\pi i x \xi}]_{-1}^0 = \frac{1}{-2\pi i \xi} (1 - e^{2\pi i \xi})$$

W taki sam sposób możemy obliczyć całkę trzecią:

$$\int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{1}{-2\pi i \xi} [e^{-2\pi i x \xi}]_0^1 = \frac{1}{-2\pi i \xi} (e^{-2\pi i \xi} - 1)$$

Teraz obliczmy całkę drugą:

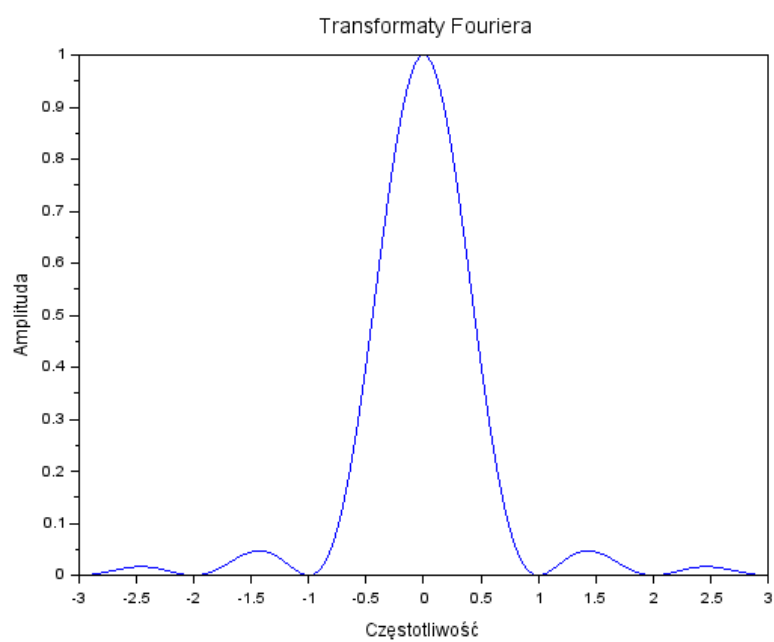
$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx &= \left[ \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-2\pi i x \xi} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{-2\pi i \xi} e^{-2\pi i x \xi} \end{array} \right] = \left[ x \cdot \frac{1}{-2\pi i \xi} e^{-2\pi i x \xi} \right]_{-1}^0 - \frac{1}{-2\pi i \xi} \int_{-1}^0 e^{-2\pi i x \xi} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i \xi} e^{2\pi i \xi} - \frac{1}{(-2\pi i \xi)^2} (1 - e^{2\pi i \xi}) \end{aligned}$$

Podobnie robimy z całką czwartą:

$$\int_0^1 x \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[ x \cdot \frac{1}{-2\pi i \xi} e^{-2\pi i x \xi} \right]_0^1 - \frac{1}{-2\pi i \xi} \int_0^1 e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{1}{-2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi} - \frac{1}{(-2\pi i \xi)^2} (e^{-2\pi i \xi} - 1)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{1}{\pi i \xi} (e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi}) + \frac{1}{(-2\pi i \xi)^2} (e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi}) = \left( \frac{1}{\pi i \xi} + \frac{1}{(-2\pi i \xi)^2} \right) (e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi})$$

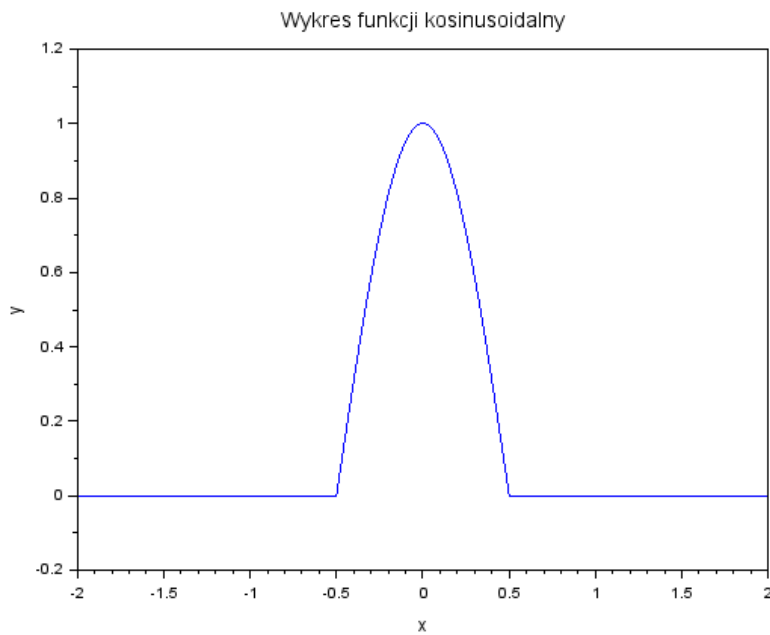


Rysunek 22: Wykres transformaty Fouriera impulsu kosinusoidalnego.

Kod do powyższego wykresu(tran1.sci):

```
1
2 // Funkcja do obliczania transformaty Fouriera
3 function Y = fourier_transform(y, t, f)
4     dt = t(2) - t(1) // Zakładamy równomierne próbkowanie
5     N = length(y) // Liczba próbek
6     Y = zeros(1, length(f));
7
8     for k = 1:length(f)
9         sum = 0
10        for n = 1:N
11            sum = sum + y(n) * exp(-%i * 2 * %pi * f(k) * t(n))
12        end
13        Y(k) = sum * dt
14    end
15 endfunction
16
17 // Zakres x
18 x = linspace(-2, 2, 1000)
19
20 // Wywołanie funkcji
21 y = f(x)
22
23 t = x // Czas
24 f = linspace(-3, 3, 1000) // Zakres częstotliwości
25
26 // Obliczenie transformaty Fouriera
27 Y = fourier_transform(y, t, f)
28
29 //Rysowanie funkcji
30 plot(f, abs(Y))
31 title('Transformata Fouriera')
32 xlabel('Częstotliwość')
33 ylabel('Amplituda')
```

## 2.3 Impuls kosinusoidalny



Rysunek 23: Wykres impulsu kosinusoidalnego.

Kod do powyższego wykresu(impuls2.sci):

```
1 //Zakres
2 t = -3:0.001:3
3
4 //Funkcja impulsu kosinusoidalnego
5 function y = f(x)
6     y = zeros(size(t))
7
8     for i = 1:length(t)
9         if abs(t(i)) > 0.5 then
10             y(i) = 0
11         else
12             y(i) = cos(%pi*t(i))
13         end
14     end
15 endfunction
16
17 //Wywołanie funkcji
18 y = f(x)
19
20 // Rysowanie wykresu
21 plot(t, y)
22 xlabel('x')
23 ylabel('y')
```

```

24 title('Wykres funkcji kosinusoidalny')
25 e = gca()
26 e.data_bounds = [-2, -0.2; 2, 1.2]

```

Wzór impulsu kosinusoidalnego możemy zapisać jako:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & \text{dla } |x| < 0.5, \\ 0, & \text{dla } |x| \geq 0.5. \end{cases}$$

Obliczmy transformatę Fouriera dla impulsu trójkątnego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{-0.5} 0 dx + \int_{-0.5}^{0.5} \cos(\pi x) e^{-2\pi i x \xi} dx + \int_{0.5}^{\infty} 0 dx = \int_{-0.5}^{0.5} \cos(\pi x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Skorzystajmy z całkowania przez części:

$$\begin{aligned} \int \cos(\pi x) e^{-2\pi i x \xi} dx &= \cos(\pi x) \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} - \int \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} (-\pi \sin(\pi x)) dx = \\ &= \cos(\pi x) \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} + \sin(\pi x) \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} - \int \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} (\pi \cos(\pi x)) dx = \\ &= \cos(\pi x) \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} + \sin(\pi x) \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} - \frac{\pi}{-2\pi i \xi} \int e^{-2\pi i x \xi} \cos(\pi x) dx \end{aligned}$$

Czyli możemy zapisać:

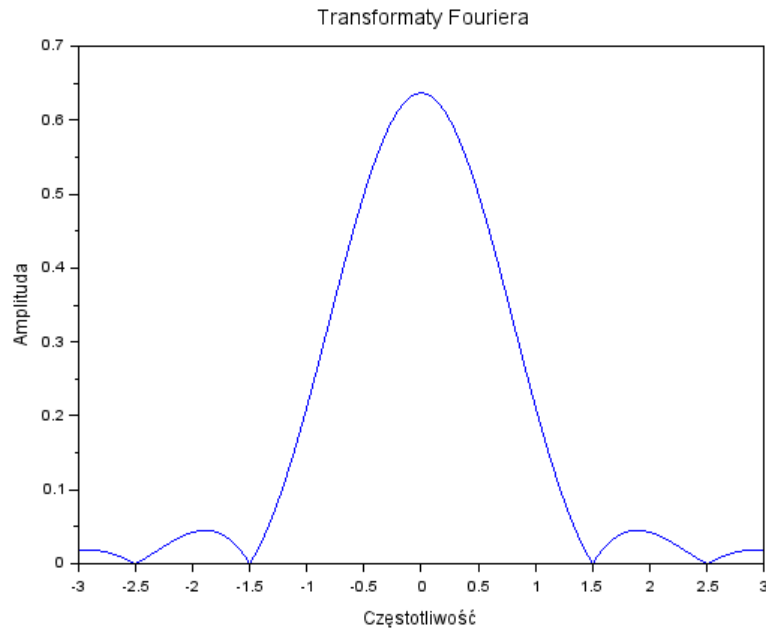
$$\int \cos(\pi x) e^{-2\pi i x \xi} dx + \frac{1}{2i\xi} \int \cos(\pi x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{\cos(\pi x) e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} + \left( \frac{\sin(\pi x) e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \right)$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\int \cos(\pi x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{e^{-2\pi i x \xi} \cos(\pi x + \frac{\pi}{2})}{-2\pi i \xi (1 + \frac{\pi}{2i})}$$

Ostatecznie mamy:

$$\frac{e^{-2\pi i 0.5 \xi} \cos(\pi 0.5 + \frac{\pi}{2})}{-2\pi i \xi (1 + \frac{\pi}{2i})} - \frac{e^{-2\pi i (-0.5) \xi} \cos(\pi (-0.5) + \frac{\pi}{2})}{-2\pi i \xi (1 + \frac{\pi}{2i})}$$



Rysunek 24: Wykres transformaty Fouriera impulsu kosinusoidalnego.

Kod do powyższego wykresu (tran2.sci):

```

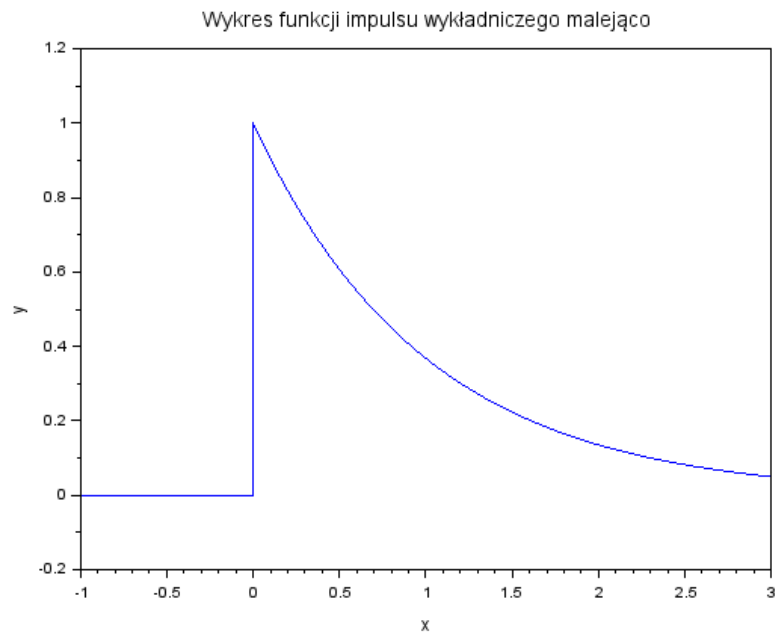
1 // Funkcja do obliczania transformaty Fouriera
2 function Y = fourier_transform(y, t, f)
3     dt = t(2) - t(1) // Zakładamy równomierne probkowanie
4     N = length(y) // Liczba probek
5     Y = zeros(1, length(f))
6
7     for k = 1:length(f)
8         sum = 0;
9         for n = 1:N
10            sum = sum + y(n) * exp(-%i * 2 * %pi * f(k) * t(n))
11        end
12        Y(k) = sum * dt
13    end
14 endfunction
15
16 // Zakres x
17 x = linspace(-2, 2, 1000)
18
19 // Wywołanie funkcji
20 y = f(x)
21
22
23 t = x // Czas
24 f = linspace(-3, 3, 1000); // Zakres czestotliwosci
25
26 // Obliczenie transformaty Fouriera
27 Y = fourier_transform(y, t, f)

```



```
28
29 //Rysowanie funkcji
30 plot(f, abs(Y))
31 title('Transformaty Fouriera')
32 xlabel('Czestotliwosc')
33 ylabel('Amplituda')
```

## 2.4 Impuls wykładniczy malejąco



Rysunek 25: Wykres impulsu wykładniczego malejąco.

Kod do powyższego wykresu (impuls3.sci):

```
1 //Zakres
2 x = -3:0.001:3
3
4 //Funkcja wykładniczo malejąca
5 function y = f(x)
6     y = zeros(size(x))
7
8     for i = 1:length(x)
9         if x(i) < 0 then
10             y(i) = 0
11         else
12             y(i) = exp(-x(i))
13         end
14     end
15 endfunction
16
17 //Wywołanie
18 y = f(x)
19
20 // Rysowanie wykresu
21 plot(t, y)
22 xlabel('x')
```

```

23 ylabel('y')
24 title('Wykres funkcji impulsu wykładniczego malejąco ')
25 e = gca()
26 e.data_bounds = [-1,-0.2;3,1.2]

```

Wzór impulsu wykładniczego malejąco możemy zapisać jako:

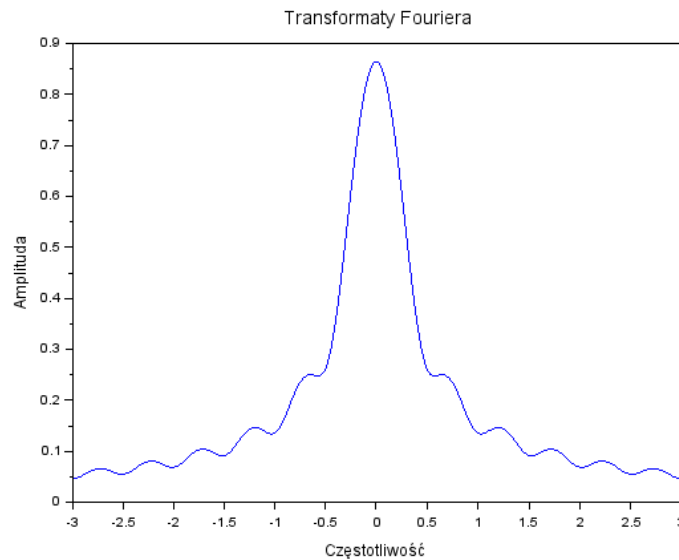
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{dla } x \geq 0, \\ 0, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Obliczmy transformatę Fouriera dla impulsu wykładniczego malejąco:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_0^{\infty} e^{-(1+2\pi i \xi)x} dx$$

Skorzystamy teraz z metody podstawienia:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{1}{-(1+2\pi i \xi)} \left[ e^{-(1+2\pi i \xi)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{-(1+2\pi i \xi)}$$

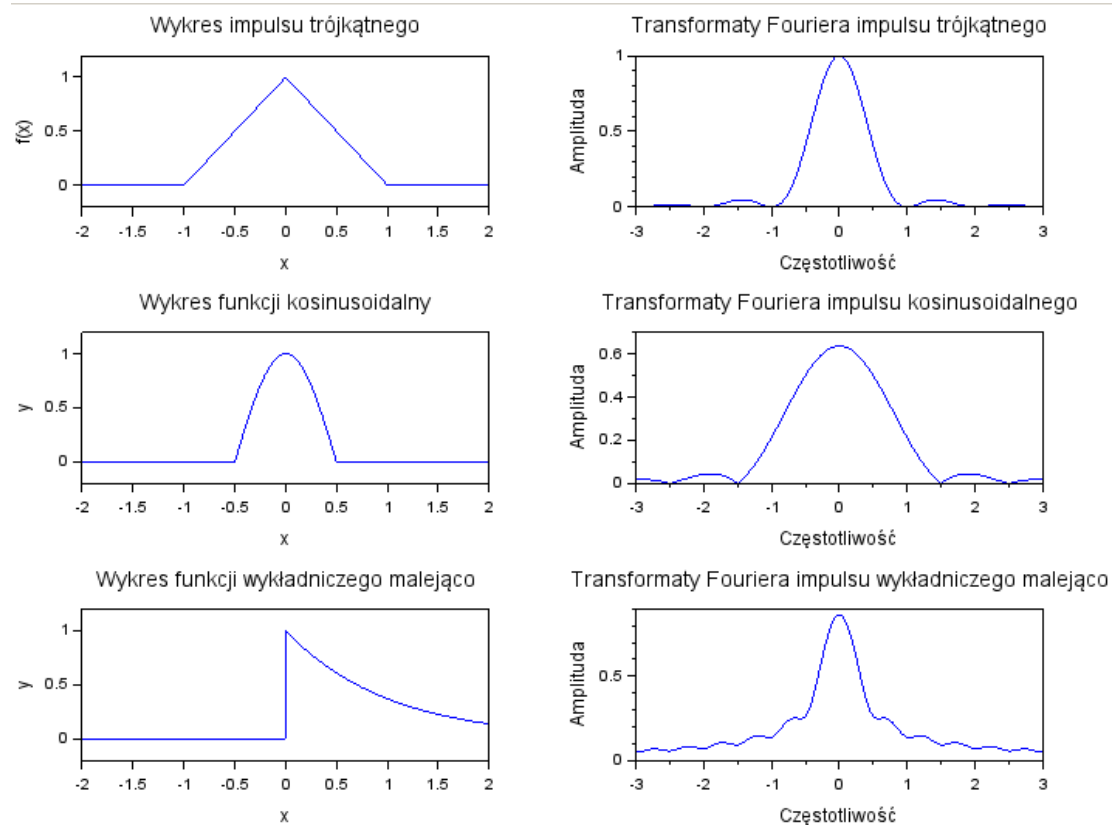


Rysunek 26: Wykres transformaty Fouriera impulsu wykładniczego malejąco.

Kod od powyższego wykresu. (tran3.sci)

```
1 // Funkcja do obliczania transformaty Fouriera
2 function Y = fourier_transform(y, t, f)
3     dt = t(2) - t(1) // Zakładamy równomierne probkowanie
4     N = length(y) // Liczba probek
5     Y = zeros(1, length(f))
6
7     for k = 1:length(f)
8         sum = 0
9         for n = 1:N
10             sum = sum + y(n) * exp(-%i * 2 * %pi * f(k) * t(n))
11         end
12         Y(k) = sum * dt
13     end
14 endfunction
15
16 // Zakres x
17 x = linspace(-2, 2, 1000)
18
19 // Wywołanie funkcji
20 y = f(x)
21
22
23 t = x // Czas
24 f = linspace(-3, 3, 1000) // Zakres czestotliwosci
25
26 // Obliczenie transformaty Fouriera
27 Y = fourier_transform(y, t, f)
28
29 //Rysowanie funkcji
30 plot(f, abs(Y))
31 title('Transformaty Fouriera')
32 xlabel('Czestotliwosc')
33 ylabel('Amplituda')
```

### 2.4.1 Porównanie impulsu z jej transformatą Fouriera



Rysunek 27: Wykres porównujący impulsy z ich transformatami Fouriera(im.tral.sci).